国外电子与通信教材系列

电路（第六版）

Electric Circuits, Sixth Edition

［美］ James W. Nilsson
Susan A. Riedel 著

冼立勤 周玉坤 李莉 等译

路而红 审校





電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

www.phei.com.cn

电 路（第六版）

Electric Circuits, Sixth Edition

本书系统地讲述了电路中的基本概念、基本理论、基本分析和计算方法。全书共分 18 章。主要内容有电路基本元件，简单电阻电路分析，电路常见分析法，运算放大器基本应用电路，一阶和二阶电路的分析，正弦稳态分析及其功率计算，平衡三相电路，拉普拉斯变换及其应用，选频电路，有源滤波器，傅里叶级数及傅里叶变换和双端口网络等。书中包含丰富的例题、详尽的图表资料，且内容新，讲解透彻，是一本电路分析的优秀教材。

作者简介

James W. Nilsson：在依阿华州立大学执教 39 年。退休之后，一直担任 San Luis Obispo 加州理工大学和美国空军学院的客座教授。1962 年，他与 R. G. Brown 合作出版了“Introduction to Linear Systems Analysis”一书。1968 年，他又撰写了“Introduction to Circuits, Instruments and Electronics”一书。Nilsson 教授于 1992 年获得了 IEEE Undergraduate Teaching 奖，于 1995 年获得了 McGraw-Hill Jacob Millman 奖。1990 年他被选为 IEEE 会士。

Susan A. Riedel：1981 年以来一直在 Marquette 大学电气和计算机工程系任教。她还担任 Strathclyde 大学生物工程系的客座教授，在 1989 到 1990 学年获得了 Fulbright Scholar 称号。在 Marquette 大学曾两次获得过优秀教学奖。











责任编辑：王春宁
陶淑毅
封面设计：毛惠庚

ISBN 7-5053-7636-5/TN · 1597　定价：69.00 元

国外电子与通信教材系列

电　　路

（第六版）

Electric Circuits

Sixth Edition

［美］James W. Nilsson　Susan A. Riedel　著

冼立勤　周玉坤　李　莉　等译

路而红　审校

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内容简介

本书系统地讲述了电路中的基本概念、基本理论、基本分析和计算方法。全书共分18章。主要内容有电路基本元件、简单电阻电路分析、电路常见分析法、运算放大器基本应用电路、一阶和二阶电路的分析、正弦稳态分析及其功率计算、平衡三相电路、拉普拉斯变换及其应用、选频电路、有源滤波器、傅里叶级数及傅里叶变换和双端口网络等。书中包含丰富的例题、详尽的图表资料，且内容新，讲解透彻，是一本电路分析的优秀教材。

本书是电气、电子、计算机与自动化等本科专业电路课程的教材，也可供相关学科的科技人员自学或参考。

版权贸易合同登记号：图字：01-2001-5092

图书在版编目（CIP）数据

电路（第六版）/（美）尼尔森（Nilsson, J.W.）著；冼立勤等译. -北京：电子工业出版社，2002.6
（国外电子与通信教材系列）
书名原文：Electric Circuits, Sixth Edition
ISBN 7-5053-7636-5

Ⅰ.电… Ⅱ.①尼… ②冼… Ⅲ.电路理论 Ⅳ.TM13

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第041242号

责任编辑：王春宁　陶淑毅
印 刷 者：北京兴华印刷厂
出版发行：电子工业出版社　http://www.phei.com.cn
北京市海淀区万寿路173信箱　邮编：100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1092　1/16　　印张：51.5　字数：1318.4千字
版　　次：2002年6月第1版　　2002年6月第1次印刷
定　　价：69.00元

序

2001年7月间，电子工业出版社的领导同志邀请各高校十几位通信领域方面的老师，商量引进国外教材问题。与会同志对出版社提出的计划十分赞同，大家认为，这对我国通信事业、特别是对高等院校通信学科的教学工作会很有好处。

教材建设是高校教学建设的主要内容之一。编写、出版一本好的教材，意味着开设了一门好的课程，甚至可能预示着一个崭新学科的诞生。20世纪40年代MIT林肯实验室出版的一套28本雷达丛书，对近代电子学科、特别是对雷达技术的推动作用，就是一个很好的例子。

我国领导部门对教材建设一直非常重视。20世纪80年代，在原教委教材编审委员会的领导下，汇集了高等院校几百位富有教学经验的专家，编写、出版了一大批教材；很多院校还根据学校的特点和需要，陆续编写了大量的讲义和参考书。这些教材对高校的教学工作发挥了极好的作用。近年来，随着教学改革不断深入和科学技术的飞速进步，有的教材内容已比较陈旧、落后，难以适应教学的要求，特别是在电子学和通信技术发展神速、可以讲是日新月异的今天，如何适应这种情况，更是一个必须认真考虑的问题。解决这个问题，除了依靠高校的老师和专家撰写新的符合要求的教科书外，引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，是会有好处的。

一年多来，电子工业出版社为此做了很多工作。他们成立了一个“国外电子与通信教材系列”项目组，选派了富有经验的业务骨干负责有关工作，收集了230余种通信教材和参考书的详细资料，调来了100余种原版教材样书，依靠由20余位专家组成的出版委员会，从中精选了40多种，内容丰富，覆盖了电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等方面，既可作为通信专业本科生和研究生的教学用书，也可作为有关专业人员的参考材料。此外，这批教材，有的翻译为中文，还有部分教材直接影印出版，以供教师用英语直接授课。希望这些教材的引进和出版对高校通信教学和教材改革能起一定作用。

在这里，我还要感谢参加工作的各位教授、专家、老师与参加翻译、编辑和出版的同志们。各位专家认真负责、严谨细致、不辞辛劳、不怕琐碎和精益求精的态度，充分体现了中国教育工作者和出版工作者的良好美德。

随着我国经济建设的发展和科学技术的不断进步，对高校教学工作会不断提出新的要求和希望。我想，无论如何，要做好引进国外教材的工作，一定要联系我国的实际。教材和学术专著不同，既要注意科学性、学术性，也要重视可读性，要深入浅出，便于读者自学；引进的教材要适应高校教学改革的需要，针对目前一些教材内容较为陈旧的问题，有目的地引进一些先进的和正在发展中的交叉学科的参考书；要与国内出版的教材相配套，安排好出版英文原版教材和翻译教材的比例。我们努力使这套教材能尽量满足上述要求，希望它们能放在学生们的课桌上，发挥一定的作用。

最后，预祝“国外电子与通信教材系列”项目取得成功，为我国电子与通信教学和通信产业的发展培土施肥。也恳切希望读者能对这些书籍的不足之处、特别是翻译中存在的问题，提出意见和建议，以便再版时更正。

吴佑寿

中国工程院院士、清华大学教授

“国外电子与通信教材系列”出版委员会主任

出版说明

进入21世纪以来，我国信息产业在生产和科研方面都大大加快了发展速度，并已成为国民经济发展的支柱产业之一。但是，与世界上其他信息产业发达的国家相比，我国在技术开发、教育培训等方面都还存在着较大的差距。特别是在加入WTO后的今天，我国信息产业面临着国外竞争对手的严峻挑战。

作为我国信息产业的专业科技出版社，我们始终关注着全球电子信息技术的发展方向，始终把引进国外优秀电子与通信信息技术教材和专业书籍放在我们工作的重要位置上。在2000年至2001年间，我社先后从世界著名出版公司引进出版了40余种教材，形成了一套"国外计算机科学教材系列"，在全国高校以及科研部门中受到了欢迎和好评，得到了计算机领域的广大教师与科研工作者的充分肯定。

引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，将有助于我国信息产业培养具有国际竞争能力的技术人才，也将有助于我国国内在电子与通信教学工作中掌握和跟踪国际发展水平。根据国内信息产业的现状、教育部《关于"十五"期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的指示精神以及高等院校老师们反映的各种意见，我们决定引进"国外电子与通信教材系列"，并随后开展了大量准备工作。此次引进的国外电子与通信教材均来自国际著名出版商，其中影印教材约占一半。教材内容涉及的学科方向包括电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等，其中既有本科专业课程教材，也有研究生课程教材，以适应不同院系、不同专业、不同层次的师生对教材的需求，广大师生可自由选择和自由组合使用。我们还将与国外出版商一起，陆续推出一些教材的教学支持资料，为授课教师提供帮助。

此外，"国外电子与通信教材系列"的引进和出版工作得到了教育部高等教育司的大力支持和帮助，其中的部分引进教材已通过"教育部高等学校电子信息科学与工程类专业教学指导委员会"的审核，并得到教育部高等教育司的批准，纳入了"教育部高等教育司推荐——国外优秀信息科学与技术系列教学用书"。

为做好该系列教材的翻译工作，我们聘请了清华大学、北京大学、北京邮电大学、东南大学、西安交通大学、天津大学、西安电子科技大学、电子科技大学等著名高校的教授和骨干教师参与教材的翻译和审校工作。许多教授在国内电子与通信专业领域享有较高的声望，具有丰富的教学经验，他们的渊博学识从根本上保证了教材的翻译质量和专业学术方面的严格与准确。我们在此对他们的辛勤工作与贡献表示衷心的感谢。此外，对于编辑的选择，我们达到了专业对口；对于从英文原书中发现的错误，我们通过与作者联络、从网上下载勘误表等方式，逐一进行了修订；同时，我们对审校、排版、印制质量进行了严格把关。

今后，我们将进一步加强同各高校教师的密切关系，努力引进更多的国外优秀教材和教学参考书，为我国电子与通信教材达到世界先进水平而努力。由于我们对国内外电子与通信教育的发展仍存在一些认识上的不足，在选题、翻译、出版等方面的工作中还有许多需要改进的地方，恳请广大师生和读者提出批评及建议。

电子工业出版社

教材出版委员会

译　者　序

电路是研究电路理论的基础课程。它的任务是通过本课程的学习使学生掌握电路的基本概念、基本理论和电路分析的基本方法，为学习后续课程提供必要的基础理论知识，为进一步研究电路理论打好基础。

James W. Nilsson 教授和 Susan A. Riedel 教授在大学从教几十年，荣获过多种奖励和荣誉。由两位资深教授合著的本书是美国大学本科的一本优秀教材，经过不断地改版和修订，第六版教材不仅对原有教材的部分内容进行了更加合理的调整，而且延续了原有教材的优秀之处，更加注重对学生电路基础概念的理解、解题技能的训练以及工程实践基础的培养。教材反映了最新技术与教学趋势，给面向 21 世纪的学生提供了电路分析方面的基础知识。

全书共分 18 章，内容涉及电路分析的方方面面，系统性很强。有电路基本元件，包括电阻、电感、电容和变压器等；简单电阻电路分析；电路常见分析法；运算放大器基本应用电路；一阶电路的响应；二阶电路的响应；正弦稳态分析及其功率计算；平衡三相电路；拉普拉斯变换及其在电路分析中的应用；选频电路；有源滤波器；傅里叶级数及傅里叶变换、双口网络等。书中的附录部分，包括线性联立方程组的求解、复数的介绍、耦合电感和理想变压器、分贝的概念、三角恒等式简表和积分简表等。可供我国大专院校电气、电子、计算机与自动化专业的电路课程的教师和学生作教材或教学参考书，也可供相关学科的科技人员自学或参考。

本书的特点是叙述由浅入深、由简到繁，且内容丰富、联系实际、论证严谨、系统性也很强。该书密切结合实际电路，有 12 章是以实例提出的问题开始，以实例问题的解决作为一章的结束。这些实例的选材非常有特色，选材包括用电安全问题、汽车后窗玻璃除霜器、实际电阻电路、张力计量器、组合开关、照相机的闪光灯电路、汽车点火电路、常见供电系统、加热器、电力的传输与分配、按键电话电路和低音音量控制电路等，教材从实际问题基本原理的分析开始一章的学习，接着讲述电路基础理论，最后以建立实际问题的电路模型、分析设计这些电路结束，同时在习题中再次加强对这些实际应用电路的分析与设计。我们相信，学生看到这些实际当中碰到的问题，一定会有兴趣学习电路理论，解决这些实际的电路问题。书中的每一章结束时都对讨论的主要问题及其结论给予总结，书中附有 1 000 多道习题，除常规习题以外，还增加了 PSpice 和 MATLAB 的习题，体现了先进计算工具在电路分析课程中的应用。书中对每一道例题都有详细的解题步骤和图解说明，既方便了学生的学习，也方便了教师的教学。

本书由北京电子科技学院电子信息工程系的冼立勤(第 1 章 ~ 第 7 章)、周玉坤(第 12 章 ~ 第 15 章、第 18 章和附录)、李莉(第 8 章 ~ 第 11 章)、宿淑春(第 16 章 ~ 第 17 章)翻译，全书由路而红审校和统稿。薛荣华教授对本书的翻译给予了许多指导和帮助，在此表示衷心的感谢。参加本书译录校工作并给予帮助的还有任斌、欧向波、洛乐、雍沁、刘芸、唐伟、李成友、黄长林、益西多吉、莫鹏、孙建京、周杰、邓峰、路畅、张玲、赵锋、刘海洋等同志，电子工业出版社的编辑为本书的出版做了大量艰苦细致的工作，译者谨向所有为本书的出版提供帮助的同志表示由衷的谢意。由于译者水平有限，译文中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

前　　言

《电路(第六版)》对过去15年中广泛使用的电路教材进行了补充和修订。但是,最为重要的、长期形成的教学方法及其理论是不会改变的。本书的目标是:

- 通过一个阶段的学习,建立起对概念和思想的充分理解。由于每个新概念都建立在许多其他概念的基础之上,因此学习工程类的电路分析对学生们的挑战是巨大的。在本书中,我们更多地注意帮助学生掌握这些新概念和思想,并充分理解这些新概念和思想以及如何与以前学过的内容相互融合。
- 强调概念理解和解题方法之间的关系。培养学生的解题技能是这门课程面对的重要挑战。为了强调这种挑战,本书将通过实例和简单的作业,给出解题方法,同时为学生提供实践的机会。我们不希望把主要精力放在教会学生一些程序化的解题模式上,相反,我们强调要经过思维过程、运用对概念的理解、通过习题训练以达到解决实际问题的目的。基于这种想法,我们从教材的编写和实际应用中总结出的实例两个方面,不断强调根据概念解决问题的过程,而不是使用那些一成不变的程序化的模式。我们认为,应该鼓励学生在解题之前,针对习题展开思考,因此,我们经常会停下来,通过某个具体问题的解题过程,展开对更为广泛的问题的讨论。
- 为学生打下工程实践方面的坚实基础。在大学二年级的电路分析课程中,能够为学生提供的真正的工程实践的机会十分有限。但是,我们仍然重视对学生工程实际能力的培养,通过积极的努力,力争提供一些具有真实性和运用实际物理条件的习题和作业。我们收集了很多应用类型的练习题和习题,激发学生对工程实践的兴趣。这里的很多习题要想做出来,都需要有工程师应该具备的某种内在素质。

第六版有哪些新内容

我们曾经提到过,每次对《电路》的修订都是一次对本书改进的机会。很多改进的内容和建议都是我们的同事和学生们提出来的。第六版的《电路》继续按照20世纪90年代以来学生们的学习风格,采纳学生们给教学提出的各种建议。我们更加看重并鼓励学生们使用他们遇到的、也许是很新奇的电路实例,同时在教科书中我们更加明确地指导学生使用计算机工具来辅助电路课程的学习,例如使用PSpice和MATLAB等工具。这方面的变化主要有:

内容和组织结构的变化

第六版中最重要的变化是删除了有关互感线圈的一个独立章节,其中的有些内容被放到其他章节里。我们把互感线圈的时域方程作为独立电感时域方程的一种简单扩展,以便揭开互感线圈的神秘色彩。互感的应用(也就是线性和理想变压器)在相量技术出现后有些过时。本书的修改主要归纳如下:

- 有关互感线圈的介绍，包括时域方程和点的约定等内容，都已经从第 6 章中删掉，现在第 6 章改名为“电感、电容和互感”。
- 有关实际互感的内容已经从第 8 章中删掉，二阶电路的固有响应和阶跃响应中仍然包括这些内容，还可以继续使用。
- 应用相量法以后，我们将线性变压器和理想变压器的内容加到第 9 章，变压器的习题也在第 9 章，但是，针对电力变压器的习题在第 10 章。
- 第五版的第 13 章到第 19 章在第六版中被重新编号为第 12 章到第 18 章。
- 对第 15 章有源低通和高通滤波器的设计、有源带通滤波器和带阻滤波器的内容进行了修改和扩充。
- 关于耦合电感和理想变压器的 T 型 和 π 型等效电路的内容收录到附录 C 中，因为这些内容只在某些等效电路中才会涉及到。第五版附录 C 中有关电路拓扑学的内容已经删掉。

实例

第五版的《电路》介绍了 6 个实际问题，提供了真实电路的实例，这些实例都取自于真实的设备，例如电话、吹风机和汽车等。教材第六版中的实例增加了一倍，增加了第 4,5,7,8,9,15 章的实例。目前，共有 12 章的内容都是以简要描述实例为开始，在本章内容介绍完毕，接着是本章的小结，最后是本章实例应用的定量分析。有些与实例相关的习题同时被收进本章习题中，使用图标“◆”表示。有关实例习题的内容是用来激发学生对电路分析应用的兴趣，以便能够设计出十分有用的电路和设备来，并且能够考虑到一些更加复杂的电路。下表介绍了到哪里查找各章的实例具体说明、实例的定量分析和每个实例相关的课外作业习题。

说明	定量分析	有关课外作业习题
用电安全 第 2 章，P.19	P.39 ~ 40	P.47 ~ 48
后窗玻璃除霜器 第 3 章，P.49	P.65 ~ 69	P.82
实际电阻电路 第 4 章，P.83	P.124 ~ 127	P.146
张力计量器 第 5 章，P.147	P.164 ~ 165	P.176 ~ 177
组合开关 第 6 章，P.178	P.202 ~ 205	P.215 ~ 217
闪光灯电路 第 7 章，P.218	P.253 ~ 255	P.281
点火电路 第 8 章，P.283	P.311 ~ 314	P.323 ~ 324
常见供电系统 第 9 章，P.325	P.366 ~ 367	P.382 ~ 383
加热器 第 10 章，P.384	P.409 ~ 411	P.426
电力的传输与分配 第 11 章，P.427	P.450 ~ 452	P.461
按键电话电路 第 14 章，P.557	P.606 ~ 608	P.610 ~ 615
低音音量控制 第 15 章，P.616	P.650 ~ 653	P.663 ~ 664

计算机工具的集成

计算机工具不能替代学习电路使用的传统方法，然而计算机工具对学生学习过程的理解有帮助，它们可以形象展示电路性能、证明计算方案、减少复杂电路的计算量、使用参数变量实现理想的解决方法等。计算机工具的支持作用在设计过程中常常是无法估量的。

在第六版我们引进了两种常用的计算机工具：PSpice 和 MATLAB，同时在教科书中使用图标标识章节中的相关习题，以便能够分辨适合使用哪种工具解题。图标 P 表示习题可以使用 PSpice，图标 M 表示习题可以使用 MATLAB。此外，教师还可以得到这些针对 PSpice 和 MATLAB 习题的仿真文件。

设计重点

我们将继续支持并强调使用几种方式设计电路。首先，新的实例问题的讨论主要集中在电路设计方面，附加的本章习题继续讨论这些实例中的设计问题。其次，针对本章习题的设计使用图标"◇"明确标识，可以帮助学生和教师了解这些习题的重点。第三，适合使用 PSpice 和 MATLAB 分析的习题提供了使用一种或两种计算机工具设计电路的机会。

教材设计和教学特性

第六版坚持了第五版中推出的成功设计，主要包括以下方面：

- 实例的介绍，含在 12 章中，位于每章的开始部分。
- 实例的应用举例，位于各章的结尾部分。
- 实例的相关习题，在每章的习题部分，均标有图标"◆"，方便参考。
- 设计习题在每章习题部分，使用图标"◇"表示，方便参考。
- PSpice 习题在每章习题部分，使用 P 表示，方便参考。
- MATLAB 习题在每章习题部分，使用 M 表示，方便参考。

例题、练习题和课外作业习题

可求出数字解答的例题

可求出数字解答的例题在整个教科书中被广泛使用，帮助学生理解理论如何应用在电路分析中。因为许多学生评价例题的作用高于教科书的任何其他内容，所以这些例题提供了一个十分重要的机会，影响学生们的解题习惯。本书中例题的性质和格式可以说就是整个教科书教学方法的充分体现。我们在提出一种解法的时候，总要特别强调它在解题中的重要作用，正如前面提到的，要把解题的过程作为一种对概念理解的思维过程。我们之所以强调这种思想(甚至在解简单习题时)，是希望与学生沟通，让这种解题方法帮助学生处理今后遇到的更为复杂的习题。这些例题的特点是：

- 鼓励学生在找出解决方案之前研究习题或电路，进行初步观察。
- 强调把独立阶段的解决方案作为系统解决习题的一个部分，不建议使用机械的解题程序。

- 探索决策方案，这就是说，我们经常会遇到需要从多种不同的解决方法中做出选择的情况。
- 建议学生对结果提出疑问，强调重视检查和测试，根据学生学到的电路理论和实际经验求得答案。

练习题

教材中的练习题是为了让学生有机会检验对刚学过的内容的理解，以便提醒学生，在开始学习下一节之前，停下来做一些练习。大约半数以上的练习题是新的或经过修改的。

课外作业习题

《电路》的读者高度评价课外作业习题，这是本书最吸引人的特点之一。在第六版中，大约收集了 1 000 道习题。这些习题是围绕着下列目标设计的（括号内是《教师手册》中可以找到的习题相应的类目，同时还有图解习题编号）：

- 让学生使用教科书中讲授的分析技术进行练习（练习；参阅习题 4.7）
- 向学生说明分析技术是工具，而不是目标（分析工具；参阅习题 4.2）
- 让学生选择分析方法，获得解决方案的训练（开放方法；参阅习题 4.49）
- 向学生说明一种解法的结果可以被用做查找其他电路运行的信息（其他信息；参阅习题 4.76）
- 鼓励学生挑战解决方法，使用其他方法，或者测试这些解决方法，看是否符合所学的电路特性（解决方法检查；参阅习题 4.52）
- 建议学生进行面向问题的设计（解决方法；参阅习题 10.66）
- 让学生进行实践，推导和创建公式，重点集中在电路变量的函数推导上，这些电路变量有 R, L, C, ω 等。这种类型的习题也是一种设计过程（推导；参阅习题 9.27）
- 通过习题让学生得到锻炼，激发他们在电学方面和计算机工程方面的兴趣（实践；参阅习题 3.68）

预备知识

在撰写教科书的前 12 章过程中，我们假定读者已经通过了基本微积分课程的学习。我们还假定读者已经学习了高中或大学的物理学概论课程，了解了能源、动力、电荷、电流、电位和电磁场等内容。在撰写最后 6 章中，我们假定学生已经学习了微分方程方面的基础课程。

课程选择

本教科书设计作为一学期、两学期或三季度课程使用。

- 一学期课程：在完成第 1 ~ 4 章和第 6 ~ 10 章（省略 7.7 和 8.5 节）之后，教师可以从第 5 章（运算放大器）、第 11 章（三相电路）、第 13、14 章（拉普拉斯法）和第 18 章（双口电路）中选择，进行重点教学。
- 两学期顺序：假定每周三讲，第一学期可以完成前 9 章的内容，第二学期学习剩下的第

10 ~ 18 章。

- 教学季度计划:本书可以分成三部分:第 1 ~ 6 章、第 7 ~ 12 章和第 13 ~ 18 章。

有关运算放大器电路的介绍可以省略,不会影响读者继续后面内容的学习。例如,如果第 5 章省略了,教师可以直接跳过 7.7 节、8.5 节、第 15 章和第 5 章后面有关运算放大器方面的习题和练习题。

本书后面的附录可以帮助读者更有效地运用他们的数学基础知识。附录 A 可以复习线性联立方程组的求解和简单矩阵代数的克莱姆法则。附录 B 中复习了复数。附录 C 中包含了互耦线圈和理想变压器的内容。附录 D 包含有关分贝的简单讨论。附录 E 为电路分析中使用的三角恒等式简表。附录 F 收录了积分简表。

增补

我们努力编写了本书的增补部分,目的是提高和扩大第六版的影响。学生和教授们随时都面临着挑战,由于有限的课堂时间和精力等方面的原因,更重要的是新的信息和技术对电路课程的渗透。通过这个增补,我们相信我们能够成功且更有效地面对这些挑战。

PSpice 在电路中的应用

这部分的增补内容单独成册出版,以促进计算机的使用。从第五版以来,PSpice 一书已经进行了广泛的修订,最重要的是删除了原有 Spice“编程语言”的内容。现在,电路被描述为 PSpice,可以用电路图进行求解,开发这种图解的技术被收录到了增补内容中。这一增补的内容继续按照教科书的次序介绍 PSpice,并进行了一些小的改动,以适应教科书的修订。

教师手册

教师手册可以帮助教授们迅速找到教科书中的内容和增补内容。为便于参考,在每章后面还提供了以下信息:

- 本章概述
- 习题分类
- 习题章节参考
- 例题列表

解答手册

解答手册包含了第六版中全部 900 个习题,外加每章后面的习题的解法以及需要的图表。手册有两卷,第一卷包括第 1 ~ 9 章的习题,第二卷包括第 11 ~ 18 章的习题。这些增补都经过数名教师准确复查,所有使用本书的教学人员都可以免费索取。本手册不得出售给学生。解答手册中还附带了一张软盘,包含 PSpice 和 MATLAB 所有习题解法的文件。

教学支持说明

本书系我社获全球最大的教育出版集团—— Pearson Education Group 独家授权之英文原版/简体中文版。

Pearson Education 旗下的国际知名教育图书出版公司 Prentice Hall，以其高品质的电子与通信类出版物而享誉全球教育界、工商界、技术界，成为全美及全球高校采用率最高的教材。为秉承 Prentice Hall 出版公司对于教材类产品的一贯教学支持，我社特获独家授权影印本书的教师指导手册和习题解答，向采纳本书作为教材的教师免费提供。

获取相关教师指导手册和习题解答的教师烦请填写如下情况调查表，以确保此教学辅导材料仅为教师获得。

情况调查表如下所示：

证　　明

兹证明____________大学____________系/院____________专业______学年（学期）开设的________________课程，共_____学时，现采用电子工业出版社出版的英文原版/简体中文版________________（书名/作者）作为主要教材。任课教师为________，学生____个班共____人。

任课教师需要与本书配套的教师指导手册和习题解答。

电　　话：____________________

传　　真：____________________

E-mail：____________________

联系地址：____________________

邮　　编：____________________

建议和要求：

系/院主任：__________（签字）

（系/院办公室章）

____年___月___日

本书还配有其他教学辅导资料，相关事宜敬请访问Pearson Education Group的相关网站：http://www.pearsoned.com。

请与我们联络

Publishing House of Electronics Industry
电子工业出版社
Tel: 8610-68270519
Fax: 8610-68270516
E-mail: Te_service@phei.com.cn



Pearson Education Beijing Office
培生教育出版集团北京办事处
Tel: 8610- 6891 7488 /6891 6659
Fax: 8610-68917499
E-mail: service@pearsoned.com.cn

目　　录

第1章 电路变量

对于热衷于应用科学和数学,并有这方面才能的人来讲,电气工程是一门令人兴奋而且具有挑战性的专业。在过去的一个半世纪,电气工程师已经在改变人们的生活方式、工作方式及其发展中扮演了主要的角色。卫星通信、电话、数字计算机、电视、用于诊断的医学设备和外科医学设备,流水作业的机器人以及电力工具,已成为定义现代技术社会系统的、具有代表性的组成部分。你可以像电气工程师那样投入到这场正在进行的技术革命中去,不断改善和精炼目前的系统,并且为了满足不断变化的社会需求去开发新系统。

当开始电路分析的学习时,需要先了解电气工程的主题。我们将先介绍电气工程概述,一些与电路分析有关的工程学的概念,复习国际单位制。

接着,我们将一般性地描述电路分析的意义,介绍电压和电流的概念,进行理想基本元件和极性参照系统的讨论,最后描述电流和电压与功率和能量的关系。

1.1 电气工程概述

电气工程专业与生产、传送、测量电信号的系统有关。电气工程是将物理学家的自然现象模型和数学家的数学工具结合在一起,并运用这些模型系统以满足实际的需要。电系统在我们的生活中非常普及,无论在家庭、学校、车间还是汽车中,到处都能找到它的身影。根据下列5个主要的电系统:

- 通信系统
- 计算机系统
- 控制系统
- 电力系统
- 信号处理系统

先介绍几个例子,然后讨论电气工程师怎样分析并设计这些系统。

通信系统是产生、传送、分配信息的电系统。众所周知的例子包括电视设备、照相机、发报机、接收机和 VCR;探测宇宙的电子望远镜;返回式卫星和地球图像卫星系统;定位飞机航线的雷达系统以及电话系统。

图 1.1 描述了现代电话系统的主要组成部分。在图的左面,电话机的话筒内部将声波转化为电信号,电信号传送到交换中心,在交换中心,它们和来自数十、数百或数千个其他电话的信号组合在一起。组合后的信号从交换中心出发,信号的形式取决于传播距离。在图 1.1 所示的例子中,信号将通过地下同轴电缆传送到微波发射站。在微波发射站,信号转换成微波,从发射天线传播到空间,再经过通信卫星传到接收天线。微波接收站将微波信号转化为适当的形式以便进一步地传输,例如,可以将微波信号转化为光脉冲通过光缆传输。当到达第二个交换中心后,组合的信号被分离,并且每个信号都发送给相应的电话,这时的电话耳机相当于

扬声器,将接收到的电信号转换为声波。在传输过程的每个阶段,电路都对信号起作用。可以想像,艰巨的挑战在于设计、建造、运行每个电路,每个电路都应保证成千上万个电话同时工作时仍具有高质量的连接。

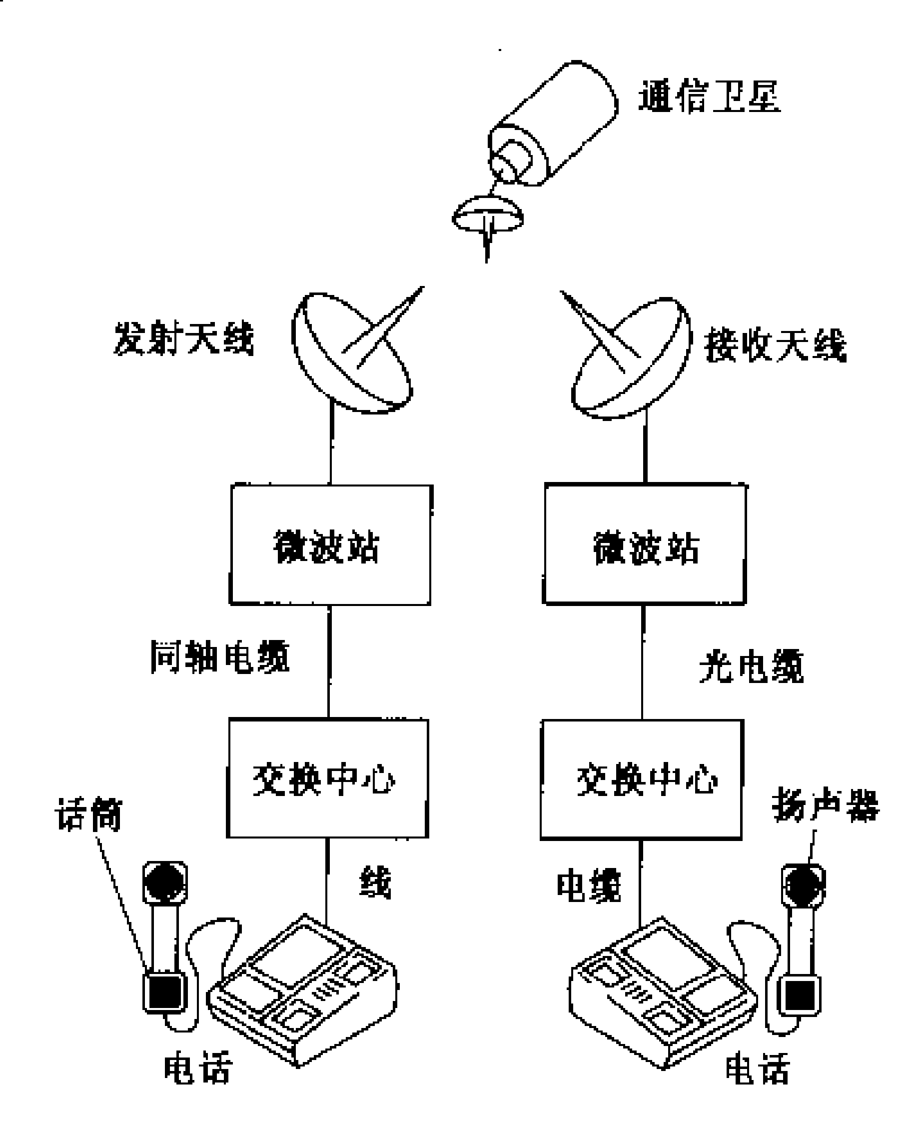


图 1.1 电话系统

计算机系统用电信号处理信息,包括文字处理和数学计算。不同系统的体积、功率大小不同,从袖珍计算器、个人计算机,到能完成相当复杂任务的超级计算机,计算机能处理气象资料,能对复杂的有机分子化学反应建模。计算机系统包括微电路网络或集成电路,邮票大小的集成电路中装有成百上千甚至上百万的元器件,这些元器件的运行速度和功率都接近于基本物理极限,包括光速和热力学定律的极限值。

控制系统用电信号控制生产过程。例如,炼油厂里的温度、压力和流速的控制器;喷油式汽车发动机里的燃料空气混合设备;电梯中电机、门和灯光的控制机构;还有巴拿马运河的闸门装置;另外,帮助飞机飞行和着陆的自动导航和自动着陆系统也是众所周知的控制系统。

电力系统产生和分配电力。电力是我们技术社会的基础,通常是由核电站、水电站及热电站(烧煤、油或气)大量产生的。电力由跨越全国的电力网分配。设计和运行这样的系统的主要挑战是提供足够的冗余和控制,这样,任何一台设备出故障都不会使一座城市或地区完全停电。

信号处理系统对表现信息的电信号进行处理。通过处理,使信号所包含的信息成为更合适的形式。处理信号有很多种不同的方法。例如,图像处理系统收集到沿轨道飞行的气象卫星传来的大量数据,先把数据量压缩到易于处理的程度,再将其转换为供晚间新闻播放的视频图像。计算机处理 X 线断层摄影(CT)扫描是另一个图像处理系统的例子,它获取特殊的 X 光机产生的信号,将它们转换成类似图 1.2 的图像。尽管原始的 X 光信号很少被医生使用,但是一旦将 X 光信号处理成为可以识别的图像后,它们包含的信息就能应用在疾病和伤害的诊断中。



图1.2　CT扫描的头部图像

5种系统之间的学科联系及其相互作用值得我们注意。例如,通信工程师会用数字计算机来控制信息的流动。计算机中包含控制系统,而控制系统中也包含计算机。动力系统需要规模巨大的通信系统来安全可靠地调整系统的运行,其系统也许会扩展而穿过整个大陆。信号处理系统中会包括通信、计算机和控制系统。

系统之间相互作用的例子很多,最有说服力的例子之一是商用飞机,图1.3表示一个高级通信系统,它为飞行员和所有附近的航空飞行器设计出安全的飞行路线,使飞行员保证飞机飞行在指定路线上。在最新商用飞机上,机载计算机系统具有管理发动机的功能,提供导航和飞行控制系统,同时在驾驶员坐舱的屏幕上播放这些信息。复杂的控制系统可以实现驾驶员坐舱发布指令来调整飞机的位置和速度,产生的信号对发动机进行控制以及实现飞机表面的控制(如机翼、侧翼和方向舵等),以确保飞机安全飞行并飞行在预定的航线上。飞机必须要有自己的动力系统才能在空中飞行,同时要提供和分配所需要的电力,如保持机舱灯光、制做咖啡、上演电影。信号处理系统能够减少空中交通通信里的噪音,把有关飞机位置的信息转换成更有实际意义的形式并展示在驾驶员坐舱中的显示屏幕上。工程学的挑战在于设计所有这些系统,并把它们融合为一个整体。例如,这些系统必须运行在变化范围大,而且是在不可预测的环境条件中运行。当然,最重要的工程学挑战是确保乘客安全准时地到达预定的目的地,保证在设计中包含足够的安全余量。

电气工程师主要对某一领域有兴趣,但是他们必须要熟悉与这一领域相关的其他领域的知识。各个领域的相关性,是电气工程之所以成为具有挑战性而且是令人兴奋的专业的原因之一。工程学强调要使某件事情成为一项工作,而工程师将从自己工作的领域获得并使用任何技术。

1.1.1　电路理论

电气工程领域多种多样,所有电气工程的各个分支是否有共同的部分?回答是肯定的,共同的部分就是电路。电路是实际电气系统行为的近似数学模型。它为学习电气工程提供了重要的基础。在后续课程中,作为工程师将学习设计、运行那些前面提到的系统的具体细节。模型、数学技术和电路理论将为你将来的工程学探索构成智慧的框架。

"电路"通常是指实际的电系统以及它的模型。在正文中,当我们谈到电路的时候,除非另有说明,我们总是指的是模型。它是跨越工程学科、有广泛应用的电路理论的结晶。

电路理论是研究静止和运动电荷的电磁领域理论的特例。尽管广义的电磁理论似乎是研

究电信号的出发点,但是其应用不仅麻烦,而且需要使用高深的数学。因此,电磁理论课程不是理解本书内容的前提条件,不过我们假定你学过简单的物理课程,在课程中讨论过电现象和磁现象。如果满足三个基本假设,就可以利用电路理论而不是电磁理论研究电路形式的物理系统。这三个假设如下:

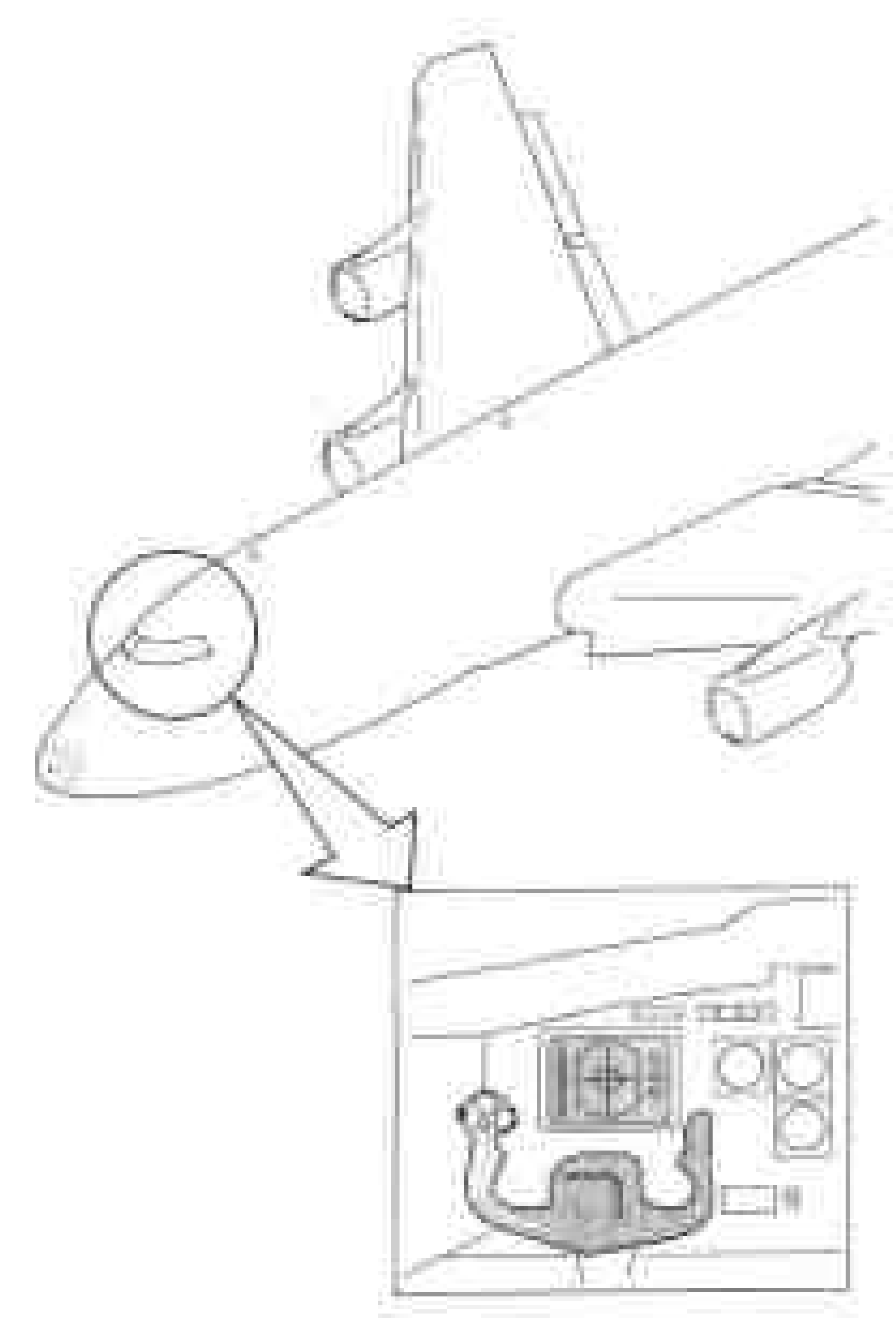


图 1.3 飞 机

1. 电效应在瞬间贯穿整个系统。我们知道电信号传播速度接近光速,所以可以做这样的假定。如果系统在物理结构上相当小,电信号通过它又如此迅速,我们可以认为电信号同时影响系统中所有点。一个系统如果足够小,我们就能做这样的假定,并称这种系统为集总参数系统。
2. 系统里所有元件的净电荷总是零。没有元件能够收集到额外的净电荷,尽管有些元件可以保持等量的相对隔离的电荷,以后将会讨论这种元件。
3. 系统里的元件之间没有磁耦合。稍后会证明,磁耦合能够发生在元件内部。

除此之外,没有其他假设。对于同一个问题,使用电磁理论解决方案非常复杂,而使用电路理论则能获得简单而又足够精确的解决方案。在介绍基本电路元件的分析和互连元件的规则之后,假设 2 和 3 的重要性将会显而易见。

我们需要进一步探讨假设 1。多小的物理系统有资格作为集总参数系统?如果注意到电信号的波浪式传播,问题可以得到一个定量的解答。如果信号的波长比系统的物理尺寸大得多,则称系统为集总参数系统。波长 λ 等于信号的速度除以频率,即 $\lambda = c/f$。频率单位为赫兹(Hz)。例如,美国电力系统使用的频率为 60 Hz。如果用光速($c = 3 \times 10^8$ m/s)作为传播速

度,那么波长为 5×10^6 m。如果该电力系统物理尺寸远小于这个波长,就可以将它当做集总参数系统,可以用电路理论来分析它的行为。怎样来定义远小于?好的标准是十分之一。如果系统的尺寸是波长尺寸的十分之一,系统可以作为集总参数系统。因此,只要电力系统的物理尺寸小于 5×10^5 m,就可以将它看做是集总参数系统。

另一方面,无线电信号的传播频率规定为 10^9 Hz,因此波长为 0.3 m。使用十分之一的标准,发送或接收无线电信号的通信系统的相应尺寸必须小于 3 cm,才能作为集总参数系统。如果研究中的系统其物理尺寸与信号的波长接近,就必须使用电磁理论去分析该系统。

1.1.2 解决问题

如果问题解答者是一名工程师,不会要求他去解决已经解决了的问题。不论是改善已有的系统功能,还是创造新系统,工程师将分析研究未解决的问题。然而,作为一个学生,则要投入注意力去探讨已经被解决的问题。学习和讨论这些问题在过去是如何被解决的,并完成相关的作业和测验题。目的是要提高技能以便成功地处理未被解决的问题,成为工程师后将会遇到那些未被解决的问题。

下面给出一般问题的解答步骤,多数属于在计算之前应考虑的问题,以便找到解决问题的方案和策略。

1. **确定什么是已知的,什么是待求的。**在解答问题时,你需要知道目的地,以便选择一条路径到达目的地。你需要解答或求解的问题是什么?有时目标问题是明显的,有时你需要解释或者列出已知和未知信息清单或表格以便了解目标。
   问题陈述中可能包含一些无关的信息,在解答前需要将其排除。另一方面,可能会出现不完整的信息,或者复杂程度超出已知的解决方法。这种情况下,需要做出假定来填补失去的信息或者简化问题的上下文关系。如果你的计算陷入困境或者产生的答案似乎无意义,就要准备回过头,重新考虑那些无关的信息或假定。
2. **画电路图或者采用其他形式的模型。**将口头描述的问题转化为形象的模型是解答问题过程中经常使用的步骤。如果电路图已经提供,则需要在上面加一些信息,如标注、数值或者参考方向。也可以根据需要重新画一个简单、等效的电路图。在书中,将会学习简化电路、求等效电路的方法。
3. **考虑几个解决方案,并从中挑选一个方案。**电路课程将帮助你收集许多分析工具,每一种工具都可以解决一些问题。有的方法在解题时可能比其他方法少用方程式,有的方法在解题时只用代数方法不需要微积分。如果你能采用这些方法,就会提高效率并能够有效地减少计算量。当你用某种解决方法陷入困境时,要想到换一种方法,可能会指出一条继续前进的道路。
4. **计算答案。**我们的计划是确定一个好的分析方法和正确的方程来解答问题。接着求解方程,准备纸和笔、计算器以及计算机的方法对于进行电路分析的实际计算都是有用的。效率以及教师的选择决定了将使用的工具。
5. **发挥创造性。**如果怀疑答案错了,或者计算好像不能接近解答,应该暂停并考虑替换方案。需要重新检查假设或者选择另一个解决方法。或者需要采取一种非常规的解决步骤,例如从结果倒着推算。本课程提供了所有习题答案和许多家庭作业答案,需要时你可以倒着推算。在现实世界中,你不可能预先有答案,但是你可以从预期的结

果倒着推算。其他创造性的方法包括观察与其相似的其他类型问题,那些问题你已经成功地解答了,凭你的直觉或预感决定如何进行。或者暂时将问题放在一边,以后再来对付它。

6. **检验解答**。问自己得到的解答是否有实际意义。答案的数量级合理吗?解答能否物理实现?还可以进一步用其他方法重新解答问题,这样做不仅检验了最初答案的正确性,而且帮助培养你的直觉,根据不同种类的问题找到最有效的解决方法。在现实世界中,安全的临界设计总是要用几种独立的方法进行检验。养成检验答案的习惯,不仅使学生受益而且使工程师受益。

以上解决问题的步骤不能作为处方去解决电路课程或其他课程的所有问题,你可能需要跳过这些步骤,或改变一些步骤的顺序,或者详细制定某些步骤解决特殊问题。使用这些步骤作为指南,形成工作中解决问题的风格。

1.2 国际单位制

工程师利用测量比较理论结果和实验结果,比较有竞争力的工程设计。现代工程设计包含多个学科,许多工程师小组在工程设计中一起工作,如果各小组使用相同的测量单位,就可以互相沟通测量结果。国际单位制(缩写 SI)被所有主要工程学会和全世界大多数工程师使用,所以本书也使用国际单位制。

SI 制以六个定义为基础:

- 长度
- 质量
- 时间
- 电流
- 热力学温度
- 光强度

上述量及其单位和符号列在表 1.1 中。有些大家熟悉的时间单位,如分(60 s)、时(3 600 s)等,尽管不是严格的 SI 制,也经常使用在工程计算中。另外,定义量还可以组合形成导出单位。如力、能量、功率和电荷,物理课程中经常用到这些导出单位。表 1.2 列出了本书使用的导出单位。

表 1.1 国际单位制(SI)

量	基本单位	符号
长度	米	m
质量	千克	kg
时间	秒	s
电流	安培	A
热力学温度	开尔文	K
光强度	坎德拉	cd

许多情况下,SI 制不是太小就是太大,不便于使用,因此经常用 10 的幂的标准前缀作为基本单位使用,如表 1.3 所示。所有这些前缀都是正确的,但是工程师通常使用能被 3 整除的

幂，因此厘、分、十以及百很少使用。同样，工程师经常选择基础数字范围在 1 至 1 000 的前缀。例如，时间计算结果为 10^{-5}s，即 0.00001s。多数工程师将其描述为 10 μs，即 $10^{-5}\text{s} = 10 \times 10^{-6}$ s，而不是 0.01 ms 或 10 000 000 ps。

表 1.2　SI 导出单位

量	单位名称(符号)	公　式
频率	赫兹 (Hz)	s^{-1}
力	牛顿 (N)	$kg \cdot m/s^2$
能量或功	焦耳 (J)	N·m
功率	瓦特 (W)	J/s
电荷	库仑 (C)	A·s
电位	伏特 (V)	W/C
电阻	欧姆 (Ω)	V/A
电导	西门子(S)	A/V
电容	法拉第 (F)	C/V
磁通	韦伯 (Wb)	V·s
电感	亨利 (H)	Wb/A

表 1.3　表示 10 的幂的标准前缀

前　缀	符　号	幂
阿[托]	a	10^{-18}
飞[母托]	f	10^{-15}
皮[可]	p	10^{-12}
纳[诺]	n	10^{-9}
微	μ	10^{-6}
毫	m	10^{-3}
厘	c	10^{-2}
分	d	10^{-1}
十	da	10
百	h	10^2
千	k	10^3
兆	M	10^6
吉[咖]	G	10^9
太[拉]	T	10^{12}

练习题

1.1　为了付清一年 1 千亿的赤字，联邦政府每毫秒必须要收多少美元？

答：$ 3.17/ ms。

1.2　在美国大约有 1.8 亿辆轿车注册。假定轿车电池平均能存储 440 瓦特小时(Wh)的能量。估计(用吉咖瓦特小时)美国轿车存储的全部能量。

答：79.2 GWh。

1.3　一个高分辨率计算机显示器有 1280 × 1024 个像素。每个像素包含 24 位信息，如果一个字节定义为 8 位，每次显示需要多少兆字节(MB)？

答：3.93 MB。

1.4 一种竹子生长速度为 250 毫米/天。假定单个植物细胞为 10 微米长,竹子茎秆生长一个细胞长平均需要多长时间?

答:3.5 s。

1.5 一升(L)漆大约覆盖 10 m^2 的墙面。涂层干燥之前有多厚?(隐藏条件:$1L = 1 \times 10^6\ mm^3$)

答:0.1 mm。

1.6 如果某信号以光速的 80% 在电缆中传输,信号每纳秒通过多少英寸的电缆?

答:9.45 英寸。

1.3 电路分析概述

在开始讨论电路分析的具体内容之前,需要先简要说明工程设计,特别是电路设计。概述的目的是要说明电路分析在电路设计的整个范围中,适合哪一部分。虽然本书将注意力放在电路分析上,但是,在适当场合我们也会讨论电路设计问题。

所有工程设计开始于提出的要求,如图 1.4 所示。这个要求可能来源于改善现有设计,或者也可以是崭新的设计。对要求需进行仔细的评估,通过评估生成设计要求,设计要求具有设计的可测量特征。一旦开始进行设计,设计要求就成为评估设计能否满足要求的标准。

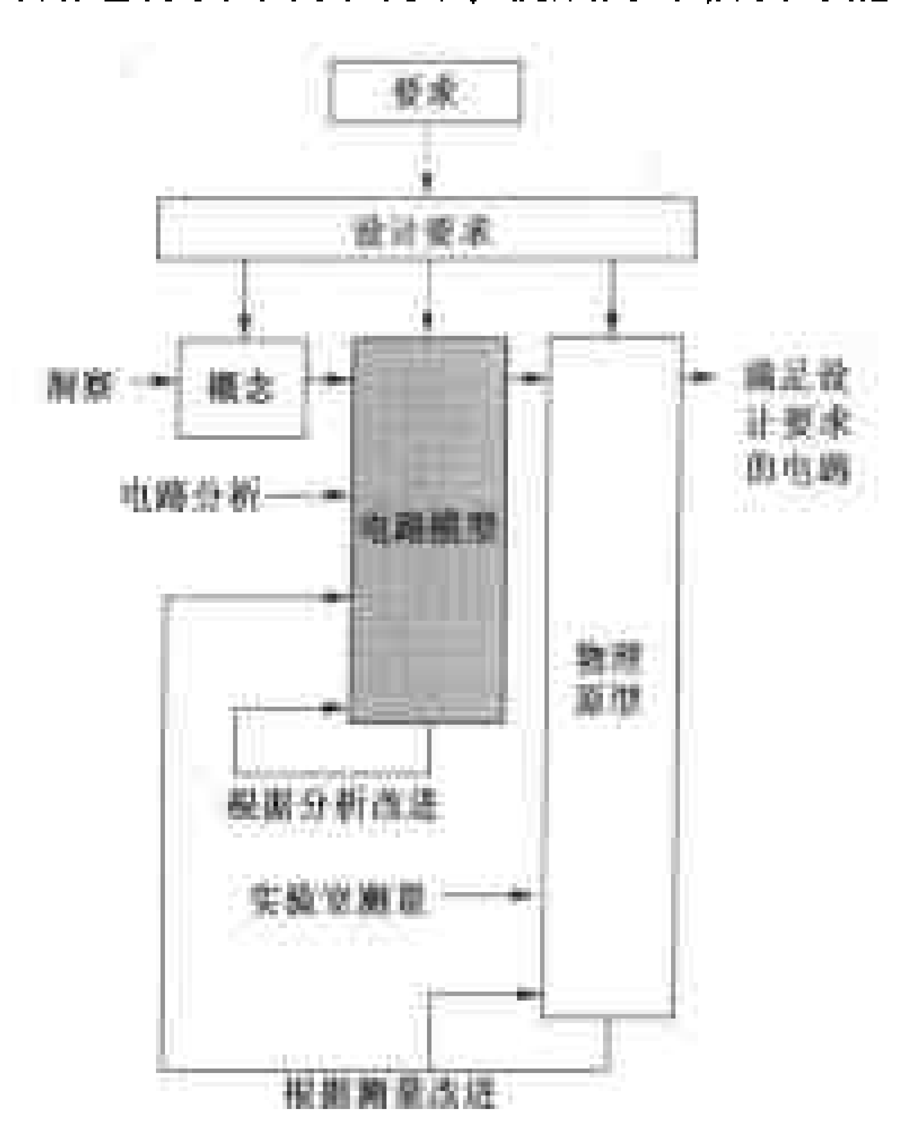


图 1.4 电气工程设计的概念模型

接下来是有关设计的概念。对设计要求的完全理解产生概念,概念来源于教育程度和经验。概念可以体现为一张草图,一段文字描述或其他形式。接下来是将概念转化为数学模型。常用电系统的数学模型就是电路模型。

电路模型元件称为理想电路元件。理想电路元件是实际电元件(如电池或灯泡)的数学模型。使用理想电路元件来表现实际电元件的行为,精确度是非常重要的。电路分析工具以及

在电路中的应用是本书的重点。电路分析以数学为基础,用来预测电路模型和理想电路元件的行为。通过比较设计要求中的期望行为和电路分析得到的预测行为,进行电路模型和理想电路元件的改进。一旦期望行为和预测行为一致,则物理原型构造就完成了。

物理原型是一个实际电系统,由实际电元件构成。测量技术用于确定实际物理系统行为。实际行为与设计要求中的期望行为以及电路分析得到的预测行为相比较。比较后,进行物理原型、电路模型的改进。重复进行处理,不断改进元件和系统,最终产生一个精确的设计,满足设计要求。

从以上描述可以清楚看出,设计过程中电路分析起了非常重要的作用。因为电路分析应用于电路模型,工程师设法使用成熟的电路模型,使设计在第一次反复中就满足设计要求。在本书中,我们使用的模型已经被检验了 20 年至 100 年,你可以假设这些模型是成熟的。电路分析对于工程师是非常重要的,只有具备了电路分析的能力才能使工程师具有将理想电路元件模拟实际电系统的能力。

利用理想电路元件之间的相互关系可以定量预测系统的行为,这就意味着可以用数学方程式来描述元件之间的相互关联。为了利用数学方程式,我们必须按照测量的参量来写数学方程式。就电路而言,这些量是电压和电流,将在 1.4 节讨论电压和电流。学习电路分析需要理解用电压和电流来表示理想电路元件的行为,进一步理解理想元件的相互关联将影响到电压和电流。

1.4 电压和电流

电荷的概念是描述所有电现象的基础。首先复习电荷的一些重要特征:

- 电荷是双极性的,需要用正电荷和负电荷来描述电现象。
- 电荷量是离散量,是电子电荷量 1.6022×10^{-19} C 的整数倍。
- 电现象归结为电荷的分离和电荷的运动。

在电路理论中,电荷的分离引起电场力(电压),电荷的运动引起电的流动(电流)。

根据工程学的观点,电压和电流的概念非常有用,因为它们可以表示为数量,无论是正电荷还是负电荷被分离,能量都要消耗。电压是由分离引起的每单位电荷的能量。我们将它表示为微分量的比:

$$v = \frac{dw}{dq} \tag{1.1}$$

式中:

v 是电压,单位为伏特(V)。

w 是能量,单位为焦耳(J)。

q 是电荷量,单位为库仑(C)。

电荷的运动影响电荷流动的速率。电荷流动的速率通称为电流,表示为:

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1.2}$$

式中:

i 是电流,单位为安培(A)。

q 是电荷量,单位为库仑。

t 是时间,单位为秒(s)。

表达式(1.1)和(1.2)分别定义了电压和电流的大小。电荷的双极性特点需要我们赋予这些变量参考极性。关于参考极性将在 1.5 节讨论。

尽管电流是由离散运动的电子组成,但是没必要单独考虑电子的运动。因为电子的数量太大了。我们将这些电子和相应的电荷看成平滑的流体,因此,i 被视为连续量。

使用电路模型有一个优点,可以用一个元件端口的电压和电流严格地模拟该元件。因此,两个不同元件的端电压和端电流之间的关系可能是相同的。如果它们真是这样,从电路分析的角度看,这两个元件是相等的。一旦我们知道一个元件端口的行为,我们就可以分析该元件在电路中的行为。然而在开发元件模型时,我们关心的是元件的内在行为。我们可能需要了解,电荷传导的发生是否是由于自由电子通过金属晶体结构的运动形成的,或者是否是由于电子在半导体材料共价键内的运动形成的。然而,这些问题超出了电路理论的范围。在本书中,我们使用的是已开发的电路模型,而不去讨论如何开发元件模型。

1.5 理想基本电路元件

理想基本电路元件有三个特征:(1)只有两个端子,这些端子是连接其他电路元件的连接点;(2)可以用电压或电流按数学方式描述;(3)不能被分解为其他元件。我们使用"理想"一词意味着基本电路元件并不像可实现的物理元件那样真实地存在。然而,为了模拟实际器件和系统,理想元件可以被连接。我们使用"理想"一词基本意味着电路元件不能被进一步简化或者分解为其他元件。因此,基本电路元件成为建造电路模型的砖瓦。但是基本电路元件本身不能被其他任何元件模拟。

图 1.5 展示了一个理想基本电路元件。框里面是空的,因为此时我们没有给出元件的类型。在图 1.5 中,框两端的电压表示为 v,电路元件框内的电流表示为 i。电压的参考极性用加减符号来表示,电流的参考方向用电流旁的箭头来表示。v 和 i 在参考方向下正负值的含义如表 1.4 所示。需要注意的是,在代数学上正电荷沿一个方向的流动等价于负电荷沿相反方向的流动。

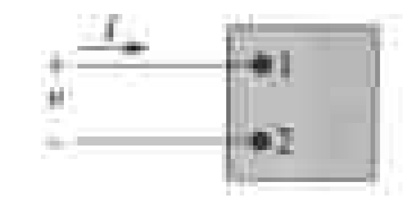


图 1.5 理想基本电路元件

表 1.4 在图 1.5 中参考方向的含义

	正值	负值
v	电压降从端 1 到端 2 或 电压升从端 2 到端 1	电压升从端 1 到端 2 或 电压降从端 2 到端 1
i	正电荷从端 1 流到端 2 或 负电荷从端 2 流到端 1	正电荷从端 2 流到端 1 或 负电荷从端 1 流到端 2

电压参考极性和电流参考方向的指定是任意的，但是，一旦指定了参考极性或方向，后来写的所有方程式必须与其保持一致。广泛使用的参考方向的符号约定被称为无源符号约定，本书使用无源符号约定。无源符号约定规定如下：

只要元件中电流的参考方向与元件电压降的参考方向一致（如图 1.5 所示），则在电压与电流相关的表达式中使用正号，否则使用负号。

以下所有的分析都使用无源符号约定。我们介绍无源符号约定的目的如同我们先前介绍不同种类的基本电路元件一样，让你留下一个印象，即极性参考的选择和无源符号约定的采用既不是基本元件的功能，也不属于基本元件互相联系。在 1.6 节中，将会介绍无源符号约定的应用和说明。

练习题

1.7 在图 1.5 中元件的端电流为

$$i = 0, \qquad t < 0$$
$$i = 20e^{-5000t}\,\text{A}, \qquad t \geq 0$$

计算进入元件上端的全部电荷（单位用微库仑）。

答：4000 μC。

1.8 图 1.5 中进入上端的电荷表达式为：

$$q = \frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha t}\,\text{C}$$

如果 $\alpha = 0.03679\ \text{s}^{-1}$，求流进端子的电流最大值。

答：10 A。

1.6　功率和能量

在电路分析中，功率和能量的计算也是非常重要的。因为，尽管在基于系统的电量分析和设计中，电压和电流是有用的变量，但是系统有效的输出经常是非电气的，这种输出用功率和能量来表示比较合适。另外，所有实际器件对功率大小都有限制。因此，在设计过程中只计算电压和电流是不够的。

现在我们建立功率和能量与电压和电流之间的关系，同时通过功率计算来举例说明无源符号约定。回顾物理基础知识，功率是释放或吸收的能量对时间的导数（一个额定值为75 kW的水泵比额定值为7.5 kW的水泵每秒排放更多公升的水）。数学上，单位时间能量用导数形式表示，即：

$$p = \frac{dw}{dt} \tag{1.3}$$

式中：

p 是功率，单位为瓦特（W）。

w 是能量，单位为焦耳。

t 是时间，单位为秒。

因此，1 W 等于 1 J/s。

与电荷流关联的功率可以直接根据式(1.1)和(1.2)定义的电压和电流推出,即:

$$p = \frac{dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right) = vi \tag{1.4}$$

式中:

p 是功率,单位为瓦特。

v 是电压,单位为伏特。

i 是电流,单位为安培。

式(1.4)表示与基本电路元件关联的功率等于元件流过的电流和元件上的电压的乘积。

因此,功率是与一对端子关联的量,我们应当从计算结果知道功率是释放到这对端子,还是从那里吸收。释放还是吸收的信息来源于对无源符号约定的正确应用和解释。

如果使用无源符号约定,当电流参考方向与端子上电压降的参考方向一致时,式(1.4)是正确的。否则,式(1.4)必须加一个负号。换句话说,当电流参考方向与端子上电压升的参考方向一致时,功率表达式为:

$$p = -vi \tag{1.5}$$

功率的代数符号取决于电荷运动形成电压降还是电压升。当正电荷运动形成电压降,它们失去能量,当它们运动形成电压升,它们获得能量。图1.6总结了电压和电流参考方向之间的关系以及功率表达式。

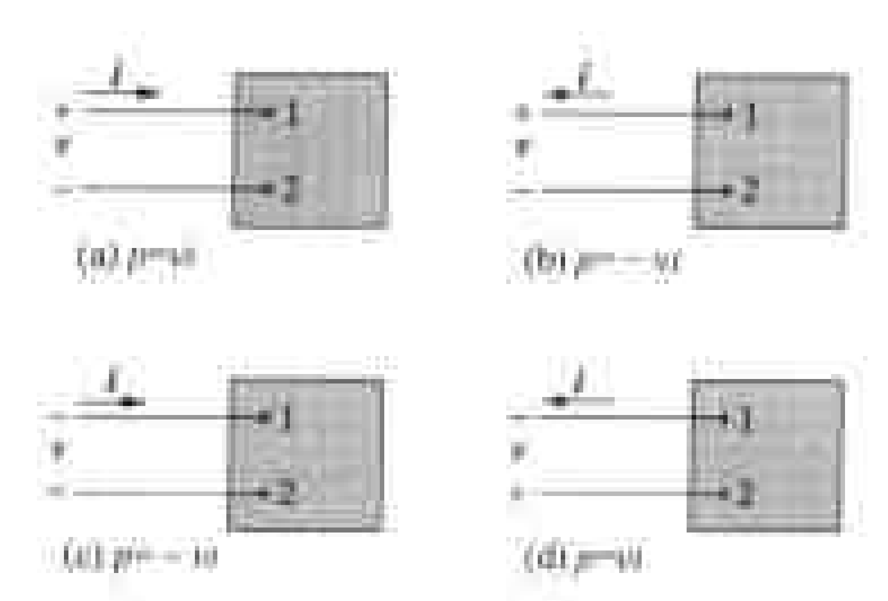


图1.6 参考极性和功率表达式

我们现在定出规则以解释功率的代数符号。

如果功率为正(即,如果 $p>0$),功率被释放到电路框的内部,如果功率为负(即,如果 $p<0$),从电路框内部吸收功率。

例如,假设选择参考方向如图1.6(b)所示,再假设电压和电流计算的结果如下:

$$i = 4\ \text{A} \qquad v = -10\ \text{V}$$

那么与端子1、2关联的功率为:

$$p = -(-10)(4) = 40\ \text{W}$$

因此,电路框内的电路吸收40 W功率。

再进一步分析,假定解决相同的问题,但是选择图1.6(c)所示参考方向。结果为:

$$i = -4\ \text{A} \qquad v = 10\ \text{V} \text{ 以及 } p = 40\ \text{W}$$

注意用参考系统整理的这些结果与我们先前已得到的结论相同,即电路框的内部电路吸收40 W功率。事实上,图1.6中任何一个参考系统都将产生相同的结果。

练习题

1.9 假定一个元件的端 2 至端 1 有 20 V 电压降,4 A 电流进入端 2。

(a) 根据图 1.6(a)~(d),给出 v 和 i 的数值。

(b) 指出电路框内部是吸收还是释放功率。

(c) 电路吸收的功率为多少?

答:(a) 电路 1.6 (a):$v=-20$ V,$i=-4$ A;电路 1.6 (b):$v=-20$ V,$i=4$ A;电路 1.6 (c):$v=20$ V,$i=-4$ A; 电路 1.6 (d):$v=20$ V,$i=4$ A。

(b) 吸收。

(c) 80 W。

1.10 假定图 1.5 中元件的端电流同练习题 1.7 相同,对应的端电压为:

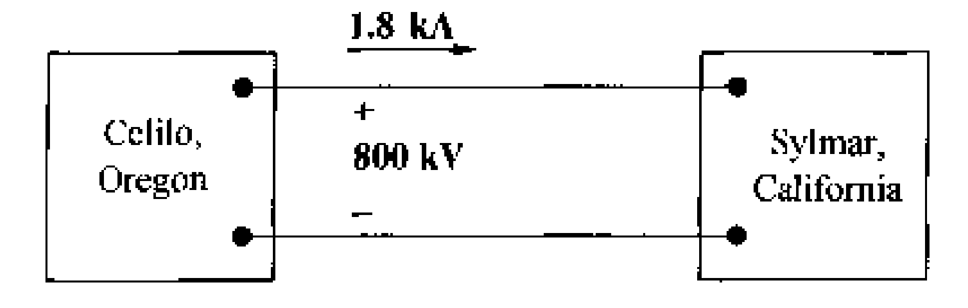
$$v=0, \quad t<0$$
$$v=10e^{-5000t}\ \text{kV}, \quad t\geqslant 0$$

计算释放到电路元件的全部能量(单位焦耳)。

答:20 J。

1.11 一高压直流(dc)传输线贯穿于 Celilo, Oregon 和 Sylmar, California 之间,运行电压 800 kV,电流 1 800 A,如图所示。计算传输线 Oregon 终端的功率(单位兆瓦),并说明功率流向。

答:1 440 MW,从 Celilo 到 Sylmar。



小结

- 国际单位制(SI)使工程师们能够以有意义的方式沟通。表 1.1 总结了基本 SI 单位,表 1.2 给出了一些实用的导出单位。
- 电路分析基于电压和电流。
- 电压是由电荷分离产生的单位电荷的能量,其 SI 单位为伏特($v=dw/dq$)。
- 电流是电荷流动的速率,其 SI 单位为安培($i=dq/dt$)。
- 理想基本电路元件是不能被分解的双端元件,能够用端电压和电流描述。
- 无源符号约定:当通过元件电流的参考方向与元件上电压降的参考方向一致时,表示元件端电压和电流相关的表达式使用正号。
- 功率是单位时间的能量,功率等于端电压和电流的乘积,其 SI 单位为瓦特($p=dw/dt=vi$)。
- 功率的代数符号解释如下:
  - 如果 $p>0$,功率释放到电路或电路元件。
  - 如果 $p<0$,从电路或电路元件吸收功率。

习题

1.1 假设通过电缆传播的电话信号速度为光速的三分之二。那么信号从纽约市到迈阿密需要多长时间？假定距离大约有 1 100 英里。

1.2 练习题 1.11 描述的传输线长 845 英里。传输线包含四条导线，每条导线每英尺重 2 526磅，传输线中的导线有多重？

1.3 两角五美分硬币约 1.5 毫米厚。以什么样的平均速度堆积两角五美分硬币，能够在一年里将硬币堆积为 2 000 亿美元。

1.4 1 400 A 电流流过矩形(0.6×9 cm)铜总线棒。自由电子以每秒 v 米的平均速度运动通过总线棒形成电流。如果自由电子浓度为 1 029 电子/立方米，而且它们一律分散通过总线棒，那么一个电子的平均速度是多少？

1.5 3.5 英寸双面软盘的容量为 1.4 MB。数据比特存储在圆形轨道上，每面 77 条轨道。最里面轨道半径是 0.5 英寸，最外面轨道半径是 1.5 英寸。每个轨道的比特数是相同的，8 比特为 1 字节。存储在最里面轨道上的 1 比特占据多少面积？

1.6 在电子电路中，微安数量级的电流不常遇到。假设电子流动产生 35 μA 电流。

(a) 每秒垂直流过固定参考横截面的平均电子数是多少？

(b) 将该数大小与澳大利亚悉尼和旧金山之间的微米数相比较。假设悉尼和旧金山之间的距离为 7 500 英里。

1.7 当一个电子从一个 6 V 电池的正端流到负端，从电子那里吸收的能量是多少？答案采用阿托焦耳单位。

1.8 流入图 1.5 上端的电流为：

$$i = 24\cos 4000t \text{ A}$$

假定在电流达到最大值的瞬间，上端的电荷为零，求表达式 $q(t)$。

1.9 四个 1.5 V 的电池提供 100 mA 的电流给便携式 CD 唱机，电池 3 个小时提供多少能量？

1.10 两个表示为盒 A 和盒 B 的电路如图 P1.10 方式连接，连线中，电流 i 的参考方向和电压 v 的参考极性如图所示。根据下面规定的数值，计算连接后的功率，并说明功率是从 A 流向 B 还是相反。

(a) $i = 5\text{A}, v = 120$ V。

(b) $i = -8\text{A}, v = 250$ V。

(c) $i = 16\text{A}, v = -150$ V。

(d) $i = -10\text{A}, v = -480$ V。

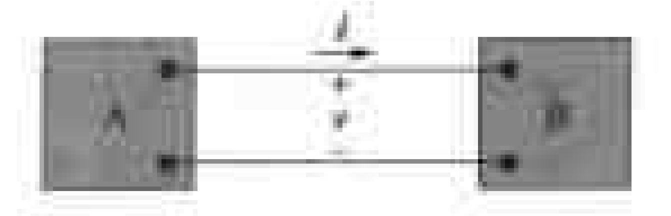


图 P1.10

1.11 一个电路元件端电压和电流的参考方向如图 1.6(d) 所示，v 和 i 的数值分别是 40 V 和 −10 A。

(a) 计算端口功率，并说明框内元件是吸收功率还是释放功率。

(b) 该电流是电子流产生的，说明电子是进人还是离开端 2。

(c) 解答当电子通过框内元件时，是获得能量还是损失能量？

1.12 将电压改为 −60 V，重复习题 1.11。

1.13 当小汽车的电池没电了，通常可以通过与其他小汽车电池连接来充电。电池的正端

连接在一起，负端连接在一起。连接如图 P1.13 所示。假定图 P1.13 中电流测量值 i 为 30 A。求：

(a) 哪辆小汽车电池没电了？

(b) 如果连接持续了 1 分钟，多少能量被传输到没电的电池里？

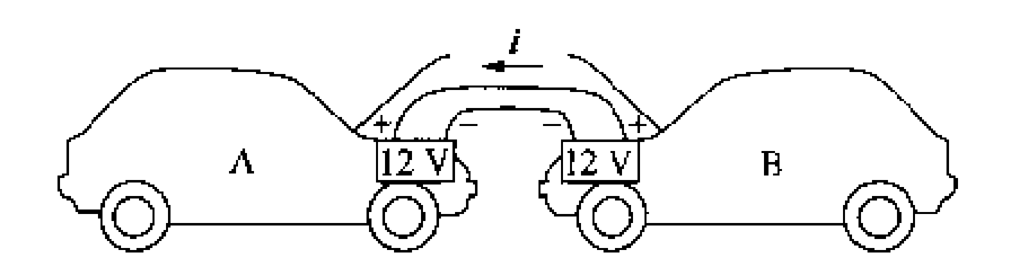


图 P1.13

1.14 手电筒干电池制造商声称电池能释放 15 mA 电流持续 60 小时。在这段时间内，电压将从 6 V 降到 4 V。假定电压随时间线性降低。电池在 60 小时时间里释放了多少能量？

P1.15 图 1.5 中电路元件的端电压和电流在 $t<0$ 时为零。$t\geqslant0$ 时，

$$v = e^{-500t} - e^{-1500t}\ \text{V}$$

$$i = 30 - 40e^{-500t} + 10e^{-1500t}\ \text{mA}$$

(a) 求 $t=1$ ms 时的功率。

(b) 在 0 到 1 ms 时间内，多少能量释放到电路元件？

(c) 求释放到电路元件的全部能量。

P1.16 图 1.5 中电路元件的端电压和电流在 $t<0$ 时为零。$t\geqslant0$ 时：

$$v = 100e^{-50t}\sin 150t\ \text{V}$$

$$v = 20e^{-50t}\sin 150t\ \text{A}$$

(a) 求 $t=20$ ms 时元件吸收的功率。

(b) 求元件吸收的全部能量（单位毫焦耳）。

M1.17 图 1.5 中电路元件的端电压和电流分别表示在图 P1.17 (a)和(b)上。

(a) 画出相对应的功率图，t 范围为 $0\leqslant t\leqslant100$ ms。

(b) 计算在 $t=25,60,90$ 和 100 ms 时释放到电路元件的能量。

P1.18 图 1.5 中电路元件的端电压和电流在 $t<0$ 时为零。$t\geqslant0$ 时：

$$v = 100e^{-500t}\ \text{V}$$

$$i = 20 - 20e^{-500t}\ \text{mA}$$

(a) 求释放到电路的功率最大值。

(b) 求释放到元件的全部能量。

P1.19 图 1.5 中元件的端电压和电流为：

$$v = 36\sin 200\pi t\ \text{V}$$

$$i = 25\cos 200\pi t\ \text{A}$$

(a) 求释放到元件的功率最大值。

(b) 求从元件吸收的功率最大值。

(c) 在 $0\leqslant t\leqslant5$ ms 范围，求 p 平均值。

(d) 在 $0\leqslant t\leqslant6.25$ ms 范围，求 p 平均值。

1.20 图 P1.20 显示了一个汽车电池在充电周期的端电压和电流。

(a) 计算转移到电池的全部电荷。

(b) 计算转移到电池的全部能量。

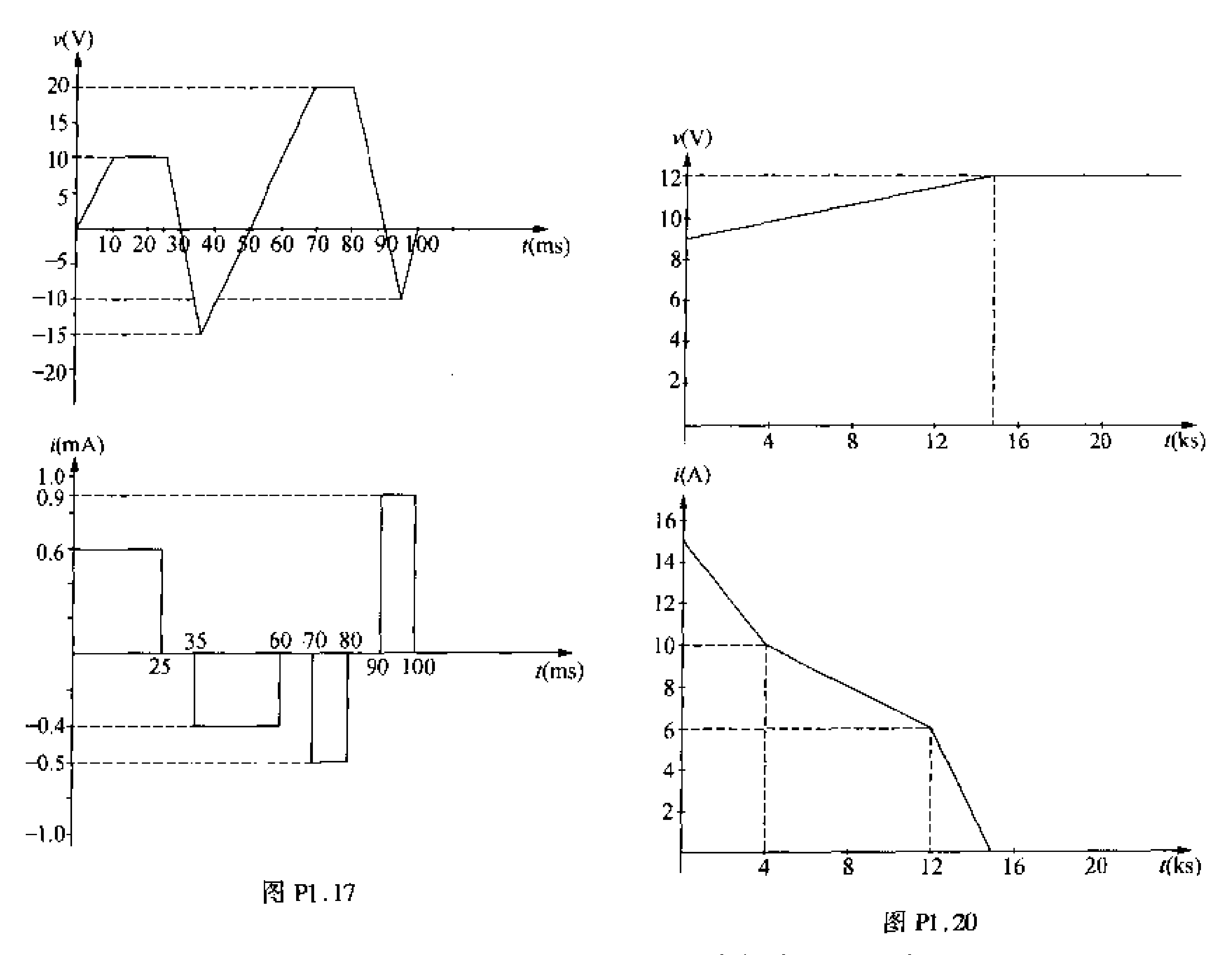


图 P1.17

图 P1.20

P1.21 图 1.5 中电路元件的端电压和电流在 $t<0$ 时为零。$t \geqslant 0$ 时：

$$v=(10000\ t+5)\ e^{-400t}\ V$$

$$i=(40\ t+0.05)\ e^{-400t}\ A$$

(a) 在什么时刻最大功率释放到元件上?

(b) 求最大功率,单位用瓦特。

(c) 求释放到元件的全部能量,单位用毫焦耳。

P M1.22 图 1.5 中电路元件的端电压和电流在 $t<0$ 和 $t>3$ s 时为零,在 0 至 3 s 间隔里表达式为：

$$v=t\ (3-t)\ V, \qquad 0<t<3\ s$$

$$i=6-4t\ mA, \qquad 0<t<3\ s$$

(a) 在什么时刻释放到电路元件的功率达到最大值?

(b) 在(a)求出的时刻,其功率为多少?

(c) 在什么时刻从电路元件释放的功率达到最大值?

(d) 在(c)求出的时刻,其功率为多少?

(e) 计算在 0,1,2 和 3 s 释放到电路的净能量。

P1.23 图 1.5 中电路元件的端电压和电流在 $t<0$ 时为零。$t \geq 0$ 时：

$$v = 80000te^{-500t}\ \text{V}, \qquad t \geq 0$$

$$i = 15te^{-500t}\ \text{A}, \qquad t > 0$$

(a) 求何时释放到电路元件的功率达到最大值，单位为毫秒。

(b) 求功率最大值，单位为毫瓦特。

(c) 求释放到电路元件的全部能量，单位为毫焦耳。

1.24 假定你是一项工程的主管工程师，一位下级工程师报告，如图 P1.24 的接线图没有通过功率检查。接线图的数据如表 P1.24 所示。

(a) 下级正确吗？解释并回答。

(b) 如果下级是正确的，能发现数据中的错误吗？

表 P1.24

元　件	电压(V)	电流(A)
a	46.16	6.00
b	14.16	4.72
c	-32.00	-6.40
d	22.00	1.28
e	33.60	1.68
f	66.00	-0.40
g	2.56	1.28
h	-0.40	0.40

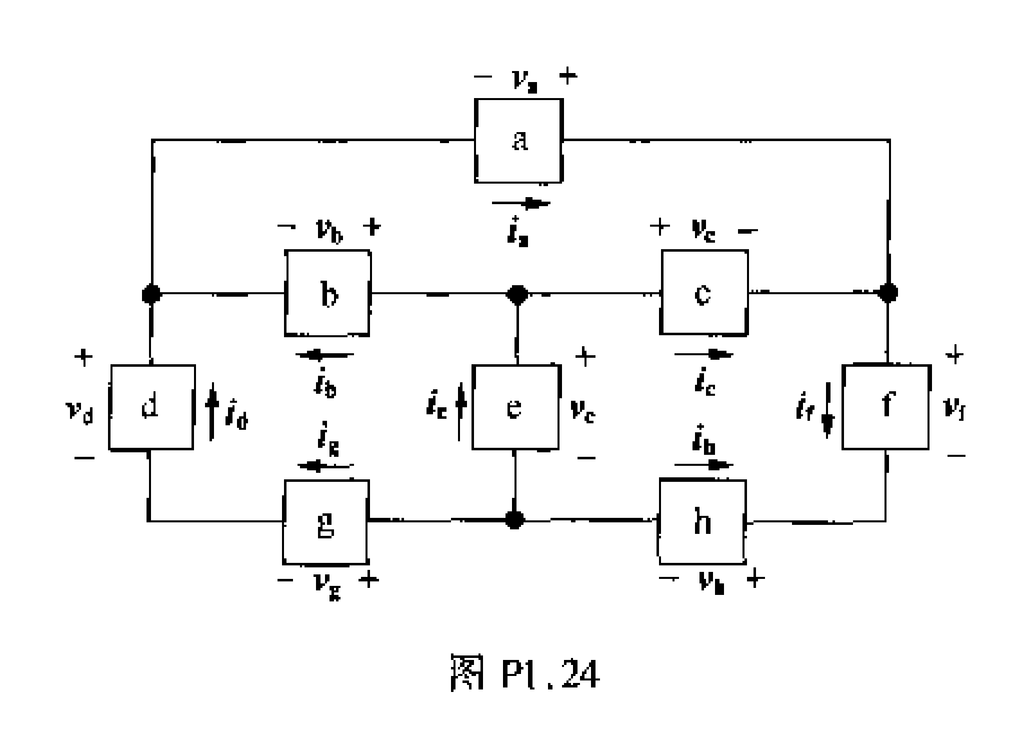


图 P1.24

1.25 图 P1.25 所示接线图中电压和电流数值如表 P1.25 所示。接线图满足功率检查吗？

表 P1.25

元　件	电压(V)	电流(A)
a	120	8
b	-120	-5
c	70	-3
d	80	11
e	-30	7
f	-10	-14
g	-60	-10
h	90	4

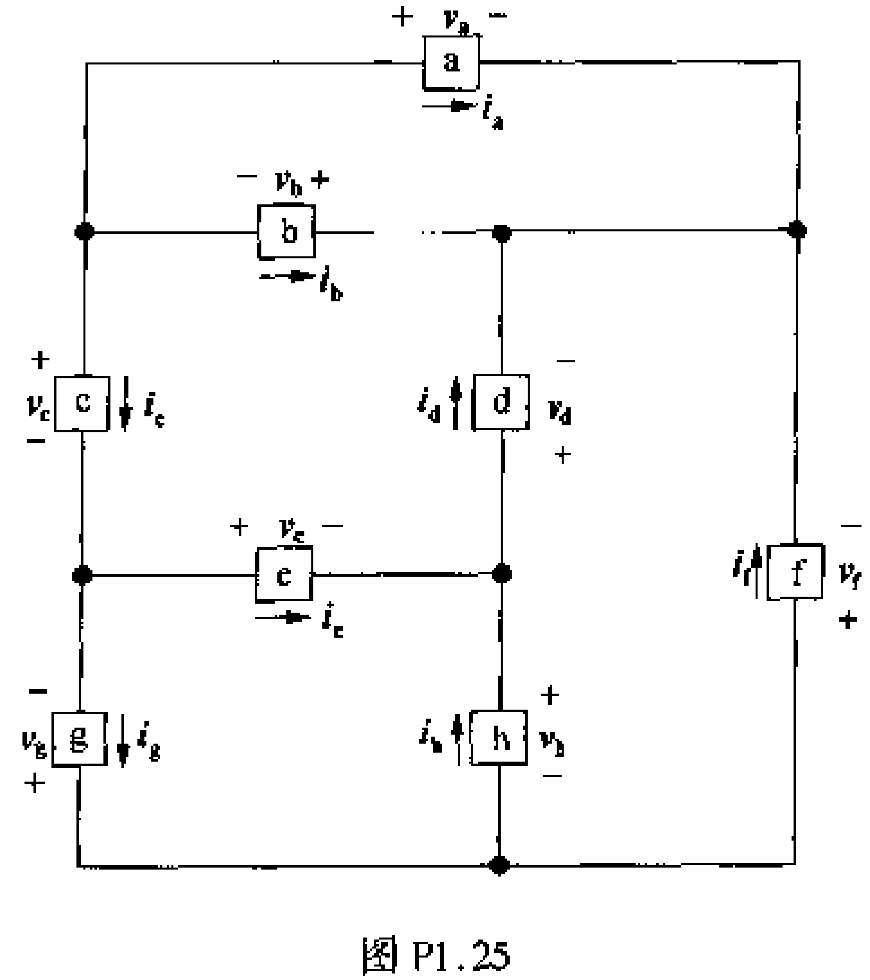


图 P1.25

1.26 图 P1.26 中电压和电流数值如表 P1.26 所示。求电路产生的全部功率。

表 P1.26

元　件	电压(V)	电流(A)
a	-18	-51
b	-18	45
c	2	-6
d	20	-20
e	16	-14
f	36	31

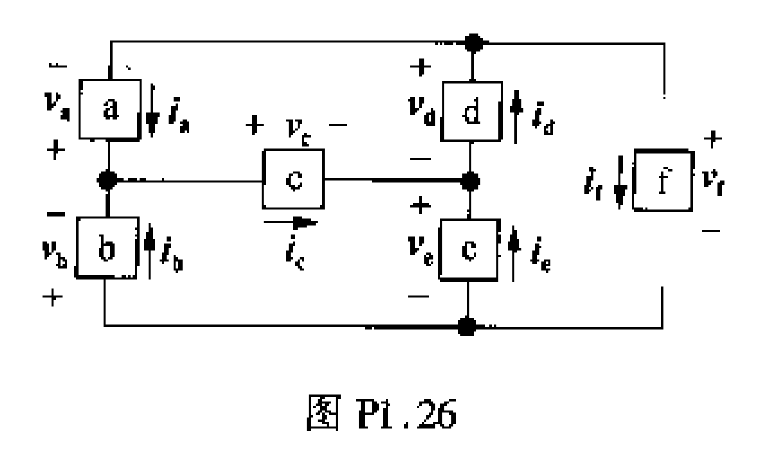


图 P1.26

1.27 对于互连元件的计算有一种检查方法，即看释放的全部功率是否等于吸收的全部功率(能量守恒定律)。用这种方法检查图 P1.27 所示的接线图，并说明它是否满足功率检查。每一个元件的电压和电流如表 P1.27 所示。

表 P1.27

元　件	电压(V)	电流(A)
a	48	12
b	-18	-4
c	30	-10
d	36	16
e	36	8
f	-54	14
g	84	22

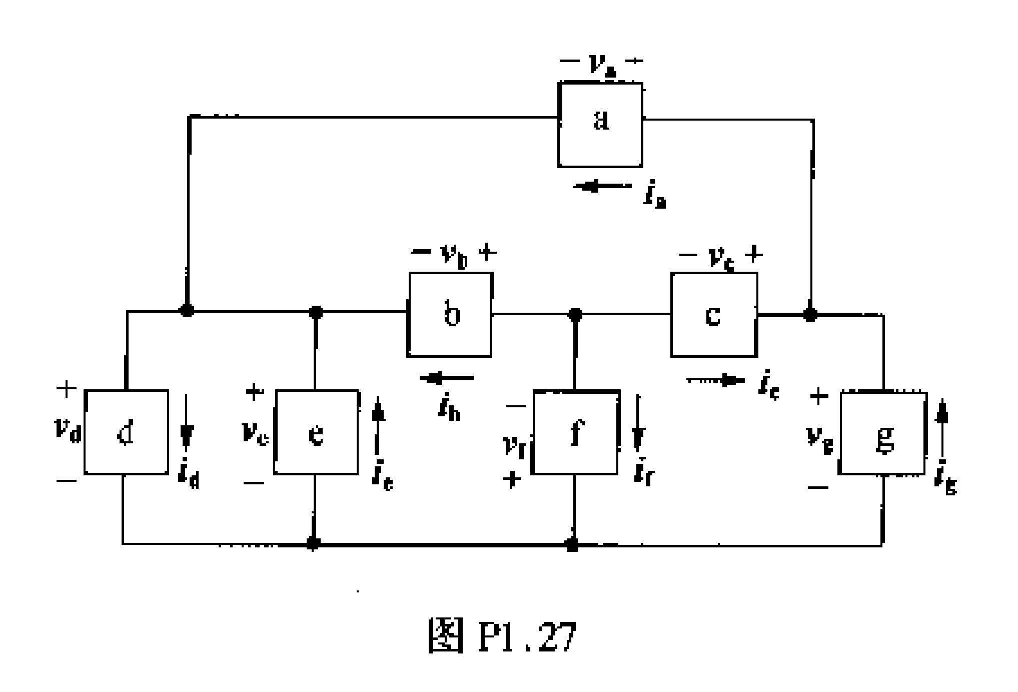


图 P1.27

1.28 (a) 在图 P1.28 所示的电路中，请识别哪些元件的电压和电流的参考极性符合无源符号约定。

(b) 每一个元件的电压和电流值如表 P1.28 所示。电路吸收的全部功率是多少？电路释放的全部功率是多少？

表 P1.28

元　件	电压(V)	电流(A)
a	-8	7
b	-2	-7
c	10	15
d	10	5
e	-6	3
f	-4	3

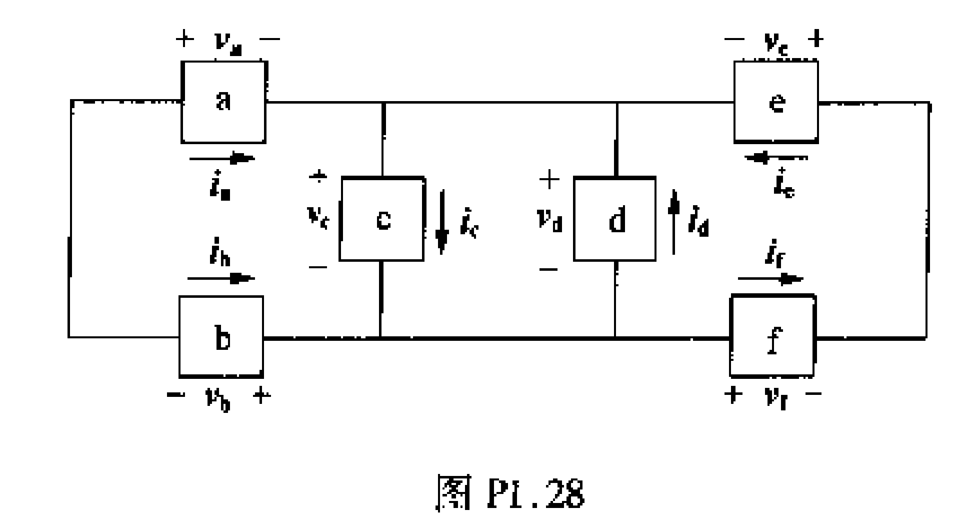


图 P1.28

第2章　电路元件

实例

用电安全一

"危险——高压"这种常见的警告非常容易被误解。所有形式的能量,包括电能,其实都可能是危险的,不仅仅是能造成伤害的电压。当你走过一个地毯,碰到一个门把手,可能遭遇静电电击,虽然令人讨厌,但是没有被伤害。然而,产生这些火花的电压比能够引起伤害的电压大几百或几千倍。



电能能否造成实际伤害在于电流以及电流如何流过身体。那么,为什么标牌上是高压警告呢? 由于电功率的产生和分配方式,容易确定的是电压而不是电流,所以,大多数电源产生恒定不变的电压,标牌警告的也是容易测量的电压。确定一个电源是否存在危险电流,以及在什么条件下会存在潜在的危险电流是非常困难的,这需要懂得一些电气知识。

在检查用电安全之前,必须学习电压和电流是如何产生的,以及它们的关系。物体(如人的身体)的电行为,非常复杂并且常常不能完全理解。为了能够预测和控制电现象,我们使用简化模型,用简单的电压和电流之间的数学关系式近似实际物体的复杂关系。这样的模型和分析方法是电气工程技术的核心,电气工程技术将使读者容易理解所有的电现象,包括那些用电安全知识。

尽管我们还不能完全且精确地解释人体的电行为,但是可以用简单的电路模型对电系统和器件进行较精确的描述,以便评估和改善电系统和器件的安全性。电路模型便于理解,虽然有缺点,但是可以解决工程学中的实际问题。我们将学会何时使用简化模型以及如何使用简化模型解决难题,将从经验中学习电气工程问题的处理艺术。

有五个理想的基本电路元件:电压源、电流源、电阻、电感和电容。在本章我们将讨论电压源、电流源和电阻的特性,尽管这些内容只占电路分析所用元件的一小部分,但是许多实际系

统往往只用电源和电阻就可以被模拟。电压源、电流源和电阻的起点低,因为它们的特性简单。例如,在电源和电阻中,电压和电流之间的数学关系是代数关系。因此,只要用代数计算就可以开始学习电路分析的基本内容了。

我们将电感和电容的介绍放到第6章,因为这些器件的学习需要微积分的知识。但是,求解电感和电容电路的基本分析方法和第2章介绍的分析方法是相同的。学到第6章的时候,将开始计算更困难的方程,应当精通微积分的方法。

2.1 电压源和电流源

在讨论理想电压源和电流源之前,需要先考虑一般性的电源。电源是一种器件,可以将非电能转换为电能,并且反之亦然。正在放电的电池将化学能转化为电能,正在充电的电池将电能转化为化学能。发电机是一种机器,它能将机械能转化为电能,并且反之亦然。如果运行在机械到电的转换模式时,这种机器被称做发电机。如果是将电能转化为机械能,则被称做电动机。电源的重要特点是既能释放也能吸收电功率,通常既维持电压也维持电流。这种特性对电路分析有着特别的意义,并且导致了作为基本电路元件的理想电压源和理想电流源的产生。用理想基本电路元件模拟实际电源是一种真正的挑战。

理想电压源是一种电路元件,无论流过其两端电流的大小如何,都将保持端电压为规定值。与此相似,理想电流源也是一种电路元件,它保持端电流为规定值,不论端电压的大小如何。这些电路元件在现实中并不存在,它们只是实际电压源和电流源的理想化模型。

将电压源和电流源作为理想模型使用,有一个重要的问题,即如何用数学方式描述。因为理想电压源提供稳定的电压,甚至元件电流变化时仍然能够提供稳定的电压,因此,在理想电压源的描述中,指定电流作为电压的函数是不行的。同样道理,如果只知道一个理想电流源的电流值,那么,不可能确定电流源的端电压。为了简化分析,在电路分析中,将使用理想电源,不再讨论实际电源中的电压和电流。

可以将理想电压源和电流源进一步描述为独立源和非独立源两种形式。在电路中建立的电压或电流不依赖电路别处的电压或电流,则为独立源。电压或电流值由独立源的数值指定。非独立源建立的电压或电流则取决于电路别处的电压或电流,如果不知道控制非独立源的电压或电流,也就不知道它的数值。

理想独立源的电路符号如图2.1所示。用圆圈符号表示独立源。在电路中,一个完整的理想独立电压源,必须包含源电压值和参考极性,如图2.1(a)所示。同样,一个完整的理想独立电流源,必须包含源电流值和参考方向,如图2.1(b)所示。

理想非独立源的电路符号如图2.2所示。菱形符号用来表示非独立源。非独立电流源和非独立电压源都可以被电路别处的电压或者电流控制。所以,非独立源共有四种类型,如图2.2所示。非独立源有时被称做受控源。

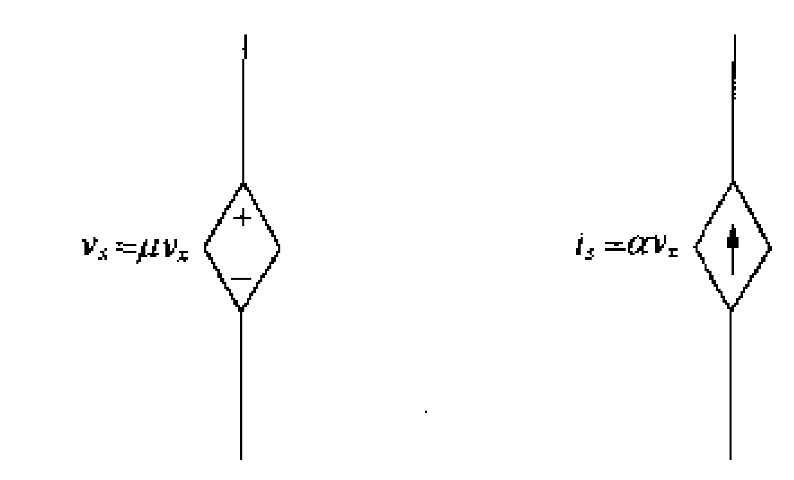
要完整地描述非独立电压控制电压源,需要知道控制电压和源电压的参考极性,通过控制电压可以用方程式计算源电压。在图2.2(a)中,控制电压是 v_x,方程式确定源电压 v_s 为:

$$v_s = \mu v_x$$

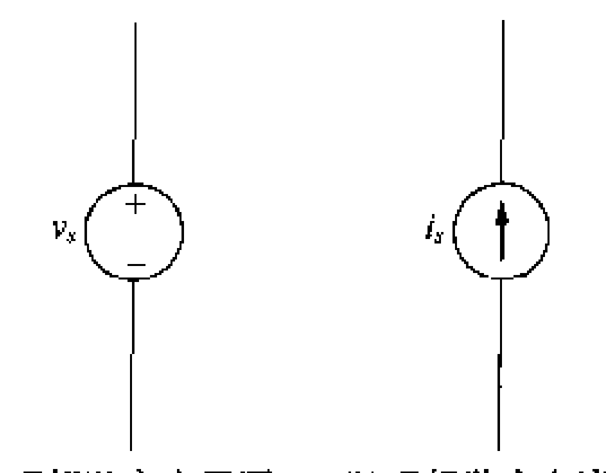
v_s 的参考极性如图所示。注意:μ 是一个无量纲的系数。

要完整地描述其他理想非独立电源也有类似的情况。在图2.2(b)中,控制电流是 i_x,方

程式确定源电压 v_s 为：

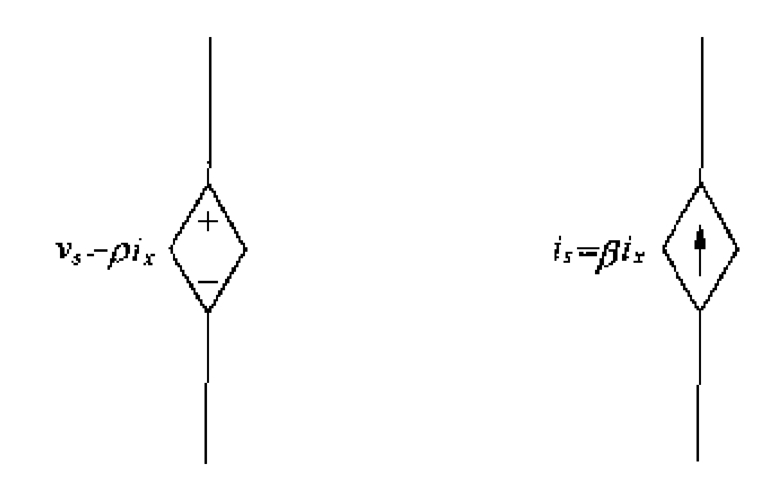


(a)理想非独立电压控制电压源 (c)理想非独立电压控制电流源



(a)理想独立电压源 (b)理想独立电流源

图 2.1 电路符号



(b)理想非独立电流控制电压源 (d)理想非独立电流控制电流源

图 2.2 电路符号

$$v_s = \rho i_x$$

参考极性如图所示。系数 ρ 的量纲为欧姆。在图 2.2(c)中，控制电压是 v_x，方程式确定源电流 i_s 为：

$$i_s = \alpha v_x$$

参考方向如图所示。系数 α 的量纲为西门子。在图 2.2(d)中，控制电流是 i_x，方程式确定源电流 i_s 为：

$$i_s = \beta i_x$$

参考方向如图所示。β 是一个无量纲的系数。

最后，我们应当注意到，理想非独立源都是有源电路元件。有源元件是可以产生电能量的器件。无源元件是不能产生电能量的器件。电阻、电感和电容是无源元件。例 2.1 和 2.2 将要说明理想独立源和非独立源的连接特性，电源互连时所受到的限制。

例 2.1 利用理想独立电压源和电流源的定义，说明图 2.3 中哪些互连是允许的，哪些由于理想电源的影响违反了约束。

解：

(a) 连接是正确的。每个电源提供的电压加在同一对端子 a，b 上，只要每个电源提供的电压相同而且极性相同，就是正确的。

(b) 连接是正确的。每个电源提供的电流流过同一对端子 a，b，只要每个电源提供的电流相同而且方向相同，就是正确的。

(c) 连接是不允许的。每个电源提供的电压加在同一对端子 a，b 上，要求每个电源提供的电压相同而且极性相同，而电路连接没能做到这一点。

(d) 连接是不允许的。每个电源提供的电流流过同一对端子 a,b,要求每个电源提供的电流相同而且方向相同,而电路连接没能做到这一点。

(e) 连接是正确的。电压源提供的电压加在一对端子 a,b 上。电流源提供的电流流过同一对端子。因为理想电压源提供的是电压而不用管电流大小,理想电流源提供的是电流而不用管电压大小,所以允许这样连接。

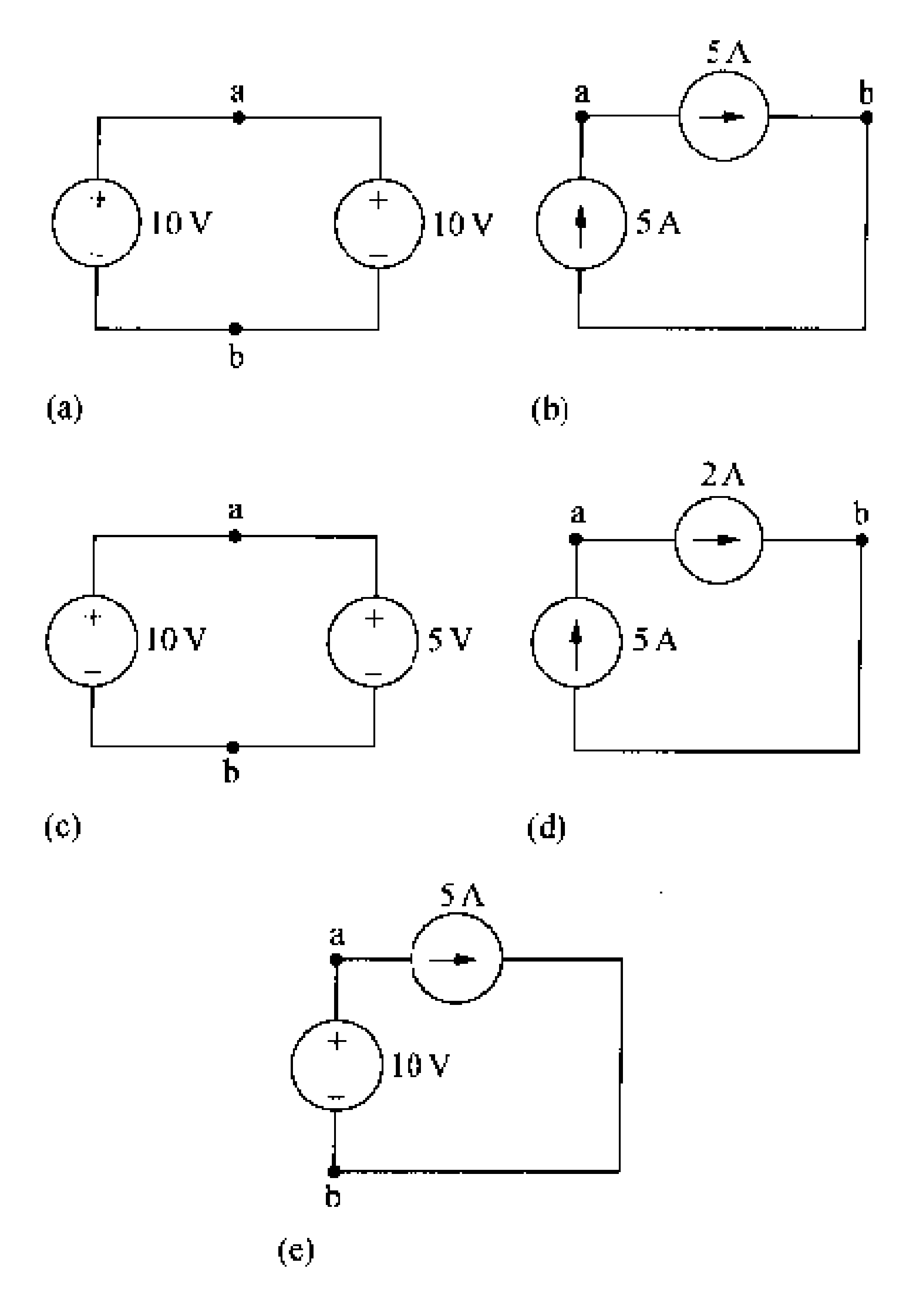


图 2.3 例 2.1 电路

例 2.2 利用理想独立源和非独立源的定义,说明图 2.4 中哪些互连是正确的,哪些由于理想电源的影响违反了规定。

解:

(a) 连接不正确。独立源和非独立源提供的电压加在同一对端子 a,b 上,则要求每个电源提供的电压相同而且极性相同,该电路中的独立源提供 5 V 电压,而非独立源提供 15 V 电压。

(b) 连接正确。独立电压源提供的电压加在一对端子 a,b 上,非独立电流源提供的电流流过同一对端子。因为理想电压源提供电压而不管电流的大小,理想电流源提供电流而不管电压的大小,所以允许这样连接。

(c) 连接正确。独立电流源提供的电流流过一对端子 a,b,非独立电压源提供的电压加在同一对端子上。因为理想电压源提供电压而不管电流的大小,理想电流源提供电流而不管电压的大小,所以允许这样连接。

(d) 连接不正确。独立源和非独立源提供的电流流过同一对端子 a,b,因此要求每个电源

提供的电流相同而且参考方向相同。在该电路中，独立源提供 2 A 电流，而非独立源提供 6 A 电流，且方向不同。

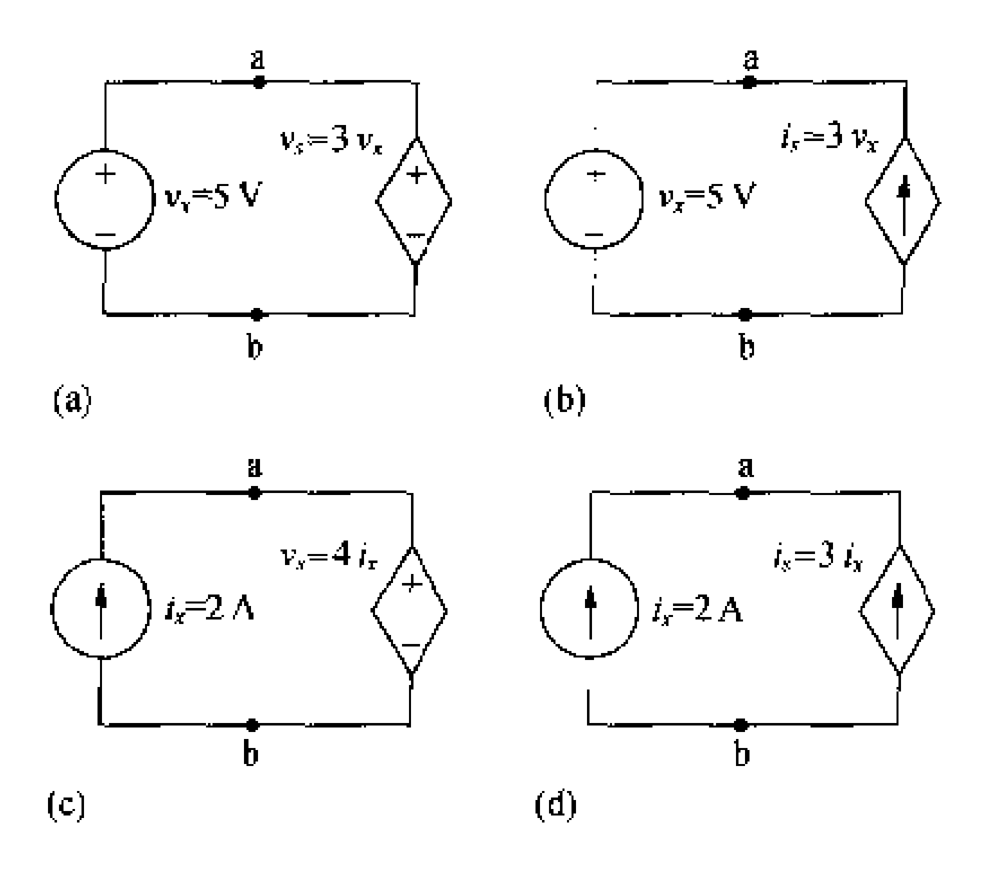


图 2.4 例 2.2 电路

2.2 电阻(欧姆定律)

电阻是阻碍电流(或电荷)流动的物质能力。模拟这种行为的电路元件称为电阻。图 2.5 给出了电阻的电路符号，用 R 表示电阻的电阻值。

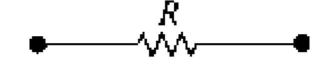


图 2.5 电阻的电路符号，电阻值为 R

概念上理解电阻比较容易。可以想像，构成电流的电子在运动过程中与物质原子结构相互作用，并受到一定的阻力。在运动的相互作用过程中，一些电能被转化为热能并且以热的形式消耗掉，这种消耗是不受欢迎的。然而，许多有用的电器却吸取了电阻发热的特点，这包括电炉、烤面包机、电熨斗和空间对流加热器等。

大多数材料对电流的电阻是可测量的。电阻的数值大小取决于所用的材料。金属如铜和铝的阻值很小，用这些材料作导通电流的导线，是一个很好的选择。事实上，在表示一个电路图时，铜或铝导线不常表现为电阻模型，因为导线电阻与电路中其他元件的电阻相比，简直是太小了，所以为了简化电路，可以忽略导线电阻。

为了进行电路分析，必须根据端电压确定电阻电流的参考方向。有两种方式可以选择，或者与电阻上电压降的方向一致，或者与电阻上电压升的方向一致，如图 2.6 所示。如果选择前者，电压和电流的关系为：

$$v = iR \tag{2.1}$$

其中

v 是电压，单位是伏特。

i 是电流，单位是安培。

R 是电阻,单位是欧姆。

如果选择第二种方式,应当写成:

$$v = -iR \tag{2.2}$$

其中 v, i 和 R 与前面的介绍一样,单位分别是伏特、安培和欧姆。式(2.1)和(2.2)的代数符号是无源符号约定的直接结果。无源符号约定已经在第一章介绍过。

式(2.1)和(2.2)通称欧姆定律,定律以一个德国物理学家欧姆的名字命名,欧姆早在十九世纪就得到应用。欧姆定律是电阻的电压和电流之间的代数关系式。在 SI 单位中,电阻的单位是欧姆。希腊字母 Ω 是欧姆的标准符号。8 Ω 电阻的电路符号如图 2.7 所示。

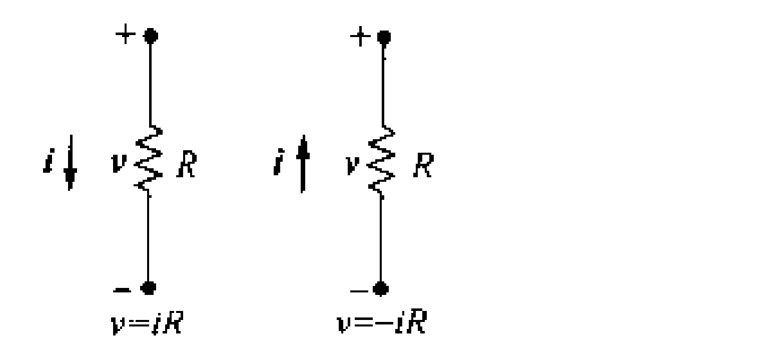


图 2.6 电阻端电压和电流的两种选择方式及方程

8 Ω

图 2.7 8 Ω 电阻的电路符号

欧姆定律将电压表示为电流的函数。然而也可以通过转换,将电流表示为电压的函数。因此从式(2.1)可以得到:

$$i = \frac{v}{R} \tag{2.3}$$

或从式(2.2)得到:

$$i = -\frac{v}{R} \tag{2.4}$$

电阻的倒数被称为电导,符号用字母 G 表示,单位是西门子(S)。因此:

$$G = \frac{1}{R}\ \mathrm{S} \tag{2.5}$$

一个 8 Ω 的电阻电导值是 0.125 S。在大量的专业文献中,电导的单位也使用姆欧(将欧姆倒过来写),它的符号记为℧。因此我们也可以将一个 8 Ω 的电阻描述为一个 0.125 姆欧的电导。

在电路分析中,可以使用理想电阻模拟物理器件的行为。使用限定词"理想"的含义是,电阻模型对实际电阻件的特性做了一些简化。这些简化非常重要,如理想电阻器的电阻是常数,而且它的数值不随时间变化。而大多数实际电阻器件没有恒定的电阻,而且它们的电阻值随时间变化。理想电阻器模型用来表示这样一些物理器件:在电路分析所关心的时间周期里,这些物理器件的电阻值保持在某个恒定值,数值基本不变。在本书中,可以认为有关电阻器件的简化是正确的,并且在电路分析中可以使用理想电阻器。

计算电阻端子上的功率有几种方法。

第一种方法,使用定义计算端电压和电流的乘积。如图 2.6 所示的参考系统,当 $v = iR$ 时,写做:

$$p = vi \tag{2.6}$$

而当 $v = -iR$ 时,写做:

$$p = -vi \tag{2.7}$$

第二种方法是用电流和电阻来计算功率。将式(2.1)代入式(2.6)，得到：

$$p = vi = (iR)i = i^2R \tag{2.8}$$

同样，将式(2.2)代入式(2.7)，有：

$$p = -vi = -(-iR)i = i^2R \tag{2.9}$$

式(2.8)和式(2.9)是相同的。可以证明，不管电压的极性和电流的方向如何，电阻两端的功率是正的。因此电阻吸收电路中的功率。

第三种方法是用电压和电阻来计算功率。表达式与参考极性无关，即：

$$p = \frac{v^2}{R} \tag{2.10}$$

有时电阻器的值被表示为电导而不是电阻。使用电阻和电导之间的关系式(2.5)，可以用电导来写式(2.9)和式(2.10)，即：

$$p = \frac{i^2}{G} \tag{2.11}$$

$$p = v^2G \tag{2.12}$$

式(2.6)~(2.12)提供了计算电阻吸收功率的不同方法。每一种方法的答案都是一致的。在分析某个电路时，应注意观察提供的信息，根据已知信息选择适当的功率计算表达式。

例 2.3 说明了欧姆定律在理想电源和电阻连接电路中的应用，对电阻两端的功率计算也做了说明。

例 2.3　在图 2.8 的每一个电路里，电压 v 或电流 i 是未知数。

(a) 计算 v 和 i。

(b) 确定每个电阻中消耗的功率。

解：

(a) 在图 2.8 (a) 中，v_a 电压降方向与电阻上的电流方向一致。所以：

$$v_a = (1)(8) = 8\ \text{V}$$

在图 2.8 (b) 中，电导为 0.2 S，电阻上的电流为 i_b，其方向与电阻上的电压降方向一致。所以：

$$i_b = (50)(0.2) = 10\ \text{A}$$

在图 2.8 (c) 中，v_c 电压升方向与电阻上的电流方向一致。所以：

$$v_c = -(1)(20) = -20\ \text{V}$$

在图 2.8 (d) 中，电阻为 25 Ω 电阻上的电流 i_d，其方向与电阻上的电压升方向一致，所以：

$$i_d = \frac{-50}{25} = -2\ \text{A}$$

(b) 四个电阻消耗的功率分别是：

$$p_{8\Omega} = \frac{(8)^2}{8} = (1)^2(8) = 8\ \text{W}$$

$$p_{0.2S} = (50)^2(0.2) = 500\ \text{W}$$

$$p_{20\Omega} = \frac{(-20)^2}{20} = (1)^2(20) = 20\ \text{W}$$

$$p_{25\Omega}=\frac{(50)^2}{25}=(-2)^2(25)=100\ \mathrm{W}$$

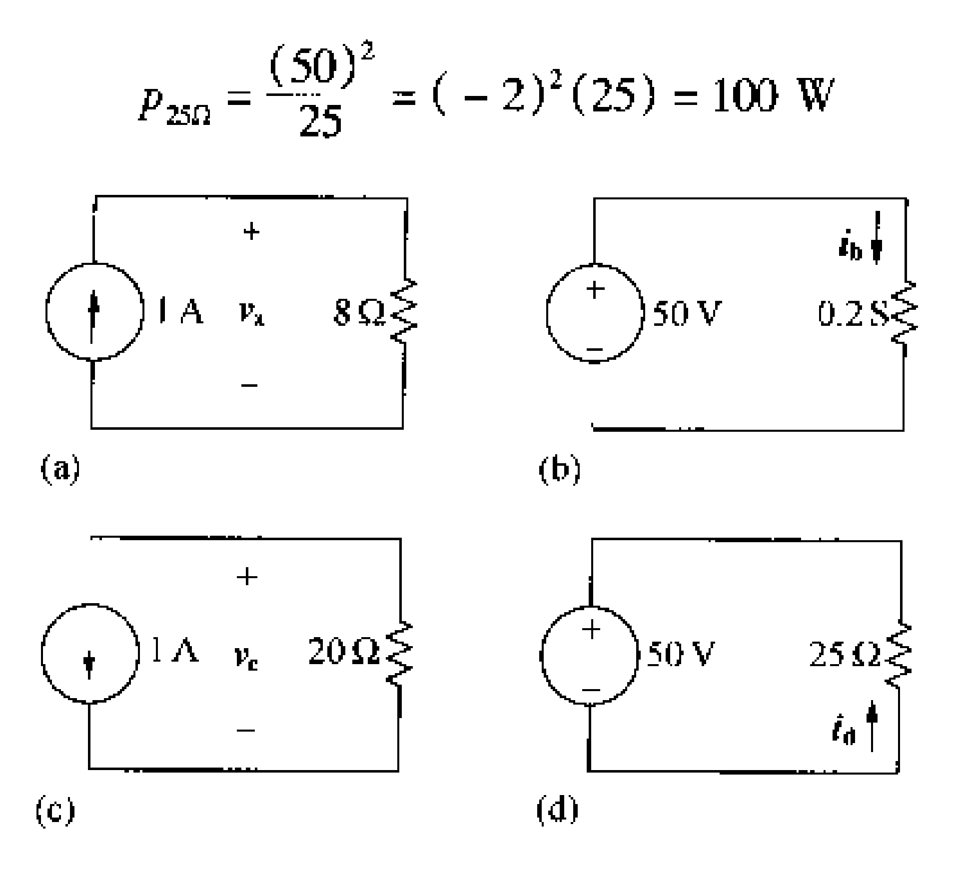


图 2.8 例 2.3 的电路

介绍了理想电源和电阻的一般特性之后,下面将说明如何使用这些元件去构造实际系统的电路模型。

2.3 电路模型结构

我们之所以对基本电路元件感兴趣,理由就是用基本电路元件可以构造实际系统的电路模型。开发一个器件或系统的电路模型所需的技巧,和求解一个分支电路所需的技巧同样复杂。尽管本书强调的是求解电路所需的技巧,但是,电气工程实际中还需要其他方面的技巧,最重要的技巧之一就是建模。

在下面两个例子中,将开发电路模型。在例 2.4 中,根据系统组件行为的知识和组件的互连方式构造一个电路模型。在例 2.5 中,依据测量器件端子的特性创造一个电路模型。

例 2.4 构造一个手电筒电路模型。

解:

之所以选择手电筒来说明实际系统,是因为手电筒对大家来说太熟悉了。图 2.9(a) 给出了一个广泛使用的手电筒的照片。图 2.9(b) 给出被分解的手电筒部件。

当手电筒被当做一个电系统,主要关心的组件是电池、灯泡、连接器、容器和开关。现在考虑每一个部件的电路模型。

如果要求的电流不太大,干电池可以认为具有恒定的端电压。如果干电池工作在限制范围内,可以用理想电压源来模拟它。这样规定的电压是恒定的,而且等于两节干电池电压的和。

灯泡最终输出光能,当灯泡里的灯丝被加热到足够的温度,会在可见范围内发光。可以用一个理想电阻器来模拟灯泡。注意在这种情况下,尽管电阻器说明了电能转化为热能,但是,无法预测有多少热能转化为光能。表示灯泡的电阻器可以预测电池释放的稳定电流,这是重要的系统特性。在这个模型中,灯泡电阻用符号 R_l 表示。

手电筒中的连接器具有双重任务。首先,在干电池和容器之间提供一条导电通道。其次,它形成弹簧卷为电池和灯泡之间的接触提供了机械压力。机械压力的目的是保持两个干

电池之间的接触,以及保持干电池和灯泡之间的接触。所以,在为连接器选电线的过程中,发现它的机械特性比它的电特性更重要。可以用理想电阻器来模拟连接器,并标记为 R_1。

容器也有着机械和电的作用。机械方面,容器中装有所有其他部件并且提供了把手,便于人们使用。电气方面,它提供了手电筒中其他元件之间的连接。如果容器是金属的,它在电池和灯泡之间导电;如果是塑料的,容器里面的一条金属带连接盘绕的连接器和开关。不管怎么说,可以用 R_c 表示的理想电阻器,模拟由容器提供的电连接。

最后的部件是开关。在电气方面,开关是一个两状态器件,或是接通或是断开。一个理想的开关处于接通状态时对电流没有阻力;但是当处于断开状态时对电流的阻力无穷大。这两种状态表示了电阻的极限值,接通状态对应电阻的阻值为零,而断开状态对应电阻的阻值为无穷大。两个极端值分别命名为短路($R=0$)和开路($R=\infty$)。图 2.10(a)和(b)表示了短路和开路现象。图 2.10(c)中的符号说明了一个事实,即开关可以短路也可以开路,这取决于开关接触点的位置。

现在开始构造手电筒的电路模型。从干电池开始,第一节的正端连接到第二节的负端,如图 2.11 所示。第二节的正端连接到灯泡的一端。灯泡的另一端与开关的一端接触,开关的另一端与金属容器连接。金属容器通过金属弹簧连接到第一节干电池的负端。注意:元件形成了一个闭合路径或电路。在图 2.11 中,虚线描绘了闭合路径。图 2.12 给出了手电筒的电路模型。



图 2.9 作为 -个电系统的手电筒

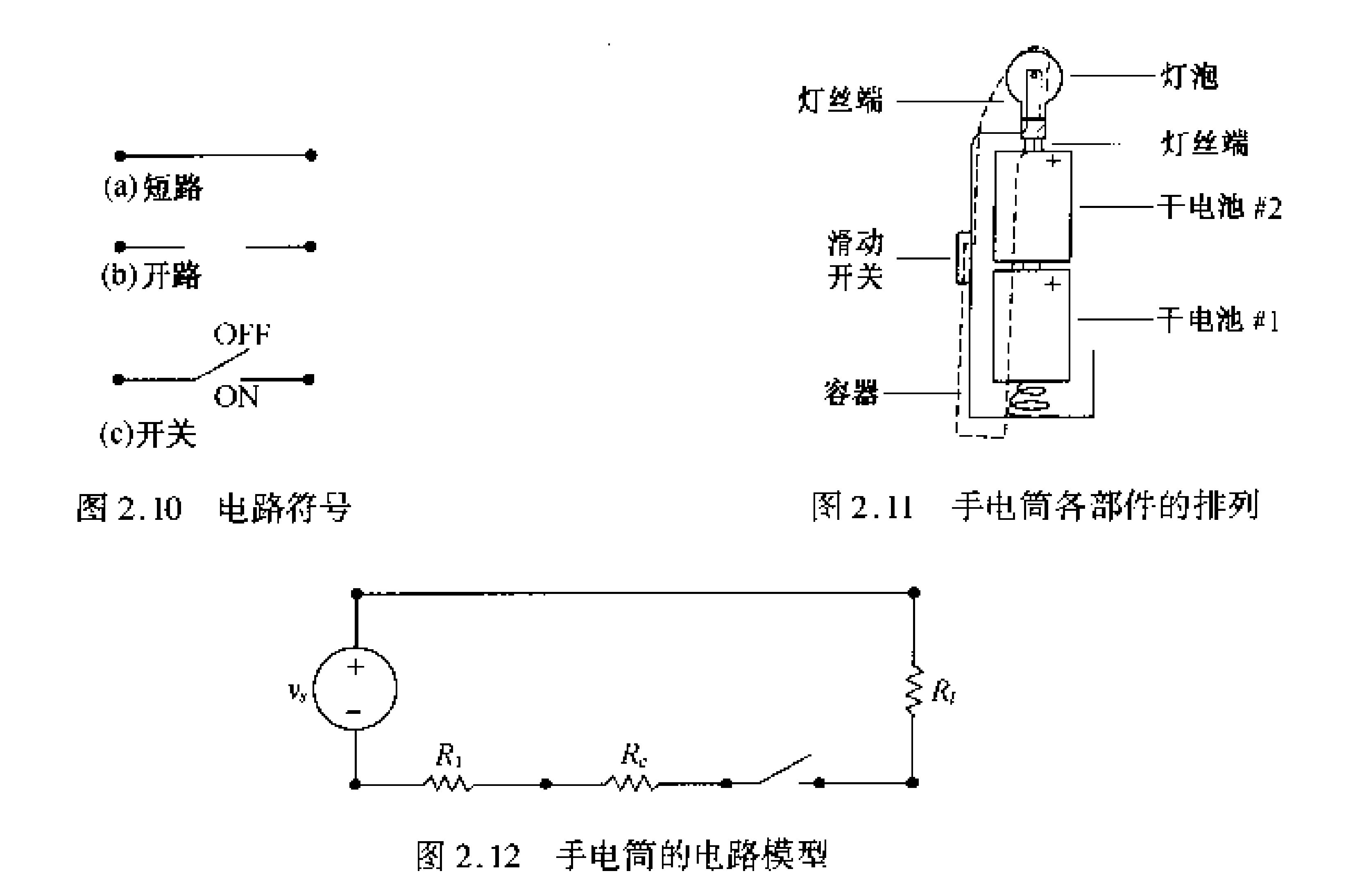


图 2.10　电路符号

图 2.11　手电筒各部件的排列

图 2.12　手电筒的电路模型

有关手电筒例子中的模型讨论如下：首先，开发一个电路模型时，应当注意每一个物理部件的电气特性。在手电筒模型中，三个完全不同的物理部件 —— 一个灯泡，一根盘绕的导线和一个金属容器，都表示为相同的电路元件(电阻)，因为每一个组件的电气特性都是相同的，它们都表示了对通过电路电流的阻力。

其次，电路模型需要计算不期望的和期望的电效应。例如，灯泡电阻的热效应产生光，这是我们期望的效应。然而，容器和盘绕导线电阻的热效应属于多余的效应或寄生效应，它消耗干电池并产生无用的输出。这样的寄生效应必须要考虑，否则模型不能充分地表示系统的特性。

最后，模型需要近似。即使是表示手电筒的基本系统，在开发电路模型时，也做了简化假定。例如，假定一个理想的开关不是实际的开关，接触电阻可能高到妨碍系统的正常工作。我们的模型不能预测这种行为。还假定盘绕的连接器施加足够大的压力以消除干电池之间的电阻。我们的模型不能预测不适当的压力效应。使用理想电压源，忽略了干电池端的能量损耗。损耗是由刚才提及的寄生热效应引起。可以在电源和灯泡电阻之间加一个理想电阻来计算这些影响。

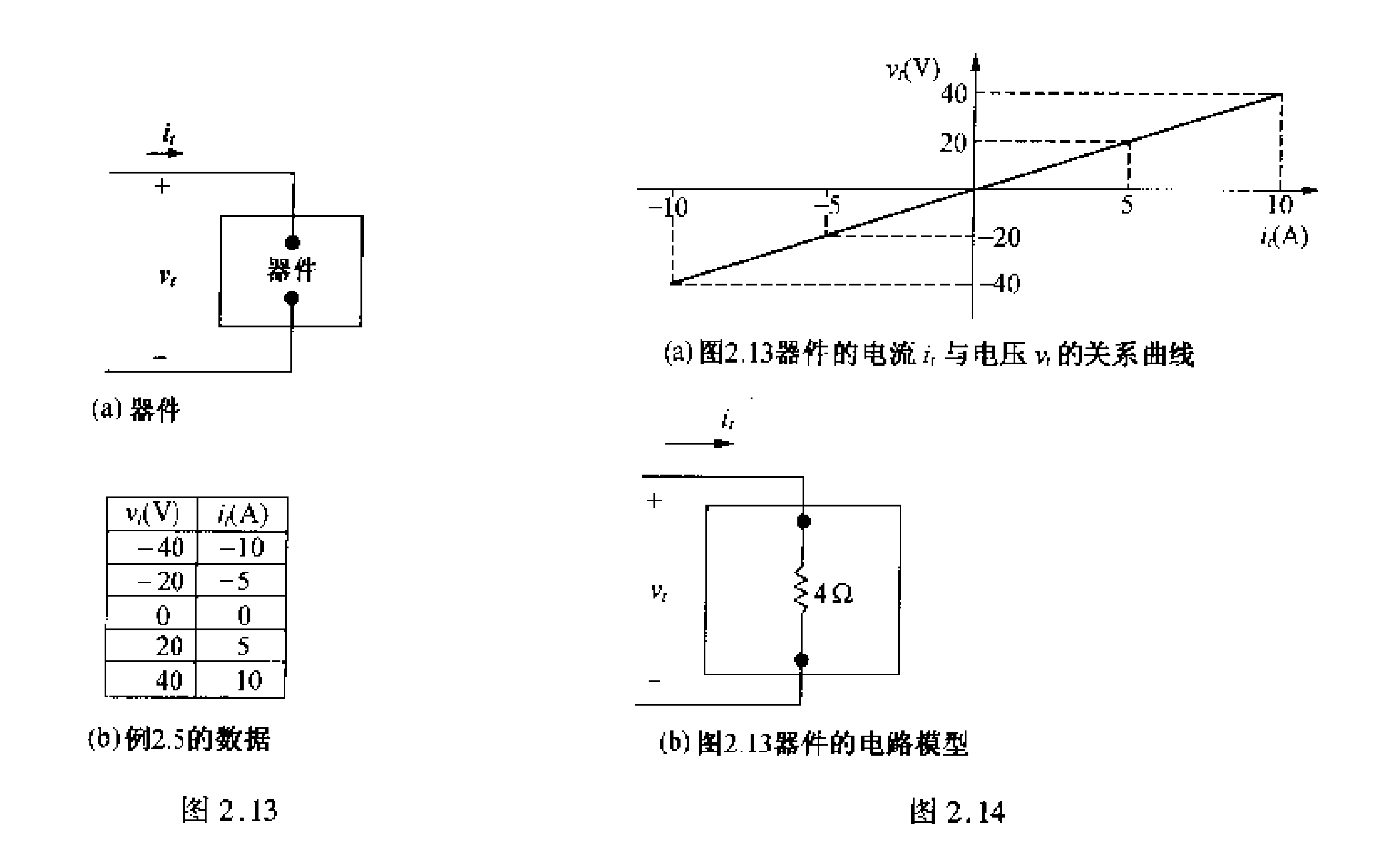
将手电筒模拟为电路，已经对系统有了基本理解并接触到了系统内部部件。然而有时我们仅仅知道一个器件的端子行为，而且需要使用这些信息构造模型。例 2.5 探讨这样一个建模问题。

例 2.5　图 2.13 (a) 所示器件的端电压和电流已知，v_t 和 i_t 值列表在图 2.13 (b)。构造一个盒子内部器件的电路模型。

解：

将电压作为电流的函数，关系曲线如图 2.14 (a) 所示。该图中的曲线关系说明端电压和端电流成正比，$v_t = 4\ i_t$。根据欧姆定律，盒子内部器件的特性如同 4 Ω 电阻。所以盒子内部器件的电路模型是一个 4 Ω 电阻，如图 2.14 (b) 所示。

介绍了基尔霍夫定律和电路分析之后,会用到根据端子特性构造一个电路模型的技巧。(见例 2.9,练习题 2.4~2.5,习题 2.17~2.20)。



(a) 器件

v_t(V)	i_t(A)
−40	−10
−20	−5
0	0
20	5
40	10

(b) 例2.5的数据

图 2.13

(a) 图2.13器件的电流 i_t 与电压 v_t 的关系曲线

(b) 图2.13器件的电路模型

图 2.14

2.4 基尔霍夫定律

如果电路每一个元件上的电压和电流已经确定,称这个电路已被求解。在求解过程中,欧姆定律是一个重要的方程式。然而单凭欧姆定律还不足以得到完全解答。就像我们试图求解例 2.4 中的手电筒电路那样,需要用到两个更重要的代数关系式求解多数电路,这两个代数关系式被称做基尔霍夫定律。

重新画电路如图 2.15 所示,开关处于接通状态。注意:这里标出了与每一个电阻相关的电流和电压,标出了与电压源关联的电流,同时给出了参考极性。为了方便起见,电压和电流的下标与电阻下标相一致。在图 2.15 中,移动了图 2.12 中的一些端点,并插入了节点。端点是分立电路元件的起点和终点。节点是两个或多个元件的连接点。为了使用基尔霍夫定律,识别节点是必需的。在图 2.15 中,节点为 a,b,c 和 d。节点 d 连接电池和灯泡,以及所有通向电路顶部的路径,为了方便起见,只标了一个单点。开关任意一边的点显示了它的端子,只需要用一个节点表示,所以,只有节点 c。

对于图 2.15 中的电路,能够识别七个未知量:i_s, i_1, i_c, i_l, v_1, v_c 和 v_l, v_s 是已知电压,表示两节干电池端电压的和,为 3 V 恒定电压。问题是求解七个未知量。根据代数学,求 n 个未知量,必须解 n 个独立方程。根据 2.2 节讨论的欧姆定律,知道三个必要的方程是:

$$v_1 = i_1 R_1 \tag{2.13}$$

$$v_c = i_c R_c \tag{2.14}$$

$$v_l = i_l R_l \tag{2.15}$$

另外的四个方程是什么呢?

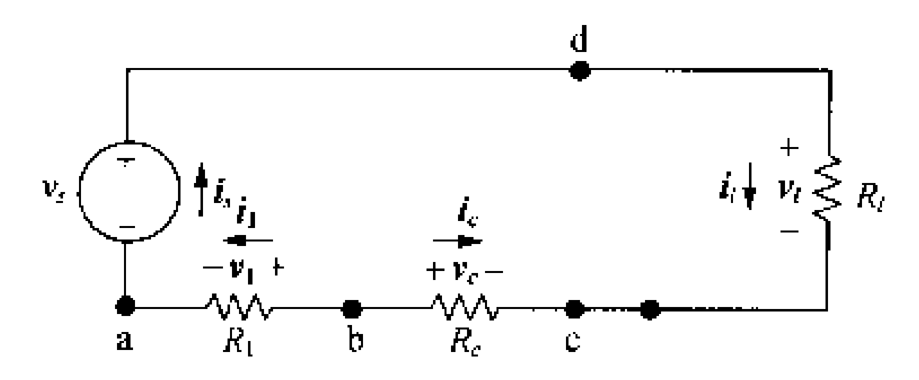


图 2.15 指定电压、电流变量的手电筒电路模型

电路元件的互相连接,对端电压和电流之间产生了约束。这些约束称为基尔霍夫定律。定律以基尔霍夫命名,基尔霍夫首先在 1848 年发表的论文中提出。用数学形式陈述了约束的两个定律,分别称为基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律。

基尔霍夫电流定律:

在电路中,任何节点上的所有电流的代数和等于零。

使用基尔霍夫电流定律,对应参考方向的代数符号必须分配给每一个节点电流。离开节点的电流为正号,进入节点的电流为负号。或倒过来,离开节点的电流为负号,进入节点的电流为正号。

对图 2.15 所示电路的四个节点应用基尔霍夫电流定律,使用电流离开节点为正的规定。产生四个方程式:

节点 a $$i_s - i_1 = 0 \tag{2.16}$$

节点 b $$i_1 + i_c = 0 \tag{2.17}$$

节点 c $$-i_c - i_l = 0 \tag{2.18}$$

节点 d $$i_l - i_s = 0 \tag{2.19}$$

注意式(2.16)~(2.19)不是一组独立的方程。因为四个方程中的任意一个可以通过其他三个方程得到。所有含 n 个节点的电路中,利用基尔霍夫电流定律可以得到 $n-1$ 个独立的电流方程式。[①] 让我们略去式(2.19),这样就有了六个独立的方程,即式(2.13)~(2.18)。还需要一个方程,可以从基尔霍夫电压定律中得到。

在陈述基尔霍夫电压定律之前,必须先定义闭合路径或回路。任选一个节点作为起点,沿着电路中的闭合路径,应通过所选的基本电路元件回到原始节点,其间通过任何中间节点不超过一次。图 2.15 中的电路只有一个闭合路径或回路。例如,选择节点 a 作为起点,沿着电路顺时针方向,通过节点 d,c 和 b 回到 a,形成一个闭合路径。

基尔霍夫电压定律:

在电路中,环绕任何闭合路径的所有电压的代数和等于零。

要使用基尔霍夫电压定律,必须对回路中每一个电压分配代数符号(对应参考方向)。当沿着闭合路径,电压将沿着相应方向呈现升高或降低。正号表示电压升,则负号表示电压降,反过来,若给电压升为负号,电压降则为正号。

下面对图 2.15 中的电路应用基尔霍夫电压定律。选择沿闭合路径顺时针方向,电压降用正号。从节点 d 开始,得到方程式:

① 关于列写电路方程的详细内容将在第 4 章讨论。

$$v_l - v_c + v_1 - v_s = 0 \tag{2.20}$$

这就是前面提到的求解七个未知电路变量所需要的第七个独立方程。

解七个方程求解两节干电池释放到手电筒灯泡的电流，这个想法不太吸引人。因此在下面的章节，将介绍分析技巧，使得写一个方程就能够求解一个简单的单回路电路。然而，在讨论这些电路技巧之前，关于手电筒电路的详细分析，需要有几点说明。一般来说，这几点说明对后来章节的讨论是重要的。当然对手电筒电路中未知量求解同样适用。

首先，如果已知电阻的电流，也就已知电阻上的电压，因为电流和电压通过欧姆定律直接相关。因此可以将一个未知变量与每一个电阻联系起来，或者是电流或者是电压。如果电阻中的电流是未知量，那么，一旦求出了电阻中的未知电流，也就能求出电阻上的电压。一般来说，如果已知一个无源元件中的电流，就能求出它上面的电压。因此大大减少了要求解方程的数量。例如，在手电筒电路中，已知 v_1，v_c 和 v_l，就可以简化分析任务，只需要解四个方程而不是七个。

其次，有关只连接两个元件形成一个节点的推论。遵照基尔霍夫电流定律，当只有两个元件连接到一个节点，如果已知一个元件里的电流，也就知道了第二个元件里的电流。换句话说，对两个元件，只要定义一个未知电流。当两个元件连接在一个单节点，元件被称做串联。这个结论非常重要，图 2.15 所示电路中的所有节点都是只涉及两个元件。因此，只需要定义一个未知电流。理由是从式(2.13)～(2.18)可直接推出：

$$i_s = i_1 = -i_c = i_l \tag{2.21}$$

上式说明，如果已知任一元件的电流，就知道了所有的电流。例如，选择 i_s 为未知量，取消 i_1，i_c 和 i_l。问题就简化为确定一个未知量，即 i_s。

例 2.6 和 2.7 说明如何根据基尔霍夫定律写电路方程式。例 2.8 说明如何根据基尔霍夫定律和欧姆定律求一个未知电流。例 2.9 扩展了例 2.5 中介绍的技巧，给端子特性已知的器件构造一个电路模型。

例 2.6 将图 2.16 所示电路中的每一个节点的电流相加。注意：图中央无连接点，4 Ω 支路与包含理想电流源 i_a 的支路交叉。

解：

列写方程式时，设离开节点的电流为正号。四个方程式是：

节点 a $\quad i_1 + i_4 - i_2 - i_5 = 0$

节点 b $\quad i_2 + i_3 - i_1 - i_b - i_a = 0$

节点 c $\quad i_b - i_3 - i_4 - i_c = 0$

节点 d $\quad i_5 + i_a + i_c = 0$

例 2.7 将图 2.17 所示电路中每一个指定路径上的电压相加。

解：

列写方程式时，设电压降取正符号。四个方程式是：

路径 a $\quad -v_1 + v_2 + v_4 - v_b - v_3 = 0$

路径 b $\quad -v_a + v_3 + v_5 = 0$

路径 c $\quad v_b - v_4 - v_c - v_6 - v_5 = 0$

路径 d $$-v_a - v_1 + v_2 - v_c + v_7 - v_d = 0$$

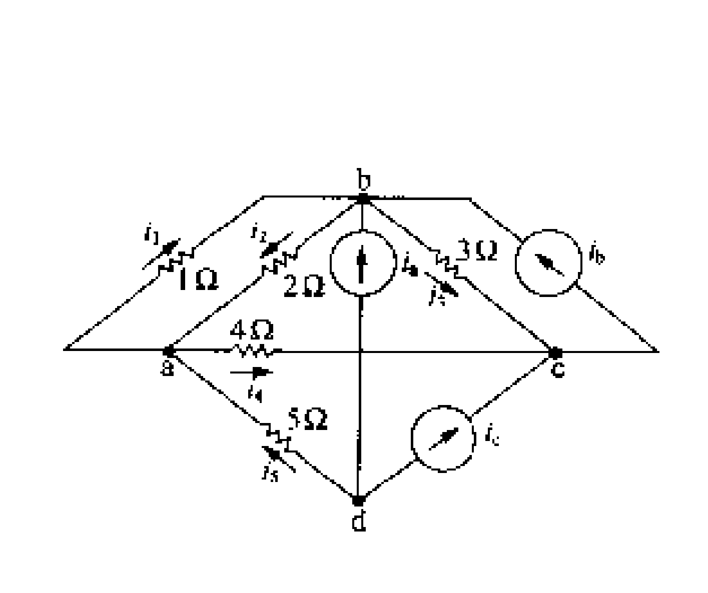


图 2.16 例 2.6 电路

图 2.17 例 2.7 电路

例 2.8 (a) 用基尔霍夫定律和欧姆定律求图 2.18 所示电路中的 i_o。

(b) 通过检验产生的全部功率是否等于消耗的全部功率来检查 i_o 的正确性。

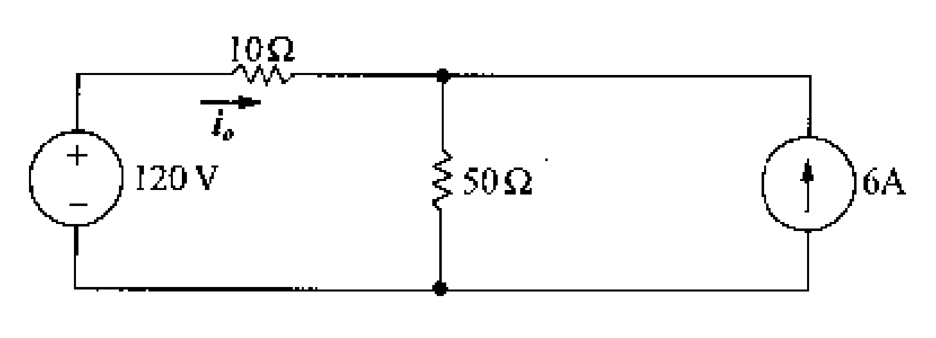


图 2.18 例 2.8 电路

解:

(a) 重新画出电路并指定未知电流通过 50 Ω 电阻,指定未知电压加在 10 Ω 以及 50 Ω 电阻上,如图 2.19 所示。节点标记为 a,b 和 c,以帮助讨论。

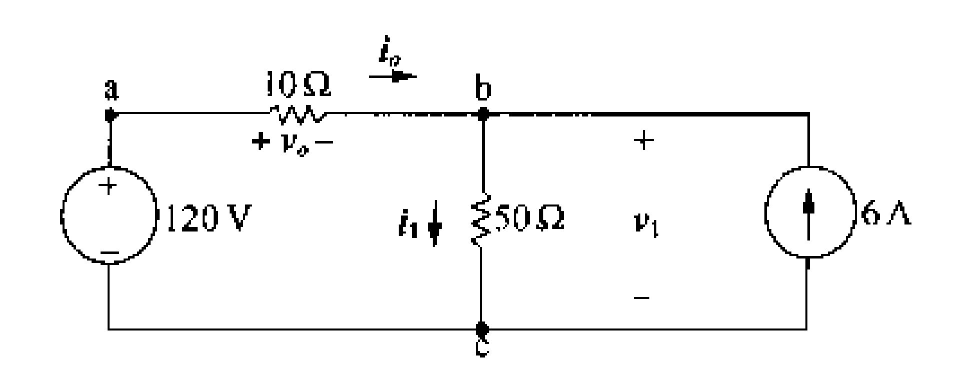


图 2.19 在图 2.18 所示电路上指定未知量 i_1,v_o 和 v_1

因为 i_o 也是流过 120 V 电源的电流,有两个未知电流,因此,必须得到两个包含 i_o 和 i_1 的联立方程。在节点 b 或 c 利用基尔霍夫电流定律可以得到一个方程。设电流离开节点为正,将节点 b 上电流相加,得:

$$i_1 - i_o - 6 = 0$$

利用基尔霍夫电压定律并结合欧姆定律得到第二个方程。应当注意的是,根据欧姆定律,v_o 为 $10i_o$,v_1 为 $50i_1$,将环绕闭合路径的电压相加,得:

$$-120+10i_o+50i_1=0$$

在列写这些方程时，设沿顺时针方向，电压降为正。解这两个方程式，得：

$$i_o=-3\text{ A 和 } i_1=3\text{ A}$$

(b)消耗在 50 Ω 电阻上的功率是：

$$p_{50\Omega}=(3)^2 50=450\text{ W}$$

消耗在 10 Ω 电阻上的功率是：

$$p_{10\Omega}=(-3)^2 10=90\text{ W}$$

释放到 120 V 电源的功率是：

$$p_{120V}=-120i_o=-120(-3)=360\text{ W}$$

释放到 6 A 电源的功率是：

$$p_{6A}=-v_1(6)\text{，由于 } v_1=50i_1=150\text{ V}$$

所以：

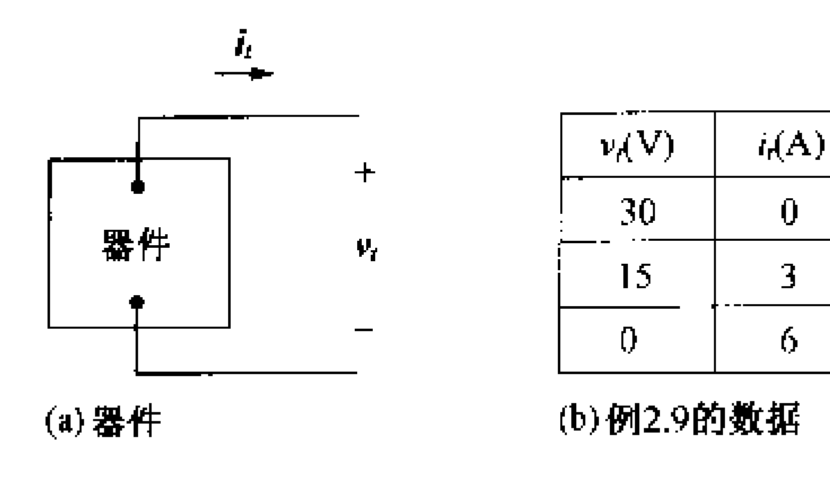
$$p_{6A}=-150(6)=-900\text{ W}$$

6 A 电源释放 900 W，120 V 电源吸收 360 W。吸收的全部功率是 360 + 450 + 90 = 900 W。所以，结果证实释放的功率等于吸收的功率。

例 2.9　被测量的器件如图 2.20 (a)所示。器件端电压 v_t 和端电流 i_t 列表于图 2.20 (b)。

(a) 为盒子内部的器件构造一个模型。

(b) 用这个模型，预测器件释放到 10 Ω 电阻上的功率。



v_t(V)	i_t(A)
30	0
15	3
0	6

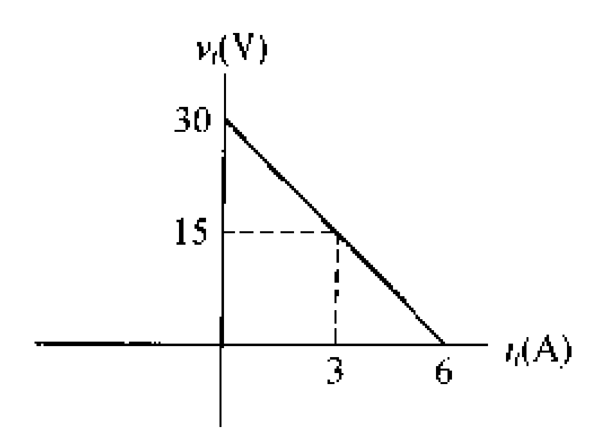
图 2.20

解：

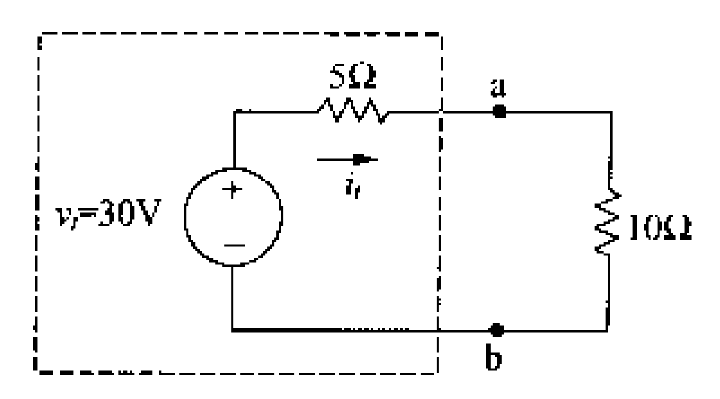
(a) 将电压作为电流的函数，所绘特性如图 2.21 (a) 所示。所绘特性的方程式是：

$$v_t=30-5i_t$$

要确定电路模型的组件，这些组件将产生相同的电压电流关系。基尔霍夫电压定律告诉我们，端电压是两个串联组件上电压降的叠加。根据方程，其中一个组件产生 30 V压降且与电流无关。这个组件可以用理想独立电压源来模拟。另一个组件产生一个与电流 i_t 方向一致的正压降。欧姆定律表明该组件可以用阻值为 5 Ω 的电阻模拟。电路模型结果在图 2.21 (b) 中虚线表示的盒子里。



(a) 图 2.20(a) 中器件的 v_t 特性



(b) 图 2.20(a) 中器件连接一个 10 Ω 电阻构成的电路模型

图 2.21

(b) 在图 2.21 (b) 的器件上加一个 10 Ω 的电阻构成一个电路。基尔霍夫电流定律表明，10 Ω 电阻上的电流与 5 Ω 电阻上的电流相同。使用基尔霍夫电压定律和欧姆定律，可以写出环绕电路电压降的方程式，起点在电压源，沿顺时针方向：

$$30 = 50i_t + 10i_t$$

求解 i_t，得到：

$$i_t = 2\ \text{A}$$

由于这是流过 10Ω 电阻的电流，可以使用功率方程式 $p = i^2R$ 来计算释放到这个电阻上的功率：

$$p_{10\Omega} = (2)^2(10) = 40\ \text{W}$$

练习题

2.1 (a) 说明式(2.20)可以写成：

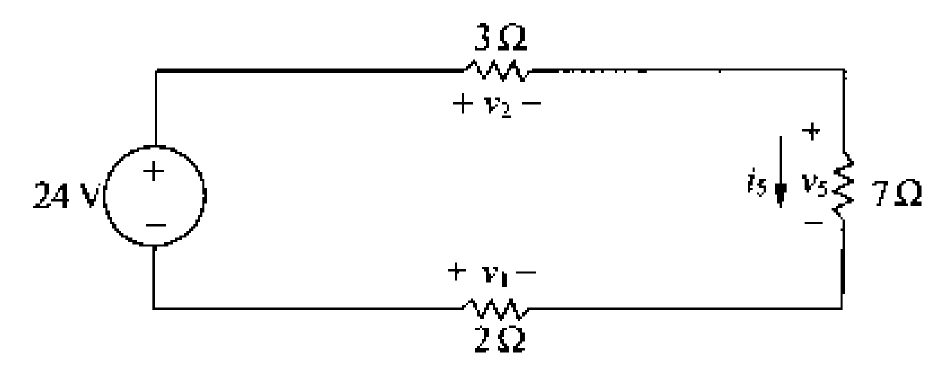
$$i_sR_l + i_sR_c + i_sR_1 - v_s = 0$$

(b) 用 v_s，R_1，R_c 和 R_l 写 i_s 表达式。

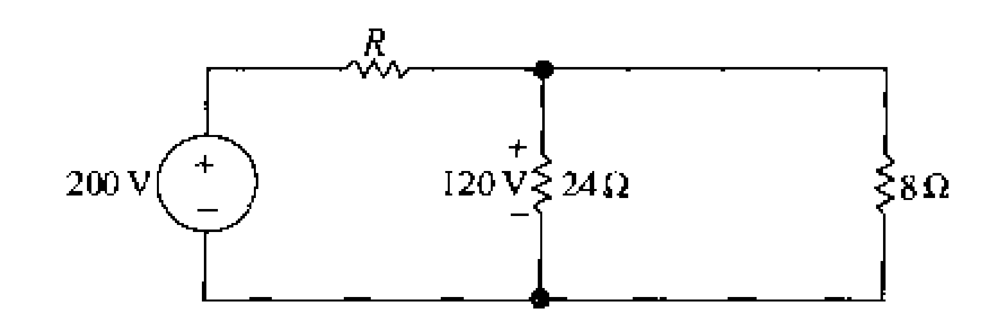
答：(a) 推导，(b) $i_s = v_s/(R_l + R_c + R_1)$。

2.2 电路如图，计算 (a) i_5，(b) v_1，(c) v_2，(d) v_5 和(e) 24 V 电源释放的功率。

答：(a) $i_5 = 2$ A，(b) $v_1 = -4$ V，(c) $v_2 = 6$ V，(d) $v_5 = 14$ V，(e) 48 W。



2.3 应用基尔霍夫电压定律和欧姆定律，求图示电路中的 R 值。

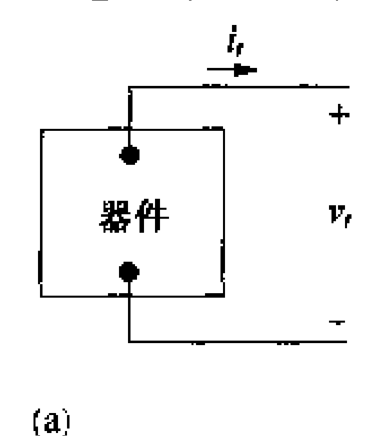


答：$R = 4\ \Omega$。

2.4 (a) 图中器件的端电压和端电流已测出，v_t 和 i_t 值列在表中。试用这些值绘制相对于 i_t 的 v_t 直线特性图。列出直线方程，并根据方程用一个理想电压源和一个电阻为器件构造一个电路模型。

(b) 用上面构造的模型预测器件释放给 25 Ω 电阻的功率。

答：(a) 一个 25 V 电源串联一个 100 Ω 电阻，(b)1 W。



(a)

v_t(V)	i_t(A)
25	0
15	0.1
5	0.2
0	0.25

(b)

2.5 重复练习题 2.4，不过应根据方程式用一个理想电流源和一个电阻构造电路模型。

答：(a) 一个 0.25 A 电流源与一个 100 Ω 电阻并联，(b)1 W。

2.5　含受控源电路的分析

结束基本电路分析的讨论，转而讨论如图 2.22 所示的包含非独立源的电路。

用基尔霍夫电压定律和欧姆定律求图示电路中的 v_o。在列写方程式之前，最好仔细检查电路图。它将用于确定已知的信息和需要计算的信息，也会有助于构思一个解决问题的策略，用较少的计算来求解电路。

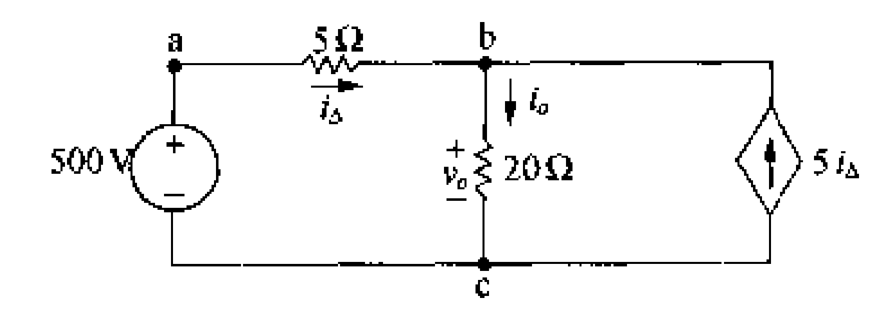


图 2.22　含非独立源的电路

考虑图 2.22 所示的电路。

- 一旦已知 i_o，就能利用欧姆定律计算 v_o。
- 一旦已知 i_Δ，也就知道非独立源 $5\ i_\Delta$ 提供的电流。
- 500 V 电源里的电流是 i_Δ。

因此有两个未知电流，i_Δ 和 i_o。为了求得 v_o，需要列写求并解两个包含这些电流的独立方程式。

在电路中，有包含电压源、5 Ω 电阻和 20 Ω 电阻的闭合路径，可以环绕这个闭合路径应用基尔霍夫电压定律列写方程。方程中包含两个未知电流：

$$500 = 5i_{\Delta} + 20i_o \tag{2.22}$$

现在需要产生第二个包含这些电流的方程。考虑由 20 Ω 电阻和非独立电流源构成的闭合路径，如果在这个回路中采用基尔霍夫电压定律，得不到有用的方程式，因为不知道非独立电流源上的电压值。事实上，非独立电流源上的电压就是 v_o，是需要计算的电压。在这个回路上列写方程式不能向着结果前进。同样，不能使用包含电压源、5 Ω 电阻和非独立源的闭合路径。

在电路中有三个节点，因此考虑用基尔霍夫电流定律产生第二个方程式。节点 a 连接电压源和 5 Ω 电阻，这两个元件上的电流是相同的。通过节点 b 或节点 c 应用基尔霍夫电流定律构造第二个方程式。选择节点 b 产生下列方程：

$$i_o = i_{\Delta} + 5i_{\Delta} = 6i_{\Delta} \tag{2.23}$$

解式 (2.22) 和 (2.23)，得到：

$$i_{\Delta} = 4\ \text{A}$$

$$i_o = 24\ \text{A} \tag{2.24}$$

对 20 Ω 电阻使用式(2.24)和欧姆定律，可以解得电压 v_o：

$$v_o = 20i_o = 480\ \text{V}$$

开始写方程式之前先想一想电路分析的策略。我们已经证明，不是任何闭合路径都能根据基尔霍夫电压定律提供有用的方程式。不是任何节点都能根据基尔霍夫电流定律提供有用的方程式。对于一个实际问题，关于问题的一些初步想法可能有帮助，选择最富有成效的途径和最有用的分析工具。选择一个好的途径和适当的工具常常能简化需要求解的方程的数量和复杂程度。

例 2.10 说明了欧姆定律和基尔霍夫定律对含非独立源电路的应用。例 2.11 涉及到一个非常复杂的电路，但是通过仔细地选择分析工具，分析变得相当简单。

例 2.10 (a) 使用基尔霍夫定律和欧姆定律求图 2.23 中所示电压 v_o。

(b) 说明其解答满足：电路中产生的全部功率等于消耗的全部功率。

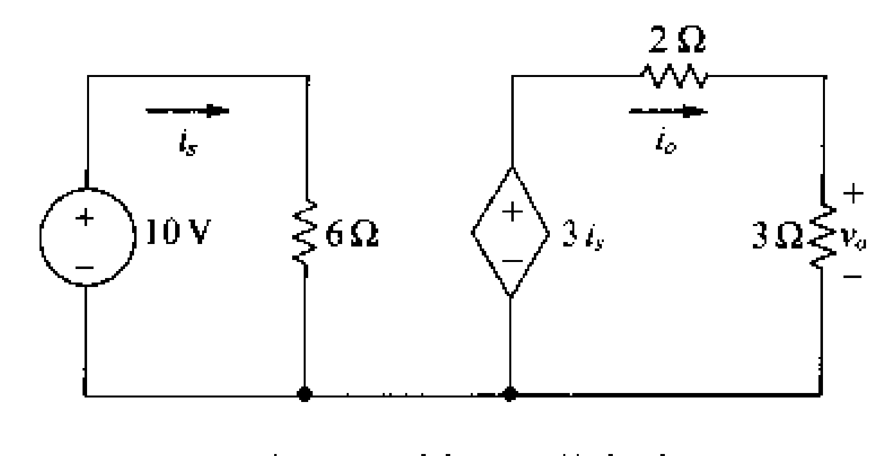


图 2.23 例 2.10 的电路

解：

(a) 仔细观察图 2.23 中电路可知：

有两个闭合路径，左边一个含电流 i_s，右边一个含电流 i_o。

一旦 i_o 已知，能够计算 v_o。

需要两个方程式解两个电流。因为有两个闭合路径，而且都含电压源，可以分别应用基尔霍夫电压定律得到以下方程式：

$$10 = 6i_s$$
$$3i_s = 2i_o + 3i_o$$

求解这些电流：

$$i_s = 1.67\ \text{A}$$
$$i_o = 1\ \text{A}$$

对 3 Ω 电阻应用欧姆定律得到要求的电压：

$$v_o = 3i_o = 3\ \text{V}$$

(b) 为了计算释放到电压源的功率，用功率方程式 $p = vi$ 形式。释放到独立电压源的功率是：

$$p = (10)(-1.67) = -16.7\ \text{W}$$

释放到非独立电压源的功率是：

$$p = (3i_s)(-i_o) = (5)(-1) = -5\ \text{W}$$

两个电源都产生功率，全部产生的功率是 21.7 W。

计算释放到电阻的功率，用功率方程式 $p = i^2R$ 形式。释放到 6 Ω 电阻的功率是：

$$p = (1.67)^2(6) = 16.7\ \text{W}$$

释放到 2 Ω 电阻的功率是：

$$p = (1)^2(2) = 2\ \text{W}$$

释放到 3 Ω 电阻的功率是：

$$p = (1)^2(3) = 3\ \text{W}$$

电阻消耗的全部功率是 21.7 W，等于电源产生的全部功率。

例 2.11　图 2.24 所示电路给出一个在晶体管放大器的分析和设计中遇到的通用结构。假定所有电路元件值 —— $R_1, R_2, R_C, R_E, V_{CC}$ 和 V_o 都已知。

(a) 试写出能够确定每个电路元件电流的方程式。

(b) 根据这些方程式推导出用电路元件值计算 i_B 的公式。

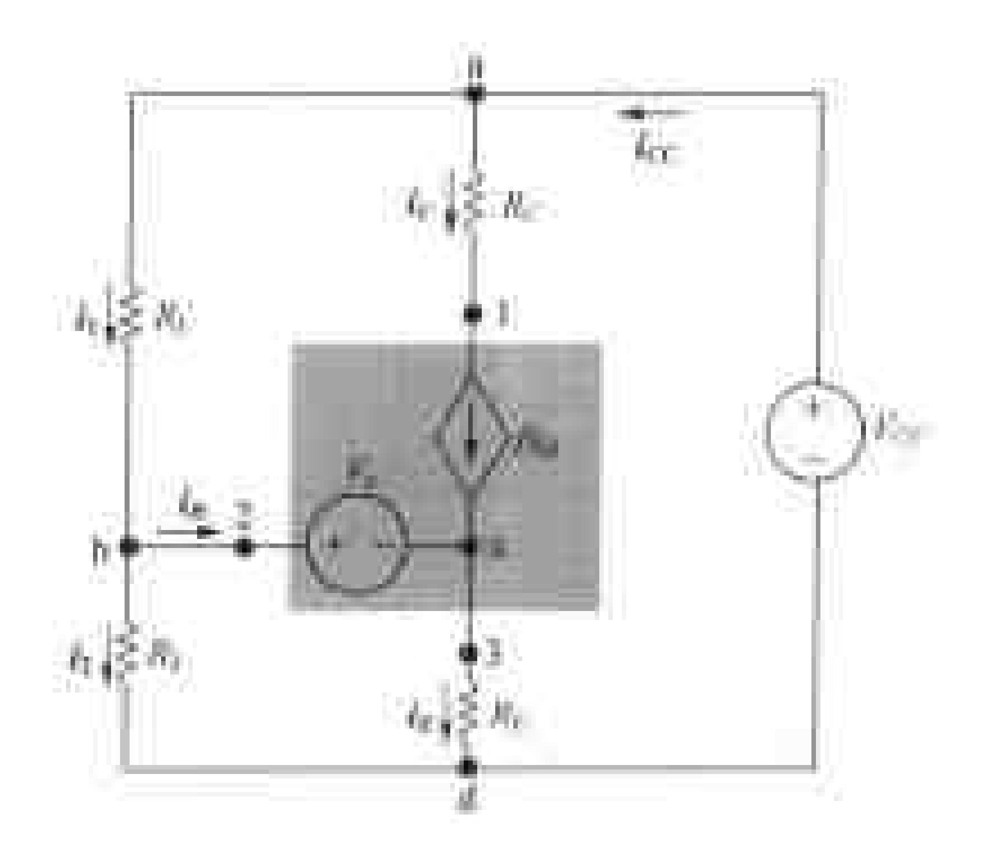


图 2.24　例 2.11 的电路

解：

仔细地检查电路，有六个未知电流。记为 i_1, i_2, i_B, i_C, i_E 和 i_{CC}。在定义这六个电流时，注

意到电阻和非独立电流源相串联。必须推导出六个包含这六个未知量的独立方程。

(a) 可以在节点 a,b,c 和 d 中任选三个,应用基尔霍夫电流定律推导出三个方程。使用节点 a,b 和 c,并设电流离开节点为正:

$$i_1 + i_C - i_{CC} = 0$$

$$i_B + i_2 - i_1 = 0$$

$$i_E - i_B - i_C = 0$$

根据 R_C 和非独立源的串联约束关系,推导出第四个方程:

$$i_C = \beta i_B$$

用基尔霍夫电压定律推导其余两个方程。为了使用基尔霍夫电压定律,需要选择两个闭合路径。注意:非独立电流源上的电压是未知的,并且不能由电源电流 βi_B 确定。因此必须选择两个不包含非独立电流源的闭合路径。

选择路径 bcdb 和 badb,并设电压降为正,得:

$$V_0 + i_E R_E - i_2 R_2 = 0$$

$$-i_1 R_1 + V_{CC} - i_2 R_2 = 0$$

(b) 为了用已知的电路变量获得 i_B 的单个方程式,可以遵循下列步骤:

解式(6)得 i_1,将 i_1 代入式(2)。

解式(2)得 i_2,将 i_2 代入式(5)。

解式(5)得 i_E,将 i_E 代入式(3),用式(4)消掉式(3)中的 i_C。

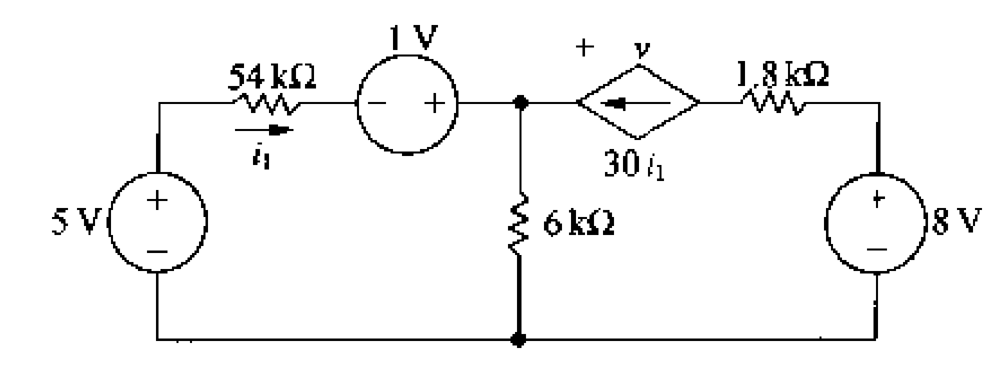
解式(3)得 i_B,重新整理各项产生:

$$i_B = \frac{(V_{CC}R_2)/(R_1 + R_2) - V_0}{(R_1 R_2)/(R_1 + R_2) + (1+\beta)R_E} \tag{2.25}$$

习题 2.24 要求检验这些步骤。一旦知道了 i_B,很容易得到其余的电流。

练习题

2.6 如图电路,求:(a) 电流 i_1,单位取微安,(b) 电压 v,单位取伏特。



答:(a) $i_1 = 25\ \mu A$,(b) $v = -2$ V。

2.7 如图电路中,电流 i_ϕ 为 2 A。计算:

(a) v_s。

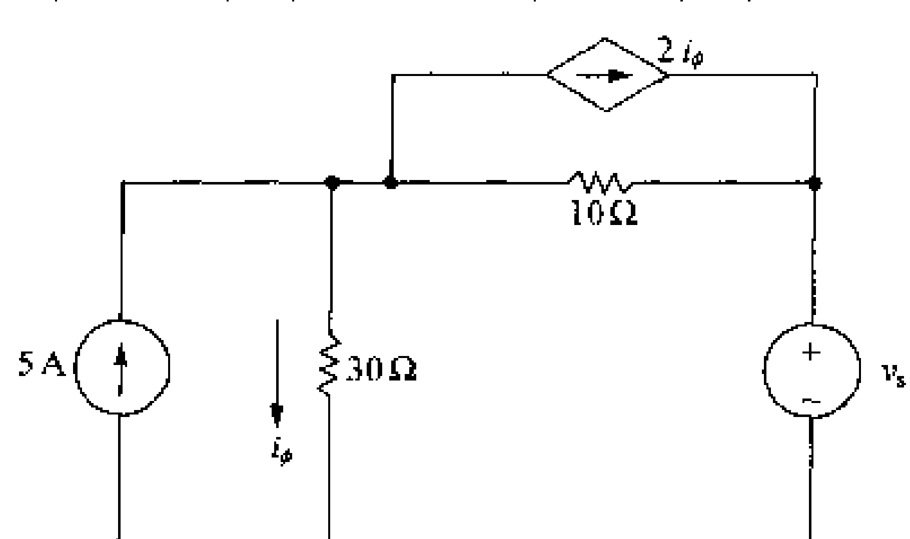
(b) 独立电压源吸收的功率。

(c) 独立电流源释放的功率。

(d) 受控电流源释放的功率。

(e) 释放在两个电阻上的全部功率。

答:(a) 70 V,(b) 210 W,(c) 300 W,(d) 40 W,(e) 130 W。



实例

用电安全二

前面曾经提到过流过人体的电流可能引起伤害,需要检查用电安全。

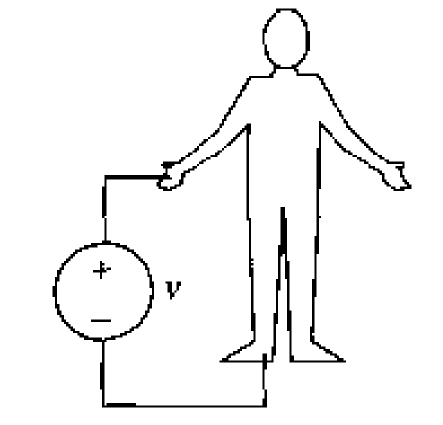
可能有人认为电伤害是由于灼伤引起的,事实并非如此。最普通的电伤害是对神经系统的伤害。神经使用的是电化学信号,电流可能破坏这些信号。当电流路径只包含骨骼肌肉时,影响包括暂时麻痹(神经信号停止)或不自觉的肌肉收缩,这些危害一般没有生命威胁。然而,当电流路径包含控制大脑供氧的神经和肌肉时,问题就非常严重。这些肌肉的暂时麻痹可能停止一个人的呼吸,而且突然的肌肉收缩可能破坏控制心跳的信号。结果造成流向大脑的氧化血液暂停,除非立刻得到紧急救援,否则几分钟内就会引起死亡。表2.1给出不同水平电流下的生理反应。表中的数字是近似的,通过事故原因分析获得。很明显,对人进行电击实验是违反伦理的。好的电气设计将电流限制在几个毫安之内,或不满足所有可能的条件。

表 2.1 不同电流下人体的生理反应

生理反应	电　流
仅仅能感觉	3～5 mA
极端痛苦	35～50 mA
肌肉麻痹	50～70 mA
心跳停止	500 mA

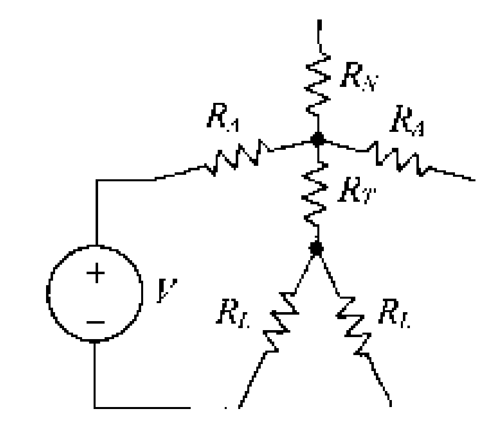
开发一个简单的人体电模型。人体当做电流的导体时,有理由用电阻作为人体的模型。图2.25表示了潜在的危险情况。人的臂部与腿之间有电压差存在。图2.25(b)给出图2.25(a)中人体的电模型。臂、腿、颈和躯干(胸和腹部)各有典型的电阻。注意:电流的路径通过躯干,躯干包含心脏,一个潜在的致死因素。

例: 假定电力公司安装了一些设备,可能使人遭到250 V电击。由此产生的电流是否足够的危险,以至于必须张贴警告标牌和采取其他预防措施防止这样的电击。假定电源250 V,臂电阻为400 Ω,躯干电阻为50 Ω,腿电阻为200 Ω。





(a)人体臂部与腿之间有电压差



(b)人体简化模型，其臂与腿之间有电压差

图 2.25

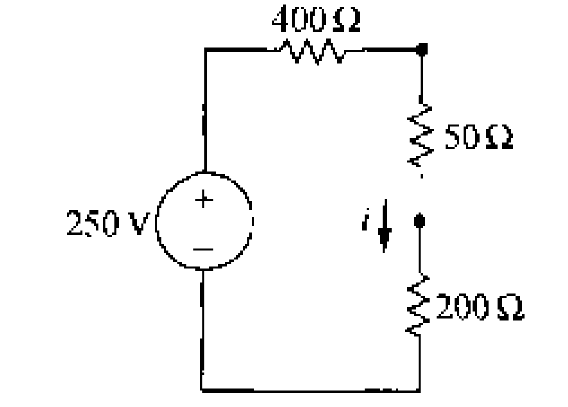


图 2.26 人体的臂和腿之间遭受 250 V 电击时，电流流过人体的模型

解：

注意到电流不流过颈部或其他臂和腿，可以简化人体的电模型。模型如图 2.26 所示，包含给出的电阻值。使用欧姆定律和基尔霍夫电压定律：

$$400i + 50i + 200i - 250 = 0$$

求解电流：

$$i = \frac{250}{650} = 385\ \text{mA}$$

因此，通过心脏区域的电流达到 385 mA，参照表 2.1，它几乎足以使心脏停止跳动。电力公司必须张贴警告标牌和采取其他预防措施防止有人遭受 250 V 电击。

小结

- 本章介绍的电路元件是电压源、电流源和电阻器。
  - 理想电压源保持规定的电压，与流过器件的电流无关。理想电流源保持规定的电流，与器件上的电压无关。电压源和电流源或者是独立源，即不受电路中任何其他电压或电流的影响；或者是非独立源，即由电路中其他电流或电压确定。
  - 电阻的电压和电流相互成比例。电阻中与电压和电流关联的比例常数称做电阻，它的单位是欧姆。
- 欧姆定律明确地建立了电阻中电压和电流的比例关系。如果电阻中电流与电压降方向一致，则：

$$v = iR \tag{2.26}$$

  如果电阻中电流与电压升方向一致，则：

$$v = -iR \tag{2.27}$$

  结合功率方程 $p = vi$ 和欧姆定律，可以确定电阻消耗的功率：

$$p = i^2R = v^2/R \tag{2.28}$$

- 电路可以通过节点和闭合路径描述。节点是两个或多个电路元件的结合点。当正好两个元件连接构成节点，被称做串联。闭合路径是沿着连接元件形成的回路，起点和终点是相同的节点，而且遇到的每个中间节点不超过一次。
- 互连电路元件的电压和电流服从基尔霍夫定律：

- ■ 基尔霍夫电流定律规定：在电路中，任何节点上的所有电流的代数和等于零。
- ■ 基尔霍夫电压定律规定：在电路中，环绕任何闭合路径的所有电压的代数和等于零。

● 求解一个电路指的是每一个电路元件上的电压和电流都被求出。结合对独立源和非独立源的理解，利用欧姆定律和基尔霍夫定律，可以解许多简单电路。

习题

2.1 一对汽车照明灯通过图 P2.1 的排列连接到 12 V 电池上。图中，箭头符号用来显示该端直接连到汽车的金属框架上。

(a) 用电阻和独立电压源构造一个电路模型。

(b) 识别理想电路元件和它表示的符号组件是否相符。

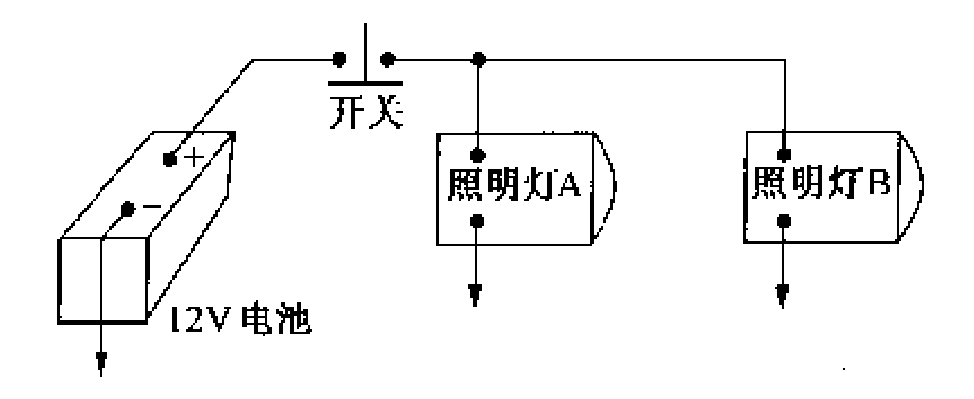


图 P2.1

2.2 一个工业配线系统的简化电路模型如图 P2.2 所示。

(a) 模型中有多少基本电路元件？

(b) 电路中有多少节点？

(c) 有多少节点连接三个或更多的基本元件？

(d) 识别形成串联的电路元件。

(e) 未知电流的最小数目是多少？

(f) 描述电路中的五个闭合路径。

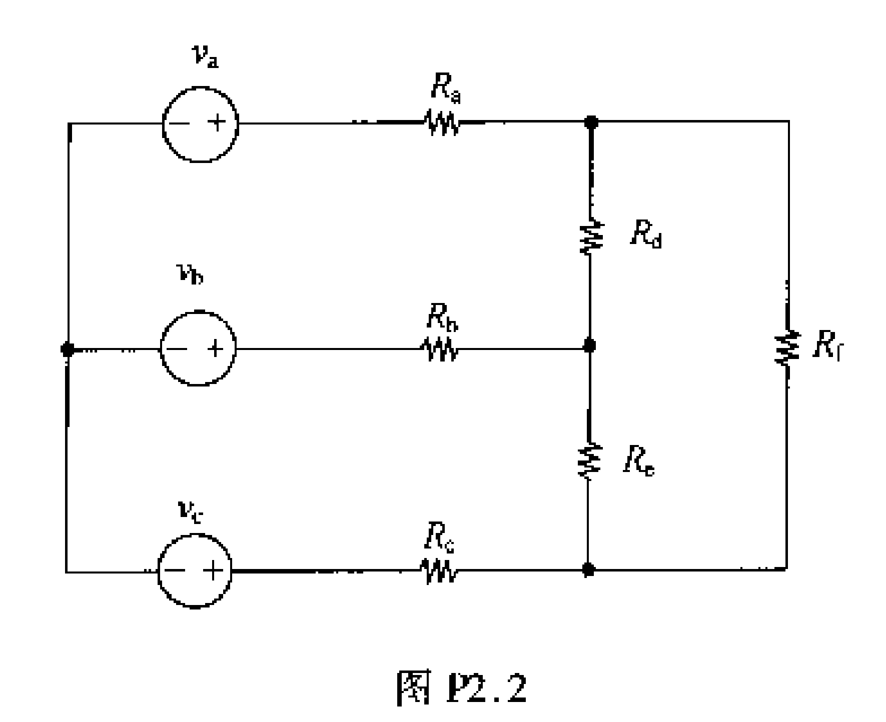


图 P2.2

2.3 如果图 P2.3 所示的连接是正确的，求电路释放的全部功率。如果互相连接是错误的，解释为什么。

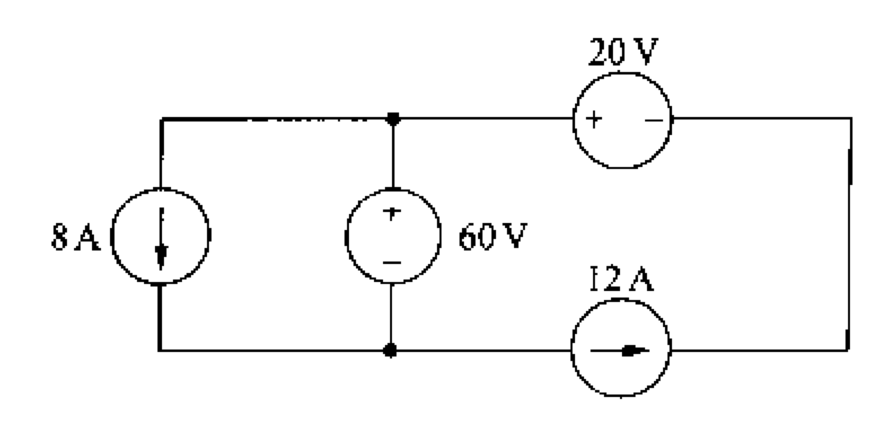


图 P2.3

2.4 (a) 图 P2.4 所示的连接是正确的吗？试解释。

(b) 能否求出电路释放的能量？试解释。

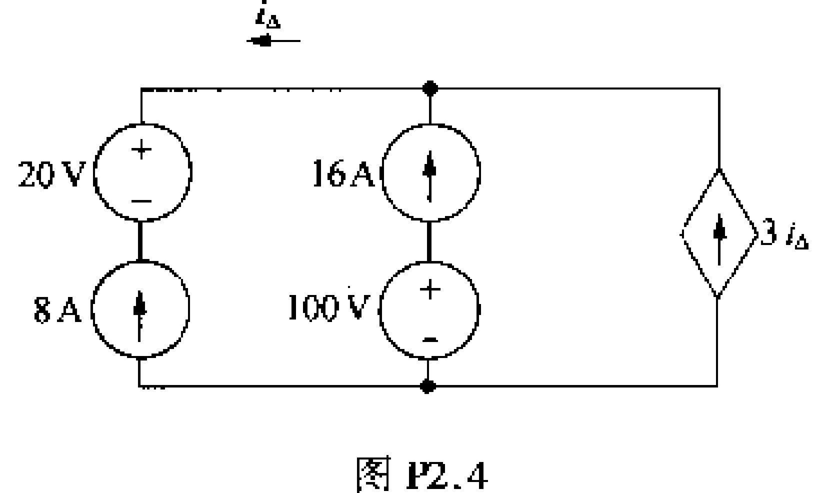


图 P2.4

2.5 (a) 图 P2.5 所示电路理想电源的连接是正确的吗？试解释。

(b) 鉴别哪些电源产生功率？哪些电源吸收功率？

(c) 检验电路中产生的全部功率是否等于吸收的全部功率。

(d) 改变 30 V 电源的极性，重复(a)~(c)。

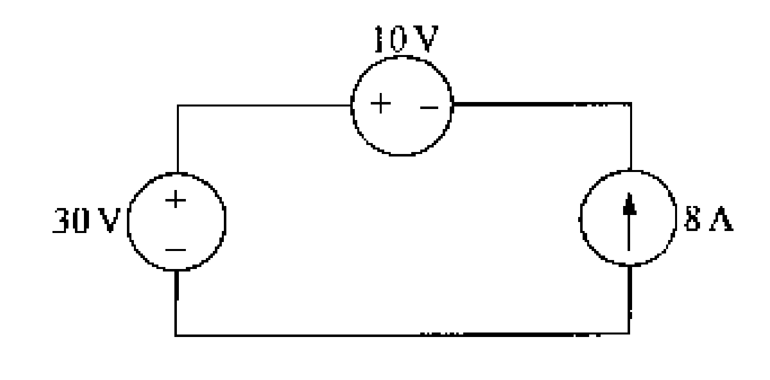


图 P2.5

2.6 如果图 P2.6 所示的连接是正确的，求电路产生的全部功率。如果连接是错误的，解释为什么。

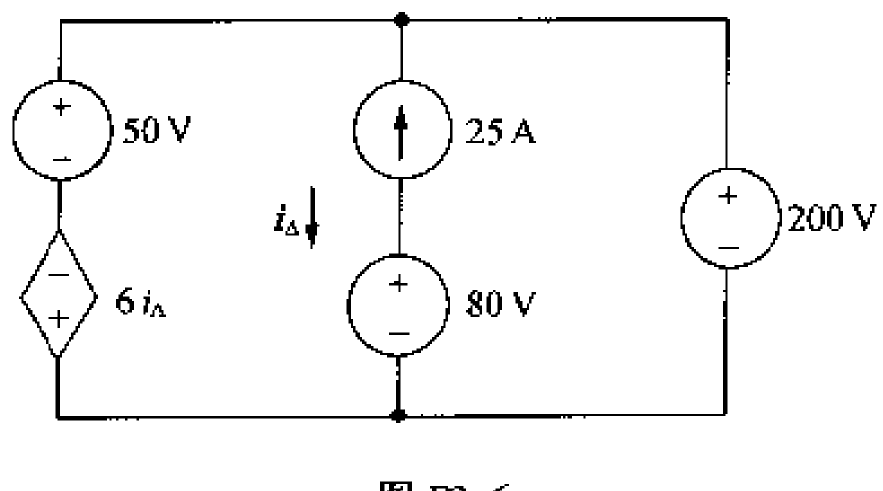


图 P2.6

2.7 如果图 P2.7 所示的连接是正确的，求电路中产生的全部功率。如果连接是错误的，解释为什么。

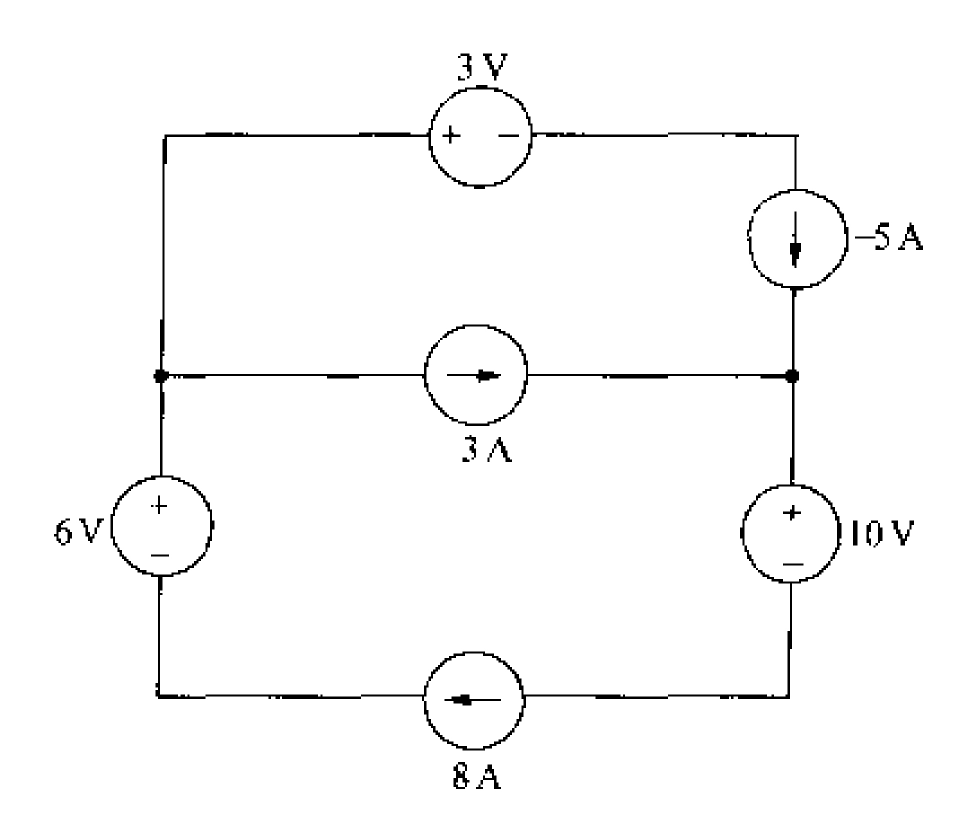


图 P2.7

2.8 如果 $v_o = 100$ V，求图 P2.8 所示电路产生的全部功率。

2.9 如果图 P2.9 所示的连接是正确的，求电压源产生的全部功率。如果连接是错误的，解释为什么。

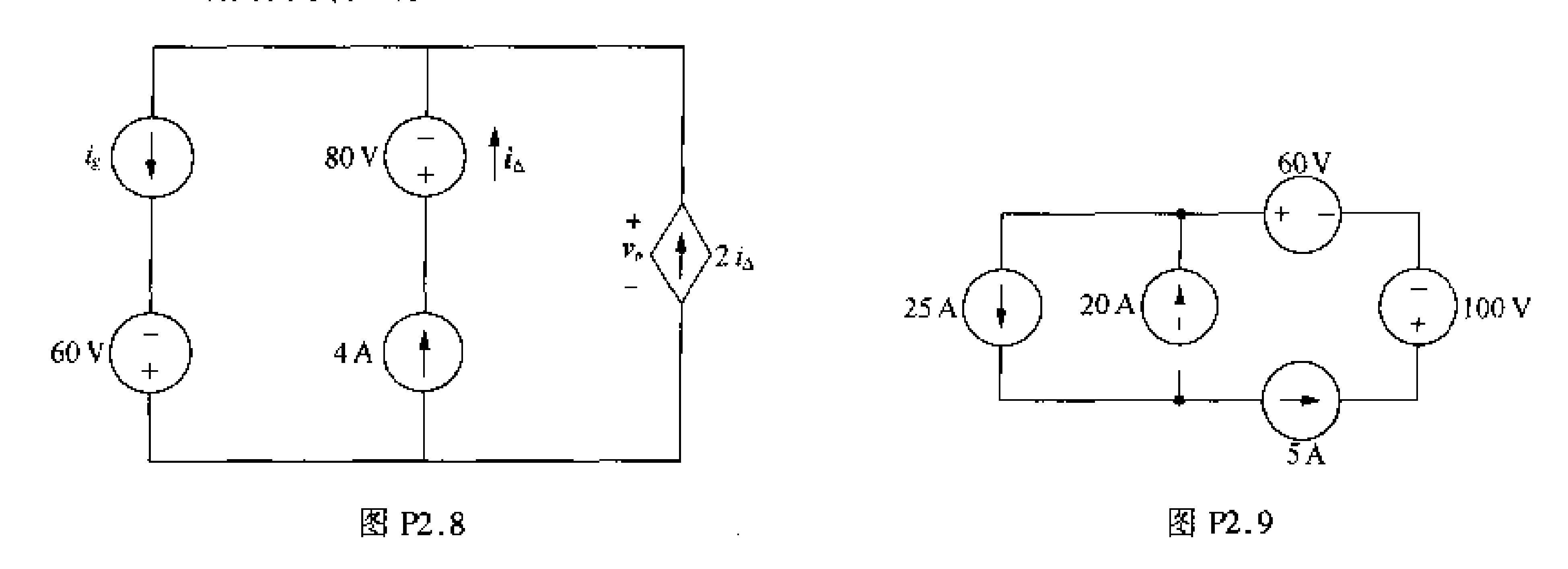


图 P2.8　　　　图 P2.9

2.10 理想电源的连接可能导致一个不确定的解答。考虑到这一点，解释为什么图 P2.10 电路中的解答 v_1 和 v_2 是不确定的。

P2.11 (a) 求图 P2.11 电路中电流 i_g 和 i_a。

(b) 求电压 v_g。

(c) 检验电路中产生的全部功率是否等于吸收的全部功率。

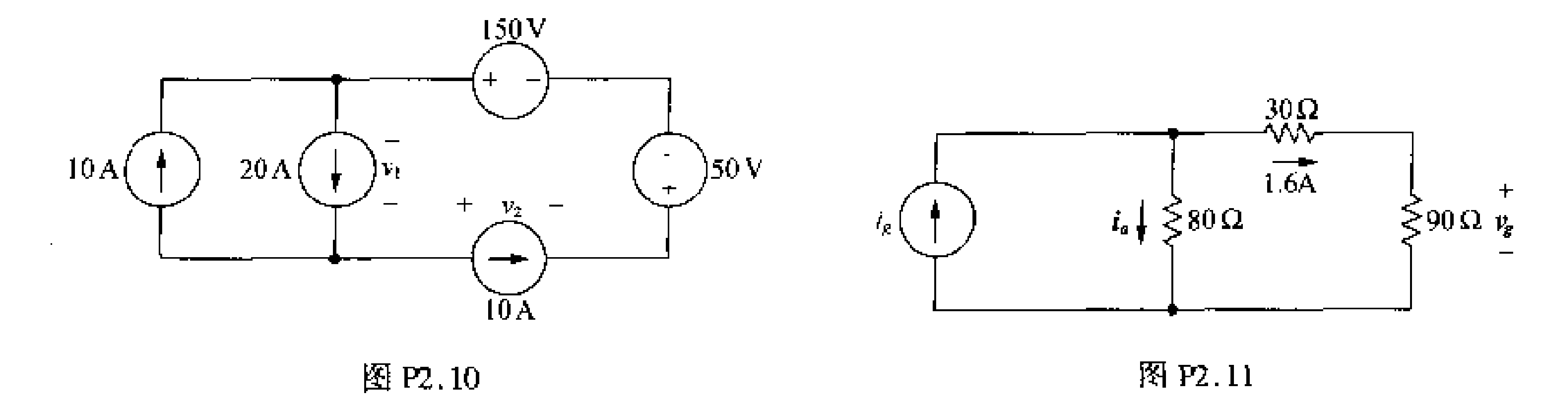


图 P2.10　　　　图 P2.11

P2.12 图 P2.12 所示电路得电流 i_a 为 20 A。求(a)i_o,(b)i_g,(c)独立电流源释放的功率。

P2.13 电路如图 P2.13 所示。求:

(a) i_a 值。

(b) i_b 值。

(c) v_o 值。

(d) 每个电阻消耗的功率。

(e) 50 V 电源释放的功率。

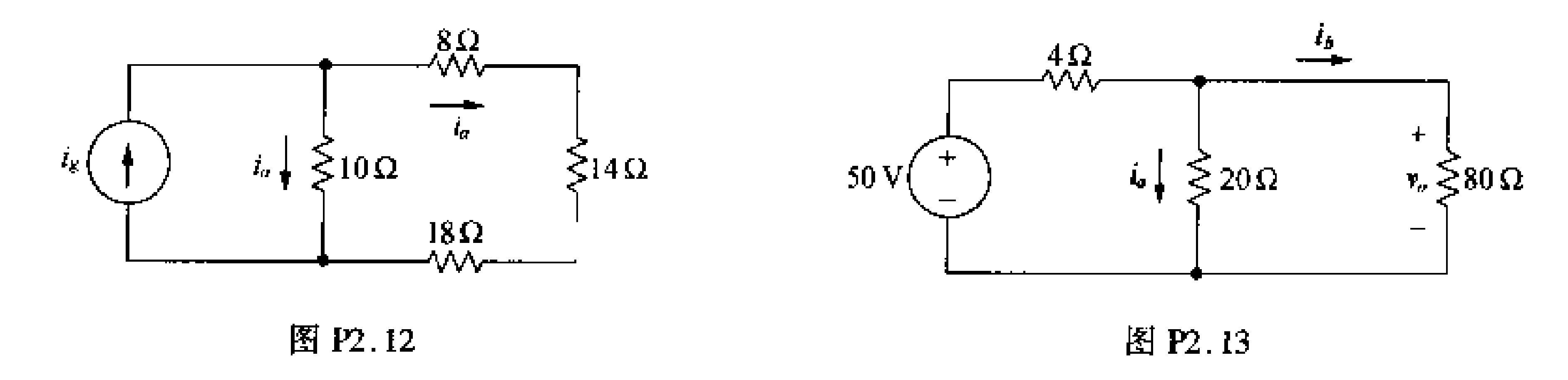


图 P2.12　　图 P2.13

2.14 图 P2.14 电路中的电流 i_1 和 i_2 分别为 20 A 和 15 A。

(a) 求每个电压源提供的功率。

(b) 证明提供的全部功率等于电阻消耗的全部功率。

P2.15 图 P2.15 电路中的电流 i_a 和 i_b 分别为 4 A 和 2 A。

(a) 求 i_g。

(b) 求每个电阻消耗的功率。

(c) 求 v_g。

(d) 证明电流源释放的功率等于所有其他元件吸收的功率。

P2.16 图 P2.16 电路中的电流 i_o 为 4 A。

(a) 求 i_1。

(b) 求每个电阻消耗的功率。

(c) 检验电路中消耗的全部功率等于 180 V 电源产生的功率。

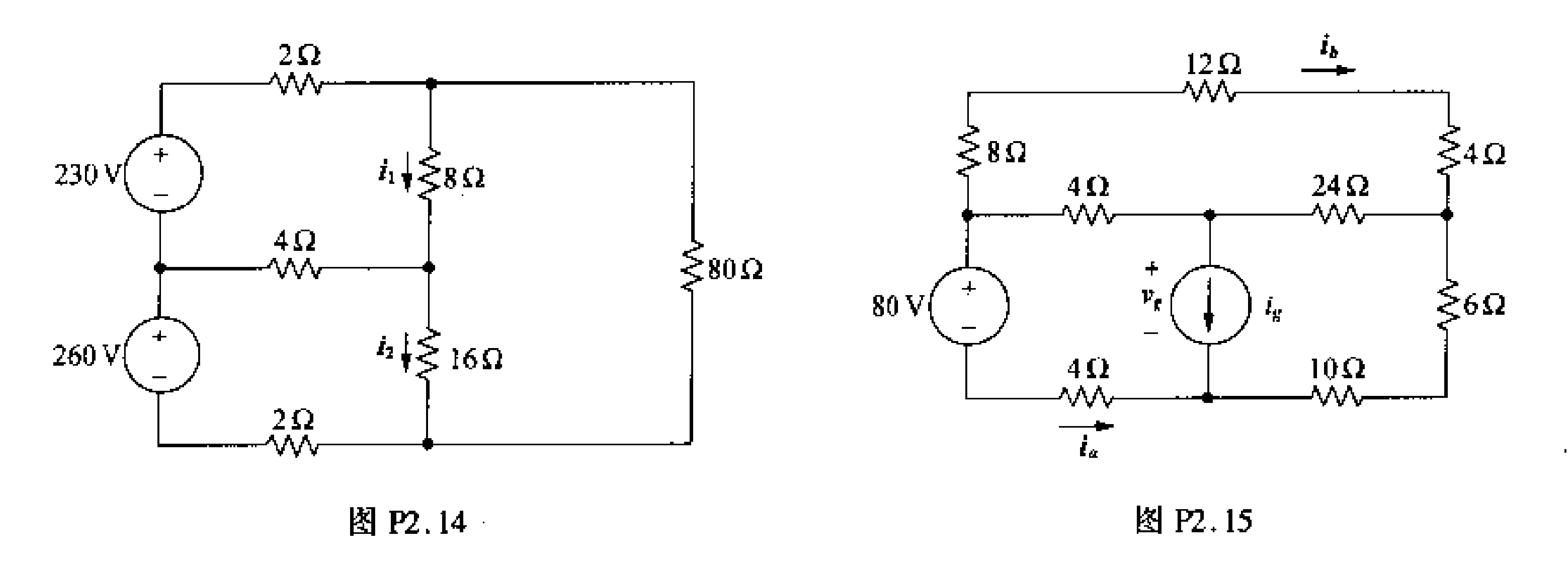


图 P2.14　　图 P2.15

2.17 图 P2.17 (a) 中给出了图 P2.17 (b) 所示的实际直流电流源的端电流和电压的关系。

(a) 绘制与 v_s 相对的 i_s 特性图。

(b) 根据(a)所绘直线的方程式构造一个电流源电路模型，它在 $0 \leqslant v_s \leqslant 30$ V 范围内有效。

(c) 用该电路模型预测释放到 3 kΩ 电阻的电流。

(d) 用该电路模型预测电流源的开路电压。

(e) 实际开路电压是多少?

(f) 解释为什么(d)和(e)的答案不相同。

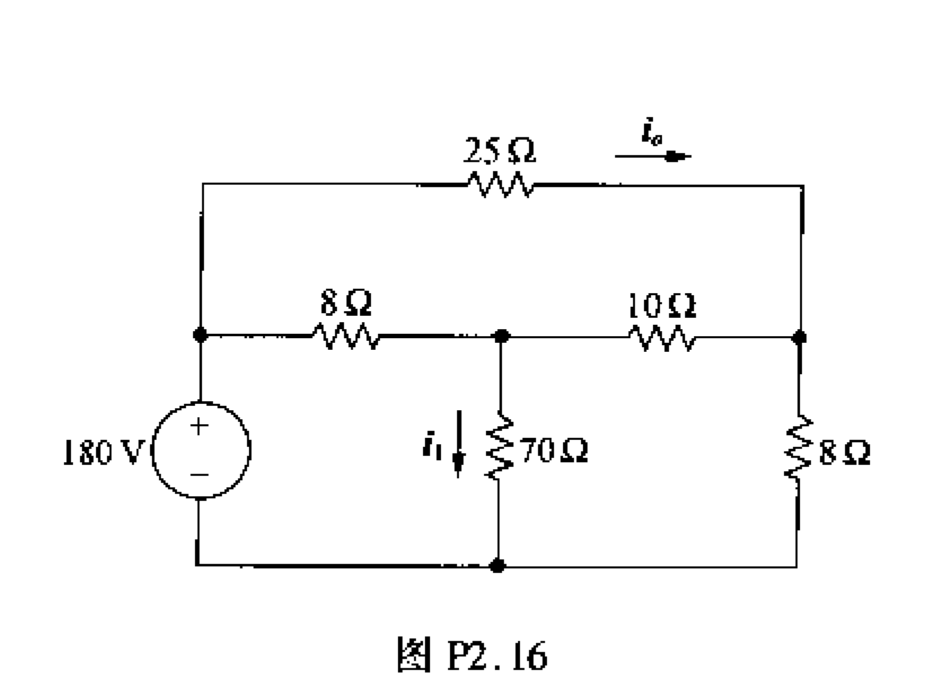
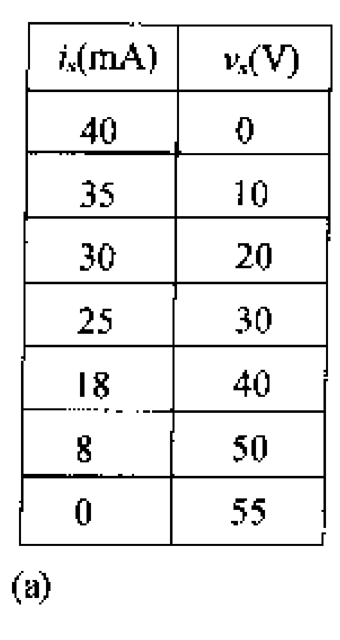
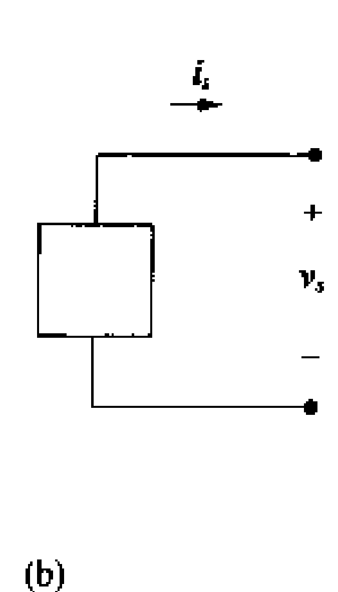


图 P2.16



i_s(mA)	v_s(V)
40	0
35	10
30	20
25	30
18	40
8	50
0	55

(a)



(b)

图 P2.17

2.18 图 P2.18 (a) 所示器件的端电压和电流已被测量。结果列表于图 P2.18 (b)。

(a) 用理想电流源和电阻为器件构造一个电路模型。

(b) 当一个 20 Ω 电阻连接到器件两端，使用模型预测 i_t 的值。

2.19 图 P2.19 (a) 给出了图 P2.19 (b) 所示的实际直流电压源的端电流和电压的关系。

(a) 绘制与 i_s 相对的 v_s 特性图。

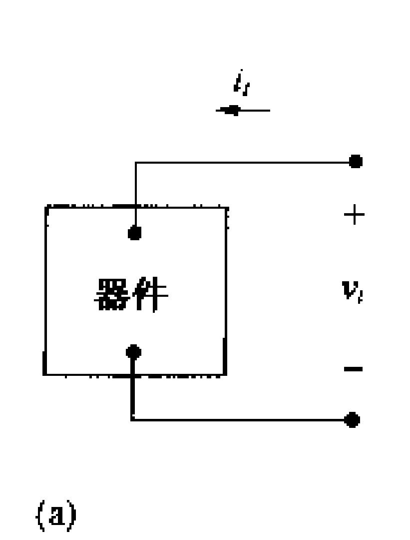
(b) 根据(a)所绘直线的方程式构造一个实际电源的电路模型，它在 $0 \leqslant i_s \leqslant 24$ A 范围内有效。(使用一个理想电压源和一个理想电阻串联。)

(c) 用该电路模型预测释放到 1 Ω 电阻的电流。

(d) 用该电路模型预测实际电源的短路电流。

(e) 实际短路电流是多少?

(f) 解释为什么(d)和(e)的答案不相同。

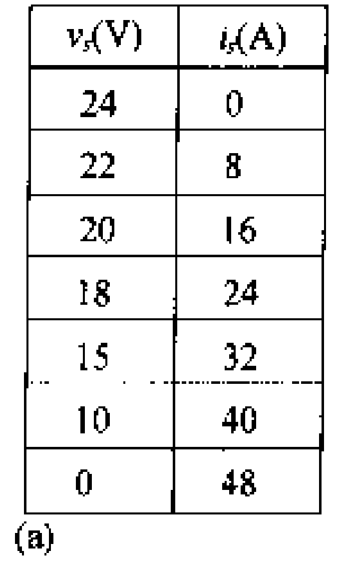


(a)

v_t(V)	i_t(A)
50	0
65	3
80	6
95	9
110	12
125	15

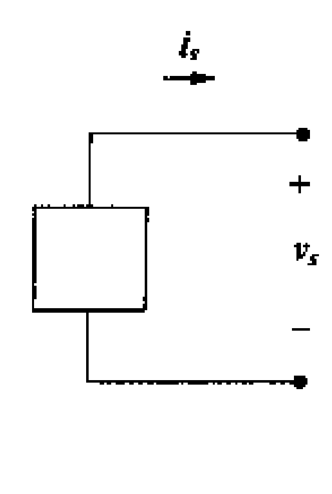
(b)

图 P2.18



v_s(V)	i_s(A)
24	0
22	8
20	16
18	24
15	32
10	40
0	48

(a)



(b)

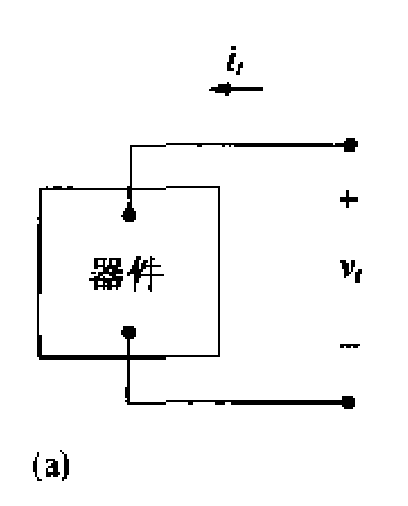
图 P2.19

2.20 图 P2.20(a) 所示器件的端电压和电流已被测量。结果列表于图 P2.20(b)。

(a) 用理想电压源和电阻为器件构造一个电路模型。

(b) 使用模型预测器件释放到一个 20 Ω 电阻上的功率值。

2.21 电路如图 P2.21 所示。求(a) R,(b) 250 V 电源提供的功率。



v_t(V)	i_t(A)
100	0
180	4
260	8
340	12
420	16

(b)

图 P2.20

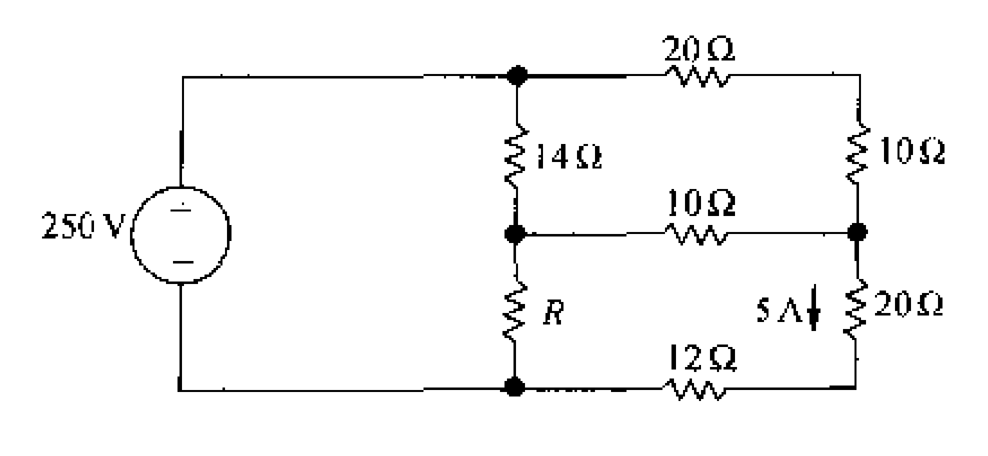


图 P2.21

P2.22 调节图 P2.22 电路中的可变电阻 R,使 i_a 等于 1 A。求 R 值。

P2.23 图 P2.23 电路中 22.5 Ω 电阻上的电压是 90 V,上端为正。

(a) 求消耗在每个电阻上的功率。

(b) 求 240 V 理想电压源提供的功率。

(c) 校验提供的功率等于消耗的全部功率。

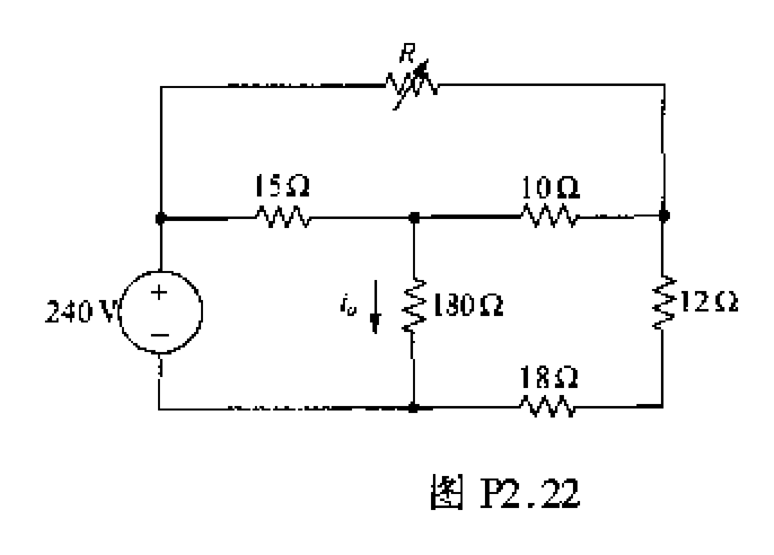


图 P2.22

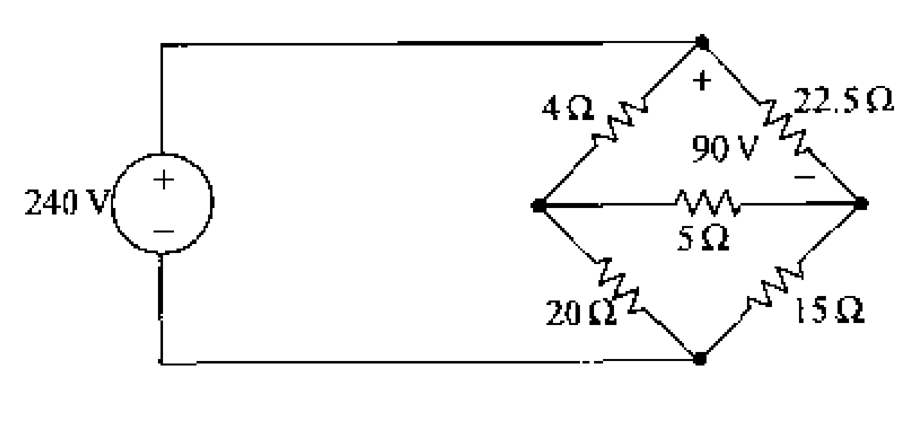


图 P2.23

2.24 推导式(2.25)。提示:使用例 2.11 中的式(3)和(4),将 i_E 表示为 i_B 的函数。解式(2),得 i_2,将其代入式(5)和(6)。解"新"的式(6)得 i_1,将其代入"新"的式(5),解得 i_B。因为 i_{CC} 仅仅出现在式(1)中,所以求解只涉及五个方程。

P2.25 (a)求图 P2.25 电路中的电压 v_y。

(b)说明电路产生的全部功率等于消耗的全部功率。

P2.26 电路如图 P2.26 所示。求(a) i_2,(b) i_1,(c) i_o。

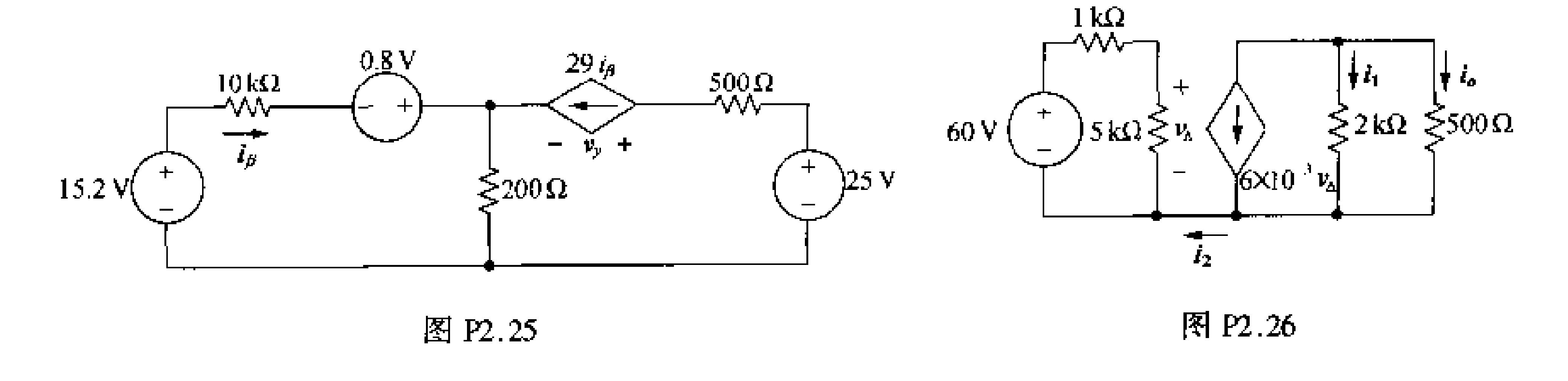


图 P2.25

图 P2.26

P2.27 电路如图 P2.27 所示。计算(a) i_Δ 和 v_o,(b) 证明产生的功率等于消耗的功率。

P2.28 电路如图 2.24 所示。$R_1 = 20\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 80\ \text{k}\Omega$, $R_C = 500\ \Omega$, $R_E = 100\ \Omega$, $V_{CC} = 15\ \text{V}$, $V_o = 200\ \text{mV}$, $\beta = 39$。计算 $i_B, i_C, i_E, v_{3d}, v_{bd}, i_2, i_1, v_{ab}, i_{CC}$ 和 v_{13}(注意电压变量的双下标,第一个下标相对于第二个下标为正,见图 P2.28)。

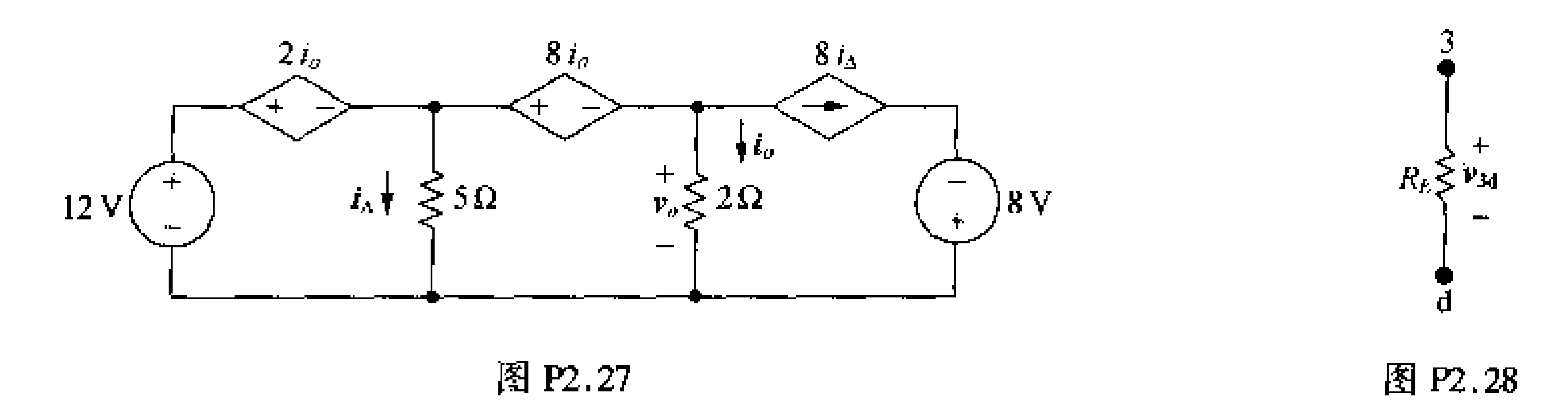


图 P2.27　　图 P2.28

P2.29 当 v_o 等于 250 mV 时,求图 P2.29 所示电路中的 v_1 和 v_g(提示:从电路右边终端开始,后退着求 v_g)。

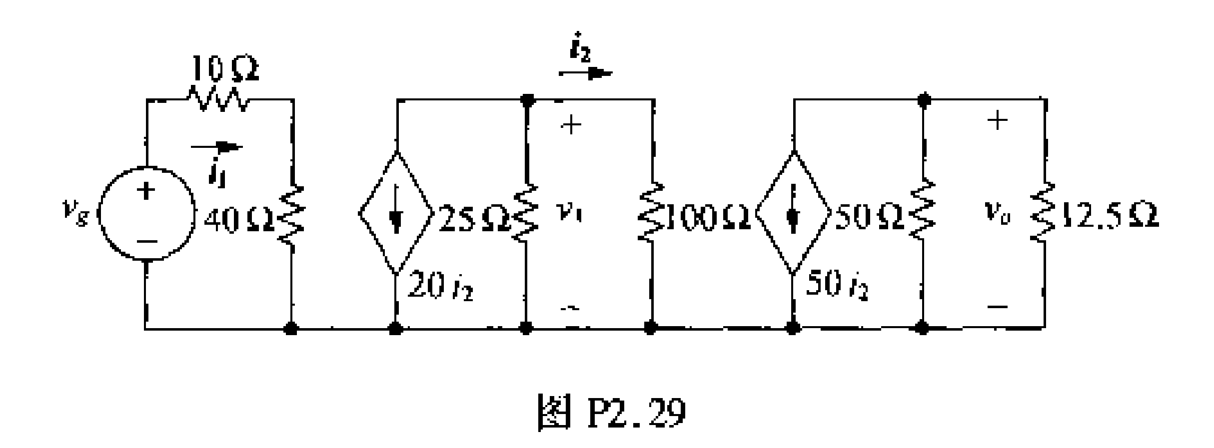


图 P2.29

◇**2.30** 设计一个电气布线系统,使其能够从两个或更多的位置控制某个电器,这是经常需要的。例如,控制楼梯顶端和底端的照明设备。家庭布线系统采用 3 路或 4 路开关实现控制。3 路开关是三端、两位置开关,4 路开关是四端、两位置开关。开关示意图如图 P2.30 所示。图 P2.30(a)是 3 路开关,图 P2.30(b)是 4 路开关。

(a) 说明两个 3 路开关应该怎样接在图 P2.30(c)所示电路的 a,b 两点之间,才能够从两个位置控制灯 1 的开和关。

(b) 如果需要从更多的位置控制灯(电器),可将 4 路开关与两个 3 路开关联合起来使用。如果超出两个位置,每增加一个位置,就要增加一个 4 路开关。说明一个 4 路开关加两个 3 路开关在图 P2.30(c)电路中 a,b 两点之间应该怎样连接,才能够从三个位置控制灯(提示:4 路开关位于 3 路开关之间)。

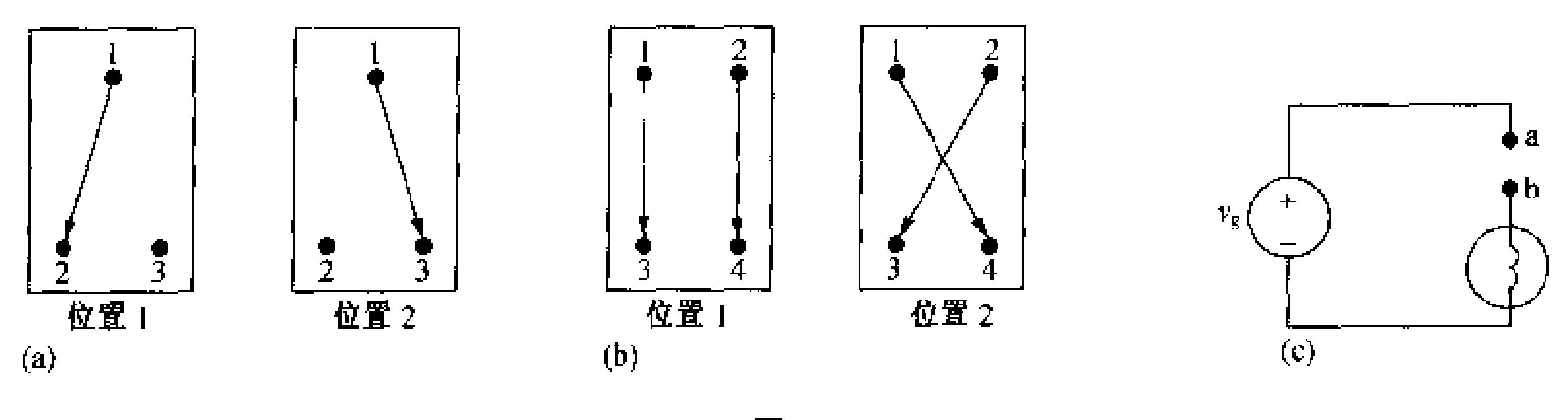


图 P2.30

◆**2.31** 根据图 2.25 所示的模型和电路,画一个电流通过人体的电路模型,设该人双手触电

源正端,双脚处于电源负端。

◆**2.32** (a) 使用实例(图 2.26)提供的臂、腿和躯干的电阻值,计算臂、腿和躯干消耗的功率。

(b) 水的比热是 4.18×10^2 J/kg℃。所以,水的质量 M(单位千克)被功率 P(单位瓦特)加热,温度按照下列比率上升:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{2.39\times10^{-4}P}{M}\ ℃/s$$

(c) 假定臂部的质量是 4 kg,腿的质量是 10 kg,躯干的质量是 25 kg,人体大部分是水,那么臂部、腿和躯干温度上升 5℃(危及活的组织)需要多少秒?

(d) 很短的时间就能使大脑因缺氧而受到伤害。用 (b) 计算的数值是多少分钟?

◆**2.33** 一个人因事故两手分别抓住通向直流电压源两端的导体。

(a) 电源电压能够产生电击引起人的麻痹,使人不能离开导体。试用实例(图 2.26)提供的人体电阻值,推算产生这种现象的最小电源电压值是多少?

(b) 在维修典型的配有 5 V 和 12 V 电源的个人计算机时,发生这种事故有重大危险吗?

◆**2.34** 为什么说电压大小不能惟一地确定因电击造成的伤害,为了理解这一点,请考虑前面实例中提到的静电电击情况。当拖着脚走过地毯,人的身体被充电,这些电荷使人整个身体呈现潜在的电压。如果再触摸金属门把手时,在人与门把手之间产生了电压差,此时,电流流过的导体物质 —— 空气,不是人的身体!

假定在人手和门把手之间的空间模型是 1 MΩ 电阻,如果电流引起轻微的 3 mA 电击,多大的电压存在于人手和门把手之间?

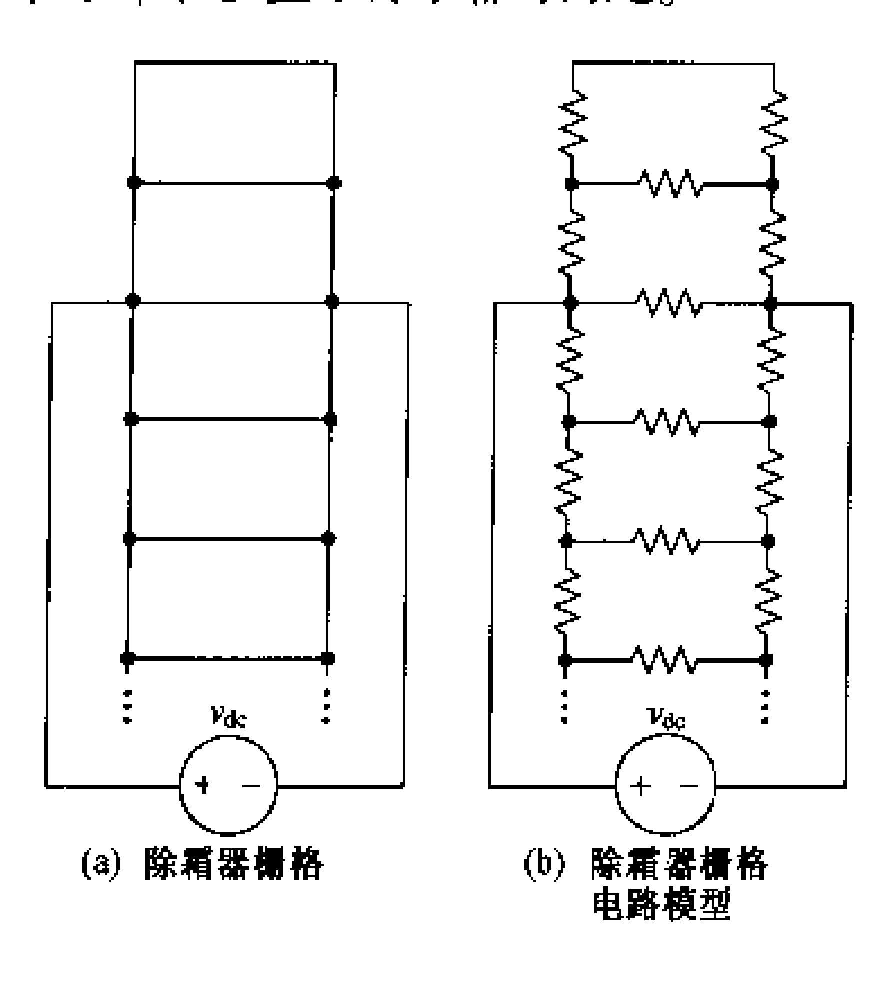
第3章　简单电阻电路

实例

后窗玻璃除霜器一

汽车后窗玻璃除霜器的栅格是电阻电路的一个应用实例。栅格结构如图(a)所示。可以认为栅格导线是电阻，如图(b)所示。水平导线的数量与汽车的样式和构造有关，典型范围是从9到16。

栅格如何替后窗玻璃除霜？栅格的特性如何确定？将在后面回答这些问题。电路分析可以解答如何均衡地在水平和垂直方向除霜的问题。



(a) 除霜器栅格　(b) 除霜器栅格电路模型

分析工具箱中已经有了欧姆定律和基尔霍夫定律。第2章，已经使用这些工具求解简单电路，第3章，将继续使用这些工具，求解更复杂的电路。更复杂的电路指的是电路元件更多，电路的连接更难理解。本章的目的在于简化这些复杂电路，使其变成较简单的等效电路。本章继续关注相关的简单电路，原因有两点：(1)进一步熟悉定律，为更复杂电路的求解打基础，(2)介绍一些有实际工程应用价值的电路。

本章只讨论恒定不变的电压源和电流源，即电压和电流不随时间变化。恒定电源通常称做直流(dc)电源。dc代表直流。该描述有其历史的原因，今天看起来似乎令人误解。历史

上,直流电流定义为由恒定电压产生的电流。因此,恒定电压被称做直流 dc 电压。直流电流和直流电压如今普遍被科学界和工程界所接受,表示恒定电流和恒定电压。

3.1 电阻的串联

在第 2 章,讨论过两个元件连接在单节点上,称为串联。串联连接的电路元件具有相同的电流。图 3.1 所示电路中的电阻都是串联连接。可以对电路每个节点应用基尔霍夫电流定律说明这些电阻具有相同的电流。图 3.1 中的串联连接表明:

$$i_s = i_1 = -i_2 = i_3 = i_4 = -i_5 = -i_6 = i_7 \tag{3.1}$$

(3.1)式说明,如果知道了七个电流中的任何一个,就能求出全部电流。因此可以将图 3.1 重新改为图 3.2 的形式。保留一个未知电流 i_s。

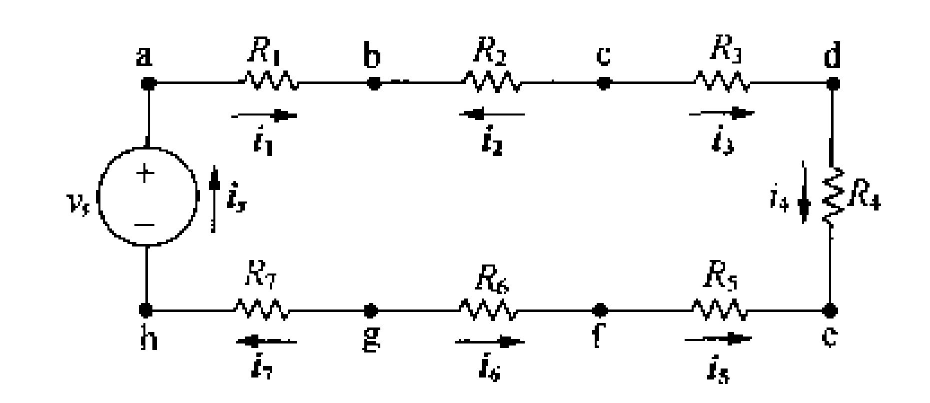



图 3.1 电阻串联连接

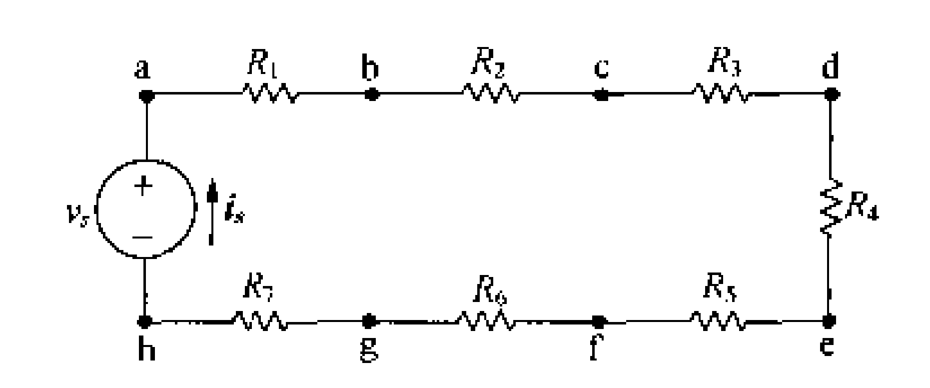


图 3.2 含一个未知电流 i_s 的串联电阻电路

为了求 i_s,对闭合回路应用基尔霍夫电压定律。定义每个电阻上的电压降与 i_s 方向一致。得到:

$$-v_s + i_sR_1 + i_sR_2 + i_sR_3 + i_sR_4 + i_sR_5 + i_sR_6 + i_sR_7 = 0 \tag{3.2}$$

或:

$$v_s = i_s(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7) \tag{3.3}$$

式(3.3)的意义在于七个电阻可以被一个电阻代替,只要一个电阻的数值等于七个电阻值的和。即:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \tag{3.4}$$

或:

$$v_s = i_sR_{eq} \tag{3.5}$$

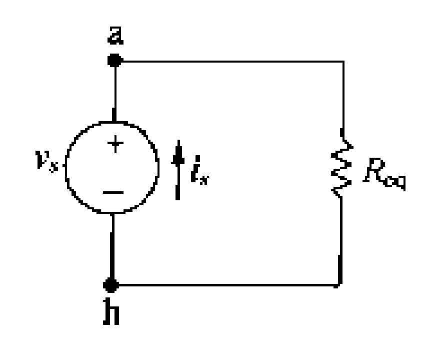
因此,可以将图 3.2 重画成图 3.3 的形式。

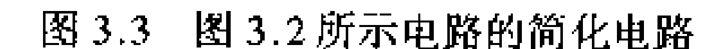
一般来说,如果 k 个电阻串联连接,可以等效为一个电阻,等效电阻的阻值等于 k 个电阻值的和。即:

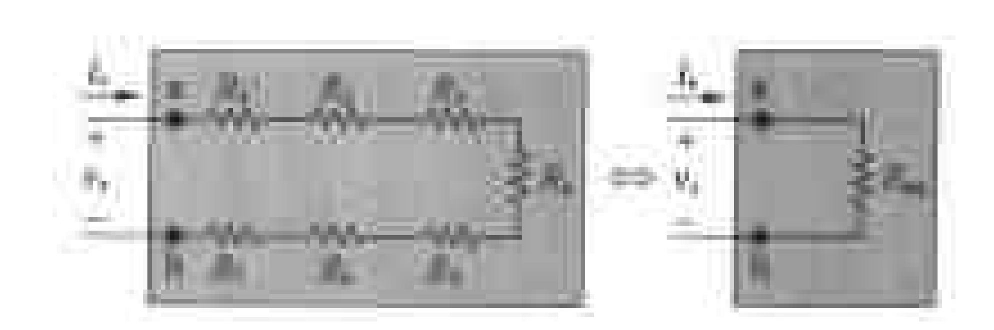
$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{k} R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_k \tag{3.6}$$

需要注意的是,等效电阻的阻值永远大于串联中最大的电阻值。

可以将等效电阻概念想像成一串电阻被放在黑盒子里(电气工程师使用术语“黑盒子”表示一个不透明的容器,即里面内容看不见。工程师通过研究盒子端口电压和电流之间的关系,构造一个模型来模拟里面的内容)。无法确定盒子里有 k 个电阻还是有一个电阻。图 3.4 说明了研究图 3.2 所示电路的方法。

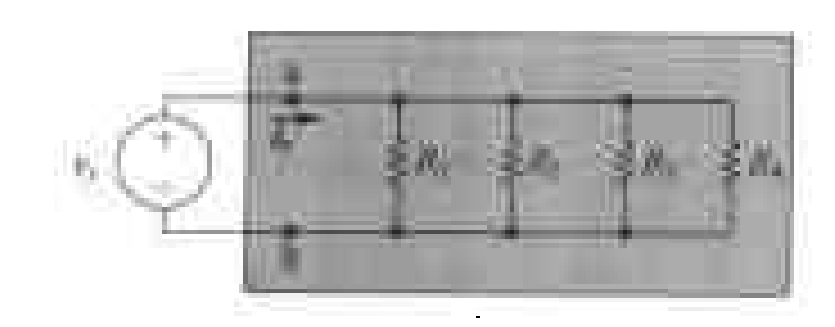



图 3.3　图 3.2 所示电路的简化电路


图 3.4　用黑盒子等效图 3.2 电路

3.2　电阻的并联

两个元件连接在一对节点上，称为并联。并联连接的电路元件两端的电压相同。图 3.5 的电路给出电阻并联连接的例子。如果认为两个元件并联就是它们并行排列在电路图上，这是错误的。并联连接元件的特点是它们两端的电压相同。图 3.6 可以看出，R_1 和 R_3 不是并联连接，因为在它们的端子之间，有另一个电阻分去了一部分电压。


图 3.5　电阻的并联

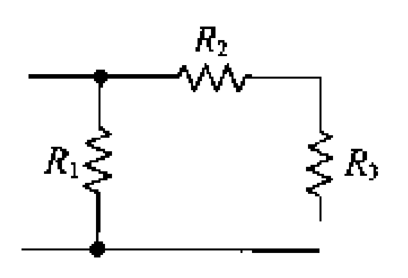


图 3.6　非并联电阻

使用基尔霍夫电流定律和欧姆定律，并联的电阻可以简化为一个等效的电阻。图 3.5 所示的电路中，电流 i_1, i_2, i_3 和 i_4 分别是电阻 R_1 到 R_4 上的电流，设每个电阻上的电流正参考方向是向下流过电阻，即从节点 a 流到节点 b。根据基尔霍夫电流定律：

$$i_s = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \tag{3.7}$$

电阻并联连接意味着每个电阻上的电压相等。根据欧姆定律：

$$i_1 R_1 = i_2 R_2 = i_3 R_3 = i_4 R_4 = v_s \tag{3.8}$$

因此：

$$i_1 = \frac{v_s}{R_1},\ i_2 = \frac{v_s}{R_2},\ i_3 = \frac{v_s}{R_3},\ i_4 = \frac{v_s}{R_4} \tag{3.9}$$

将式 (3.9) 代入式 (3.7) 得到：

$$i_s = v_s\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \tag{3.10}$$

因此有：

$$\frac{i_s}{v_s} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \tag{3.11}$$

式(3.11)就是所要说明的结论：图 3.5 所示电路中的四个电阻可以被一个等效电阻代替。图 3.7 所示电路说明了代替的结果。对于 k 个电阻的并联，式(3.11)可以写为：

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k} \tag{3.12}$$

需要注意的是,等效电阻的阻值永远小于并联连接中的最小的电阻值。

有时,处理并联连接电阻使用电导更为方便,式 (3.12) 变成:

$$G_{eq}=\sum_{i=1}^{k}G_i=G_1+G_2+\cdots+G_k \tag{3.13}$$

许多时候只有两个电阻并联。图 3.8 说明在两个电阻并联的特定情况下,根据式(3.12)计算等效电阻:

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{R_2+R_1}{R_1R_2} \tag{3.14}$$

或:

$$R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \tag{3.15}$$

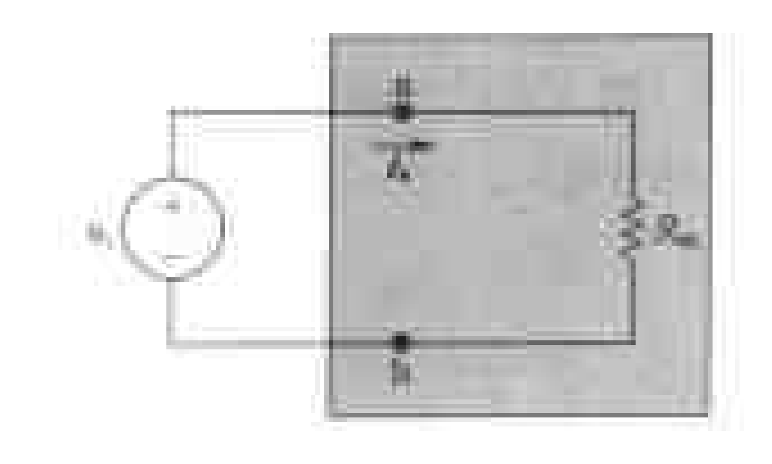


图 3.7 图 3.5 所示电路中的四个电阻被一个等效电阻代替

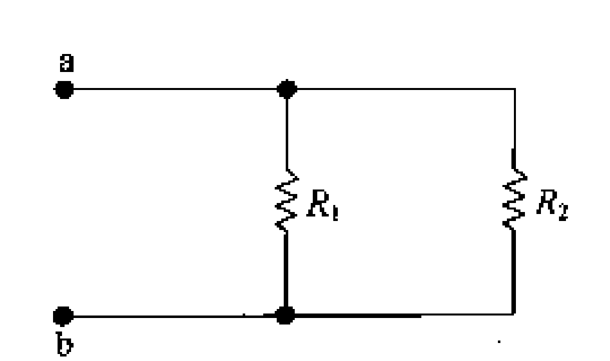


图 3.8 两个电阻并联

两个并联电阻的等效电阻等于两个电阻的乘积除以两个电阻的和。记住,只能在两个电阻并联的特定情况下使用这个结论。例 3.1 说明了这个结论的用途。

例 3.1 求图 3.9 所示电路中的 i_s, i_1 和 i_2。

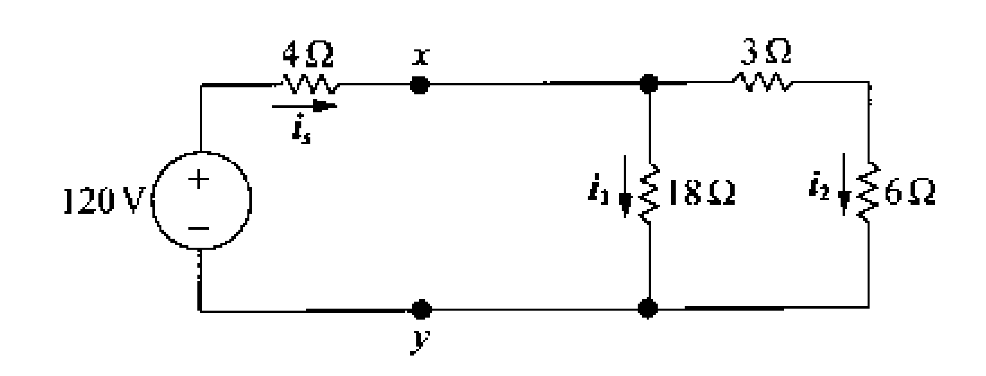


图 3.9 例 3.1 的电路

解:

首先要注意 3 Ω 和 6 Ω 电阻的串联连接,用 9 Ω 电阻代替串联电阻,简化电路如图 3.10 (a)所示。接着用(18×9)/(18+9),即 6 Ω 的电阻,替代 9 Ω 和 18 Ω 电阻的并联连接。图 3.10 电路 (b) 说明了对电路的进一步简化。节点 x 和 y 标记在所有电路图中,这将有助于读者跟踪电路简化的全过程。

根据图 3.10 (b) 可以求出 i_s 等于 120/10,即 12 A。图 3.11 给出了分析结果。为了有助于对电路继续讨论,在图 3.11 中加上电压 v_1。根据欧姆定律计算电压 v_1:

$$v_1=(12)(6)=72\ \text{V} \tag{3.16}$$

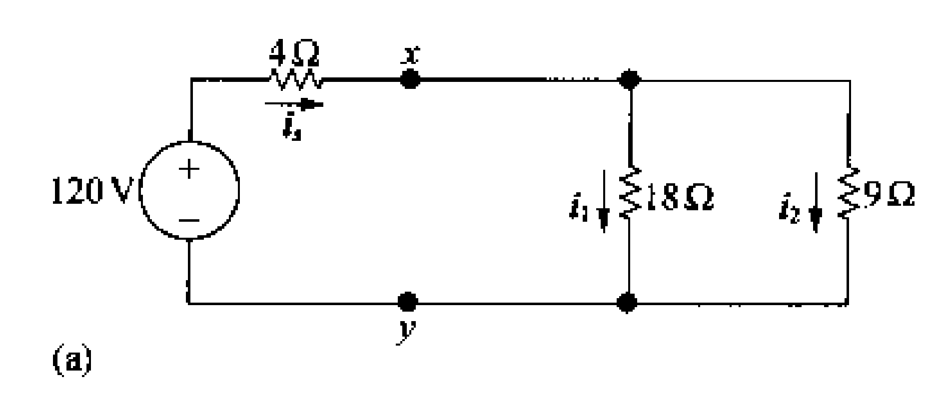
v_1 是从节点 x 到节点 y 的电压降。回到图 3.10 (a) 所示电路,再次使用欧姆定律计算 i_1

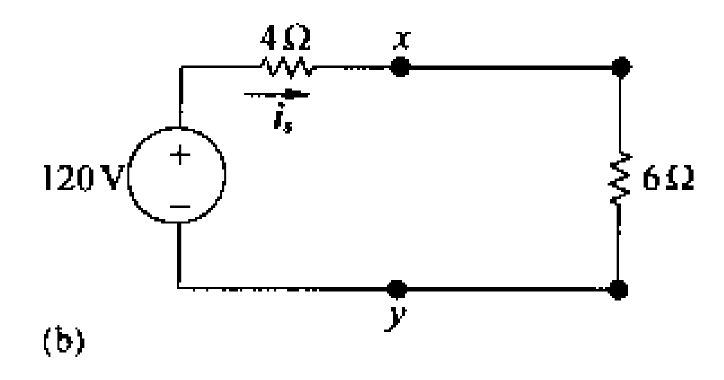
和 i_2。得到：

$$i_1 = \frac{v_1}{18} = \frac{72}{18} = 4\ \text{A} \tag{3.17}$$

$$i_2 = \frac{v_1}{9} = \frac{72}{9} = 8\ \text{A} \tag{3.18}$$

通过应用串并联关系以及欧姆定律，求出了三个电流。





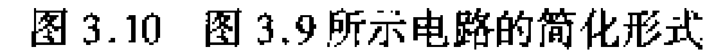


图 3.10　图 3.9 所示电路的简化形式

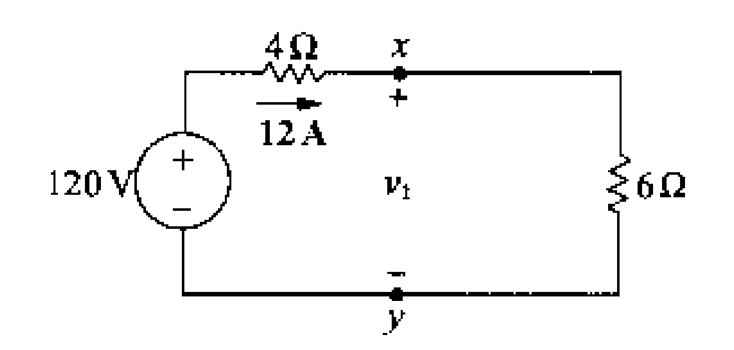


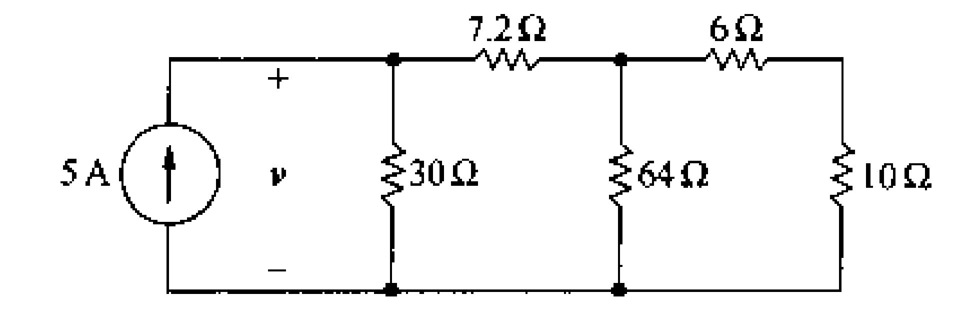
图 3.11　图 3.10(b) 所示电路的 i_s 值

在结束对例 3.1 的讨论之前，需要说明一点，每个节点满足基尔霍夫电流定律；在每个闭合回路中满足基尔霍夫电压定律(注意例 3.1 中有三个闭合回路)。电压源释放的功率等于电阻消耗的全部功率(见习题 3.1 和 3.2)。

练习题

3.1　电路如图，(a) 求电压 v，(b) 求电流源释放到电路的功率，(c) 求 10 Ω 电阻消耗的功率。

答：(a) 60 V，(b) 300 W，(c) 57.6 W。



3.3　分压电路

有时，在电子电路中需要根据提供的一个电压得到更多的电压级别。一种方法是使用分压电路。例如，图 3.12 提供的分压电路。

可以直接应用欧姆定律和基尔霍夫定律分析电路。为了帮助分析，引进电流 i，如图 3.12 (b)所示。根据基尔霍夫电流定律，R_1 和 R_2 上具有相同的电流。沿着闭合回路应用基尔霍夫电压定律，得到：

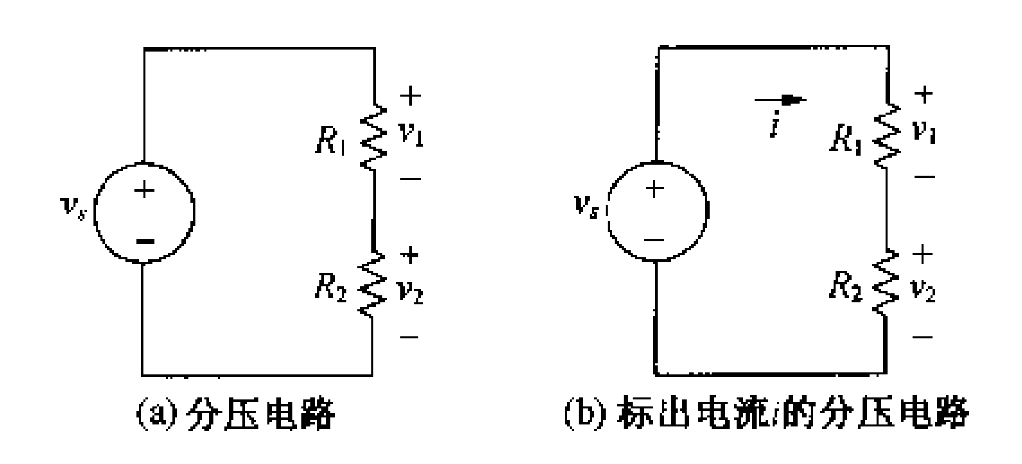


图 3.12

$$v_s = iR_1 + iR_2 \tag{3.19}$$

或:

$$i = \frac{v_s}{R_1 + R_2} \tag{3.20}$$

应用欧姆定律计算 v_1 和 v_2:

$$v_1 = iR_1 = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{3.21}$$

$$v_2 = iR_2 = v_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.22}$$

式(3.21)和(3.22)说明 v_1 和 v_2 是 v_s 的一部分。每一部分都是乘以分压电阻与两个电阻之和的比,因为这个比永远小于 1.0,所以分压 v_1 和分压 v_2 永远小于电源电压 v_s。

如果 v_s 已知,要求 v_2 为某个特定的值,那么利用 R_1 和 R_2 无穷种组合可以产生其比值。例如,假定 v_s 等于 15 V,v_2 为 5 V,那么 $v_2/v_s = 1/3$,根据式(3.22),求出 R_1 和 R_2 比值为 $R_2 = 1/2R_1$。需要讨论的其他问题是 R_1 和 R_2 的选择,电源电压分压产生的功率损耗以及分压电路对其他电路元件的影响。

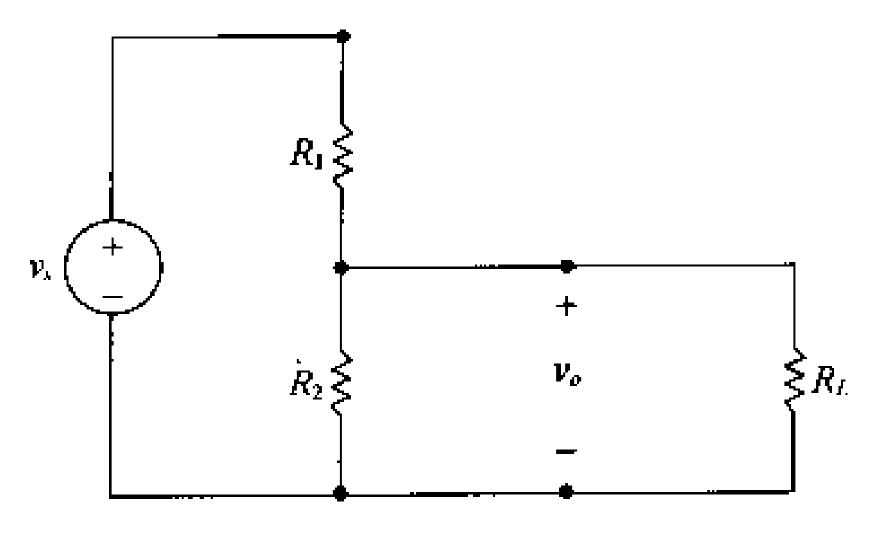


图 3.13 分压电路连接负载 R_L

连接电阻 R_L 与电阻 R_2 并联,如图 3.13 所示。电阻 R_L 为分压电路的负载。电路的负载由一个或多个电路元件组成,它消耗电路的功率。由于负载的连接,输出电压的表达式为:

$$v_0 = \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} v_s \tag{3.23}$$

其中:

$$R_{eq} = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} \tag{3.24}$$

将式(3.24)代入式(3.23)得出:

$$v_o = \frac{R_2}{R_1[1+(R_2/R_L)]+R_2}v_s \tag{3.25}$$

需要注意的是，当 $R_L \to \infty$，式 (3.25) 可以简化为式 (3.22)。式 (3.25) 说明只要 $R_L >> R_2$，电压比 v_o/v_s 就基本不受负载加入的影响。

分压电路另一个值得关注的特性是电阻容差的敏感程度。容差，指的是取值偏差。商业用电阻的阻值是变化的，变化范围在稳定值的某个百分数之内。例 3.2 说明了分压电路中电阻容差的影响。

例 3.2 图 3.14 所示的分压电路中的电阻有 ± 10% 的容差，求 v_o 的最大值和最小值。

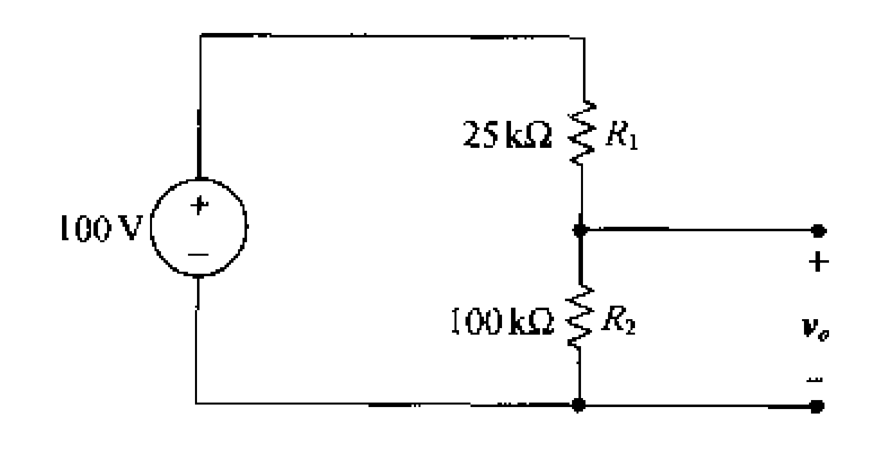


图 3.14 例 3.2 电路

解：

根据式(3.22)，v_o 的最大值发生在 R_2 高出 10% 且 R_1 低 10% 时，v_o 的最小值发生在 R_2 低 10% 且 R_1 高出 10% 时。因此：

$$v_o(\text{最大}) = \frac{(100)(110)}{110+22.5} = 83.02 \text{ V}$$

$$v_o(\text{最小}) = \frac{(100)(90)}{90+27.5} = 76.60 \text{ V}$$

如果在分压电路中采用 10% 容差的电阻，空载输出电压将处在 76.60 V 和 83.02 V 之间。

练习题

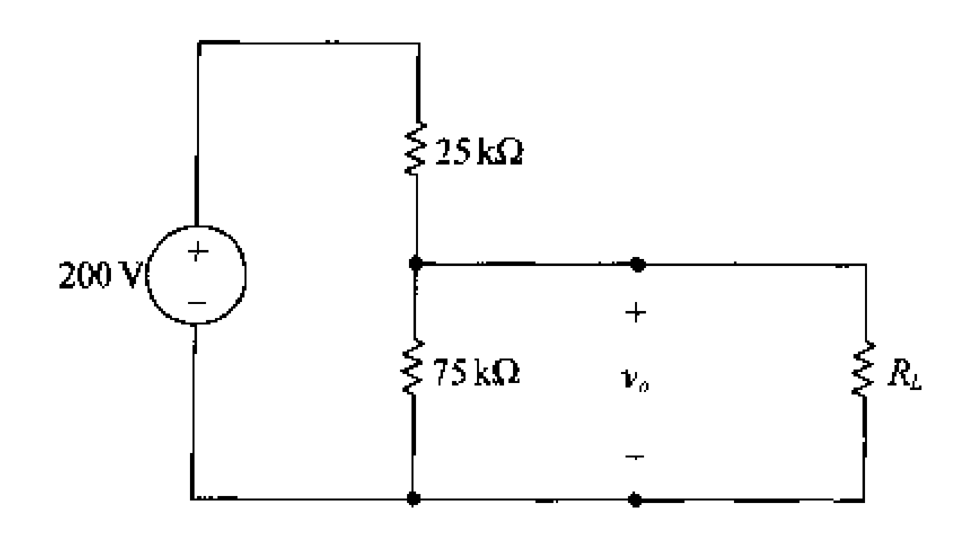
3.2 (a) 电路如图，求空载 v_o 值。

(b) 若 R_L 为 150 kΩ，求 v_o。

(c) 如果负载端出现故障短路，25 kΩ 电阻消耗的功率是多少？

(d) 消耗在 75 kΩ 电阻上的最大功率是多少？

答：(a) 150 V，(b) 133.33 V，(c) 1.6 W，(d) 0.3 W。



3.4 分流电路

图 3.15 所示分流电路包含两个并联的电阻和电流源,分流指的是 R_1 和 R_2 分配电流 i_s。可以直接应用欧姆定律和基尔霍夫电流定律,求电流 i_s 和每个电阻上的电流(即 i_1 和 i_2)的关系。

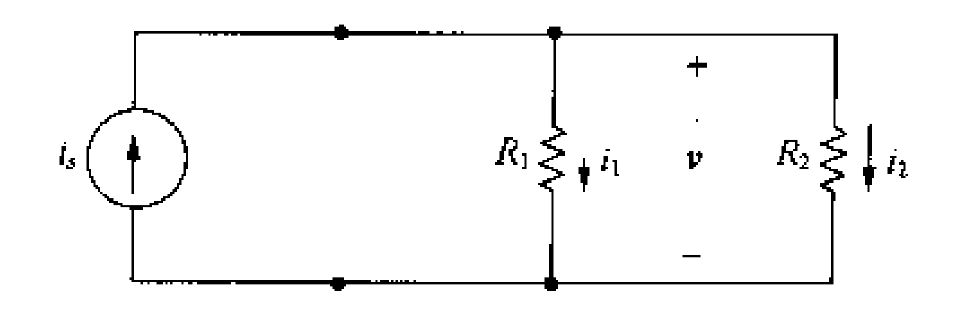


图 3.15 分流电路

并联电阻上的电压是:

$$v = i_1 R_1 = i_2 R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s \tag{3.26}$$

根据式 (3.26),可得:

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s \tag{3.27}$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s \tag{3.28}$$

式 (3.27) 和 (3.28) 说明了两个并联电阻的分流关系,一个电阻上的电流等于进入并联电路的电流乘以另一个电阻再除以两电阻之和。例 3.3 说明了分流电路的用途。

例 3.3 求图 3.16 中消耗在 6 Ω 电阻上的功率。

解:

首先,利用电阻的串联并联关系简化电路,求出相关电流。将图 3.16 所示电路简化为图 3.17 所示的形式。

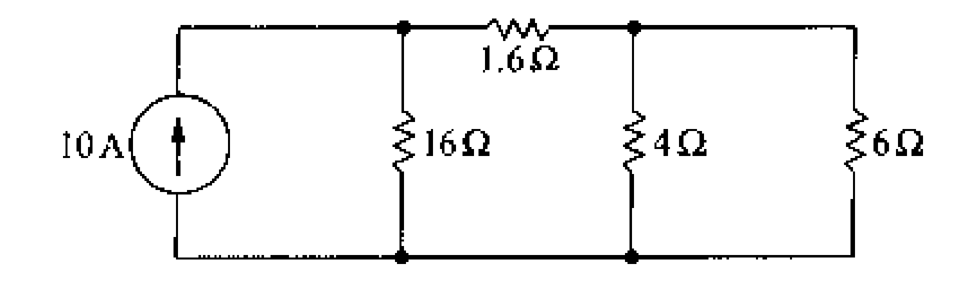


图 3.16 例 3.3 的电路

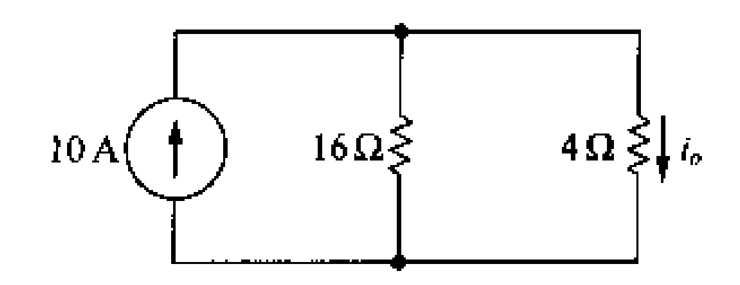


图 3.17 图 3.16 所示电路的简化形式

用分流公式求电流 i_o:

$$i_o = \frac{(10)(16)}{16+4} = 8 \text{ A}$$

i_o 是图 3.16 中 1.6 Ω 电阻上的电流。根据 i_o,进一步求 6 Ω 和 4 Ω 电阻的分流,6 Ω 电阻上的电流是:

$$i_o = \frac{(8)(4)}{10} = 3.2 \text{ A}$$

消耗在 6 Ω 电阻上的功率是:

$$p = (3.2)^2(6) = 61.44\ \text{W}$$

3.5　测量电压和电流

运行实际电路时，经常需要测量电压和电流。在 3.5 节和 3.6 节，将讨论几个测量器件。这些测量器件分析起来相对简单，同时还提供了分压电路、分流电路的实例。

电流表是测量电流的仪器，它与需要测量电流的电路元件串联。电压表是测量电压的仪器，它与需要测量电压的电路元件并联。一个理想的电流表或电压表对需要测量的电路变量不会有影响。也就是说，理想电流表的等效电阻为 0 Ω，与需要测量电流的元件串联，功能上相当于短路。理想电压表有无穷大的等效电阻，与需要测量电压的元件并联，功能上相当于开路。在图 3.18 中，电流表用于测量 R_1 上的电流，电压表用于测量 R_2 上的电压。这些仪表的理想模型画在图 3.19 电路中。

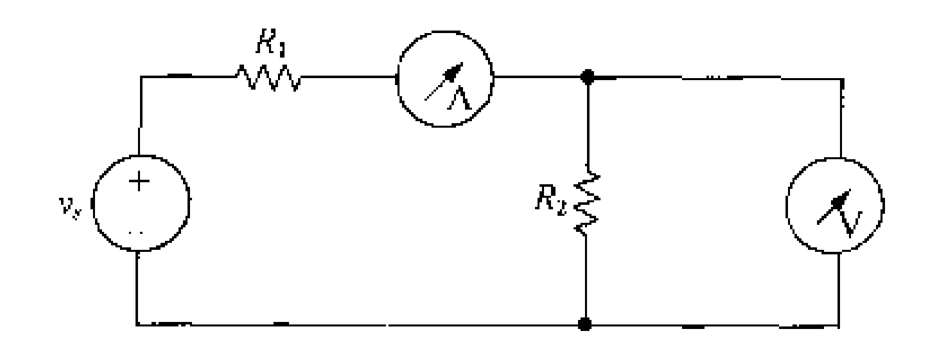


图 3.18　电流表测量 R_1 上的电流，电压表测量 R_2 上的电压

用于测量连续电压和电流的主要仪表有两种类型，数字仪表和模拟仪表。数字仪表在时间的离散点上测量连续电压或电流信号，离散点的时间称做采样时间。因此，随时间连续变化的模拟信号转化为仅存在于离散时间间隔中的数字信号。有关数字仪表更详细的内容超出本课程的范围。然而，很可能在实验室看见并使用数字仪表，因为数字仪表在有些方面超过了模拟仪表。数字仪表与电路连接时引入电路的电阻小，容易连接，由于测量机构的性质不同，测量精度较高。

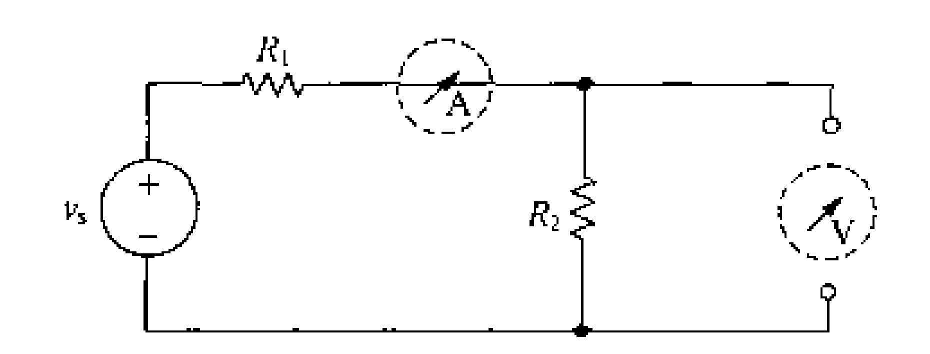


图 3.19　理想电流表的短路模型和理想电压表的开路模型

模拟仪表基于 d'Arsonval 仪表机构，供测量用。d'Arsonval 仪表机构由一个处于永久性磁铁磁场中的可移动线圈组成。当电流流过线圈，线圈上产生一个转矩引起它旋转，使指针移动到某个刻度。按照设计，指针的偏转与可移动线圈中的电流成正比。线圈的性能取决于额定电压和额定电流。例如，一个商用仪表机构额定值为 50 mV 和 1 mA。这意味着当线圈上有 1 mA电流时，线圈上的压降为 50 mV，并且指针将偏转到它的满刻度位置。一个 d'Arsonval 仪表机构的示意图如图 3.20 所示。

模拟电流表由 d'Arsonval 机构与电阻并联组成。如图 3.21 所示。并联电阻的目的在于

限制仪表机构线圈中电流的数值,电流的一部分可以从 R_A 分流。模拟电压表由 d'Arsonval 机构与电阻串联组成,如图 3.22 所示。这里的电阻用于限制仪表线圈上的电压降。在两种仪表中,增加的电阻决定仪表机构满刻度的读数。



图 3.20 d'Arsonval 仪表机构的示意图

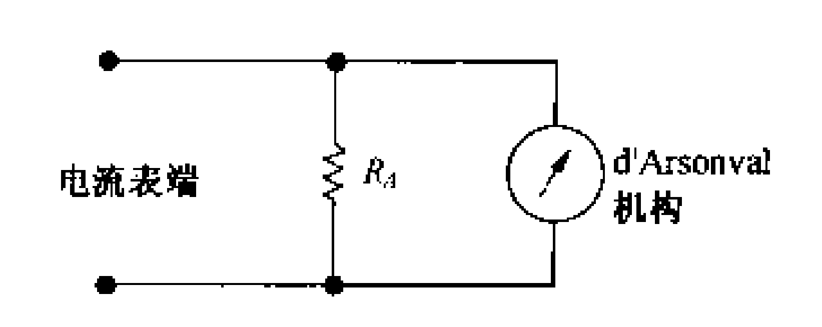


图 3.21 直流电流表电路

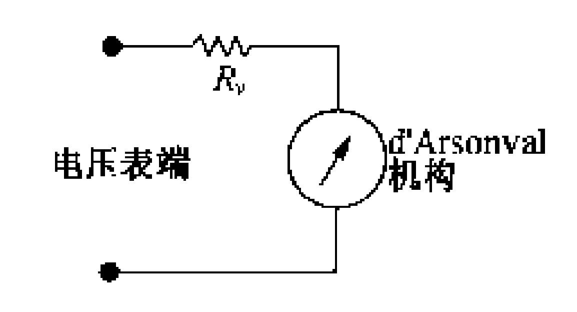


图 3.22 直流电压表电路

通过上述讨论,了解到实际仪表不是理想的。仪表中添加的电阻和仪表机构引入的电阻都加在电路中。事实上,任何仪器通常在进行物理测量时都要吸收被测量系统的能量。仪器吸收的能量越多,测量受到的干扰就越严重。实际电流表的等效电阻不等于零,电流表添加了一个电阻到电路,该电阻与被测量的元件串联。实际电压表的等效电阻不等于无穷大,电压表也添加了一个电阻到电路,该电阻与被测量的元件并联。

仪表对被测量电路有干扰作用,其干扰程度取决于仪表的等效电阻和被测电路电阻的比较情况。例如,使用 1/10 的规则,电流表的等效电阻不超过电路最小电阻的 1/10,就可以确保被测量的电流几乎与没有电流表时电路的电流相同。但是在模拟仪表中,电阻的数值是由期望的满刻度确定的,不能任意选择。下面的例子将要说明在模拟电流表或电压表中,电阻的计算是必要的。

例 3.4 (a) 一个 50 mV,1 mA d'Arsonval 机构的电流表,满刻度读数为 10 mA,试确定 R_A。

(b) 如果满刻度读数改为 1 A,重复(a)。

(c) 如果电路接入 10 mA 电流表测量电流,有多大的电阻加到电路上?

(d) 将接入的电流表改为 1 A 电流表,重复(c)。

解:

(a) 根据问题的叙述,已知当电流表端子上的电流是 10 mA 时,流过仪表线圈的电流是 1 mA。这意味着有 9 mA 的电流将流过 R_A。还已知机构上有 1 mA 电流,而端子上的电压降是 50 mV。根据欧姆定律,有:

$$9 \times 10^{-3} R_A = 50 \times 10^{-3}$$

或:

$$R_A = 50/9 = 5.555\ \Omega$$

(b) 当电流表满刻度偏移为 1 A 时，机构上的电流是 1 mA，R_A 上的电流必然是 999 mA。在这种情况下，得到：

$$999 \times 10^{-3} R_A = 50 \times 10^{-3}$$

或：

$$R_A = 50/999 \approx 50.05\ \text{m}\Omega$$

(c) 用 R_m 表示电流表的等效电阻，对于 10 mA 电流表，有：

$$R_m = \frac{50\ \text{mA}}{10\ \text{mA}} = 5\ \Omega$$

或者：

$$R_m = \frac{(50)(50/9)}{50 + (50/9)} = 5\ \Omega$$

(d) 对于 1 A 电流表，有：

$$R_m = \frac{50 \times 10^{-3}}{1} = 0.050\ \Omega$$

或者：

$$R_m = \frac{(50)(50/999)}{50 + (50/999)} = 0.050\ \Omega$$

例 3.5 (a) 一个 50 mV，1 mA d'Arsonval 机构的电压表，满刻度为 150 V，试确定 R_v。

(b) 如果将满刻度改为 5 V，重复 (a) 问题。

(c) 接入电路的 150 V 电压表的等效电阻是多少？

(d) 如果将接入的电压表改为 5 V 电压表，重复 (c) 问题。

解：

(a) 满刻度偏移需要 50 mV 电压加在仪表机构上，机构有 50 Ω 的电阻。因此，用式 3.22 以及 $R_1 = R_v$，$R_2 = 50\ \Omega$，$v_s = 150$ V，$v_o = 50$ mV：

$$50 \times 10^{-3} = \frac{150(50)}{R_v + 50}$$

解 R_v，得：

$$R_v = 149950\ \Omega$$

(b) 满刻度为 5 V，则：

$$50 \times 10^{-3} = \frac{5(50)}{R_v + 50}$$

或：

$$R_v = 4950\ \Omega$$

(c) 如果用 R_m 表示电压表的等效电阻，有：

$$R_m = \frac{150}{10^{-3}} = 150000\ \Omega$$

或者：

$$R_m = 149950 + 50 = 150000\ \Omega$$

(d) 则:

$$R_m = \frac{5}{10^{-3}} = 5000\ \Omega$$

或者:

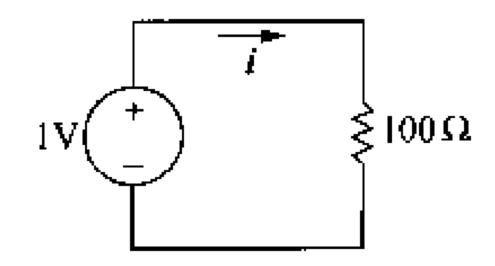
$$R_m = 4950 + 50 = 5000\ \Omega$$

练习题

3.3 (a) 求如图所示电路的电流。

(b) 如果用例 3.4 (a)中的电流表来测量电流,读数是多少?

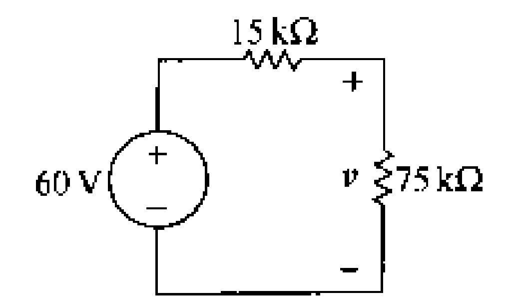
答:(a) 10 mA,(b) 9.52 mA。



3.4 (a) 如图电路,求 75 kΩ 电阻上的电压 v。

(b) 如果用例 3.5 (a) 中的 150 V 电压表来测量电压,读数是多少?

答:(a) 50 V,(b) 46.15 V。



3.6 惠斯登电桥

测量电阻可以采用各种不同的电路结构。这里将采用惠斯登电桥测量电阻。惠斯登电桥电路可以用来精确地测量一定范围的电阻值,测量范围从 1 Ω 到 1 MΩ。商用惠斯登电桥的精确度可以达到 ±0.1%。电桥电路包含四个电阻,一个直流电压源和一个探测器。四个电阻中有一个电阻可以变化,如图 3.23 所示,带箭头的电阻 R_3 是可变电阻。直流电压源通常用电池,在图 3.23 中,电压源 v 用电池符号表示。探测器一般是一个微安范围的 d'Arsonval 机构,称做检流计。图 3.23 给出了电路结构:电阻、电池和探测器。其中 R_1,R_2 和 R_3 是已知电阻,R_x 是未知电阻。

为了求 R_x,调节可变电阻 R_3,直到检流计中的电流为零。然后根据简单的表达式计算未知电阻:

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3 \tag{3.29}$$

电桥电路的求解可以直接应用基尔霍夫定律,推导出式(3.29),重新画电桥电路如图 3.24 所示。图中展示了推导式(3.29)时需要的电流。i_g 等于零时,即电桥平衡时,根据基尔霍夫电流定律有:

$$i_1 = i_3 \tag{3.30}$$

$$i_2 = i_x \tag{3.31}$$

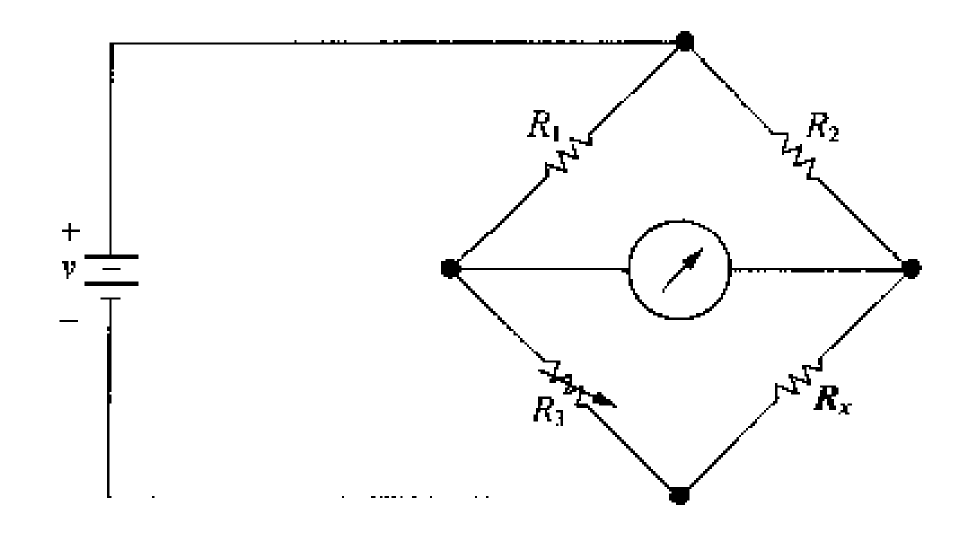


图 3.23　惠斯登电桥电路

图 3.24　平衡的惠斯登电桥($i_g = 0$)

如果 i_g 等于零,检流计上没有电压降,因此,a 点和 b 点的电位相同。所以,电桥平衡时,根据基尔霍夫电压定律,则有:

$$i_3 R_3 = i_x R_x \tag{3.32}$$

$$i_1 R_1 = i_2 R_2 \tag{3.33}$$

将式 (3.30) 和式 (3.31) 代入式 (3.32),得到:

$$i_1 R_3 = i_2 R_x \tag{3.34}$$

将式 (3.34) 除以式 (3.33),再经过整理得到 R_x 表达式,也就是式 (3.29)。

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_x}{R_2} \tag{3.35}$$

根据上式整理,得到:

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3 \tag{3.36}$$

现在已经验证了式(3.29)的正确性,有几点需要注意。如果 R_2/R_1 等于 1,则未知电阻 R_x 等于 R_3。在这种情况下,电桥电阻 R_3 的变化范围必须覆盖 R_x 的值。例如,如果未知电阻是 1000 Ω,而 R_3 只能从 0 变化到 100 Ω,那么,电桥就永远不会平衡。因此,为了能在很宽的范围内覆盖未知电阻,必须能够改变 R_2/R_1。在商用惠斯登电桥中,R_1 和 R_2 通常由开关控制的十进制数的电阻组成。通常十进制数是 1 Ω,10 Ω,100 Ω 和 1000 Ω,这样,R_2/R_1 按十进制规律从 0.001 变化到 1000。可变电阻 R_3 一般从 1 Ω 到 11000 Ω 按整数进行调节。

尽管式(3.29)意味着 R_x 可以在零到无穷大范围内变化,但是 R_x 实际范围大约是 1 Ω 到 1 MΩ。太小的电阻用标准惠斯登电桥测量非常困难,因为产生在不同的金属连接点上的热电电压,会产生热效应,即 $i^2 R$ 效应。太大的电阻要精确测量也很困难,这是因为有泄漏电流。换句话说,如果 R_x 太大,电绝缘体的泄漏电流与电桥电路的分支电流数值会不相上下。

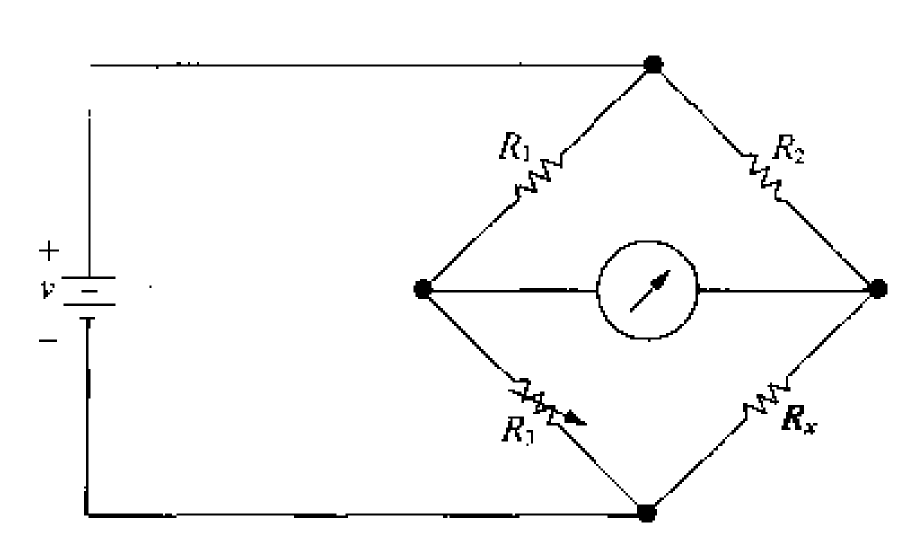
练习题

3.5 电桥如图所示,在 $R_1 = 100$ Ω,$R_2 = 1000$ Ω,$R_3 = 150$ Ω 时,电桥处于平衡状态。电桥由 5 V 直流电源供电。

(a) R_x 的值为多少?

(b) 假定每个电桥电阻最大功率损耗为 250 mW。电桥处于平衡状态时没有超出电阻的功率损耗,电桥离开平衡状态是否会受到损害?

答:(a) 1500 Ω,(b) 是。



3.7 三角形-星形(π 形-T 形)等效电路

图 3.23 所示的电桥结构引入了一种将要进一步讨论的电阻互连结构。如果用检流计的等效电阻 R_m 替换检流计,得到的等效电路如图 3.25 所示。如果只局限在本章之前介绍的简单串联或并联等效电路,无法将这个等效电路中的电阻网络简化为并联在电池两端的单个等效电阻。

采用三角形 - 星形(Δ - Y)或 π 形 - T 形(π - T)等效电路,可以将上述互连的电阻简化为单个等效电阻。

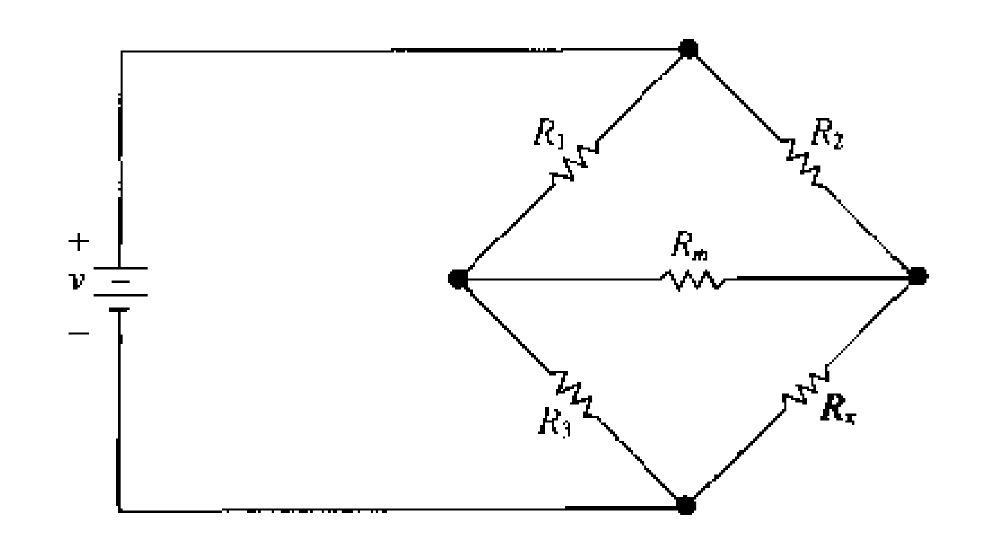


图 3.25 由惠斯登电桥电路产生的电阻网络

图 3.25 所示电路中的电阻 R_1,R_2 和 R_m(或 R_3,R_m 和 R_x)被称做三角形(Δ)互连。因为互连看上去像希腊字母 Δ。它也被称做 π 形互连,因为在没有破坏两种结构电等效的条件下,Δ 可以变为 π。Δ 互连和 π 互连的电等效如图 3.26 所示。

图 3.25 所示电路中的电阻 R_1,R_m 和 R_3(或 R_2,R_m 和 R_x)被称做星形(Y)互连。因为互连能够使形状看上去像字母 Y。如果互连画成图 3.27 的形式,很容易看出 Y 的形状。Y 结构也被称做 T 形互连,因为在没有破坏两种结构电等效的前提下,Y 结构可以变为 T 结构。Y 结构和 T 结构的电等效如图 3.27 所示。

图 3.28 说明 Δ - Y(或 π - T)等效电路的变换。不能简单地采用改变互连形状的方法将 Δ 互连转化为 Y 互连。Δ 连接电路与 Y 连接电路等效指的是 Δ 结构可以被 Y 结构替代,两种结构端口特性相同。即如果每个电路用黑盒子替代,依靠外部测量,无法判断哪个盒子包含 Δ

连接电阻,哪个盒子包含 Y 连接电阻。只有每个盒子相应端口之间的电阻相同,等效条件才成立。例如,无论使用 Δ 连接还是使用 Y 连接,端子 a 和 b 之间的电阻必须是相同的。在 Δ 连接电路的每个端口,使用串联和并联简化方法计算等效电阻,得:

$$R_{ab}=\frac{R_c(R_a+R_b)}{R_a+R_b+R_c}=R_1+R_2 \tag{3.37}$$

$$R_{bc}=\frac{R_a(R_b+R_c)}{R_a+R_b+R_c}=R_2+R_3 \tag{3.38}$$

$$R_{ca}=\frac{R_b(R_c+R_a)}{R_a+R_b+R_c}=R_1+R_3 \tag{3.39}$$

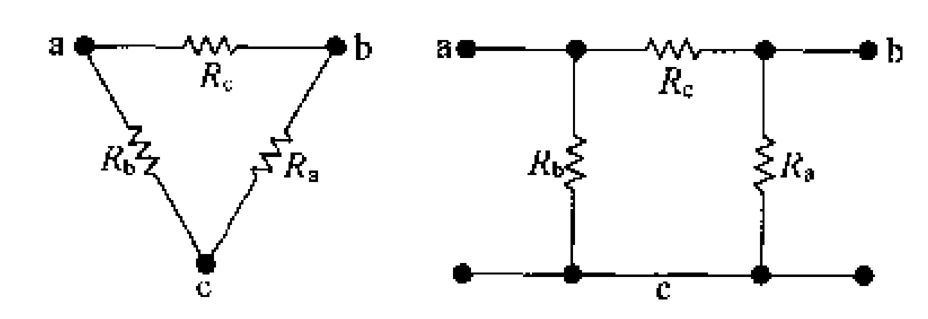


图 3.26　Δ结构看做 π 结构

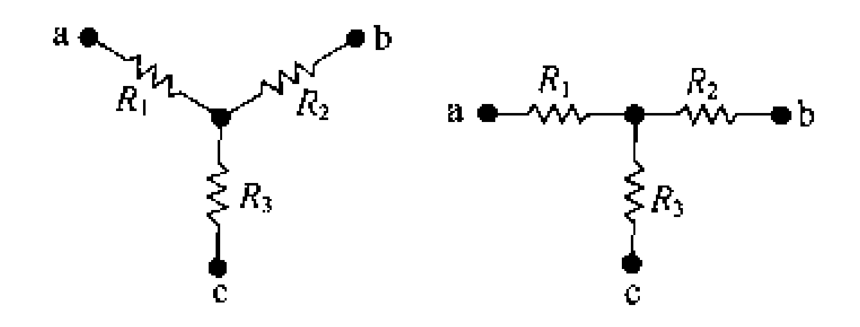


图 3.27　Y 结构可以看做 T 结构

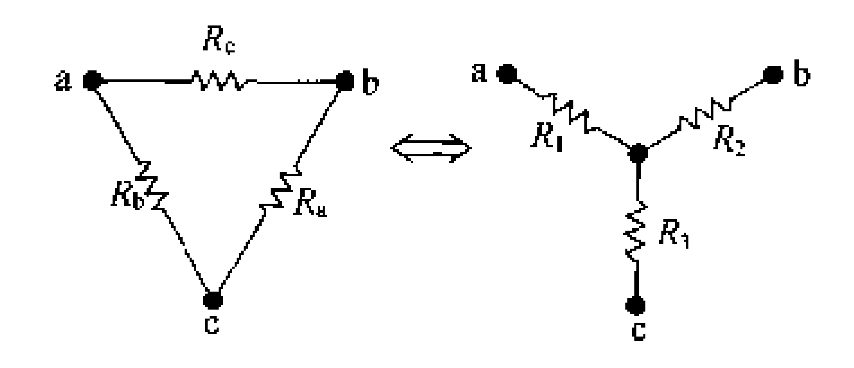


图 3.28　Δ－Y 变换

对式(3.37)～(3.39)进行简单的代数处理,就可以获得用 Δ 连接电阻表示的 Y 连接电阻数值。这是 Δ－Y 等效电路必须具备的:

$$R_1=\frac{R_bR_c}{R_a+R_b+R_c} \tag{3.40}$$

$$R_2=\frac{R_cR_a}{R_a+R_b+R_c} \tag{3.41}$$

$$R_3=\frac{R_aR_b}{R_a+R_b+R_c} \tag{3.42}$$

Δ－Y 变换颠倒过来也是可能的。即,用 Δ 结构替代 Y 结构,三个 Δ 连接电阻表达式变为三个 Y 连接电阻的函数:

$$R_a=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1} \tag{3.43}$$

$$R_b=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} \tag{3.44}$$

$$R_c=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} \tag{3.45}$$

例 3.6 说明了 Δ－Y 变换对简化电路分析的作用。

例 3.6　求图 3.29 所示电路中 40 V 电源提供的电流和功率。

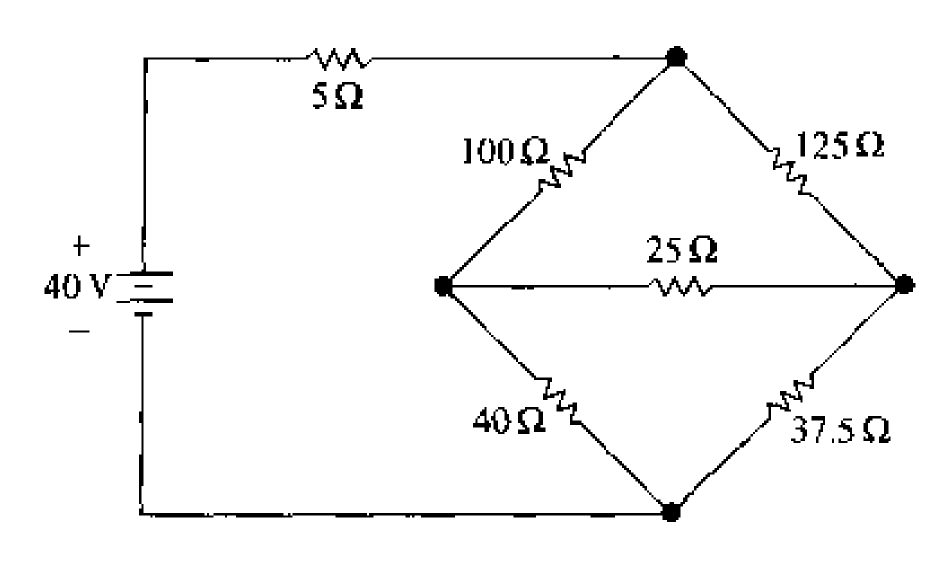


图 3.29 例 3.6 的电路

解:

这里关心的仅仅是 40 V 电源提供的电流和功率,一旦获得电源两端的等效电阻,问题就可以解决了。将上面的 Δ(100 Ω,125 Ω,25 Ω)或下面的 Δ(40 Ω,25 Ω,37.5 Ω)用相应的等效 Y 替代,就能很容易求得等效电阻。选择变换上面的 Δ,然后计算三个由图 3.30 定义的 Y 电阻值。根据式(3.40)至(3.42),有:

$$R_1 = \frac{100 \times 125}{250} = 50\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{125 \times 25}{250} = 12.5\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{100 \times 25}{250} = 10\ \Omega$$

将 Y 电阻代入图 3.29 所示电路,产生的电路如图 3.31 所示。根据图 3.31,利用串并联简化方法,很容易计算出 40 V 电源两端的电阻:

$$R_{eq} = 55 + \frac{(50)(50)}{100} = 80\ \Omega$$

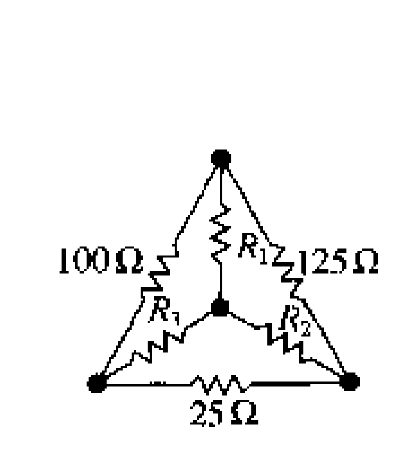


图 3.30 等效 Y 电阻

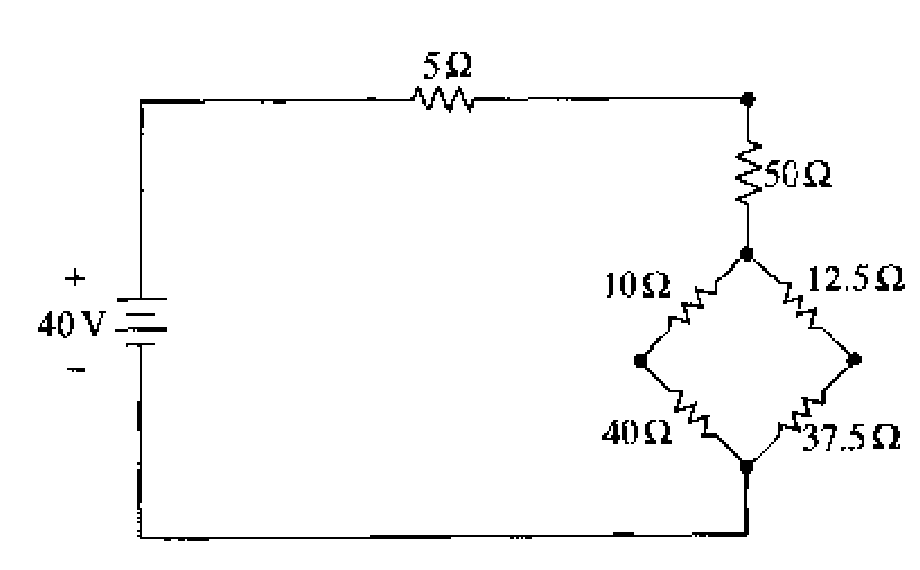


图 3.31 图 3.29 所示电路的变换形式

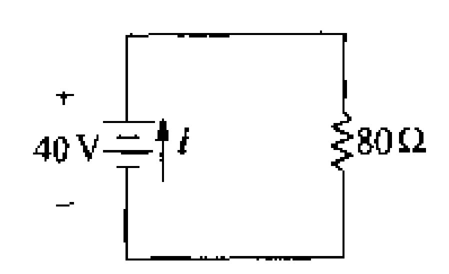


图 3.32 图 3.29 所示电路简化的最终结果

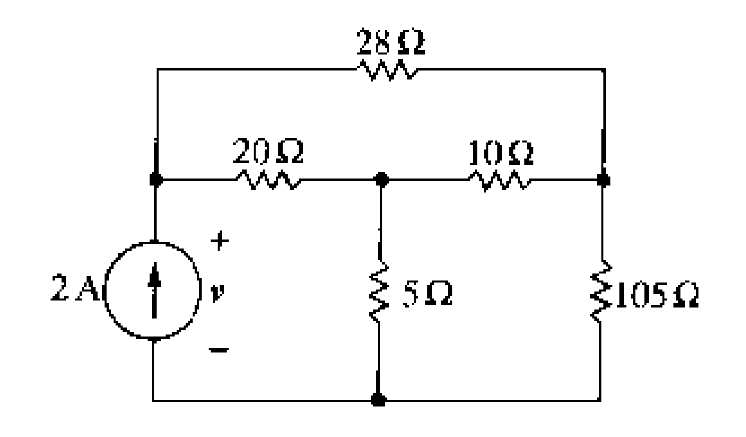
应当注意到,电路简化的最终结果是一个 80 Ω 电阻接在 40 V 电源两端,如图 3.32 所示。

由此得到 40 V 电源为电路提供的电流和功率分别是 0.5 A 和 20 W。

练习题

3.6　使用 Y－Δ 变换求如图电路的电压 v。

答:35 V。



实例

后窗玻璃除霜器二

除霜器栅格的模型如图 3.33 所示，其中 x 和 y 标记栅格元件的水平和垂直间距，已知栅格的尺寸。为了使每根导线单位长度的功率损耗相同，需要求出栅格中每个电阻的表达式，确保后窗玻璃在 x 和 y 方向统一加热。因此，需要根据下列关系式求栅格电阻的值：

$$i_1^2\left(\frac{R_1}{x}\right)=i_2^2\left(\frac{R_2}{x}\right)=i_3^2\left(\frac{R_3}{x}\right)=i_4^2\left(\frac{R_4}{x}\right)=i_5^2\left(\frac{R_5}{x}\right) \tag{3.46}$$

$$i_1^2\left(\frac{R_a}{y}\right)=i_1^2\left(\frac{R_1}{x}\right) \tag{3.47}$$

$$i_1^2\left(\frac{R_a}{y}\right)=i_b^2\left(\frac{R_b}{y}\right)=i_c^2\left(\frac{R_c}{y}\right)=i_5^2\left(\frac{R_d}{y}\right) \tag{3.48}$$

$$i_5^2\left(\frac{R_d}{y}\right)=i_5^2\left(\frac{R_5}{x}\right) \tag{3.49}$$

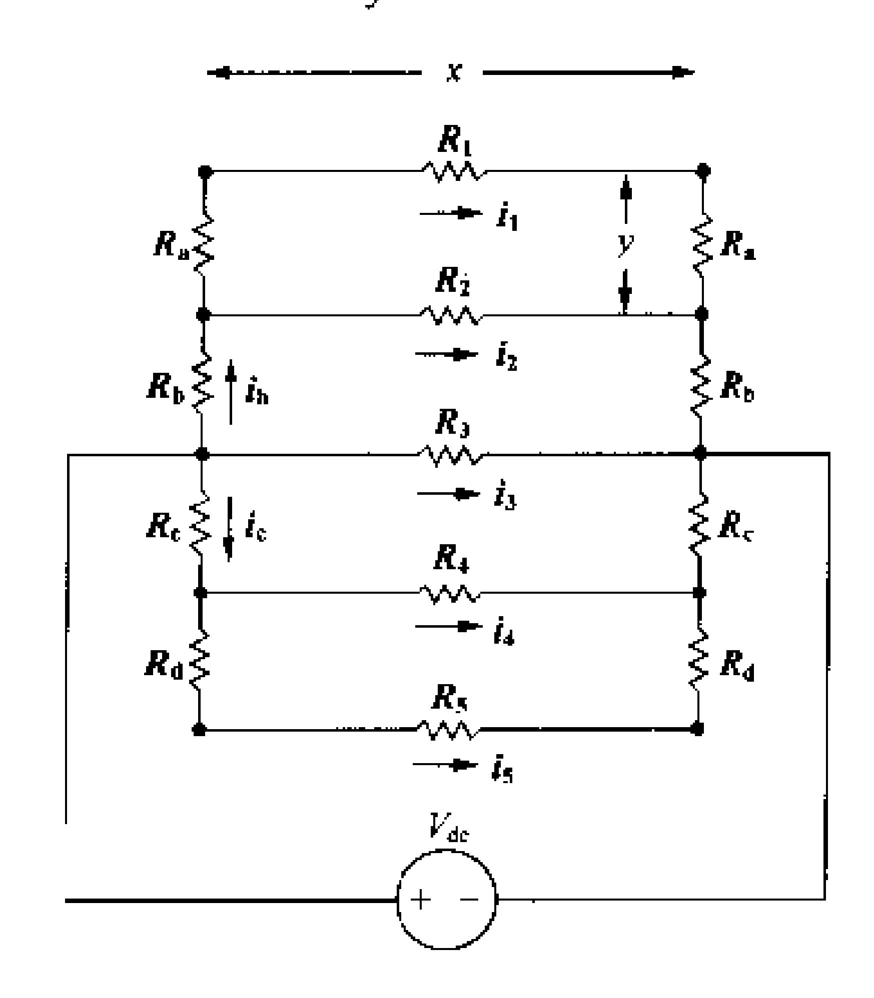


图 3.33　除霜器栅格的模型

根据栅格的结构特点进行分析，如果不连接较低部分的电路(即电阻 R_c，R_d，R_4 和 R_5)，

电流 i_1,i_2,i_3 和 i_b 不受影响。因此,可以分析较简单的图 3.34 中的电路,而不去分析图 3.33 中的电路。还要注意到,求出图 3.34 电路中的 R_1,R_2,R_3,R_a 和 R_b 后,也就求出了其余的电阻,因为:

$$\begin{aligned} R_4 &= R_2 \\ R_5 &= R_1 \\ R_c &= R_b \\ R_d &= R_a \end{aligned} \tag{3.50}$$

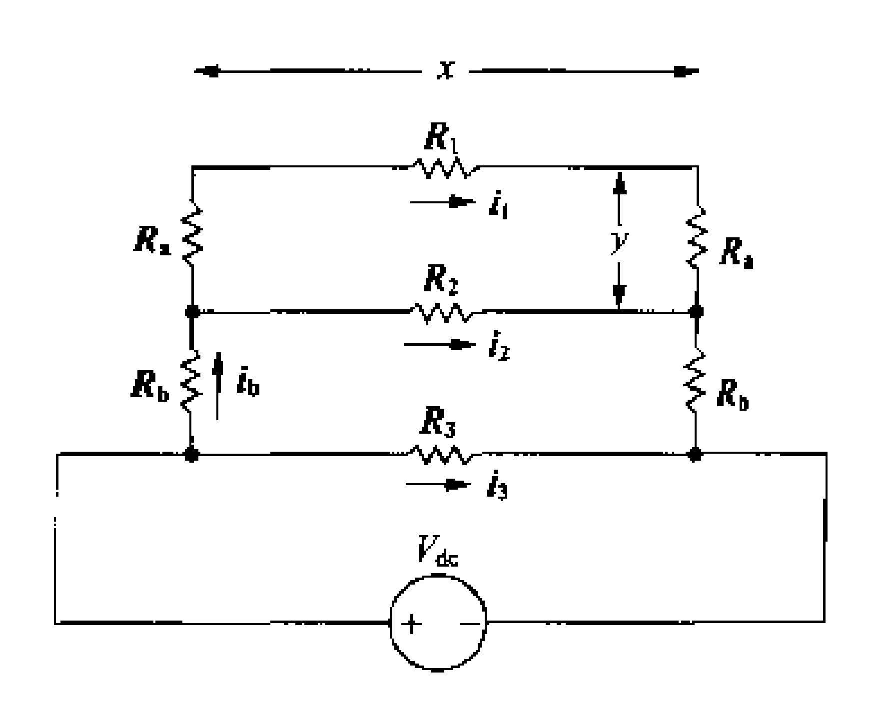


图 3.34 简化的除霜器栅格模型

依据电流 i_1,i_2,i_3 和 i_b 的表达式,开始分析图 3.34 中的简化栅格电路。为了求 i_b,先求与 R_3 并联的等效电阻:

$$\begin{aligned} R_e &= 2R_b + \frac{R_2(R_1+2R_a)}{R_1+R_2+2R_a} \\ &= \frac{(R_1+2R_a)(R_2+2R_b)+2R_2R_b}{(R_1+R_2+2R_a)} \end{aligned} \tag{3.51}$$

为了方便,定义式(3.51)的分子为:

$$D=(R_1+2R_a)(R_2+2R_b)+2R_2R_b \tag{3.52}$$

因此:

$$R_e=\frac{D}{(R_1+R_2+2R_a)} \tag{3.53}$$

直接可得:

$$\begin{aligned} i_b &= \frac{V_{dc}}{R_e} \\ &= \frac{V_{dc}(R_1+R_2+2R_a)}{D} \end{aligned} \tag{3.54}$$

使用分流公式,根据 i_b 可以直接求得表达式 i_1 和 i_2。因此:

$$i_1=\frac{i_bR_2}{R_1+R_2+2R_a}=\frac{V_{dc}R_2}{D} \tag{3.55}$$

以及

$$i_2 = \frac{i_b(R_1+2R_a)}{(R_1+R_2+2R_a)} = \frac{V_{dc}(R_1+2R_a)}{D} \tag{3.56}$$

表达式 i_3 简化为：

$$i_3 = \frac{V_{dc}}{R_3} \tag{3.57}$$

根据式(3.46)～(3.48)，推导出以 R_1 为变量的 R_a, R_b, R_2 和 R_3 函数表达式，根据式(3.47)：

$$\frac{R_a}{y} = \frac{R_1}{x}$$

或：

$$R_a = \frac{y}{x}R_1 = \sigma R_1 \tag{3.58}$$

其中：

$$\sigma = y/x$$

然后根据式(3.46)，有：

$$R_2 = \left(\frac{i_1}{i_2}\right)^2 R_1 \tag{3.59}$$

(i_1/i_2)可以直接从式(3.55)和(3.56)获得：

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1+2R_a} = \frac{R_2}{R_1+2\sigma R_1} \tag{3.60}$$

将式(3.60)代入式(3.59)，经过代数处理(参见习题 3.65)后，得到：

$$R_2 = (1+2\sigma)^2 R_1 \tag{3.61}$$

以 R_1 为变量的 R_b 函数式，可以利用式(3.48)推出。即：

$$R_b = \left(\frac{i_1}{i_b}\right)^2 R_a \tag{3.62}$$

(i_1/i_b)直接从式(3.54)和(3.55)获得。因此：

$$\frac{i_1}{i_b} = \frac{R_2}{(R_1+R_2+2R_a)} \tag{3.63}$$

将式(3.63)代入式(3.62)，经过代数处理(参见习题 3.65)之后，得到：

$$R_b = \frac{(1+2\sigma)^2\sigma R_1}{4(1+\sigma)^2} \tag{3.64}$$

最终，表达式 R_3 可以从式(3.46)推出，即：

$$R_3 = \left(\frac{i_1}{i_3}\right)^2 R_1 \tag{3.65}$$

其中：

$$\frac{i_1}{i_3} = \frac{R_2R_3}{D}$$

再一次经过代数处理(参见习题 3.66)之后，表达式 R_b 可以被简化为：

$$R_3 = \frac{(1+2\sigma)^4}{(1+\sigma)^2}R_1 \tag{3.66}$$

分析结果在表 3.1 中给出，举例说明表的使用。

表 3.1 除霜器栅格电阻表达式

电 阻	表 达 式
R_a	σR_1
R_b	$\frac{(1+2\sigma)^2\sigma R_1}{4(1+\sigma)^2}$
R_2	$(1+2\sigma)^2 R_1$
R_3	$\frac{(1+2\sigma)^4}{(1+\sigma)^2}R_1$

其中 $\sigma=\frac{y}{x}$

例 假定栅格结构是1米宽,五根水平栅格线的垂直位移是0.025米。为了达到在12 V电压下的120 W/m功率损耗,试指定 $R_1 \sim R_5$ 和 $R_a \sim R_h$ 的数值。

解:

根据间距规格计算 σ 和 R_3,得:

$$\sigma=\frac{y}{x}=\frac{0.025}{1}=0.025$$

因为栅格是1米宽,R_3 的功率损耗是120 W,因此:

$$R_3=\frac{12^2}{120}=1.2\ \Omega$$

使用表3.1计算 R_1,由于 σ 和 R_3 已知,结果是:

$$R_1=1.0372\ \Omega$$

反复使用表3.1计算 R_a,R_b 和 R_2,数值是:

$$R_a=0.0259\ \Omega$$
$$R_b=0.0068\ \Omega$$
$$R_2=1.1435\ \Omega$$

根据对称性得:

$$R_4=R_2=1.1435\ \Omega$$
$$R_5=R_1=1.0372\ \Omega$$
$$R_c=R_b=0.0068\ \Omega$$
$$R_d=R_a=0.0259\ \Omega$$

通过检查功率损耗来检验这些计算值。它应该满足指定的120 W/m。首先计算 D 的数值。得到:

$$D=1.2758$$

使用式(3.54)~(3.56)获得 i_b,i_1 和 i_2。结果是:

$$i_b=21\ \text{A}$$
$$i_1=10.7561\ \text{A}$$

$$i_2 = 10.2439\ \text{A}$$

由于 $i_b^2 R_h$ 等于 3 W，每米功率损耗是 3/0.025 = 120 W/m。$i_1^2 R_1$ 的值是 120 W，即 120 W/m。$i_2^2 R_2$ 的值是 120 W，即 120 W/m。最后检查 $i_1^2 R_a$，也是 3 W，即 120 W/m。

习题 3.65 ~ 3.68 采用了这个除霜器栅格电路。

小结

- 串联电阻可以按照下列方程式用一个等效电阻代替：

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{k} R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_k$$

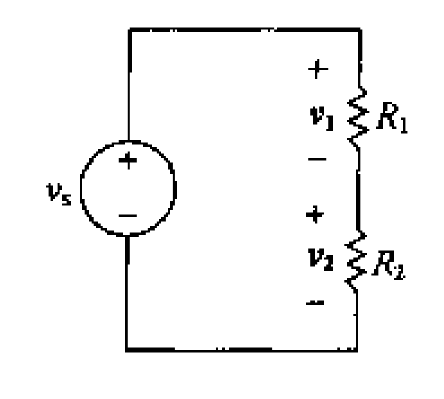
- 并联电阻可以按照下列方程式用一个等效电阻代替。

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k}$$

- 当只有两个电阻并联时，等效电阻的计算可以简化为：

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- 如图所示的串联电阻分压时，每个电阻上的电压可以按照下列方程式求得：



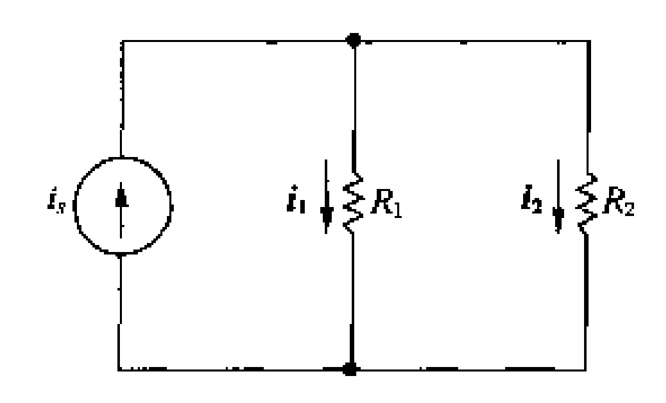
$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

- 如图所示的并联电阻分流时，每个电阻上的电流可以按照下列方程式求：

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s$$



- 电压表测量电压必须与被测电压并联。理想电压表的端电阻无穷大，因此，不会改变被测电压。
- 电流表测量电流必须与被测电流串联。理想电流表的内电阻为零，因此，不会改变被测的电流。
- 数字仪表和模拟仪表有内电阻，影响被测电路。基于 d'Arsonval 仪表机构的仪表设置了

内阻,目的是限制流过机构线圈的电流。

- 惠斯登电桥电路用于精确地测量电阻的数值。惠斯登电桥电路包含四个电阻,一个直流电压源和一个检流计。当电阻之间的关系等于式(3.29)时,惠斯登电桥处于平衡状态,检流计的读数为 0 A。
- 一个电路的三个电阻如果连接成 Δ 结构(或 π 结构),可以变换成等效电路的形式,等效电路中的三个电阻是 Y 连接(或 T 连接)。式(3.40) ~ (3.42)给出 Δ - Y 变换的计算,式(3.43) ~ (3.45)给出 Y - Δ 变换的计算。

习题

P3.1 (a) 求图 3.9 所示电路中每个电阻上的功率损耗。
(b) 求 120 V 电源释放的功率。
(c) 证明释放的功率等于损耗的功率。

3.2 (a) 证明图 3.9 所示电路(参见例 3.1)在连接点 x 和 y 上满足基尔霍夫电流定律。
(b) 证明图 3.9 所示电路的解沿每个闭合回路都满足基尔霍夫电压定律。

P3.3 求图 P3.3 所示电路中的 5 Ω 电阻消耗的功率。

P3.4 电路如图 P3.4 所示,计算:
(a) v_o 与 i_o。
(b) 15 Ω 电阻上消耗的功率。
(c) 电压源提供的功率。

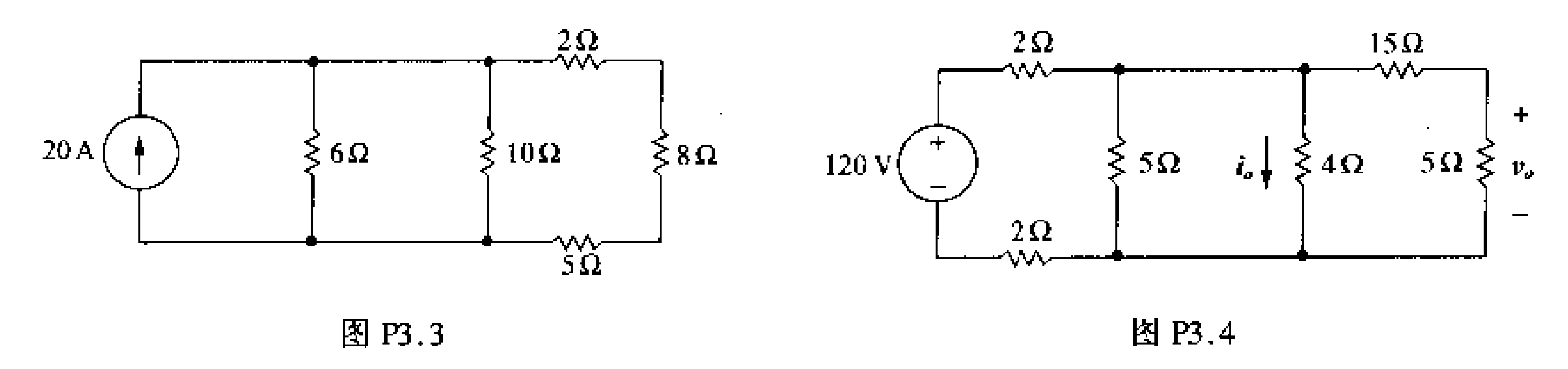


图 P3.3　　图 P3.4

3.5 (a) 求阻值均为 R 的两个并联电阻的等效电阻表达式。
(b) 求阻值均为 R 的 n 个并联电阻的等效电阻表达式。
(c) 使用 (b) 的计算结果,利用 1 kΩ 电阻设计一个等效电阻为 700 Ω 的电阻网络。
(d) 使用 (b) 的计算结果,利用 2 kΩ 电阻设计一个等效电阻为 5.5 kΩ 的电阻网络。

P3.6 求图 P3.6 中每个电路的等

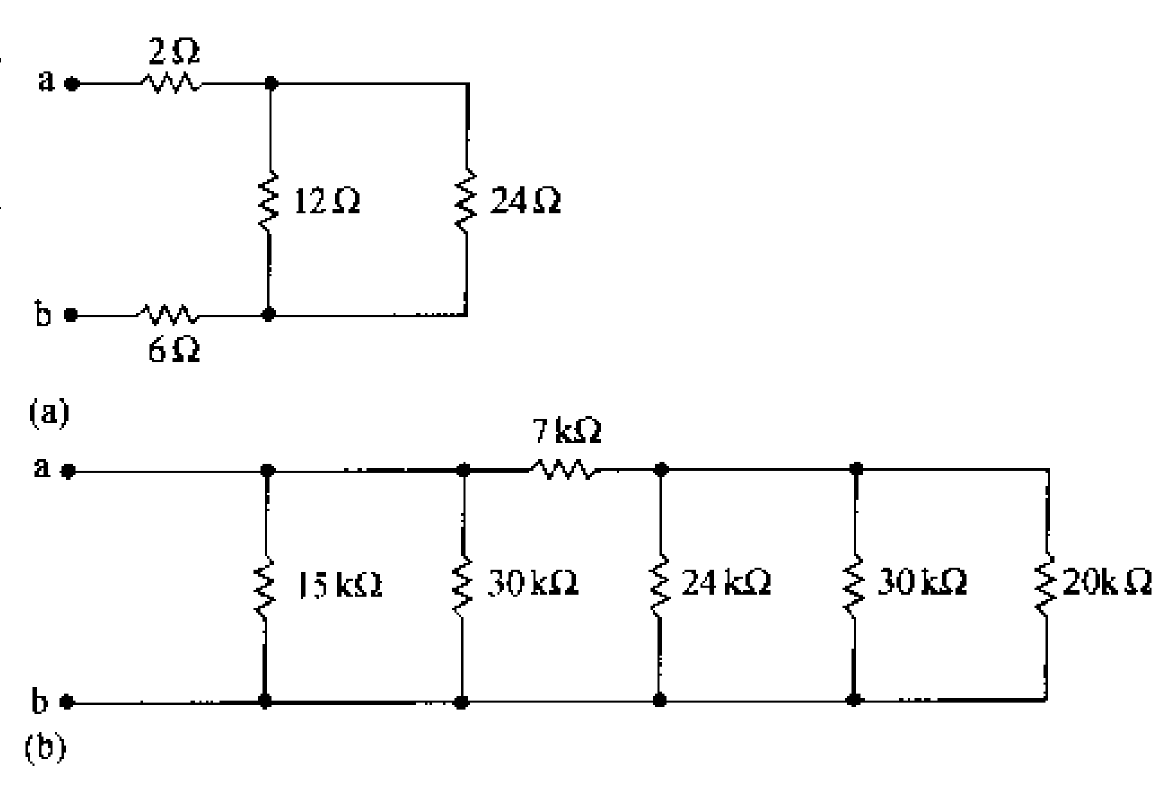


图 P3.6

效电阻 R_{ab}。

P3.7 (a) 在图 P3.7(a)～(c) 电路中，求等效电阻 R_{ab}。

(b) 求每个电路中电源释放的功率。

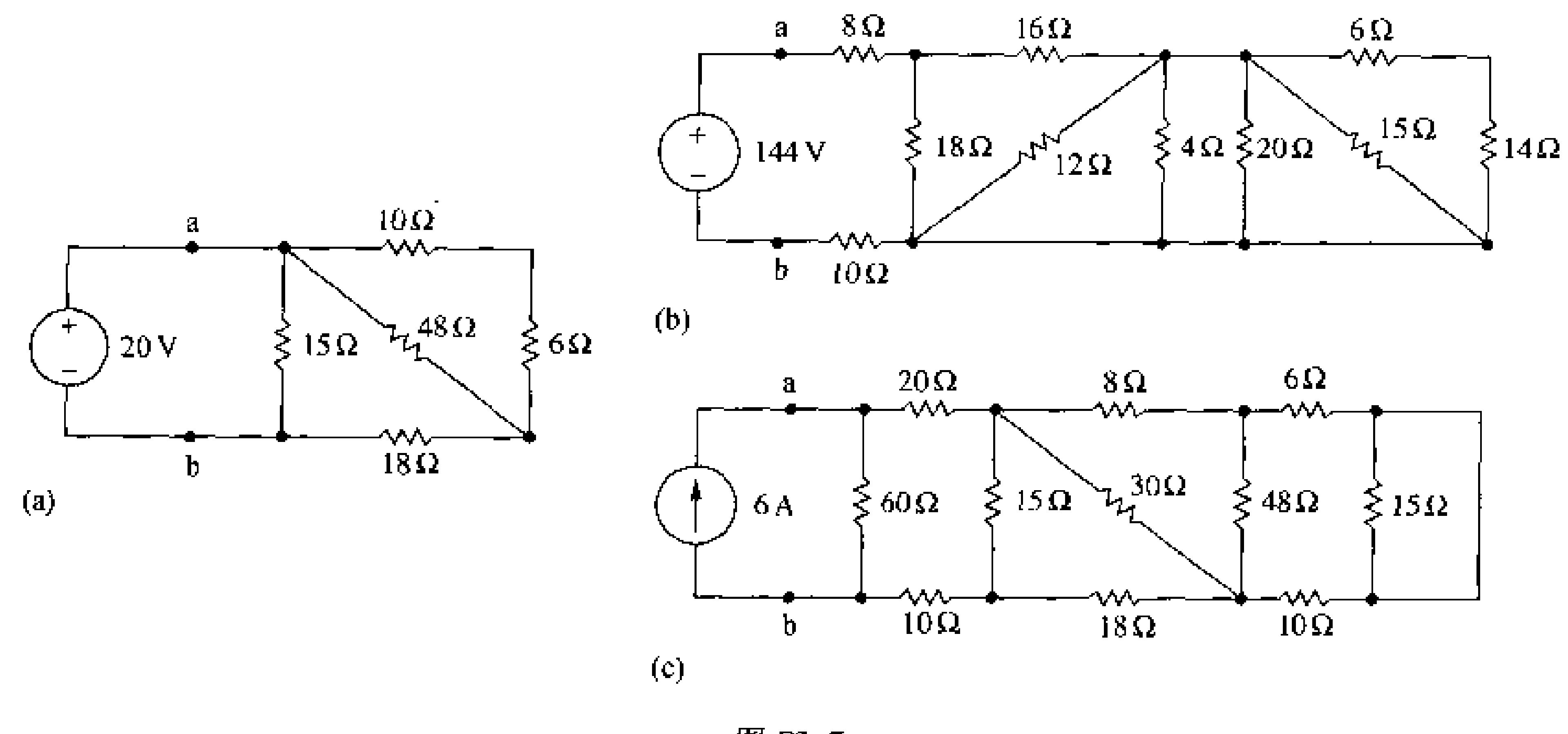


图 P3.7

P3.8 求图 P3.8 中每个电路的等效电阻 R_{ab}。

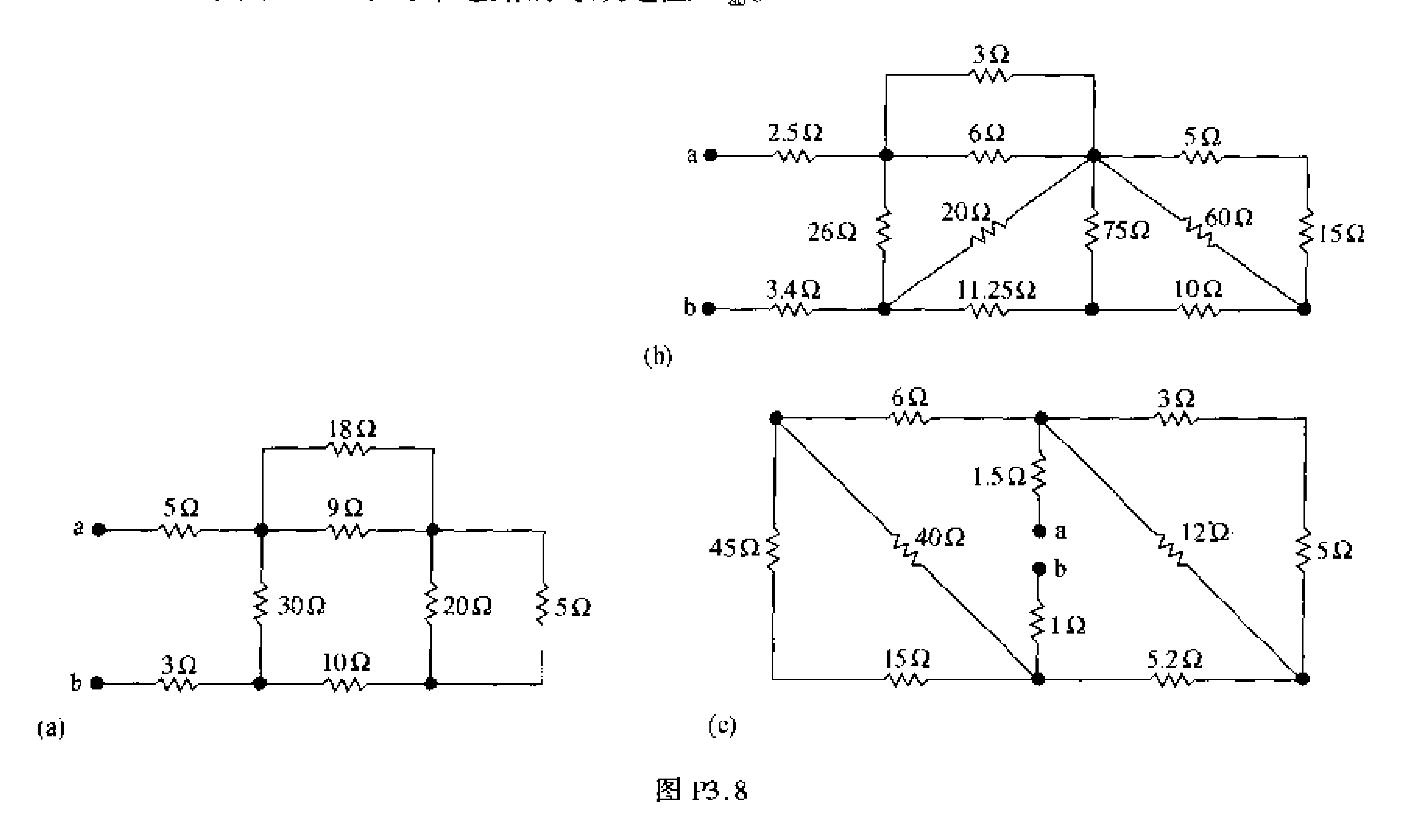


图 P3.8

3.9 练习题 1.11 介绍的高压直流传输线 845 英里长，每边的电路包含两个并联的导线。每根导线的电阻为 0.0397 Ω/英里，如图 P3.9 所示。

(a) 如图所示，俄勒冈州的端电压是 800 kV，每根导线携带 1000 A 电流。计算在加州终端接收的功率，以及从俄勒冈州到加州功率的传输效率。

(b) 如果将俄勒冈州端电压上升至 1000 kV，电流保持 1000 A 不变，重复(a)问题。

(c) 如果添加第三根导线连接两边电路,电流保持 1000 A/导线,重复(b)问题。

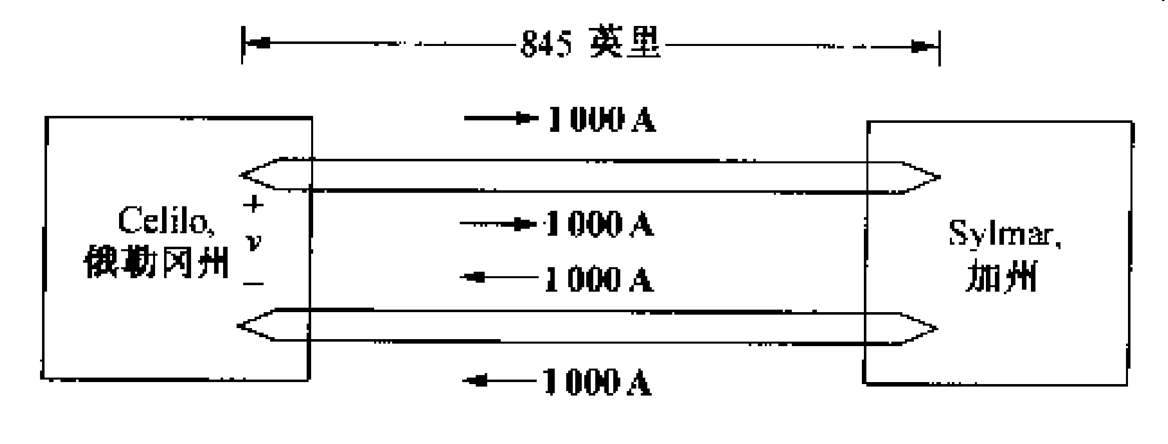


图 P3.9

P3.10 求图 P3.10 所示电路中的 v_o。

P3.11 (a) 求图 P3.11 所示电路中的电压 v_x。

(b) 用一个普通电压源 v_s 替换30 V 电源,设 v_s 正符号在上面。求 v_x,将其表示为 v_s 的函数形式。

P3.12 求图 P3.12 所示电路中的电压 v_o 和 v_g。

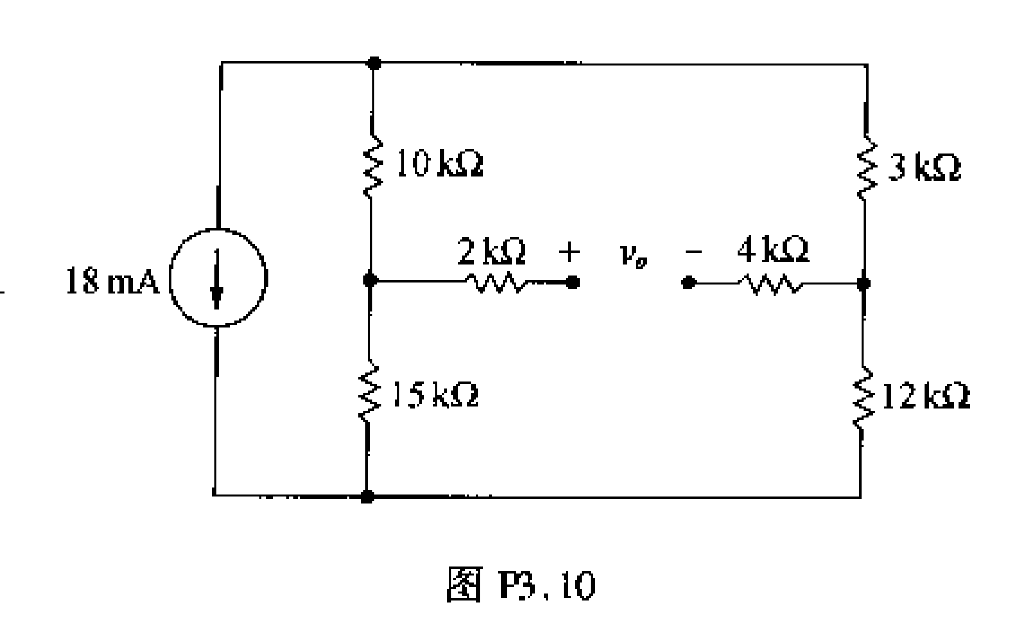


图 P3.10

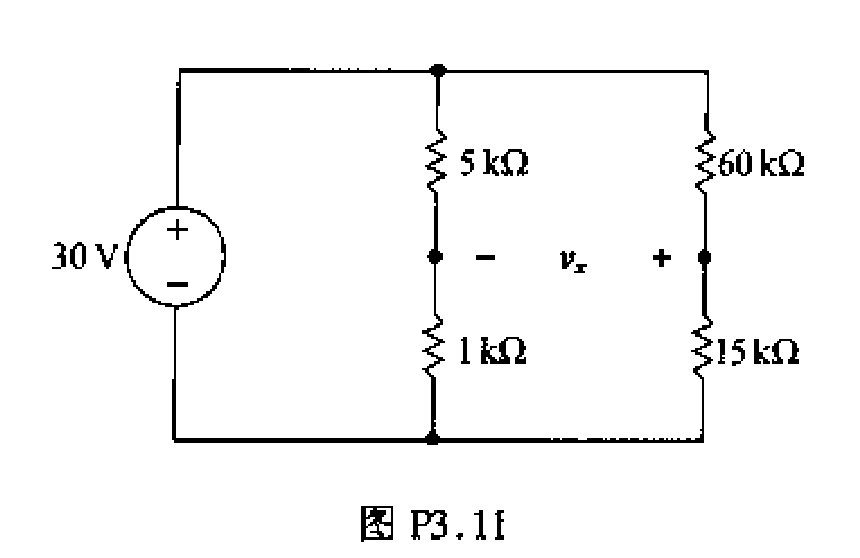


图 P3.11

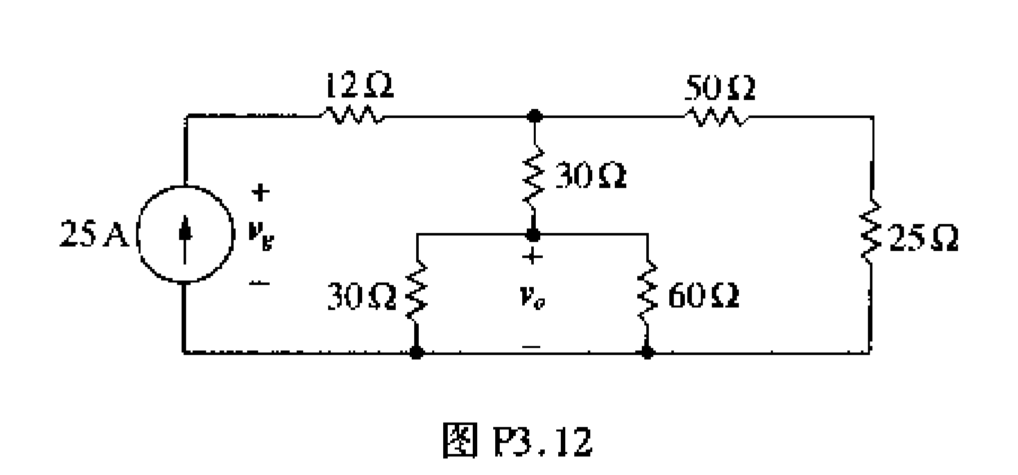


图 P3.12

P3.13 求图 P3.13 所示电路中的电流 i_o 和 i_g。

P3.14 电路如图 P3.14 所示,计算(a) i_o,(b) 消耗在 10 Ω 电阻上的功率。

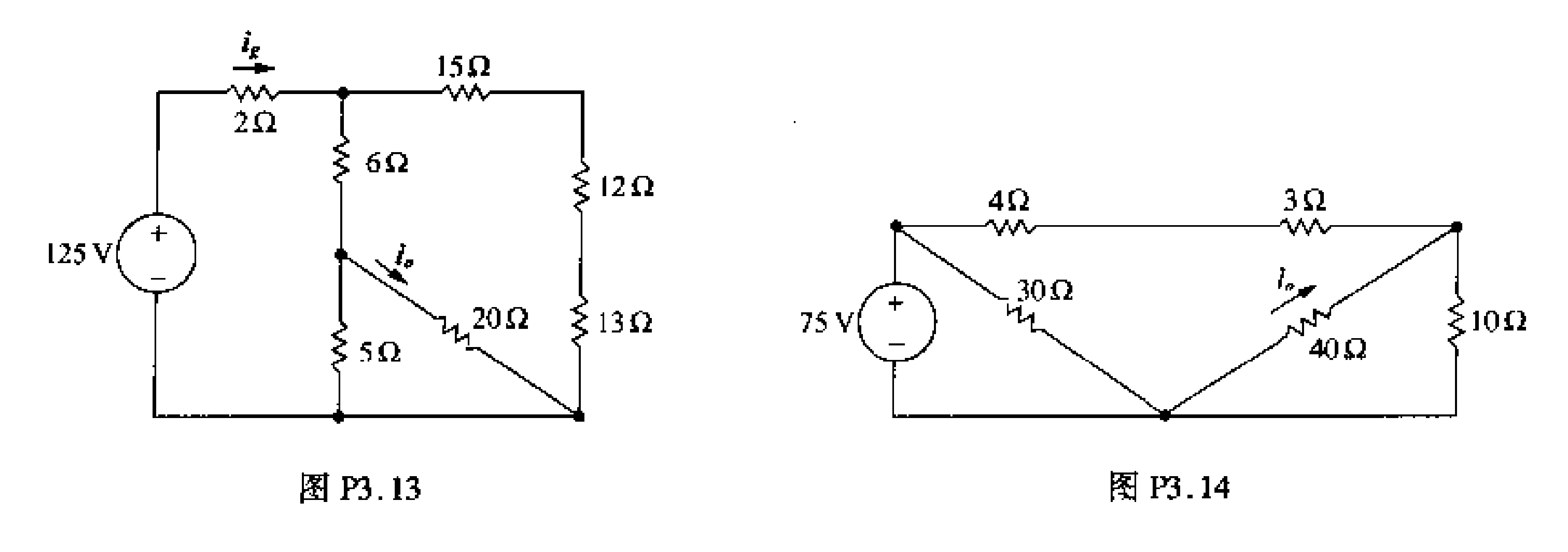


图 P3.13　　图 P3.14

P3.15 图 P3.15 所示电路中,9 Ω 电阻上的电流为 1 A。

(a) 求 v_g。

(b) 求消耗在 20 Ω 电阻上的功率。

P3.16 图 P3.16 所示分压电路中，空载电压 v_o 为 6 V，当负载电阻 R_L 加在 a 和 b 端时，电压降至 4 V。求 R_L。

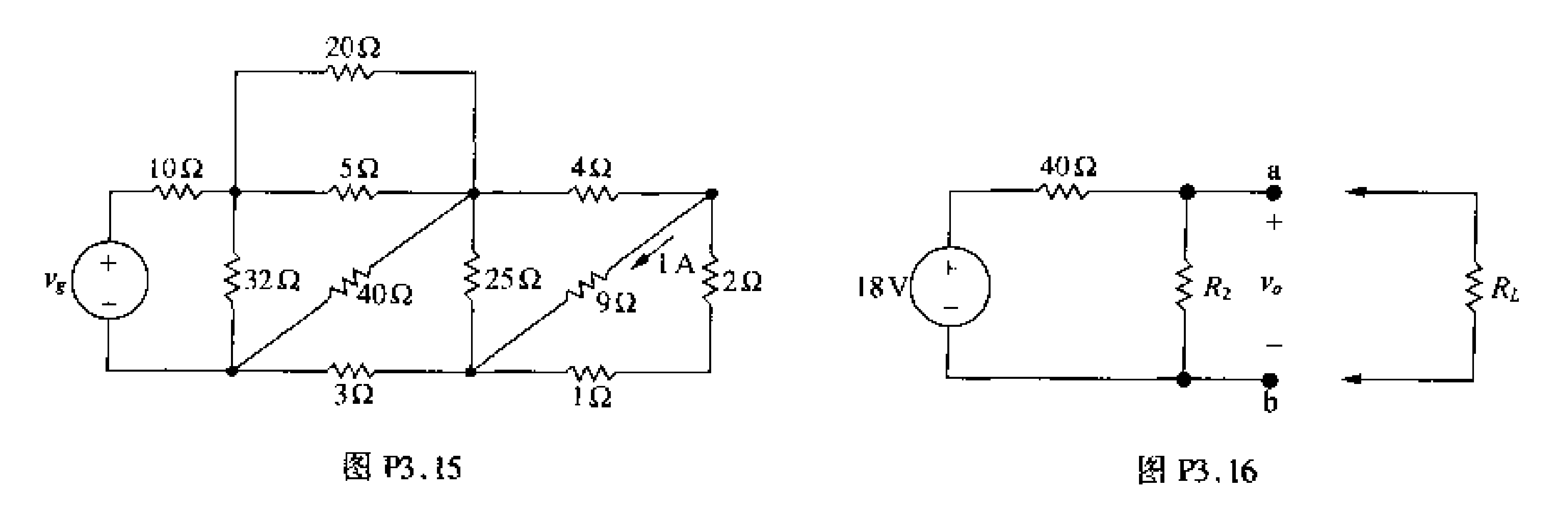


图 P3.15　　　图 P3.16

P3.17 (a) 图 P3.17 (a)电路的负载是图 P3.17 (b)电路，即 a 端连接 a′ 端，b 端连接 b′ 端。求 v_o。

(b) 假定图 P3.17 (b)电路用电流控制电压源，该电路与图 P3.17 (a)电路连接，如图 P3.17 (c)所示。求 v_o。

(c) 添加的非独立电压源与 240 V 电源相连，对电路有什么影响？

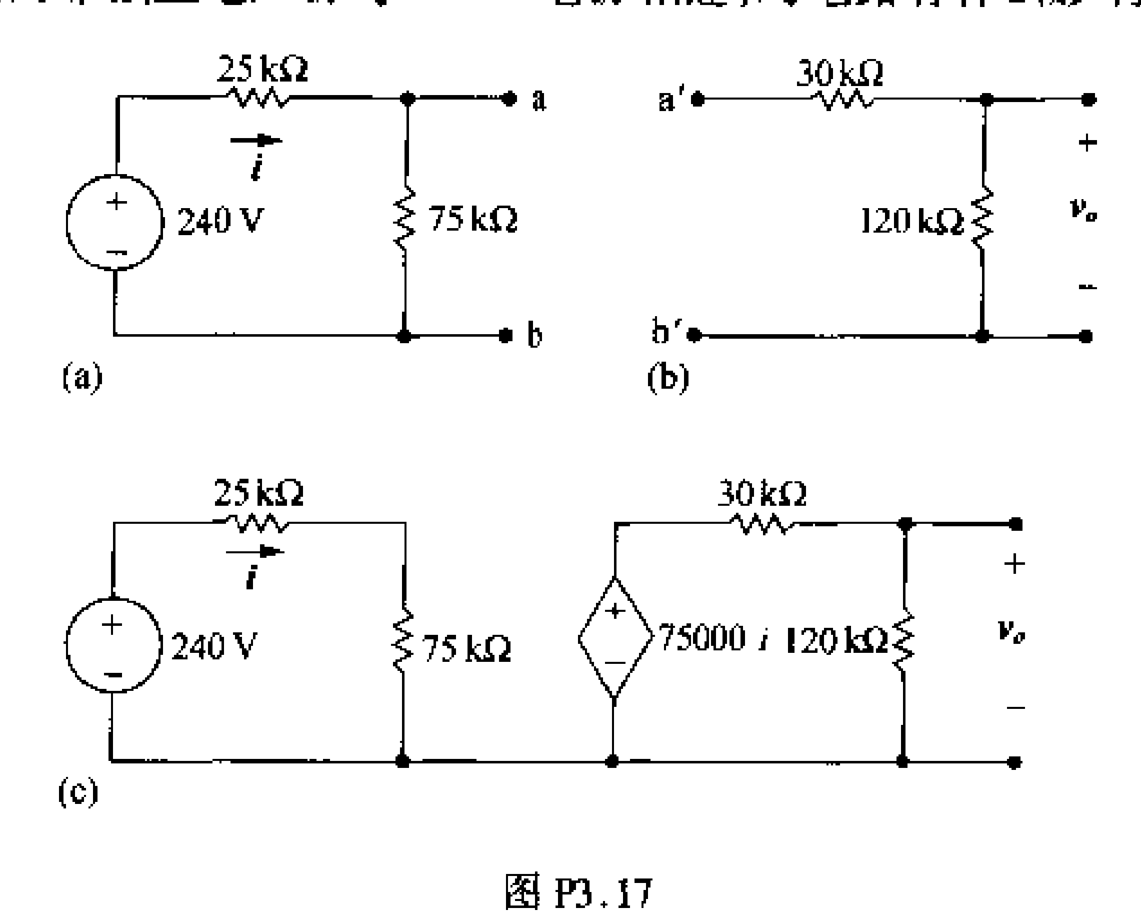


图 P3.17

◇3.18 图 P3.18 所示分压电路，空载电压为 150 V，与分压电路相连的最小负载电阻是 60 kΩ。当分压电路增加负载时，v_o 不许降至 100 V 以下。

(a) 试设计能满足上述要求的分压电路，确定 R_1 和 R_2 的数值。

(b) 假设商用电阻的额定功率是 1/16，1/8，1/4，1 和 2 W。你选用哪种额定功率的电阻？

3.19 假设图 P3.18 所示分压电路选择了 1 W 的电阻。在分压电路的电阻不超出损耗限制的情况下，R_L 能够取多小？

P◇3.20 (a) 计算图 P3.20 所示分压电路中的空载电压 v_o。

(b) 计算消耗在 R_1 和 R_2 上的功率。

(c) 假定所用的电阻只有 0.5 W，空载电压与(a)相同。求出 R_1 和 R_2 的欧姆值。

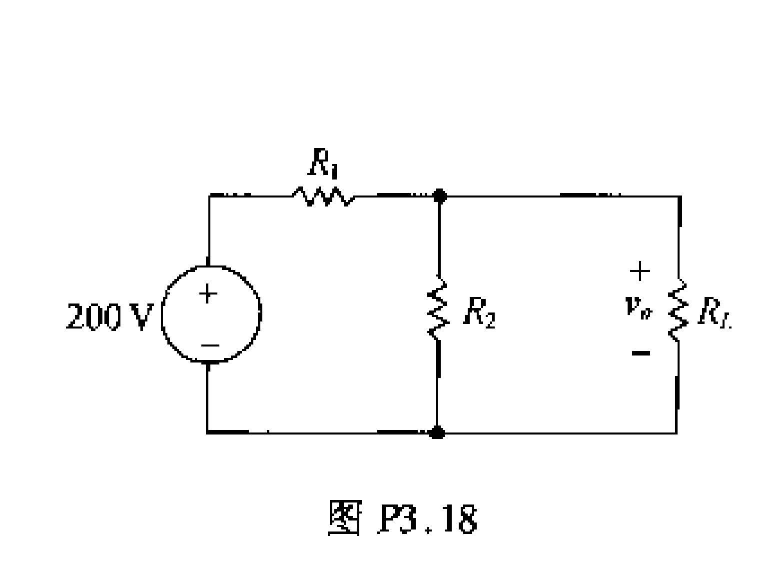


图 P3.18

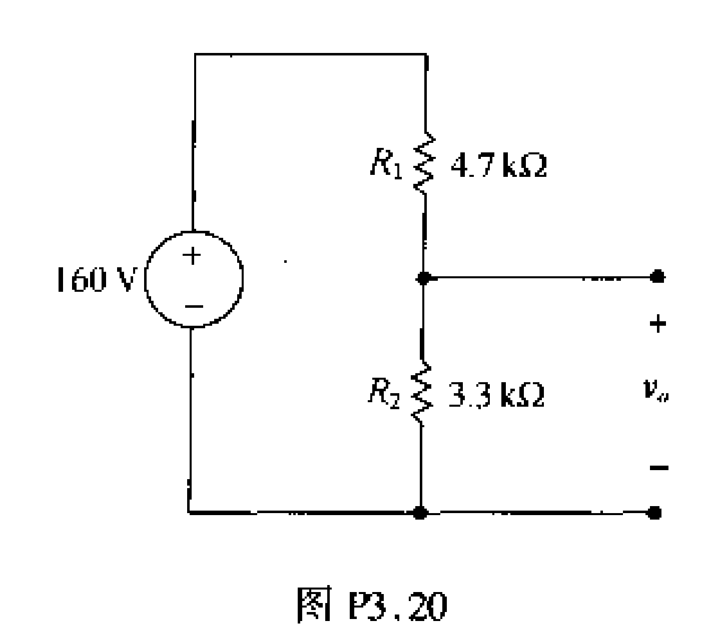


图 P3.20

◇**3.21** 有时需要利用分压电路产生一个以上的电压。例如,许多个人计算机的存储器需要 −12 V,6 V 和 +12 V 的电压,所有电压的参考点都是公共参考点。在图 P3.21 电路中,选择 R_1,R_2 和 R_3 的阻值以满足下列设计要求。

(a) 在分压电路空载的情况下,24 V 电源提供给分压电路的功率为 36 W。

(b) 相对于公共参考点的三个电压分别是 $v_1 = 12$ V,$v_2 = 6$ V,$v_3 = -12$ V。

◇**3.22** 如图 3.13 的分压电路,设计空载($R_L = \infty$)电压 $v_o = kv_s$,满载($R_L = R_o$)电压 $v_o = \alpha v_s$。注意:$\alpha < k < 1$。

(a) 证明:

$$R_L = \frac{k-\alpha}{\alpha k}R_o \text{ 和 } \qquad R_2 = \frac{k-\alpha}{\alpha(1-k)R_o}$$

(b) 如果 $k = 0.85$,$\alpha = 0.80$,$R_o = 34$ kΩ,确定 R_1 和 R_2 数值。

(c) 如果 $v_s = 60$ V,确定消耗在 R_1 和 R_2 上的最大功率。

(d) 假定负载电阻出现短路,R_1 和 R_2 上的功率损耗是多少?

P3.23 图 P3.23 (a)所示的框表示一个被称做 FET 的场效应管。FET 的简化电路模型如图 P3.23 (b)所示,求 v_o 和 v_{DS}。

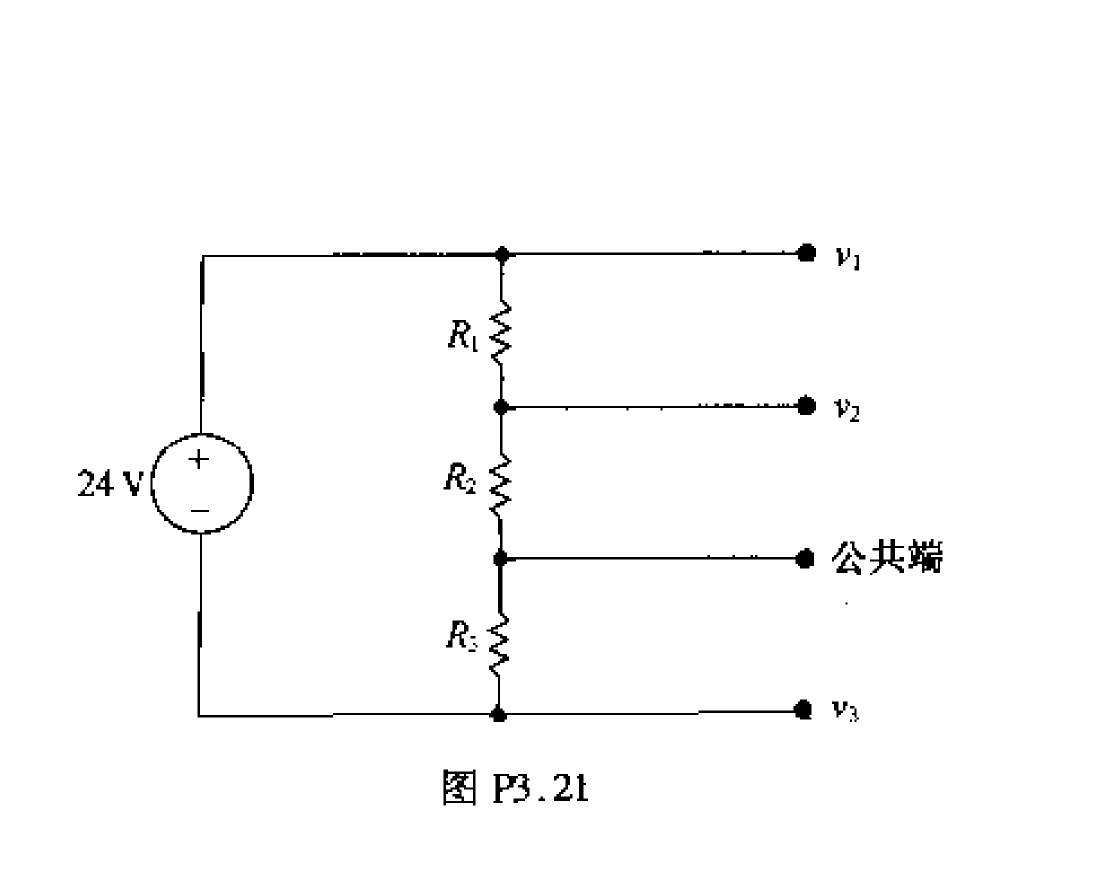
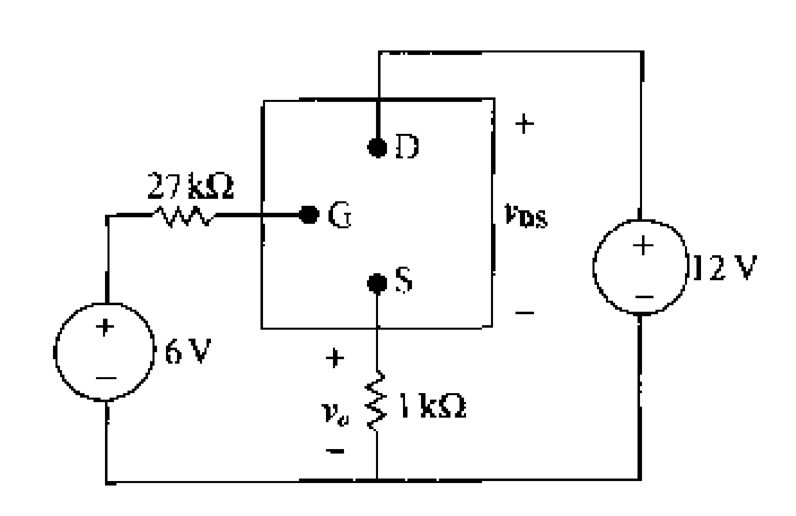


图 P3.21



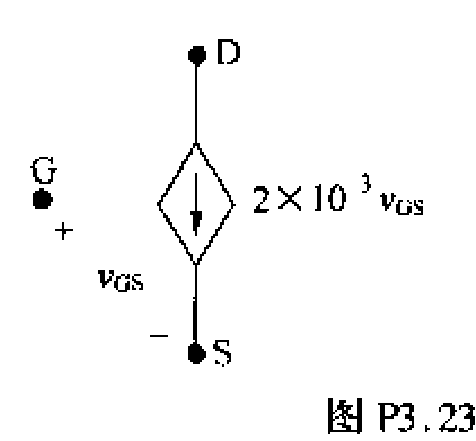


图 P3.23

P3.24 (a) 证明图 P3.24 (a)中电路的第 k 个分支的电流,等于电源电流 i_g 乘以第 k 分支的电导,再除以电导之和。即:

$$i_k = \frac{i_g G_k}{[G_1 + G_2 + + G_3 + \cdots + G_k + \cdots + G_N]}$$

(b) 使用(a)的结论计算图 P3.24 (b)电路中 6.25 Ω 电阻上的电流。

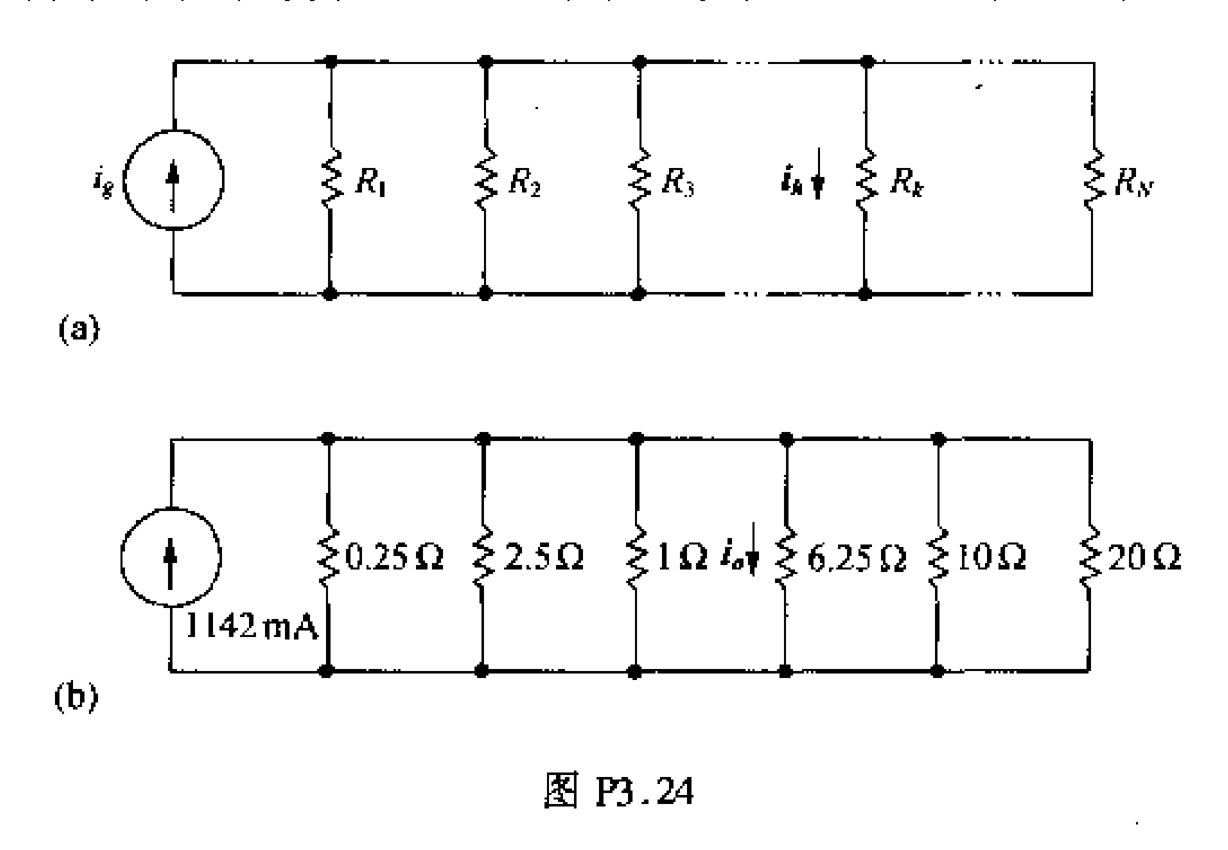


图 P3.24

◇**3.25** 求图 P3.25 所示电路中的电阻,满足下列设计标准:

$i_g = 8$ mA, $v_g = 4$ V, $i_1 = 2\ i_2$, $i_2 = 10\ i_3$, $i_3 = i_4$。

P3.26 在图 P3.26 (a)所示电路中,器件标注 D 表示一个组件,其等效电路如图 P3.26 (b)所示。D 端子上的标注说明器件如何与电路相连。求 v_x 以及器件吸收的功率。

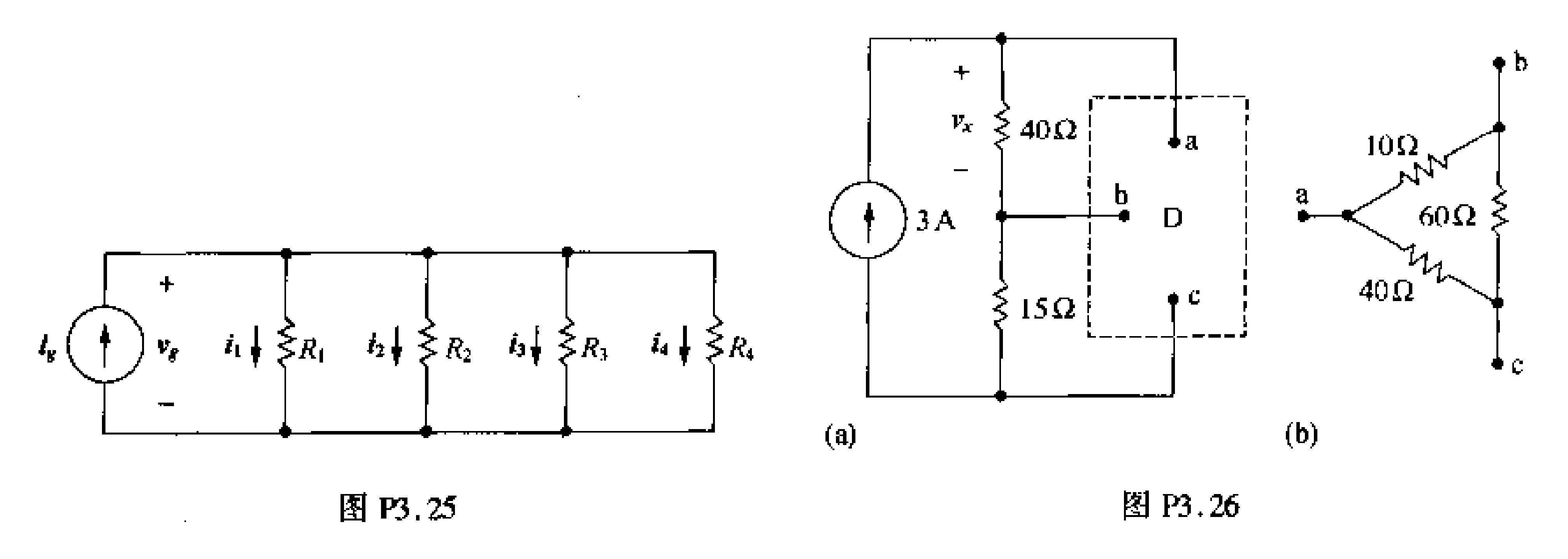


图 P3.25　　　　图 P3.26

3.27 (a) 证明在图 P3.27 电流表电路中,流过 d'Arsonval 机构的电流是被测量电流的1/10。

(b) 如果 30 mV, 1 mA 的机构用于 2 A 电流表,电路应该怎样变化。

(c) 你期望在直流 d'Arsonval 电流表上有一个统一的刻度吗?

3.28 一个分流电阻和 50 mV, 1 mA 的 d'Arsonval 机构构成 10 A 的电流表。如果一个 0.015 Ω的电阻加在电流表的两端。电流表新的满刻度量程是多少?

◇**3.29** d'Arsonval 电流表如图 P3.29 所示。设计一组 d'Arsonval 电流表,满刻度读数如下:(a) 10 A, (b) 1 A, (c) 10 mA, (d) 100 μA。试指定每个电流表的分流电阻 R_A。

◇**3.30** 一个 d'Arsonval 机构的电流表的参数是 100 mV, 2 mA。假定 0.25 W 精密电阻用于

分流。所能设计的电流表的最大满刻度读数是多少？并加以解释。

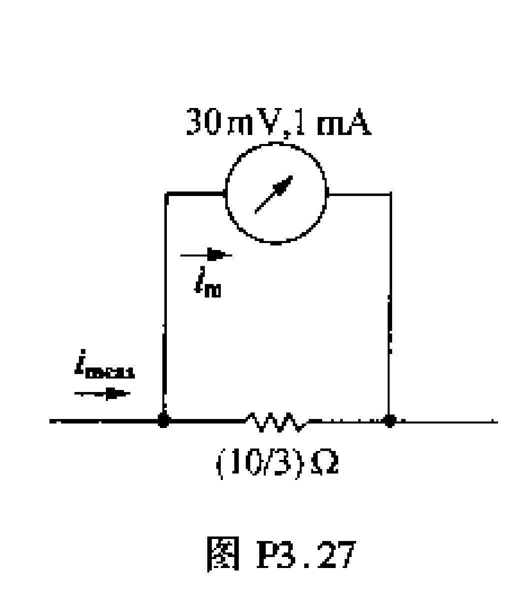


图 P3.27

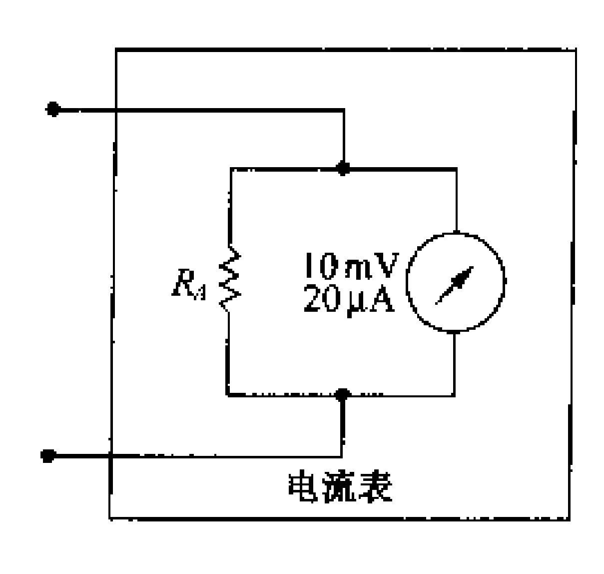


图 P3.29

3.31 图 P3.31 所示电流表有 0.1 Ω 的电阻。如果：

$$误差 = \left(\frac{测量值}{实际值} - 1\right) \times 100\%$$

电流表读数的误差百分数是多少？

3.32 习题 3.31 描述的电流表用来测量图 P3.32 电路所示的电流 i_o。测量值的误差百分数是多少？

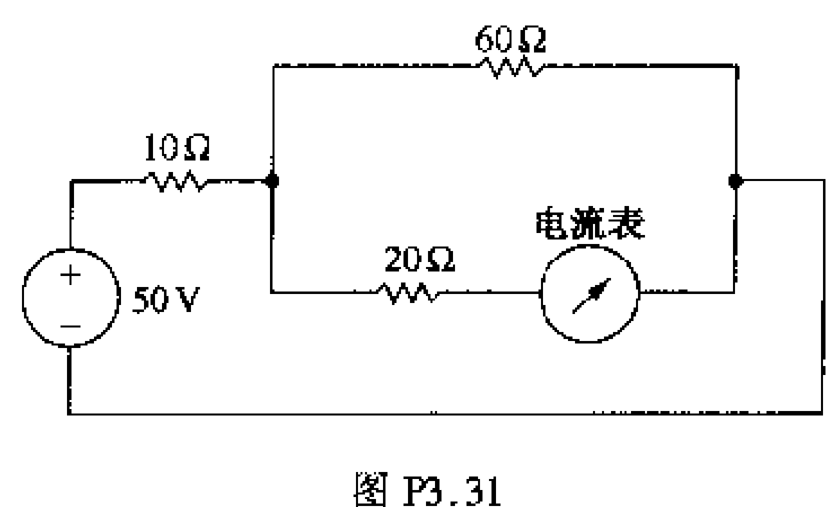


图 P3.31

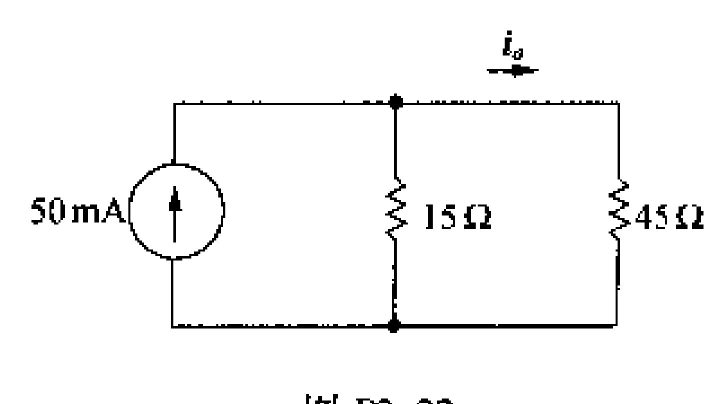


图 P3.32

3.33 d'Arsonval 电压表如图 P3.33 所示，分别求出下列满量程对应的 R_v 值：(a) 100 V，(b) 5 V，(c) 100 mV。

3.34 假设用习题 3.33(b)描述的电压表测量图 P3.32 中 45 Ω 电阻上的电压。

(a) 电压表读数是多少？

(b) 根据习题 3.31 所求表读数的误差百分数，问电压表读数的误差百分数是多少？

3.35 图 P3.35 所示分压电路的空载输出电压是输入电压的 7/9。一个灵敏度为100 Ω/ V，满量程为 200 V 的 d'Arsonval 电压表，用来检查电路的工作情况。

(a) 如果加在 180 V 电源两端，电压表读数是多少？

(b) 如果加在 70 Ω 电阻两端，电压表读数是多少？

(c) 如果加在 20 Ω 电阻两端，电压表读数是多少？

(d) (b) 和 (c) 所得电压表读数相加等于(a)记录的读数吗？解释为什么等于或为什么不等于。

3.36 图 P3.36 (a)所示的电压表满量程是 600 V，表机构规格为 100 mV，1.0 mA。如果用来测量图 P3.36 (b)所示电路中的电压 v，那么表读数的误差百分数是多少？

◇**3.37** 设计一个 d'Arsonval 电压表，如图 P3.37 所示，它应该有三个电压量程。

(a) 指定 R_1, R_2 和 R_3 的值。

(b) 假定一个 500 kΩ 的电阻连接在 100 V 端和公共端之间，而电压表用 200 V 端和公共端与一个未知电压连接。电压表的读数是 188 V。未知电压是多少？

(c) 在(b)中，电压表能测量的最大电压是多少？

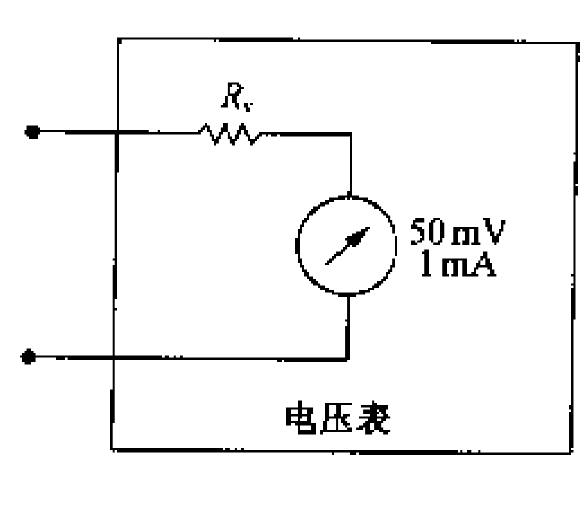


图 P3.33

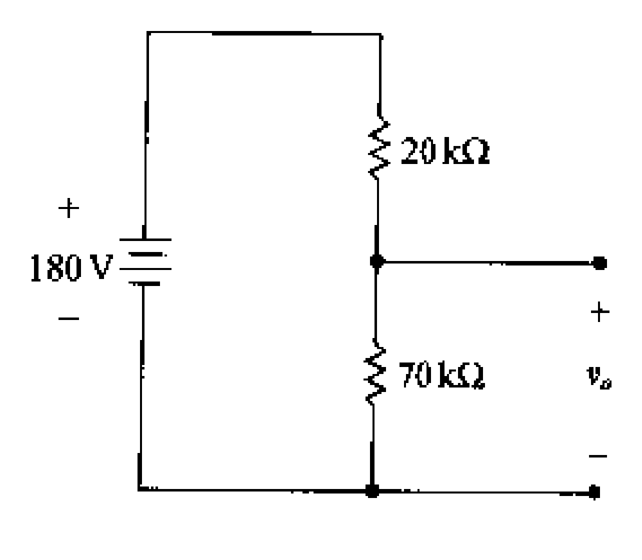


图 P3.35

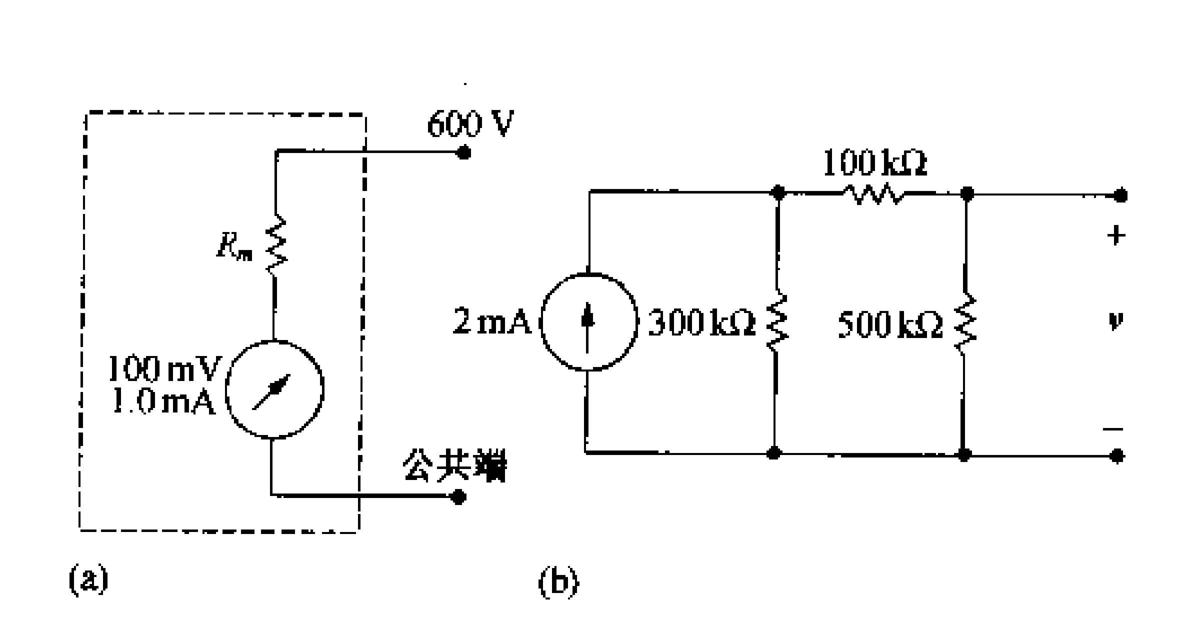


图 P3.36

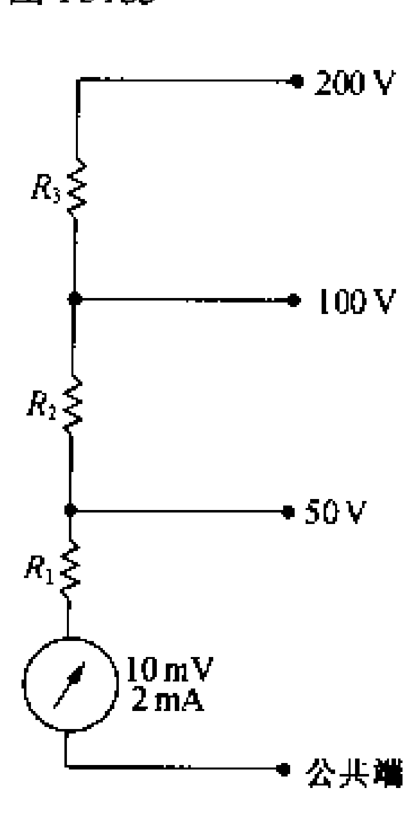


图 P3.37

◇**3.38** 假定设计如图 P3.38 所示的多量程电压表，忽略表机构的电阻。

(a) 给出 R_1, R_2 和 R_3 的阻值。

(b) 分别计算三个量程的误差百分数。

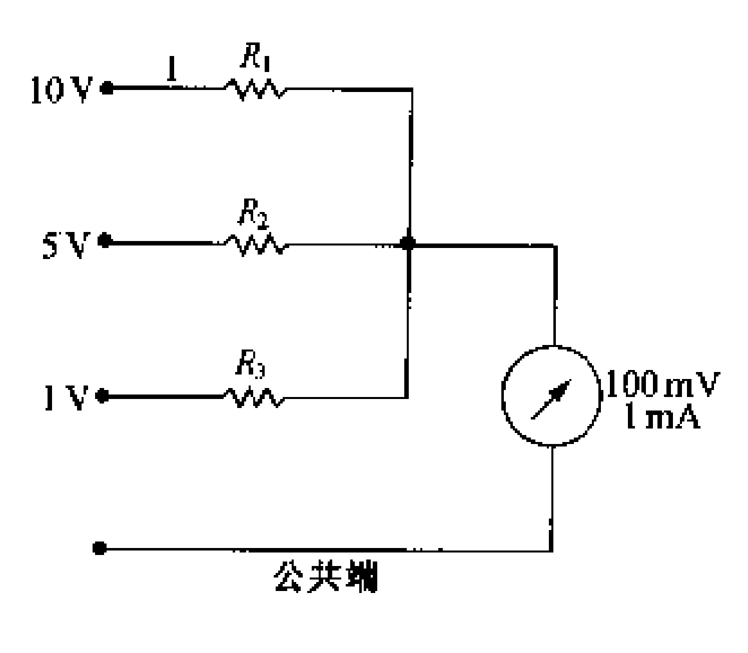


图 P3.38

3.39 如图 P3.39 (a)所示，一个 200 kΩ 电阻连接在两量程电压表的 100 V 和公共端之间。在图 P3.39 (b)电路中，用该电压表测量 600 kΩ 电阻两端的电压。

(a) 在仪表 300 V 刻度上的读数是多少？

(b) 测量电压的误差百分数是多少？

P3.40 图 2.24 所示电路的元件值如下：$R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 50$ kΩ, $R_C = 0.5$ kΩ, $R_E = 0.3$ kΩ, $V_{CC} = 12$ V, $V_o = 0.4$ V, $\beta = 29$。

(a) 计算值 i_B，单位用微安。

(b) 假定作为直流电流表使用的数字万用表有 2 kΩ 电阻,如果将表插入 b 端和 2 端测量电流 i_B,表的读数是多少?

(c) 如果将(a)中 i_B 计算值视为正确值,测量的误差百分数是多少?

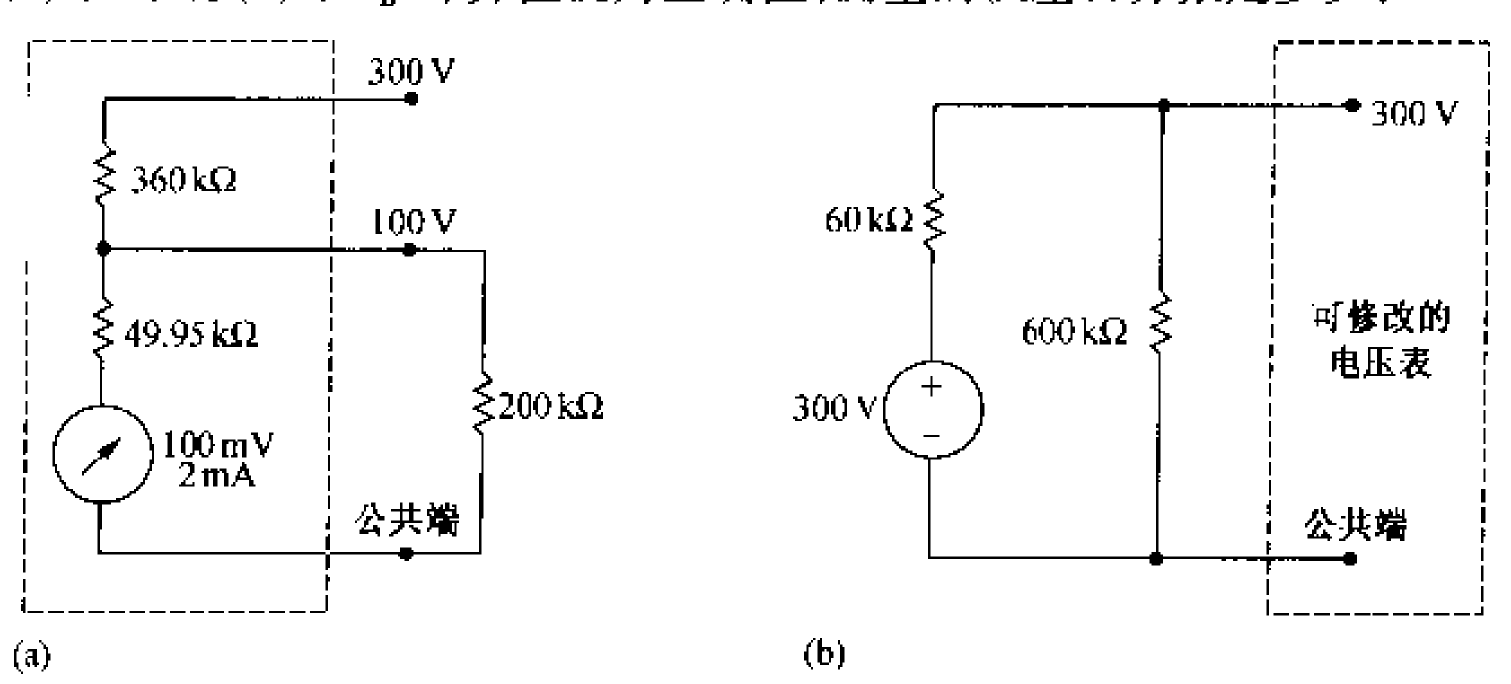


图 P3.39

3.41 已知电源提供的直流电压约为 500 V,为了测量电源电压,去仪器室取直流电压表时,发现只有两块相同的电压表可以使用。电压表满刻度 400 V,灵敏度为1 000 Ω/V。

(a) 如何用两块电压表检查电源电压?

(b) 可以测量的最大电压是多少?

(c) 如果电源电压是 504 V,每个电压表的读数是多少?

3.42 假定除了习题 3.41 叙述的两块电压表外,一个 50 kΩ 的精密电阻也可以使用。50 kΩ的电阻与串联的电压表相串联。这个电路连接在电源两端,电压表的读数是 328 V,电源电压是多少?

3.43 直流电压源的电路模型如图 P3.43 所示。在电源两端测量电压:(1)电源两端开路时,端电压是 80 mV,(2)两端连接一个 10 MΩ 的电阻,电压测量值为 72 mV。所有测量都是使用数字电压表,其表电阻为 10 MΩ。

(a) 电源(v_s)端电压是多少? 单位用毫伏。

(b) 电源的内电阻(R_s)是多少? 单位用千欧。

3.44 假定图 3.23 中的理想电压源被替换为理想电流源,说明式(3.29)仍然有效。

P3.45 图 3.23 所示电桥电路由一个 21 V 直流电源提供电压。在 R_1 = 800 Ω, R_2 = 1 200 Ω, R_3 = 600 Ω 时,电桥处于平衡状态。

(a) R_x 等于多少?

(b) 电源提供的电流(单位用毫安)为多少?

(c) 电路中哪个电阻吸收的功率最大? 吸收的功率为多少?

(d) 电路中哪个电阻吸收的功率最小? 吸收的功率为多少?

P3.46 电路如图 P3.46 所示,求消耗在 3 kΩ 电阻上的功率。

P3.47 电路如图 P3.47 所示,如果探测器上的电压降忽略不计,求不平衡电桥中探测器的电流 i_d。

P3.48 使用 Δ－Y 变换求图 P3.48 电路中的电压 v_1 和 v_2。

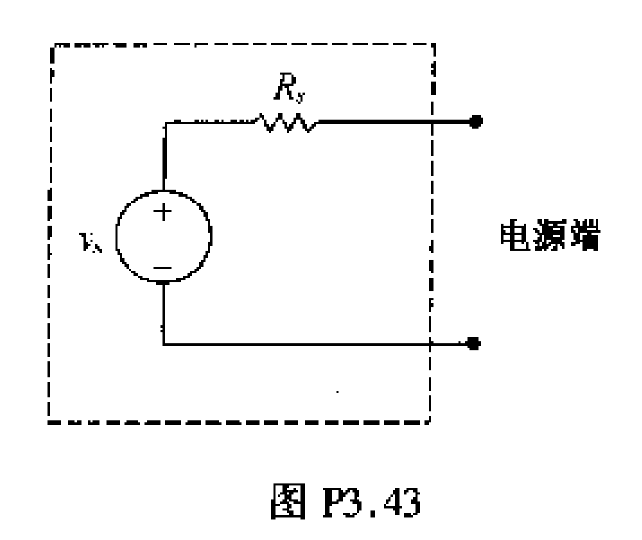


图 P3.43

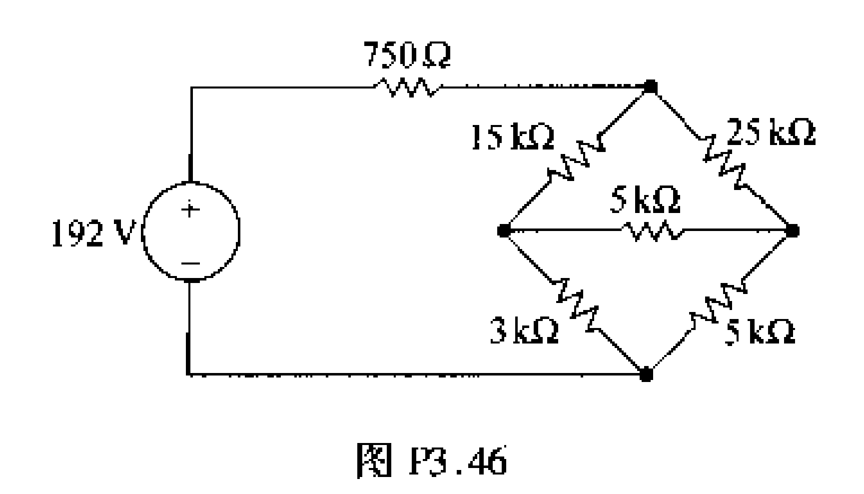


图 P3.46

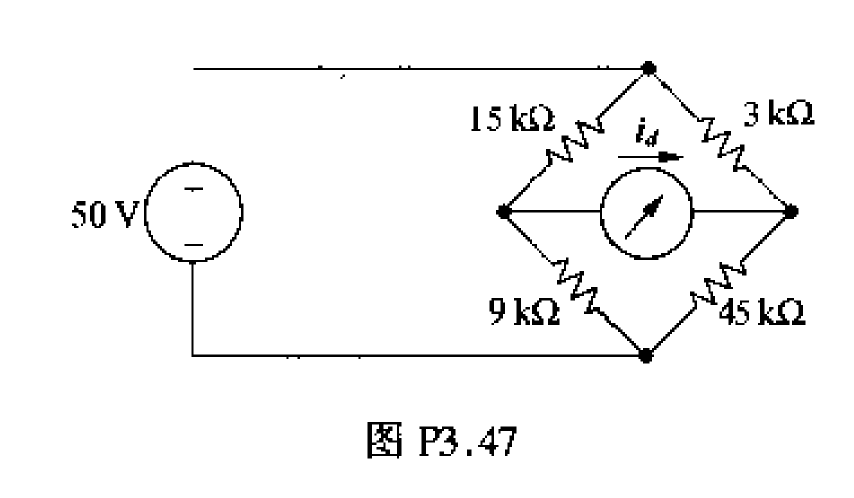


图 P3.47

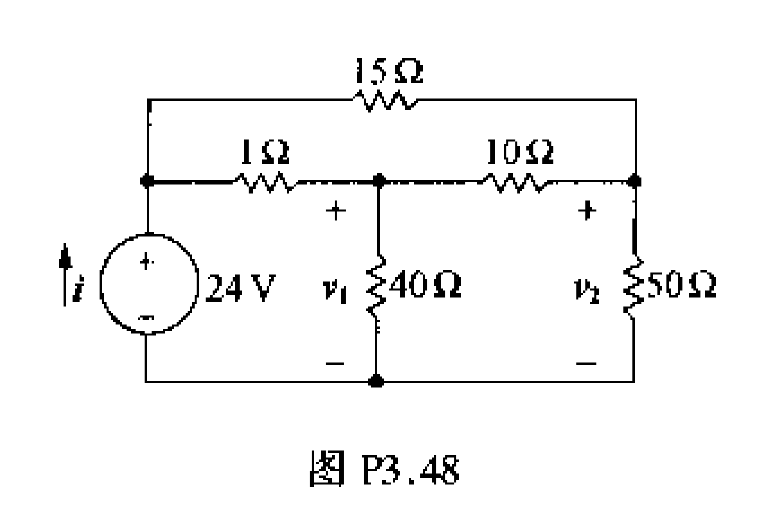
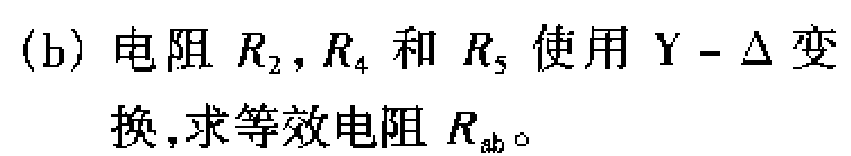


图 P3.48

P3.49 图 3.23 所示惠斯登电桥电路中，比值 R_2/R_1 可以是下列一组数值：0.001，0.01，0.1，1，10，100 和 1000。电阻 R_3 能够从 1 Ω 变化至 11 110 Ω，每次增加 1 Ω。未知电阻的范围在 4 Ω 至 5 Ω 之间。为了使未知电阻测量值包含四位有效数，R_2/R_1 比值应该取多少？

P3.50 (a) 图 P3.50 所示电路中的电阻 R_2，R_3 和 R_4 应用 Δ－Y 变换，求等效电阻 R_{ab}。



(b) 电阻 R_2，R_4 和 R_5 使用 Y－Δ 变换，求等效电阻 R_{ab}。

(c) 给出另外两种方法实现 Δ－Y 变换或 Y－Δ 变换，求解 R_{ab}。

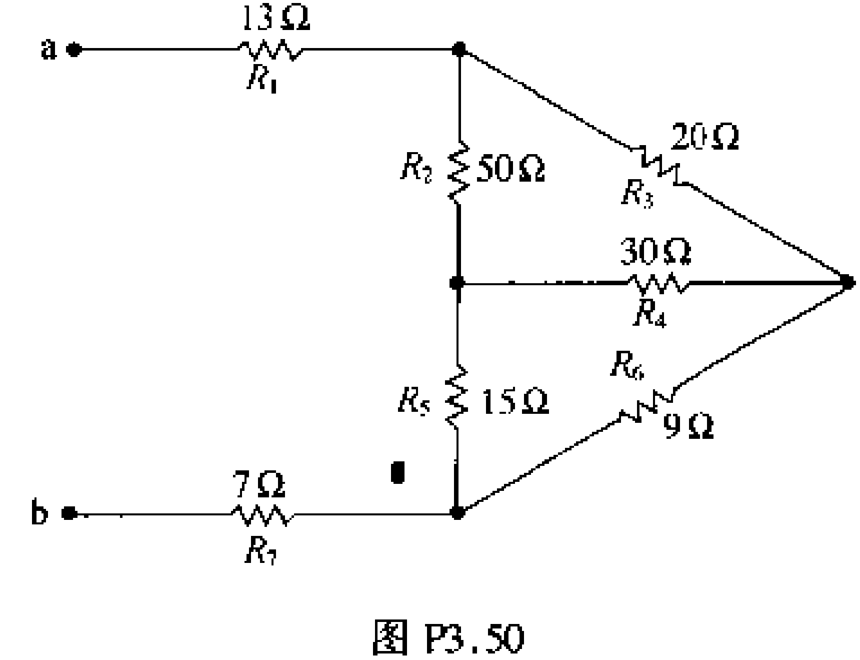


图 P3.50

P3.51 求图 P3.51 所示电路中的等效电阻 R_{ab}。

P3.52 电路如图 P3.52 所示，求 i_o 以及消耗在 140 Ω 电阻上的功率。

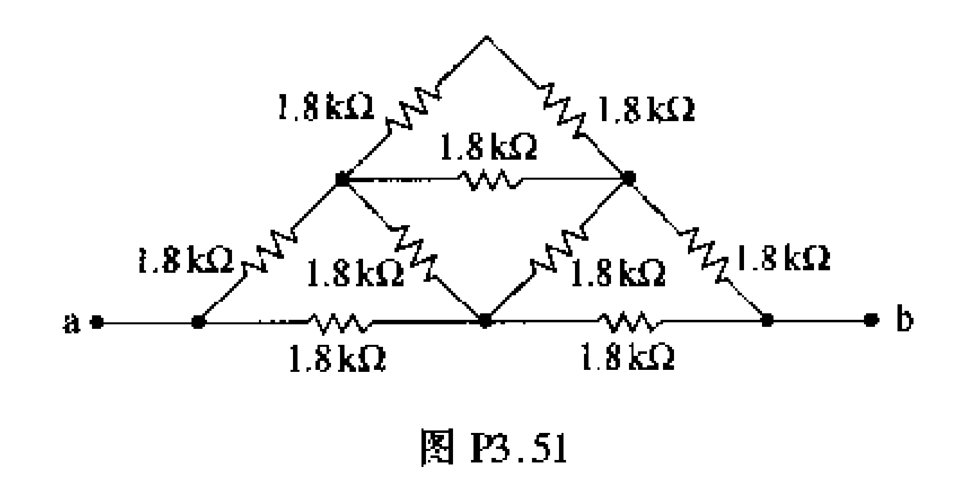


图 P3.51

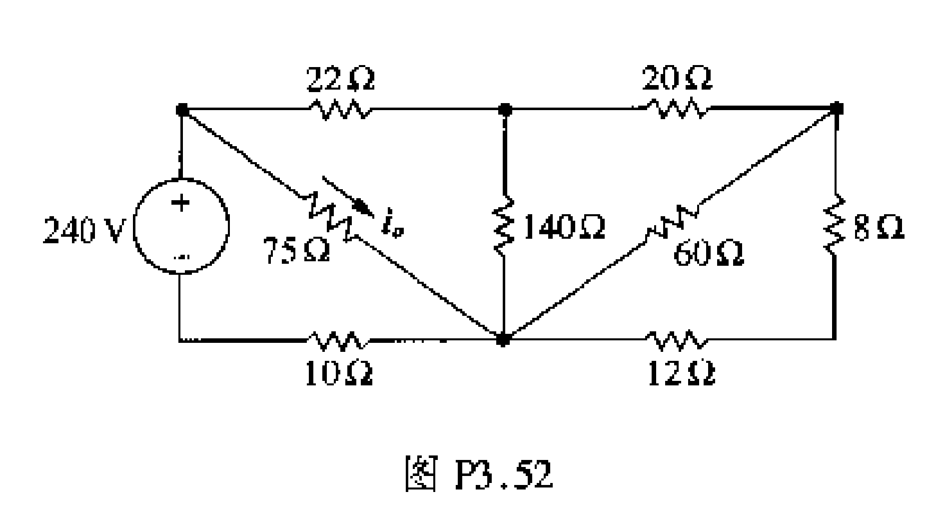


图 P3.52

P3.53 求图 P3.53 所示电路中的等效电阻 R_{ab}。

P3.54 (a) 如图 P3.54 所示电路，求从理想电压源两端看进去的电阻。

(b) 如果 v_{ab} 等于600 V,15 Ω 电阻上消耗的功率为多少?

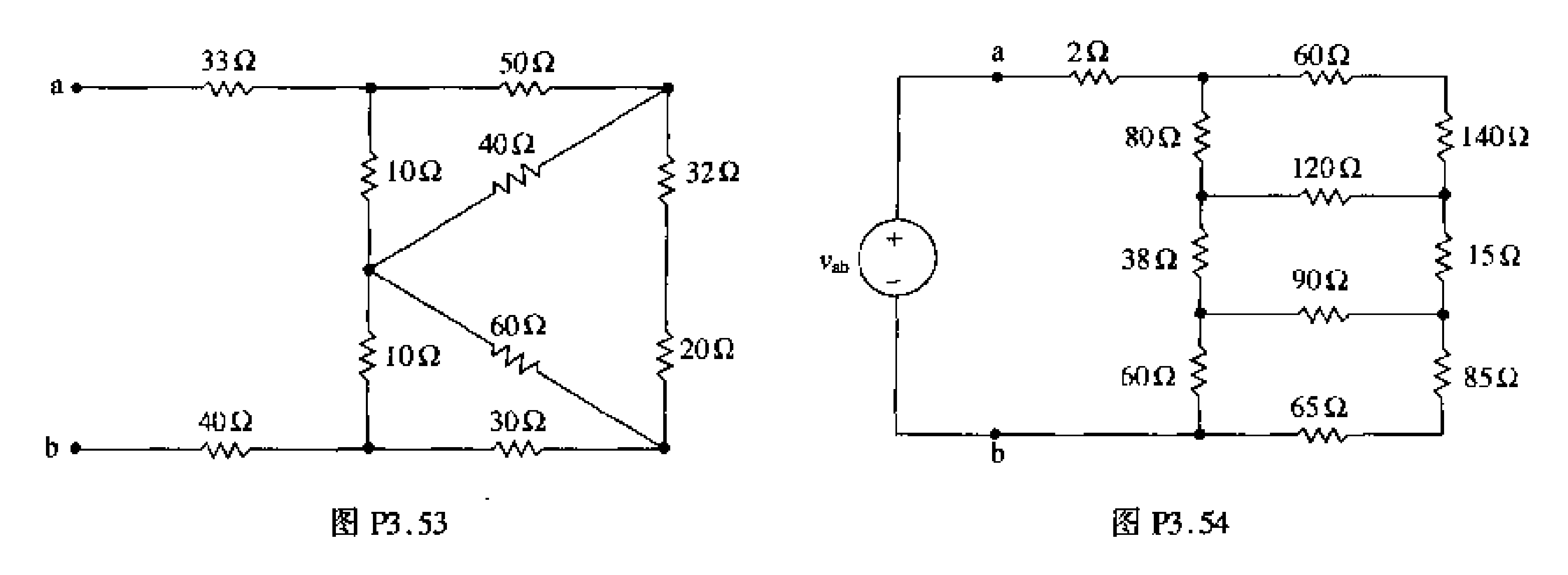


图 P3.53 图 P3.54

P3.55 在图 P3.55 所示电路中,使用 Y-Δ 变换,求(a) i_o,(b) i_1,(c) i_2,(d)由理想电压源释放的功率。

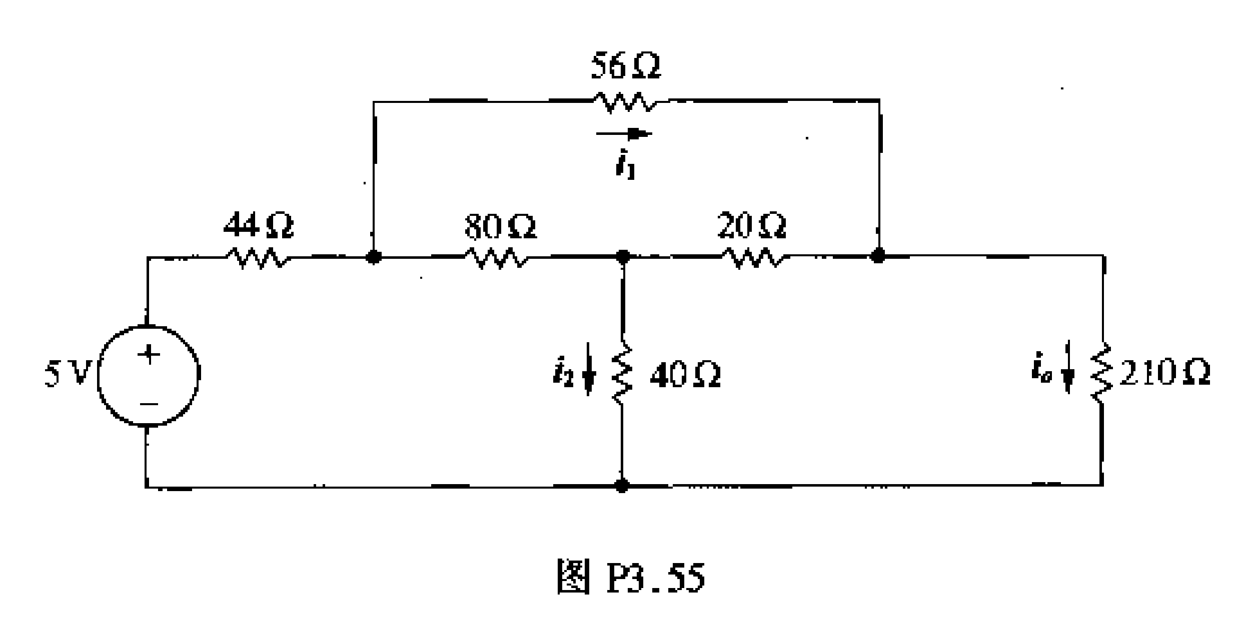


图 P3.55

P3.56 电路如图 P3.56 所示,求(a) i_2,(b) i_1,(c) v,(d)由电压源提供的功率。

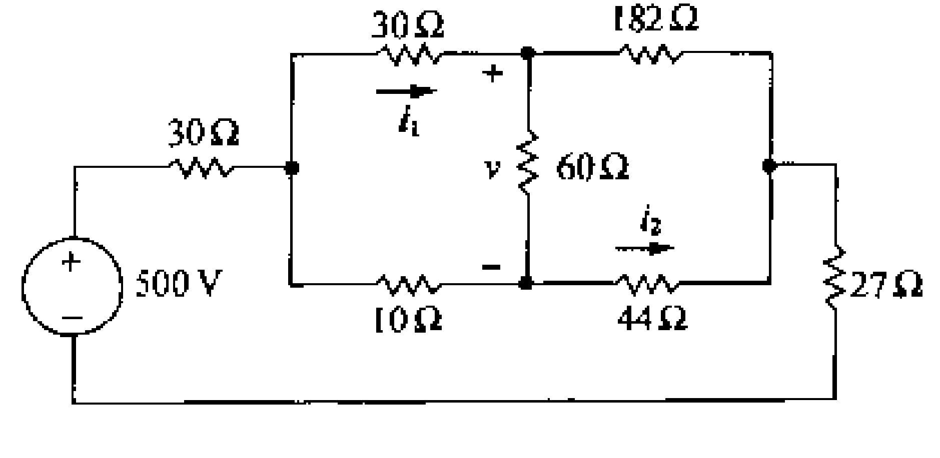


图 P3.56

3.57 试根据式(3.37)~(3.39)推导式(3.40)~(3.45)。遵循下面两个提示有助于正确地解题。

1. 为了推导 R_1,以 R_a,R_b 和 R_c 作为变量。首先用式(3.39)减式(3.38),再将结果与式(3.37)相加。用相似的方式推出以 R_a,R_b 和 R_c 作为变量的 R_2,R_3。
2. 为了推导 R_b,以 R_1,R_2 和 R_3 为变量。需要利用提示(1)所得到的结果,即式(3.40)~(3.42)。注意:这些方程式通过相除可以得到:

$$\frac{R_2}{R_3}=\frac{R_c}{R_b} \text{或} R_c=\frac{R_2}{R_3}R_b$$

以及

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_b}{R_a} \text{或} R_a=\frac{R_2}{R_1}R_b$$

现在将这些式子代入式(3.39),消去 R_a 和 R_c。用相似的方式推出以 R_1,R_2 和 R_3 作为变量的 R_a,R_c。

3.58 证明以三个 Y 电导作变量的 Δ 电导表达式是:

$$G_a = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_b = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_c = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

其中:

$$G_a = \frac{1}{R_a}, G_1 = \frac{1}{R_1}$$

◇**3.59** 电阻网络有时用做控制电路,针对这种应用,它们被称做电阻衰减器。典型的固定式衰减器如图 P3.59 所示。在设计衰减器时,电路设计者要选择 R_1 和 R_2 的值,使得 v_o/v_i 的比值、从输入电压源看进去的电阻 R_{ab}都是固定值。

(a) 证明如果 $R_{ab} = R_L$,那么:

$$R_L^2 = 4R_1(R_1 + R_2)$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{2R_1 + R_2 + R_L}$$

(b) 选择 R_1 和 R_2 的值,使得 $R_{ab} = R_L = 600\ \Omega$,而且 $v_o/v_i = 0.6$。

◇**3.60** (a) 如图 P3.60 所示,固定式衰减器被称做 T 形桥。使用 Y - Δ 变换说明:如果 $R = R_L$,则 $R_{ab} = R_L$。

(b) 证明当 $R = R_L$ 时,电压比 v_o/v_i 等于 0.5。

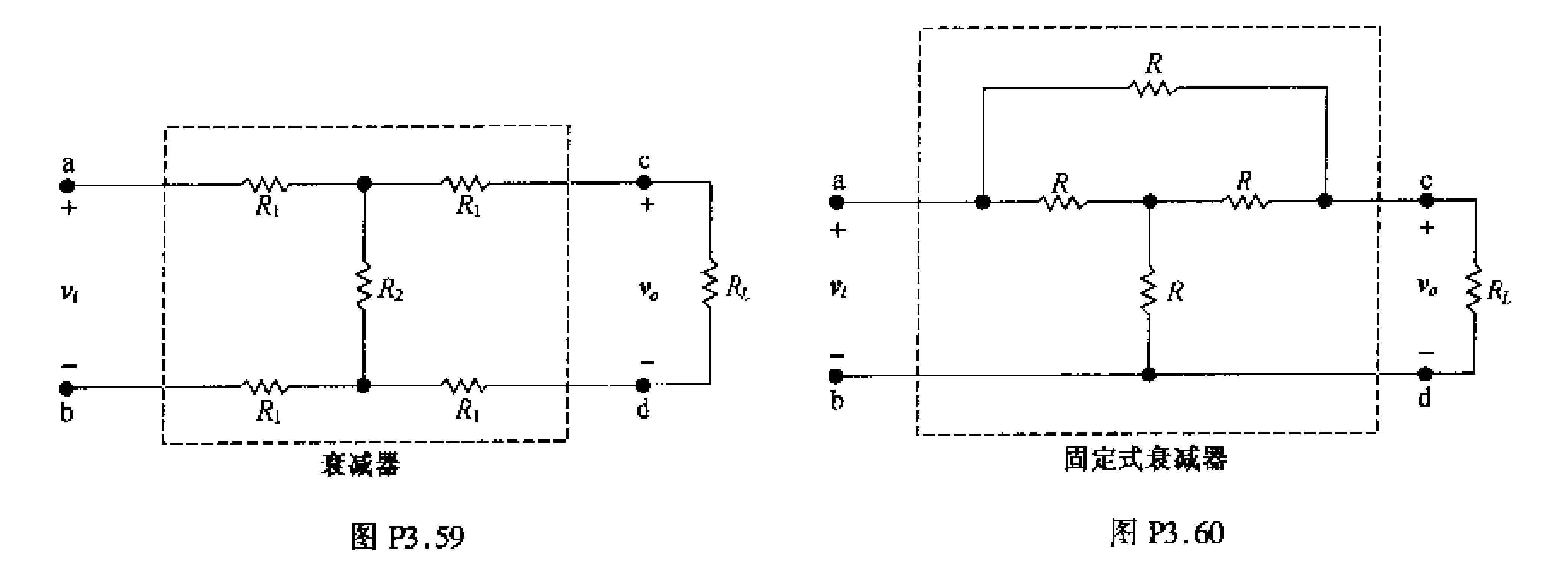


图 P3.59　　　　图 P3.60

◇**3.61** 图 P3.61 所示 T 形桥式衰减器电路的设计方程式是:

$$R_2 = \frac{2RR_L^2}{3R^2 - R_L^2}$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{3R - R_L}{3R + R_L}$$

如果 R_2 的值给定。

(a) 设计一个固定式衰减器，当 $R_L = 600\ \Omega$ 时，$v_i = 3v_o$。

(b) 假定(a)中设计的衰减器输入电压是 180 V，衰减器中哪个电阻消耗的功率最大？

(c) (b)中电阻消耗的功率为多少？

(d) 衰减器中哪个电阻消耗的功率最小？

(e) (d)中电阻消耗的功率为多少？

P3.62 (a)电路如图 P3.62 所示，当 $\Delta R = 0$ 时，电桥平衡。试说明：如果 $\Delta R << R_o$，电桥输出电压约为：

$$v_o \approx \frac{-\Delta R R_4}{(R_o + R_4)^2} v_{in}$$

(b) 已知 $R_2 = 1\ \text{k}\Omega, R_3 = 500\ \Omega, R_4 = 5\ \text{k}\Omega, v_{in} = 6\ \text{V}$，如果 ΔR 为 3% 的 R_o，电桥输出电压约为多少？

(c) 求 (b) 中 v_o 实际值。

3.63 (a) 如果误差百分数定义为：

$$误差 = \left[\frac{近似值}{实际值} - 1\right] \times 100\%$$

证明问题 3.62 中的近似值 v_o 的误差百分数为：

$$误差 = \frac{(\Delta R)R_3}{(R_2 + R_3)R_4} \times 100\%$$

(b) 计算习题 3.62 中 v_o 的误差百分数。

◇**3.64** 假定图 P3.62 电桥电路中 v_o 的误差不超过 0.5%，可以接受的 R_o 变化百分数最大值是多少？

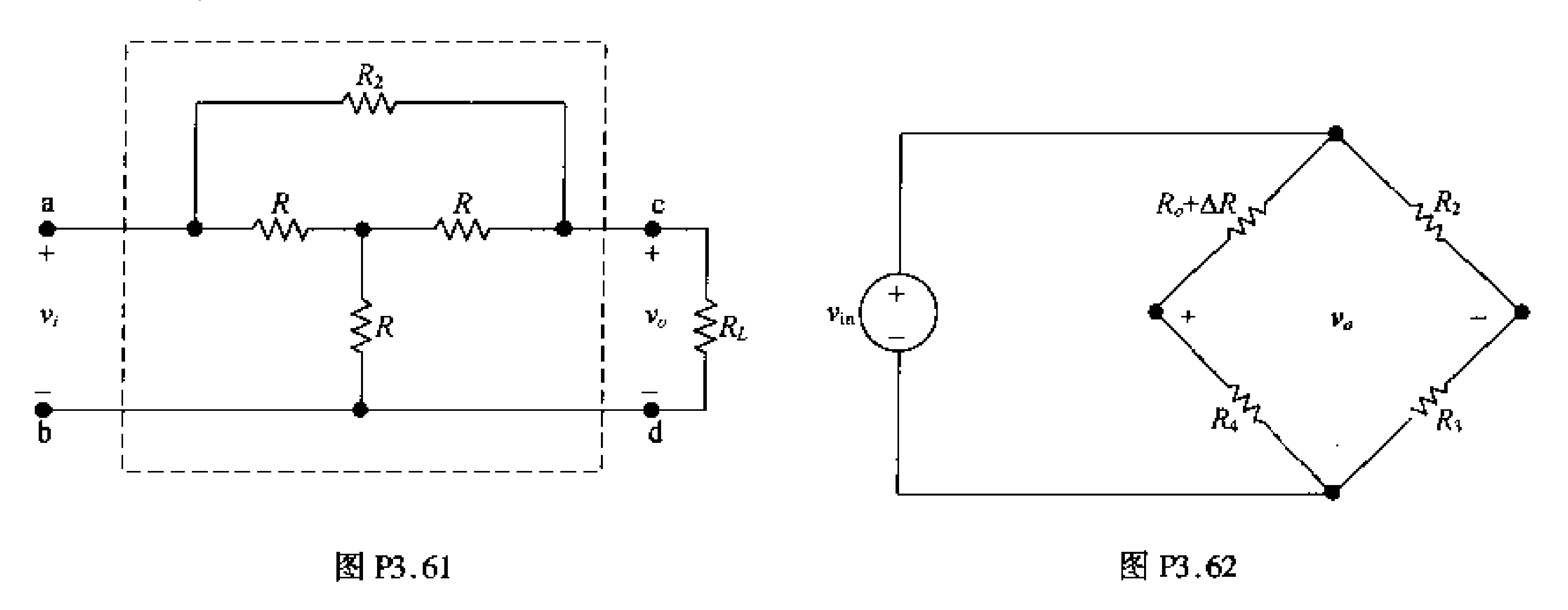


图 P3.61　　图 P3.62

◆**3.65** (a) 推导式(3.61)，(b) 推导式(3.64)。

◆**3.66** 推导式(3.66)。

P◆**3.67** 核对实例中提到的结论，即消耗的全部功率等于 12 V 电源产生的功率。

P◆◇**3.68** (a) 设计具有五根水平导线的除霜器栅格，要求如下：栅格 1.25 米宽，导线之间垂直间距 0.05 米，当提供的电压是 12 V 时，功率损耗 150 W/m。

(b) 检查解答，确定它满足设计要求。

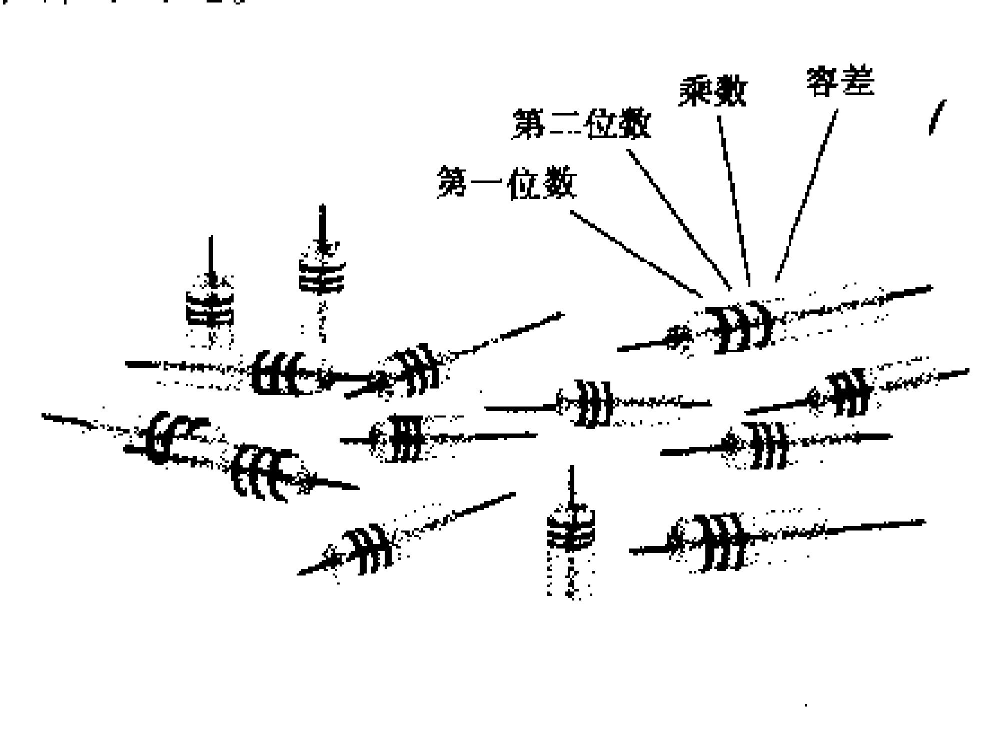
第 4 章 电路分析法

实例

实际电阻电路一

第 3 章，开始探讨了不精确的电阻值对电路性能的影响，特别是对分压电路性能的影响。生产的电阻阻值通常是离散的，一批电阻中的某个电阻，阻值是在标准值附近变化，变化值在容差范围内。容差较小(比如说 1%)的电阻比容差较大(比如说 10%)的电阻价格要贵得多。因此，在一个包含许多电阻的电路中，电阻的数值对期望的电路性能有很大影响，理解这一点是重要的。换句话说，要事先了解每个电阻阻值的变化对电路输出的影响。如果为了使电路工作正常，电阻应当接近它的标准值，为此需要花费额外的、必要的钱，确保电阻的容差小。

研究电路组件的数值对电路输出的影响称做灵敏度分析。介绍电路分析方法之后，就可以研究灵敏度分析的问题。



迄今为止，读者已经应用基尔霍夫定律及欧姆定律分析了相对简单的电阻电路，可以应用这些方法分析所有的电路。但是当电路结构更加复杂，涉及更多的元件时，使用直接的方法将显得比较麻烦。本章介绍两种强大的电路分析方法，以便分析复杂的电路。这两种方法是节点电压法和网孔电流法，利用这些方法，可以使用最少的联立方程描述电路。

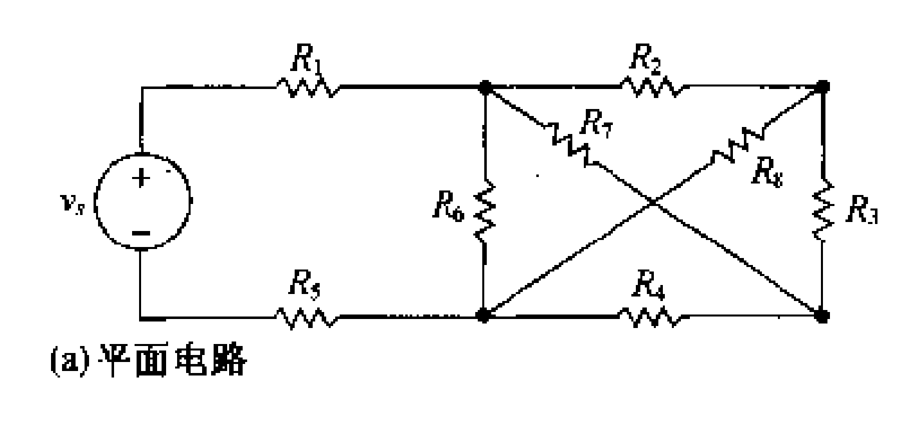
除了节点电压法和网孔电流法的分析方法，本章还要讨论其他简化电路的方法。前面的章节里已经讨论了如何用串并联简化法和 Δ－Y 变换法简化电路，本章继续介绍电源变换以及戴维南与诺顿等效电路等简化电路的方法。

本章还要研究两个概念，这些概念在电路分析中起着重要的作用。一是最大功率传输，考

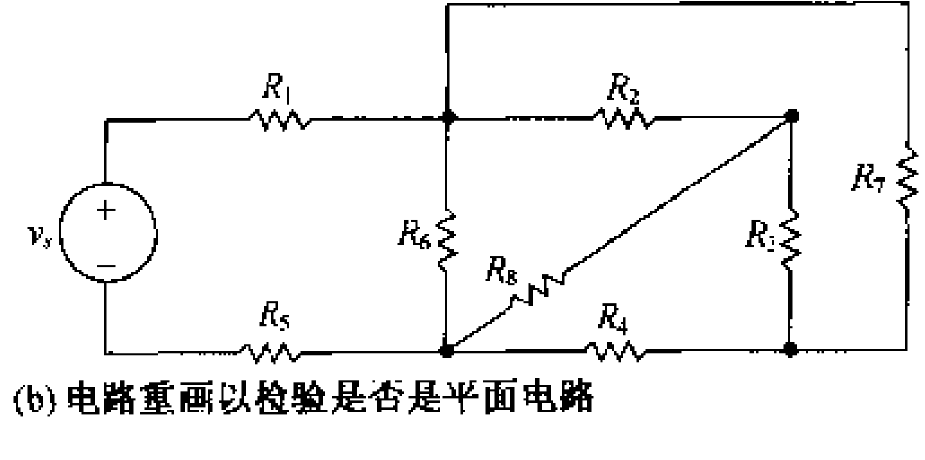
虑必须具备的条件,确保由电源释放到电阻负载的功率为最大值。戴维南等效电路用来建立最大功率传输条件。本章最后研究的概念是叠加原理,叠加原理重点分析独立源不止一个的电路。

4.1 术语

为了便于讨论较复杂的电路分析法,必须先定义几个基本术语。迄今为止,所有遇到的电路都是平面电路,即电路可以画在一个平面上,其中没有交叉支路。一个画有交叉支路的电路,如果能重新画成没有交叉支路的电路,仍可以认为是平面电路。例如,图 4.1(a)所示电路可以重新画为图 4.1(b)的形式,两个电路是等效的,因为所有节点连接都维持不变。因此,图 4.1(a)所示电路是平面电路,因为可以将其重新画为平面电路。图 4.2 展示了一个非平面电路,如果保证所有节点连接维持不变,并且没有支路交叉来重新画电路,是行不通的。节点电压法可以应用于平面和非平面电路,而网孔电流法只能应用于平面电路。



(a) 平面电路



(b) 电路重画以检验是否是平面电路

图 4.1

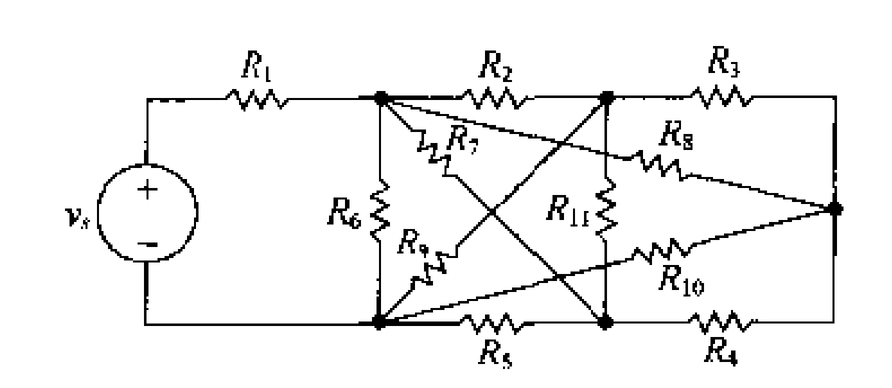


图 4.2 非平面电路

4.1.1 描述电路的词汇

1.5 节已经定义了理想基本电路元件。当基本电路元件互连形成电路时,可以用节点、路径、支路、回路和网孔来描述电路。2.4 节定义了节点和闭合路径(即回路)。重申以上这些定义,然后再定义路径、支路和网孔。为方便起见,将所有这些定义列在表 4.1 中。表 4.1 还包含每个定义的举例,例子采用图 4.3 给出的电路,例 4.1 进一步加以说明。

表 4.1 描述电路的术语

名称	定义	根据图 4.3 举例
节点	两个或更多电路元件的连接点	a
基本节点	三个或更多电路元件的连接节点	b
路径	基本元件相连的踪迹,元件不能出现两次	$v_1 - R_1 - R_5 - R_6$

（续表）

名称	定义	根据图 4.3 举例
支路	连接两个节点的路径	R_1
基本支路	连接两个基本节点的路径，不通过基本节点	$v_1 - R_1$
回路	终点和起点是同一节点的路径	$v_1 - R_1 - R_5 - R_6 - R_4 - v_2$
网孔	没有包围其他回路的回路	$v_1 - R_1 - R_5 - R_3 - R_2$
平面电路	画在平面上没有交叉支路的电路	图 4.3 是平面电路
		图 4.2 是非平面电路

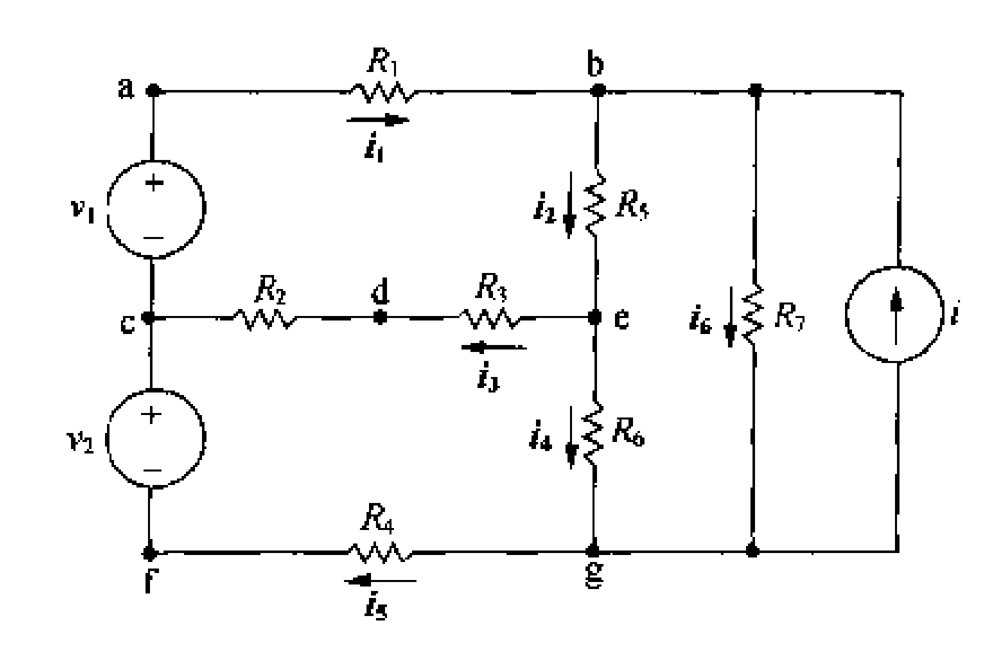


图 4.3　说明节点、路径、支路、回路和网孔的电路

例 4.1　对于图 4.3 所示电路，试确定：

(a) 所有节点。

(b) 所有基本节点。

(c) 所有支路。

(d) 所有基本支路。

(e) 所有网孔。

(f) 两条路径，且不是回路或基本支路。

(g) 两个回路，且不是网孔。

解：

(a) a，b，c，d，e，f，g 是节点。

(b) b，c，e，g 是基本节点。

(c) $v_1, v_2, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, i$ 是支路。

(d) $v_1 - R_1, R_2 - R_3, v_2 - R_4, R_5, R_6, R_7, i$ 是基本支路。

(e) $v_1 - R_1 - R_5 - R_3 - R_2, v_2 - R_2 - R_3 - R_6 - R_4, R_5 - R_7 - R_6, R_7 - i$ 是网孔。

(f) $R_1 - R_5 - R_6$是一条路径，且既不是回路（因为其起点和终点不是同一节点），也不是基本支路（因为它没有连接两个基本节点）。$v_2 - R_2$ 也是一条路径，且既不是回路也不是基本支路，理由相同。

(g) $v_1 - R_1 - R_5 - R_6 - R_4 - v_2$ 是回路，但不是网孔，因为它包含两个回路。$i - R_5 - R_6$ 也是回路，但不是网孔。

4.1.2 需要多少个联立方程

电路中未知电流数等于支路数 b,支路电流的数值不知道。例如,图 4.3 所示电路有九条支路,支路电流未知。已经知道必须有 b 个独立的方程才能解电路的 b 个未知电流。如果用 n 表示电路中的节点数,对任何一组 $n-1$ 个节点应用基尔霍夫电流定律,可以得到 $n-1$ 个独立方程式。(对第 n 个节点应用基尔霍夫电流定律不能产生独立的方程式,因为第 n 个方程式可以根据前 $n-1$ 个方程式推导得到。参见练习题 4.2。)因为需要 b 个方程式才能求解电路,又因为可以根据基尔霍夫电流定律获得 $n-1$ 个方程式,所以对回路或网孔应用基尔霍夫电压定律应列写其余的 $b-(n-1)$ 个方程式。

通过计算节点、网孔和未知电流支路,可以给出一个系统方法,列出必需数量的方程式以求解电路。对 $n-1$ 个节点应用基尔霍夫电流定律,对 $b-(n-1)$ 个回路(或网孔)应用基尔霍夫电压定律,基本节点和基本支路是需要的。如果 n_e 表示电路中的基本节点数,b_e 表示电路中含未知电流的基本支路数,对 n_e-1 个基本节点应用基尔霍夫电流定律,沿着 $b_e-(n_e-1)$ 个回路(或网孔)应用基尔霍夫电压定律。在电路中基本节点数少于或等于节点数,基本支路数少于或等于支路数。因此在分析电路时,使用基本节点和基本支路比较方便,因为在求解方程时,独立方程数量较少。

电路可以由若干个分离的部分组成。这样的电路例子可参考练习题 4.4。有关方程式数目的描述如下:对于某个相连接的电路,利用基尔霍夫电流定律可以得到 $n-1$ 个方程式,利用基尔霍夫电压定律得到 $b-(n-1)$ 个方程式。如果电路有 n 个节点,b 个支路,并由 s 个部分组成,那么应用电流定律 $n-s$ 次,应用电压定律 $b-n+s$ 次。任何两个分离部分的电路可以由一根导线连接。连接后,使得两个节点变成一个节点。然而,这根导线上没有电流,因此,任何由 s 个分离部分组成的电路总是可以化简为相连接的电路。

4.1.3 举例说明系统方法

通过图 4.4 所示电路来说明系统方法,根据基本节点和支路列写方程式。电路有四个基本节点和六个基本支路,将未知电流标记为 $i_1 \sim i_6$。

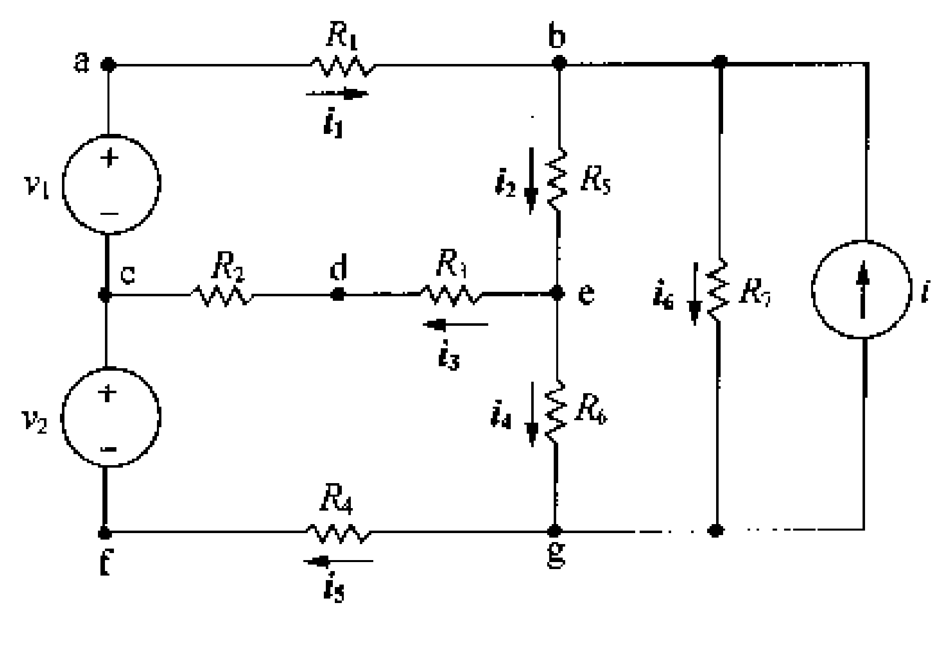


图 4.4

对四个基本节点中的任意三个应用基尔霍夫电流定律,可以得到所需的六个联立方程式中的三个。使用节点 b,c 和 e,得到:

$$-i_1+i_2+i_6-i=0$$
$$i_1-i_3-i_5=0$$
$$i_3+i_4-i_2=0 \tag{4.1}$$

沿着三个网孔应用基尔霍夫电压定律，可以得到另外三个方程式。因为电路有四个网孔，需要去掉一个网孔。选择 R_7-i，因为不知道 i 上的电压。

使用其他三个网孔得到：

$$R_1i_1+R_5i_2+i_3(R_2+R_3)-v_1=0$$
$$-i_3(R_2+R_3)+i_4R_6+i_5R_4-v_2=0$$
$$-i_2R_5+i_6R_7-i_4R_6=0 \tag{4.2}$$

为了便于求解，重新排列式(4.1)和式(4.2)，产生一组方程式：

$$-i_1+i_2+0i_3+0i_4+0i_5+i_6=i$$
$$i_1+0i_2-i_3+0i_4-i_5+0i_6=0$$
$$0i_1-i_2+i_3+i_4+0i_5+0i_6=0$$
$$R_1i_1+R_5i_2+(R_2+R_3)i_3+0i_4+0i_5+0i_6=v_1$$
$$0i_1+0i_2-(R_2+R_3)i_3+R_6i_4+R_4i_5+0i_6=v_2$$
$$0i_1-R_2i_2+0i_3-R_6i_4+0i_5+R_7i_6=0 \tag{4.3}$$

注意：第 n 个节点(本例中为 g)的电流之和是：

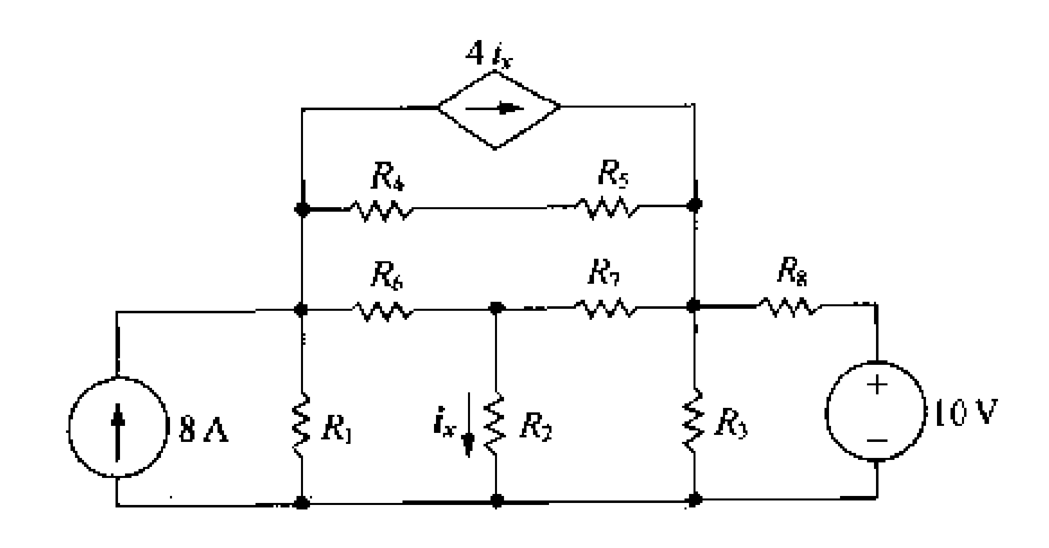
$$i_5-i_4-i_6+i=0 \tag{4.4}$$

式(4.4)是非独立的，因为可以将式(4.1)相加再乘以 -1 得到式(4.4)。因此，式(4.4)是式(4.1)的线性组合，不是独立方程。通过介绍新的变量，只用 $n-1$ 个方程式或只用 $b-(n-1)$ 个方程式就可以描述电路。这些新的变量允许使用较少的方程式来得到电路的解答。这是希望达到的目标，即使是用计算机来获得数字解答，也希望方程的数量少。

新的变量称做节点电压和网孔电流。利用节点电压法，可以用 n_e-1 个方程描述电路；利用网孔电流法，可以用 $b_e-(n_e-1)$ 个方程描述电路。

练习题

4.1 电路如图所示，指出下列各项的数量：(a)支路，(b)含有未知电流的支路，(c)基本支路，(d)含有未知电流的基本支路，(e)节点，(f)基本节点，(g)网孔。

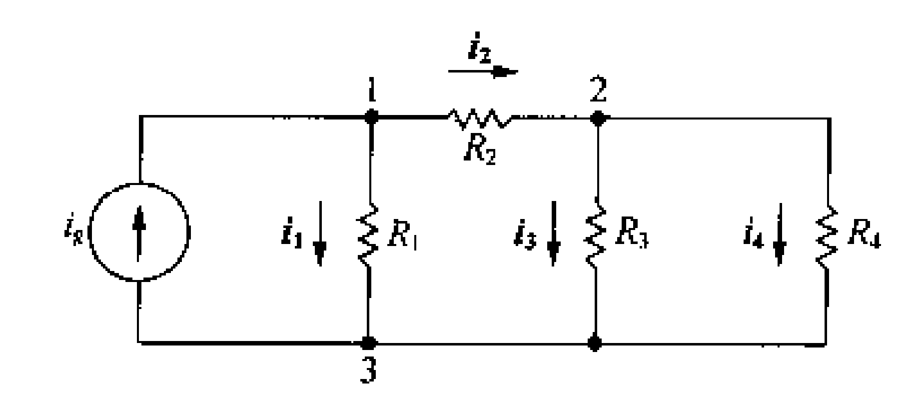


答：(a) 11，(b) 9，(c) 9，(d) 7，(e) 6，(f) 4，(g) 6。

4.2 设离开节点的电流定义为正。

(a) 求如图所示电路中每个节点的电流之和。

(b) 说明(a)中任何一个方程式可以由另外的两个方程式得到。



答:(a) 1: $i_1 - i_g + i_2 = 0$, 2: $i_3 + i_4 - i_2 = 0$, 3: $i_g - i_1 - i_3 - i_4 = 0$, (b) 为了从其他两个方程式得到另一方程式,简单地对两个方程式相加,再将结果乘以 -1。

4.3 (a) 在练习题 4.1 的电路中,如果仅确定了基本节点和支路,那么需要多少个联立方程式来描述电路?

(b) 使用基尔霍夫电流定律能得到这些方程式中的几个?

(c) 有多少个方程需要用基尔霍夫电压定律列写?

(d) 哪两个网孔可以避开使用基尔霍夫电压定律?

答:(a) 7,(b) 3,(c) 4,(d) $R_4 - R_5 - 4i_x$ 和 $8\text{A} - R_1$。

4.4 (a) 如图电路有多少个分离的部分?

(b) 有多少个节点?

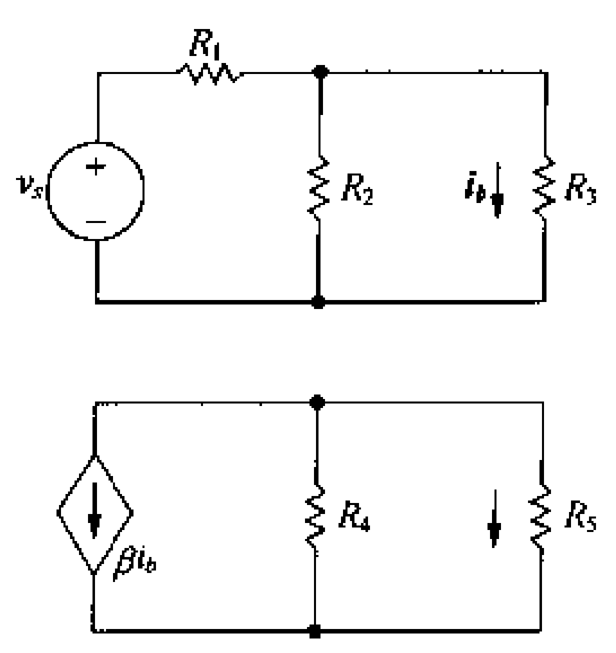
(c) 可以写出多少个独立电流方程式?

(d) 有多少个支路?

(e) 有多少个含有未知电流的支路?

(f) 有多少个方程必须用电压定律列写?

(g) 假定电路各部分底部节点用一根导线连接起来。重新回答(a)~(f)。



答:(a) 2,(b) 5,(c) 2,(d) 7,(e) 6,(f) 3,(g) 1,4,2,7,6,3。

4.2 节点电压法

本节将介绍使用电路基本节点的节点电压法。第一步,调整电路的布局,使得电路没有支路交迭,在电路图上标注基本节点,如图 4.5 所示。这个电路有三个基本节点($n_e = 3$),因此,

需要两个(n_e-1)节点电压方程描述电路。第二步,选择三个基本节点中的一个作为参考节点。尽管从理论上讲选择参考节点是任意的,但是实际上参考节点的选择通常是显而易见的。例如,通过大多数支路的节点当做参考节点,一般认为是个好的选择。使用这种方法增长了一些经验之后,参考节点最适当的选择(如果它存在)将是显而易见的。在图 4.5 所示电路中,较低的节点连接了大多数支路,因此将它作为参考节点。用符号标记所选择的参考节点,如图 4.6 所示。

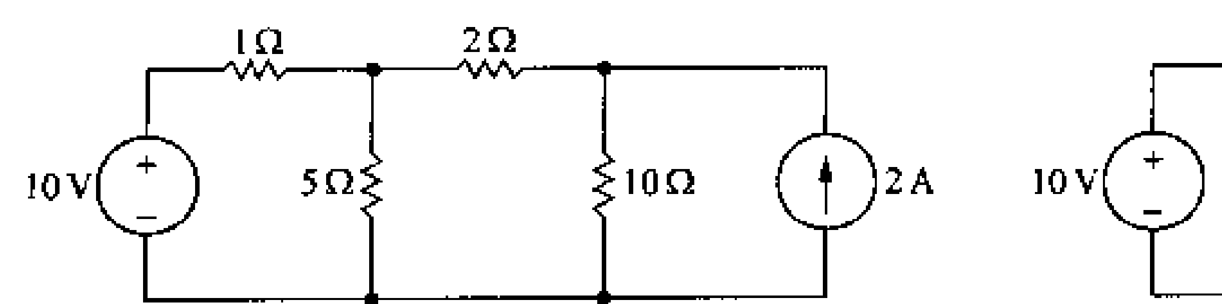


图 4.5　用来说明节点分析法的电路

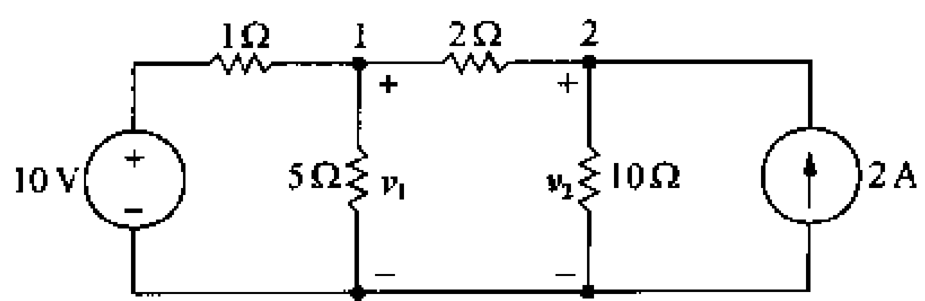


图 4.6　给图 4.5 所示的电路标上参考节点和节点电压

选择参考节点后,定义电路图上的节点电压。节点电压定义为:从参考节点到非参考节点的电压升。对于这个电路,必须定义两个节点电压,如图 4.6 所示,节点电压表示为 v_1 和 v_2。

下面准备列写节点电压方程。首先标出每个连接到非参考节点的支路电流,作为节点电压的函数,然后根据基尔霍夫电流定律将这些电流求和并使其为零。对于图 4.6 电路,离开节点 1 通过 1 Ω 电阻的电流等于电阻上的电压降除以电阻(欧姆定律)。1 Ω 电阻上的电压降是 v_1-10,其方向与离开节点的电流方向一致。因此 1 Ω 电阻上的电流是 $(v_1-10)/1$,如图 4.7 所示,图中给出 10 V - 1 Ω 支路及相应的电压和电流。

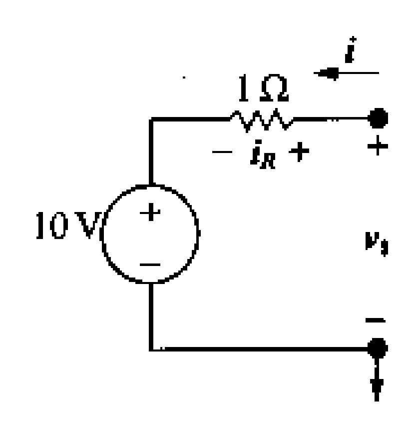


图 4.7　支路电流 i 的计算

按照同样的道理,可以得到每个含有未知电流支路的电流。离开节点 1 通过 5 Ω 电阻的电流为 $v_1/5$,离开节点 1 通过 2 Ω 电阻的电流为 $(v_1-v_2)/5$,离开节点 1 的三个电流之和必然等于零。因此,在节点 1 得到的节点电压方程式是:

$$\frac{v_1-10}{1}+\frac{v_1}{5}+\frac{v_1-v_2}{2}=0 \tag{4.5}$$

在节点 2 得到的节点电压方程式是:

$$\frac{v_2-v_1}{2}+\frac{v_2}{10}-2=0 \tag{4.6}$$

应当注意的是,式(4.6)中的第一项是离开节点 2 通过 2 Ω 电阻的电流,第二项是离开节点 2 通过 10 Ω 电阻的电流,第三项是离开节点 2 通过电流源的电流。

式(4.5)和(4.6)是两个联立方程式,用节点电压 v_1 和 v_2 描述了图 4.6 所示的电路。求解 v_1 和 v_2 得到:

$$v_1=\frac{100}{11}=9.09\ \text{V}$$

$$v_2=\frac{120}{11}=10.91\ \text{V}$$

一旦节点电压已知,所有支路电流都可以计算。一旦支路电流都求出,支路电压和功率也就可以计算。例 4.2 说明了节点电压法的使用。

例 4.2 (a) 利用节点电压法求图 4.8 所示电路中的 i_a, i_b 和 i_c。

(b) 求每个电源的功率,并说明电源是释放功率还是吸收功率。

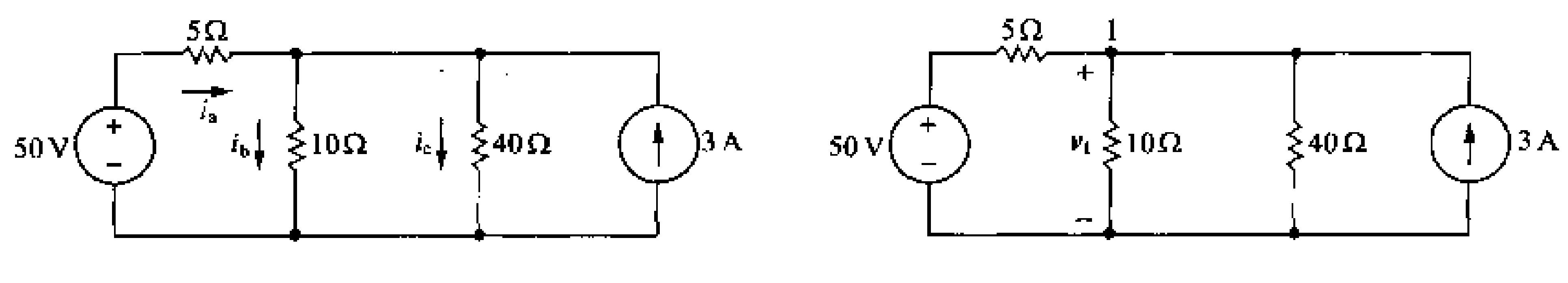


图 4.8 例 4.2 电路

图 4.9 给图 4.8 所示电路标上参考节点和未知节点电压

解:

(a) 应当注意到电路有两个基本节点,因此需要列写一个节点电压表达式。选择较低的节点作为参考节点,定义未知节点电压为 v_1,如图 4.9 所示。对离开节点 1 的电流求和,产生节点电压方程式:

$$\frac{v_1-50}{5}+\frac{v_1}{10}+\frac{v_1}{40}-3=0$$

求解 v_1 得到:

$$v_1=40\ \text{V}$$

因此:

$$i_a=\frac{50-40}{5}=2\ \text{A}$$

$$i_b=\frac{40}{10}=4\ \text{A}$$

$$i_c=\frac{40}{40}=1\ \text{A}$$

(b) 50 V 电源的功率是:

$$p_{50\text{V}}=-50i_a=-100\ \text{W}(释放)$$

30 A 电源的功率是:

$$p_{3\text{A}}=-3v_1=-3(40)=-120\ \text{W}(释放)$$

检验这些计算,全部释放的功率是 220 W。由三个电阻吸收的全部功率是 4(5) + 16(10) + 1(40),即 220 W。可见计算是正确的。

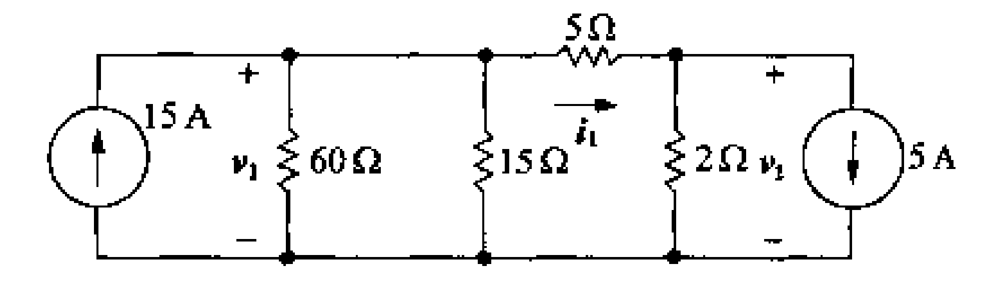
练习题

4.5 (a) 电路如图所示，使用节点电压法求 v_1，v_2 和 i_1。

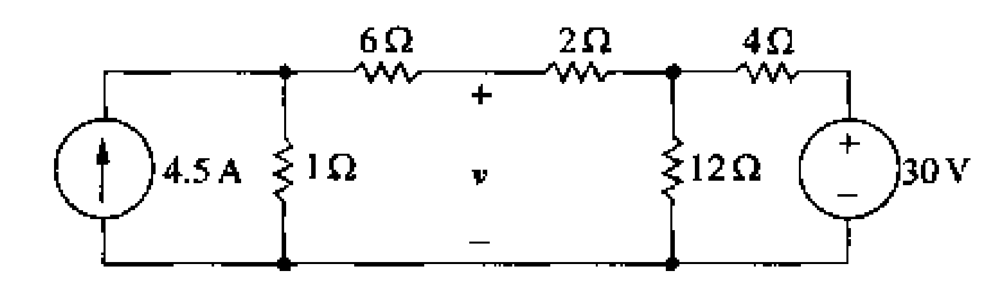
(b) 15 A 电源向电路释放的功率是多少？

(c) 5 A 电源向电路释放的功率是多少？

答：(a) 60 V，10 V，10 A，(b) 900 W，(c) −50 W。



4.6 电路如图所示，使用节点电压法求 v。



答：15 V。

4.3 节点电压法和非独立源

如果电路包含非独立源，节点电压方程式必须附加由非独立源提供的约束方程式。例 4.3 说明了节点电压法在包含非独立源电路中的应用。

例 4.3 电路如图 4.10 所示，使用节点电压法求消耗在 5 Ω 电阻上的功率。

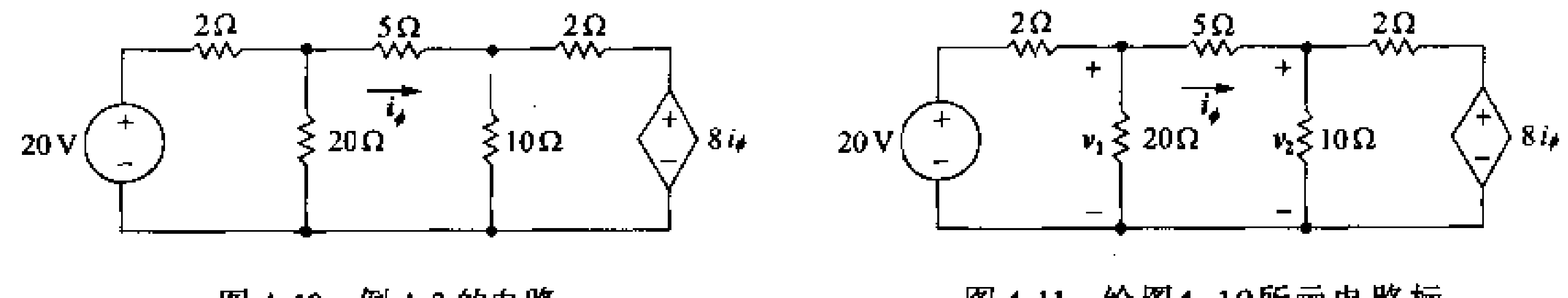


图 4.10　例 4.3 的电路

图 4.11　给图 4.10 所示电路标上参考节点和节点电压

解：

电路有三个基本节点，需要两个节点电压方程式描述电路。四个支路终止于较低的节点，所以选择较低的节点作为参考节点。定义两个未知节点电压，如图 4.11 所示。对离开节点 1 的电流求和，产生方程式：

$$\frac{v_1-20}{2}+\frac{v_1}{20}+\frac{v_1-v_2}{5}=0$$

对离开节点 2 的电流求和，产生：

$$\frac{v_2-v_1}{5}+\frac{v_2}{10}+\frac{v_2-8i_\phi}{2}=0$$

所列的两个方程式包含三个未知数，即 v_1，v_2 和 i_ϕ。为了消去 i_ϕ，必须用节点电压来表示

这个控制电流。即：

$$i_\phi = \frac{v_1 - v_2}{5}$$

将上述关系式代入节点 2 方程式，化简两个节点电压方程式，得：

$$0.75v_1 - 0.2v_2 = 10$$

$$-v_1 + 1.6v_2 = 0$$

解 v_1 和 v_2 得：

$$v_1 = 16\ \text{V} \qquad v_2 = 10\ \text{V}$$

然后有：

$$i_\phi = \frac{16-10}{5} = 1.2\ \text{A}$$

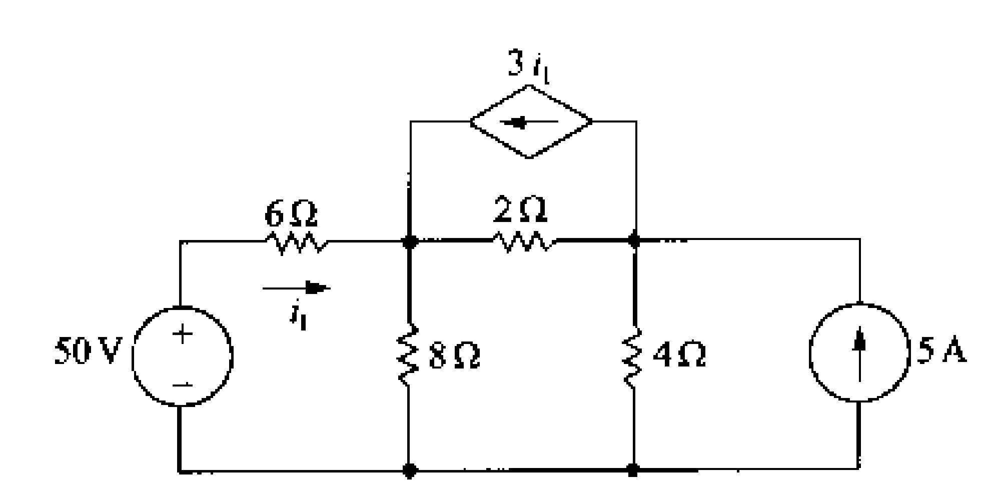
$$p_{5\Omega} = (1.44)(5) = 7.2\ \text{W}$$

重新思考这个例子，对于培养能力很有帮助，用节点 2 作为参考节点，将使分析变得容易还是困难？

练习题

4.7 (a) 电路如图所示，使用节点电压法求每个电源的功率。

(b) 说明电源是向电路释放功率还是从电路吸收功率。



答：(a) $p_{50\text{V}} = 150$ W，$p_{3i_1} = 144$ W，$p_{5\text{A}} = 80$ W，(b) 所有电源都是向电路释放功率。

4.4 节点电压法的特例

当一个电压源是两个基本节点之间仅有的元件时，节点电压法可以简化。如图 4.12 所示电路，电路中有三个基本节点，需要两个联立方程式。从三个基本节点中选择一个作为参考节点，标记另外两个节点。但是，100 V 电源使节点 1 和参考节点之间的电压为 100 V。这意味着只有一个未知节点电压(v_2)。因此，求解这个电路只需列写一个节点 2 的节点电压方程式：

$$\frac{v_2 - v_1}{10} + \frac{v_2}{50} - 5 = 0 \tag{4.7}$$

由于 $v_1 = 100$ V，所以可以解出 v_2：

$$v_2 = 125\ \text{V} \tag{4.8}$$

知道了 v_2，就可以计算每个支路的电流。可以验证，从包含独立电压源支路流进节点 1 的电

流是 1.5 A。

一般来说，在用节点电压法求解电路时，如果有电压源直接连接在基本节点之间，未知节点电压的数目会减少。理由是，只要电压源连接在基本节点之间，它将强制这些节点之间的节点电压差等于电源电压。如果减少未知数的数目，将会简化电路的分析。

使用节点电压法分析图 4.13 所示的电路，电路包含四个基本节点，先列写三个节点电压方程式。然而，两个基本节点由一个独立电压源连接，而且另外两个基本节点由一个电流控制电压源连接。因此，实际上只有一个未知节点电压。

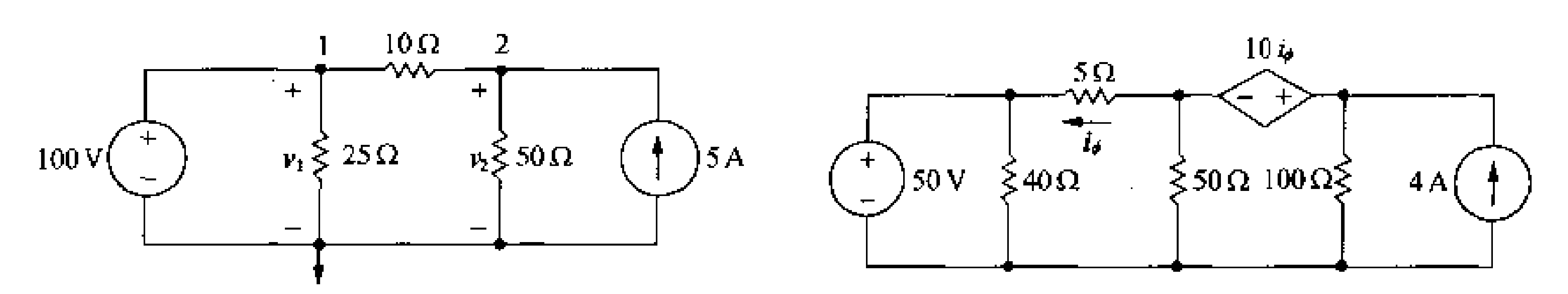


图 4.12　已知一个节点电压的电路　　图 4.13　非独立电压源连接在节点之间的电路

选择参考节点有几种方案。非独立电压源两边的节点看上去很有吸引力，因为如果选择左边节点作为参考节点，另一边节点电压就是 $+10i_\phi$；如果选择右边节点作为参考节点，另一边节点电压就是 $-10i_\phi$。选择较低处的节点看来更好，因为一个节点电压直接已知(50 V)，而且五条支路的终点都在较低处的节点。因此选择较低处的节点作为参考节点。

图 4.14 所示是重新画的电路，电路中给出了参考节点，定义了节点电压。还要介绍电流 i，因为不能将非独立电压源支路的电流表示为节点电压 v_2 和 v_3 的函数。因此在节点 2：

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + i = 0 \tag{4.9}$$

在节点 3：

$$\frac{v_3}{100} - i - 4 = 0 \tag{4.10}$$

通过相加式(4.9)和(4.10)消去 i，得到：

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + \frac{v_3}{100} - 4 = 0 \tag{4.11}$$

4.4.1　超节点的概念

式(4.11)可以直接列出，不用通过中间步骤。考虑将节点 2 和 3 看做单个节点，并对离开节点的电流求和，电流表示为节点电压 v_2 和 v_3 的函数，图 4.15 解释了这种方法。

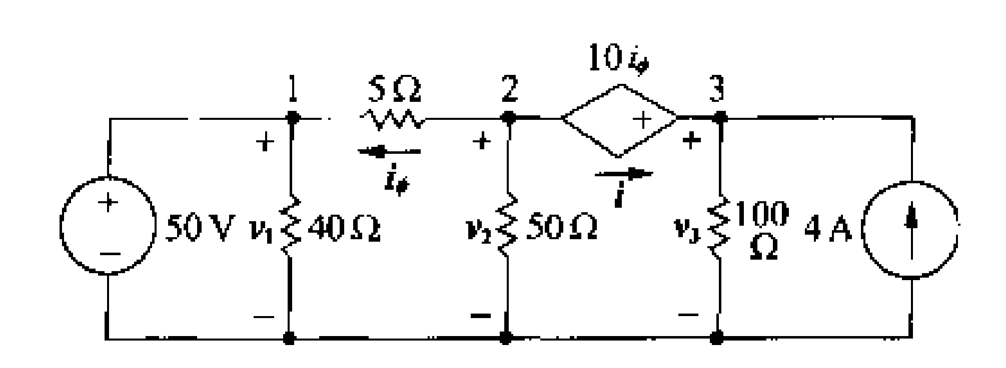


图 4.14　对图 4.13 所示电路选择参考节点，定义节点电压

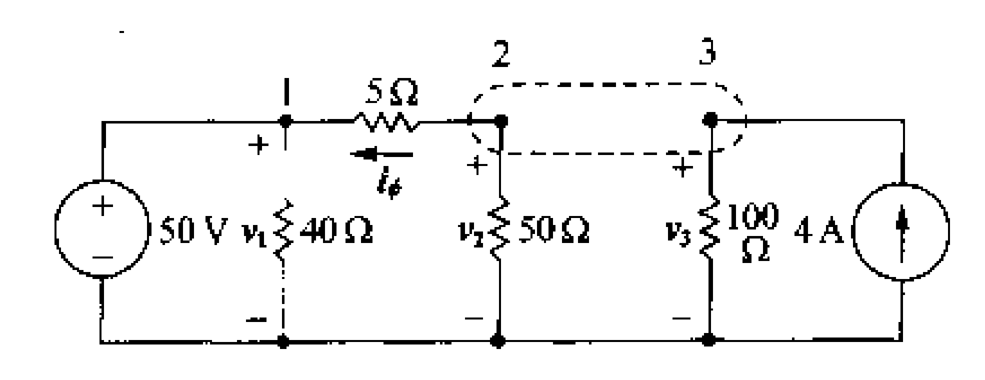


图 4.15　将节点 2 和 3 考虑为超节点

当一个电压源在两个基本节点之间时,可以将这些节点组合形成超节点。很明显,基尔霍夫电流定律对超节点仍然有效。在图 4.15 中,从 5 Ω 支路开始,沿着超节点逆时针方向运动,产生了方程式:

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + \frac{v_3}{100} - 4 = 0 \tag{4.12}$$

它与式(4.11)是相同的。在节点 2 和 3 处创建一个超节点使该电路的分析变得更加容易。在写任何方程式之前,花些时间寻找这种捷径是有价值的。

式(4.12)得到后,下一步是将表达式简化为一个未知节点电压。首先从方程式中消去 v_1,因为已知 $v_1 = 50$ V。接着将 v_3 表示为 v_2 的函数:

$$v_3 = v_2 + 10i_\phi \tag{4.13}$$

现在将非独立电压源的控制电流表示为节点电压的函数:

$$i_\phi = \frac{v_2 - 50}{5} \tag{4.14}$$

利用式(4.13)和式(4.14)以及 $v_1 = 50$ V 简化式(4.12),得:

$$v_2\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{100} + \frac{10}{500}\right) = 10 + 4 + 1$$

$$v_2(0.25) = 15$$

$$v_2 = 60 \text{ V}$$

根据式(4.13)和式(4.14):

$$i_\phi = \frac{60 - 50}{5} = 2 \text{ A}$$

$$v_3 = 60 + 20 = 80 \text{ V}$$

4.4.2 电流表电路的节点电压分析

利用节点电压法分析一个电路,该电路曾在 2.5 节中介绍过,如图 4.16 所示。

在 2.5 节利用支路电流法分析电路时,需要列写并求解六个联立方程式。这里,将给出利用节点分析法简化电路的求解。

电路有四个基本节点:节点 a 和 d 与节点 b 和 c 相似,都由独立电压源连接。因为 $(n_e - 1) - 2 = 1$,所以问题简化为求一个未知节点电压。使用 d 作为参考节点,将节点 b 和 c 组合为超节点。如图 4.17 所示,将 R_2 上的电压降标记为 v_b,将 R_E 上的电压降标记为 v_c。可得:

$$\frac{v_b}{R_2} + \frac{v_b - V_{CC}}{R_1} + \frac{v_c}{R_E} - \beta i_B = 0 \tag{4.15}$$

为了从式(4.15)中消去 v_c 和 i_B,有:

$$v_c = (i_B + \beta i_B)R_E \tag{4.16}$$

$$v_c = v_b - V_0 \tag{4.17}$$

将式(4.16)和式(4.17)代入式(4.15),产生:

$$v_b\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{(1+\beta)R_E}\right] = \frac{V_{CC}}{R_1} + \frac{V_0}{(1+\beta)R_E} \tag{4.18}$$

从式(4.18)中解 v_b,得:

$$v_b = \frac{V_{CC}R_2(1+\beta)R_E + V_0R_1R_2}{R_1R_2+(1+\beta)R_E(R_1+R_2)} \tag{4.19}$$

使用节点电压法分析该电路简化了问题,从处理六个联立方程式(参见习题2.24)变为处理三个联立方程式。可以验证,将式(4.19)与式(4.16)及式(4.17)组合,解出的 i_B 与式(2.25)相同(参见习题4.19)。

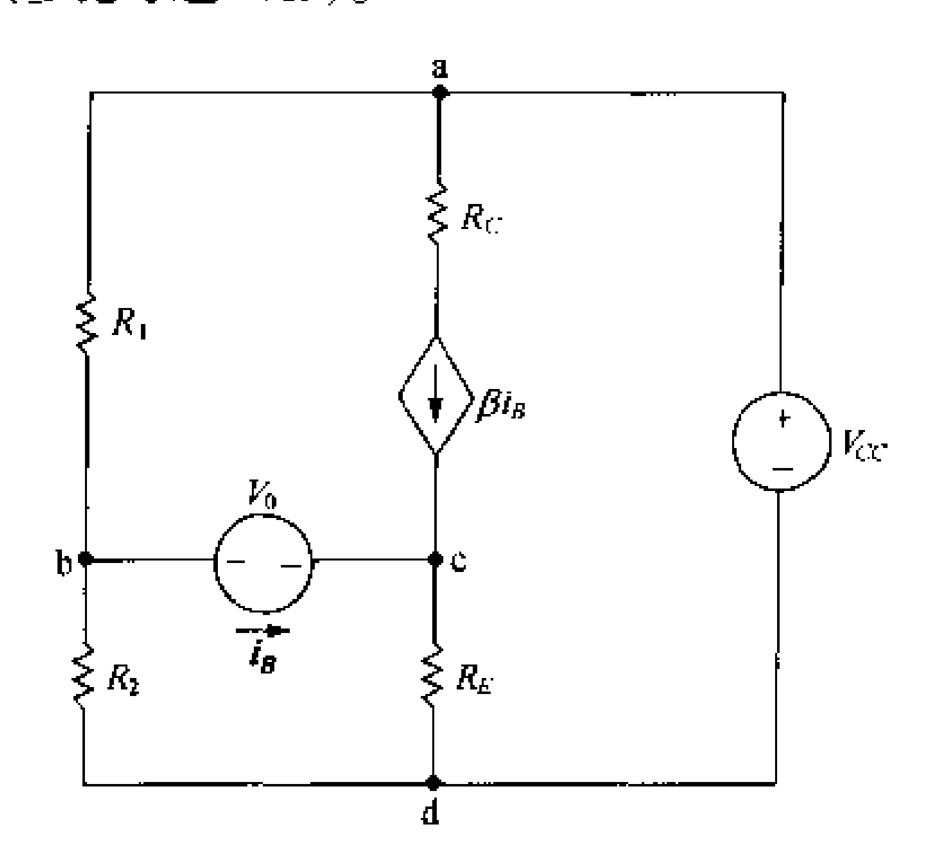


图 4.16　图 2.24 中的晶体管放大电路

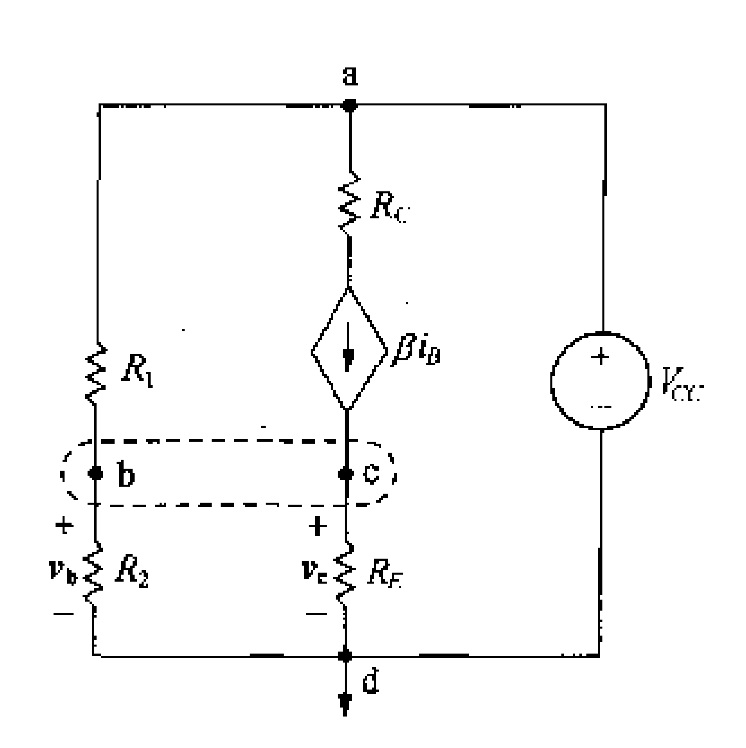
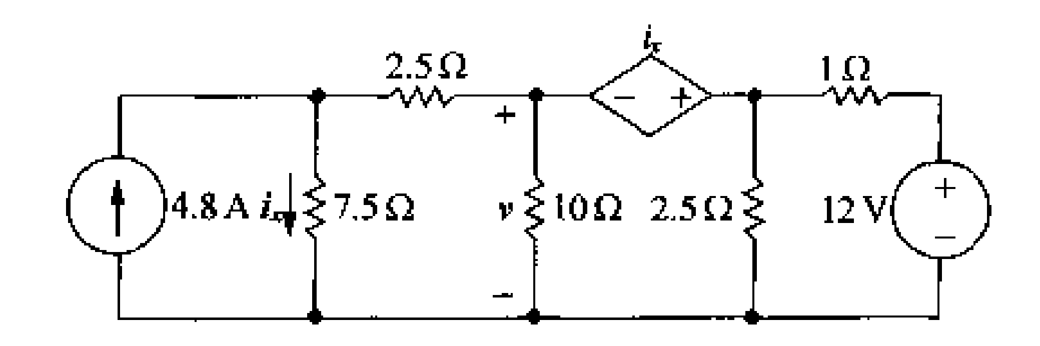


图 4.17　对图 4.16 所示电路标出电压和超节点

练习题

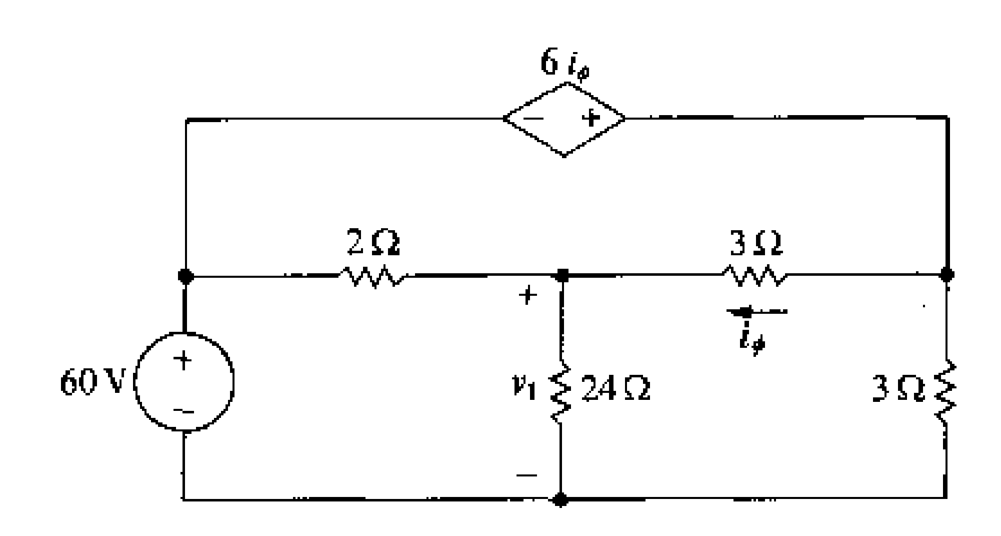
4.8　用节点电压法求图示电路中的 v。

答:8 V。



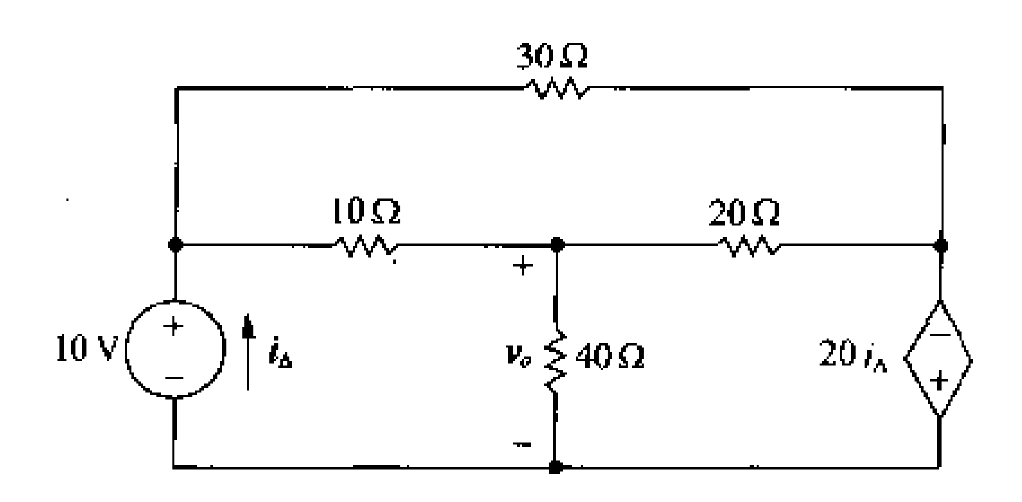
4.9　用节点电压法求图示电路中的 v_1。

答:48 V。



4.10 用节点电压法求图示电路中的 v_o。

答:24 V。



4.5 网孔电流法

如 4.1 节叙述,网孔电流分析法通过 $b_e-(n_e-1)$个方程式描述电路。网孔是一个没有其他回路在里面的回路,图 4.18 所示电路是图 4.1(b)电路,这里再次给出。用带箭头的电流标明每个回路,网孔电流分析法只能应用于平面电路。图 4.18 给出的电路包含四个基本节点和七个基本支路,支路中电流是未知的。为了用网孔电流法求解未知电流,必须列写四 [7-(4-1)] 个网孔电流方程式。

网孔电流是仅存在于网孔周边内的电流。在电路图中,用沿着网孔周界的封闭实心线或接近封闭的实心线表示,实心线上的箭头表明网孔电流的参考方向。图 4.18 给出四个网孔电流,用网孔电流描述图 4.1(b)所示的电路。根据定义,网孔电流将自动满足基尔霍夫电流定律。即在电路的任何节点,一个给定的网孔电流既进入又离开节点。

图 4.18 还表明,支路电流不一定都能表示网孔电流。例如,网孔电流 i_2 不等于任何支路电流,而网孔电流 i_1,i_3 和 i_4 可以由支路电流表示。因此,不一定能测量网孔电流,也就是说,要想测量网孔电流 i_2,电流表无处可插。网孔电流虽然是个假想的量,但并不意味着它是个无用的概念。相反,电路分析的网孔电流法非常自然地从支路电流方程式发展而来。

可以用图 4.19 所示电路来表明网孔电流法的发展过程。先用支路电流(i_1,i_2 和 i_3)构成一组独立的方程式。对于该电路,$b_e=3$,$n_e=2$。可以只写一个独立的电流方程式,同时还需要两个独立的电压方程式。对节点应用基尔霍夫电流定律;并沿着两个网孔应用基尔霍夫电压定律,产生了下列一组方程式:

$$i_1=i_2+i_3 \tag{4.20}$$

$$v_1=i_1R_1+i_3R_3 \tag{4.21}$$

$$-v_2=i_2R_2-i_3R_3 \tag{4.22}$$

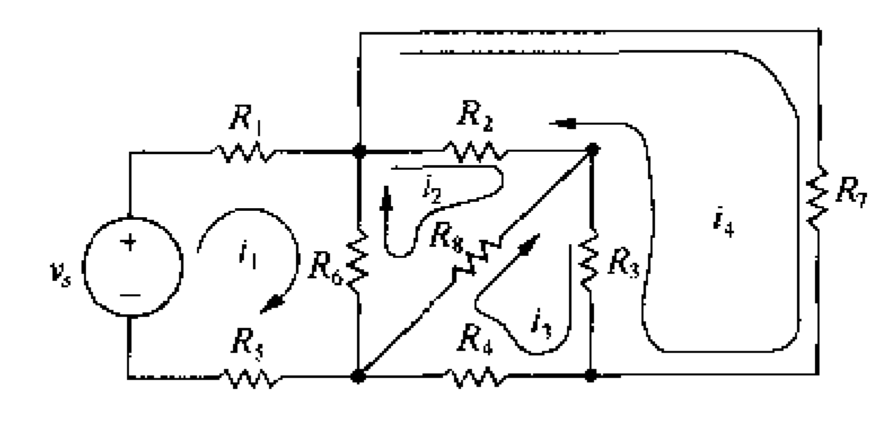


图 4.18 通过图 4.1(b)所示电路定义网孔电流

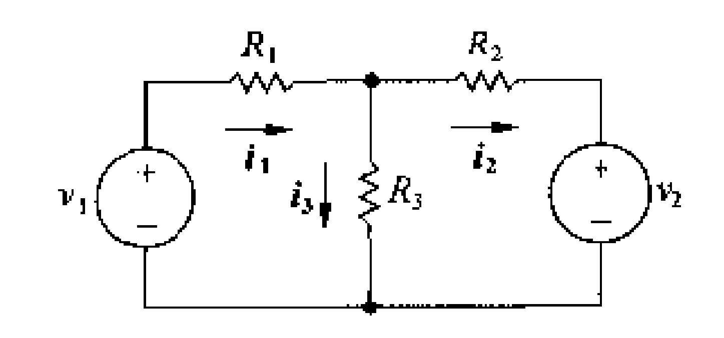


图 4.19 该电路说明电路分析的网孔电流法的发展

先求解式(4.20)的 i_3,再把结果代入式(4.21)和式(4.22),则将三个方程式简化为两个方程式:

$$v_1 = i_1(R_1 + R_3) - i_2 R_3 \tag{4.23}$$

$$-v_2 = -i_1 R_3 + i_2(R_2 + R_3) \tag{4.24}$$

继续求解式(4.23)和(4.24)中的 i_1 和 i_2,实现了用两个联立方程式的解代替三个联立方程式的解。通过将 n_e-1 个电流方程式代入 $b_e-(n_e-1)$ 个电压方程式得到式(4.23)和式(4.24)。网孔电流法的价值在于,通过定义网孔电流,自动地消去了 n_e-1 个电流方程式。因此网孔电流法相当于将 n_e-1 个电流方程式代入 $b_e-(n_e-1)$ 个电压方程式的系统方法。网孔电流,在图 4.19 中相当于将支路电流 i_3 从式(4.23)和式(4.24)中消去后的电流,如图 4.20 所示。沿着两个网孔应用基尔霍夫电压定律,用网孔电流表示所有电阻上的电压,得到方程式:

$$v_1 = i_a R_1 + (i_a - i_b) R_3 \tag{4.25}$$

$$-v_2 = (i_b - i_a) R_3 + i_b R_2 \tag{4.26}$$

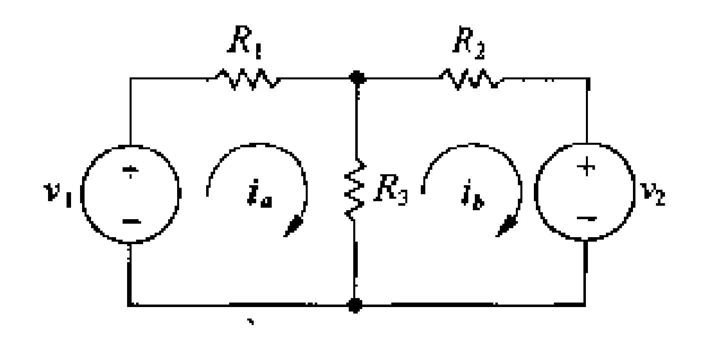


图 4.20　网孔电流 i_a 和 i_b

在式(4.25)和式(4.26)中集中 i_a 和 i_b 的系数,得:

$$v_1 = i_a(R_1 + R_3) - i_b R_3 \tag{4.27}$$

$$-v_2 = -i_a R_3 + i_b(R_2 + R_3) \tag{4.28}$$

应当注意的是,式(4.27)和式(4.28)与式(4.23)和式(4.24)形式上是相同的。只是网孔电流 i_a 和 i_b 代替了支路电流 i_1 和 i_2。还要注意的是,图 4.19 中的支路电流可以用图 4.20 中的网孔电流表示,即:

$$i_1 = i_a \tag{4.29}$$

$$i_2 = i_b \tag{4.30}$$

$$i_3 = i_a - i_b \tag{4.31}$$

能否得到式(4.29)~(4.31)对电路分析的网孔电流法是至关重要的。一旦知道了网孔电流,也就知道了支路电流。而且一旦知道了支路电流,就能计算任何希望知道的电压或功率。

例 4.4 说明如何使用网孔电流法求电源功率和支路电压。

例 4.4　(a) 应用网孔电流法确定图 4.21 所示电路中每个电压源相应的功率。

(b) 计算 8 Ω 电阻上的功率。

解:

(a) 为了计算每个电源的功率,需要知道每个电源中的电流。电路指示出这些电源电流与网孔电流相同。而且电路有七个含未知电流的支路和五个节点。因此需要三个[b

$-(n-1)=7-(5-1)$]网孔电流方程式描述电路。图 4.22 给出三个网孔电流,用三个网孔电流描述图 4.21 所示电路。如果假设电压降为正,三个网孔方程式是:

$$-40+2i_a+8(i_a-i_b)=0$$
$$8(i_b-i_a)+6i_b+6(i_b-i_c)=0$$
$$6(i_c-i_b)+4i_c+20=0 \quad (4.32)$$

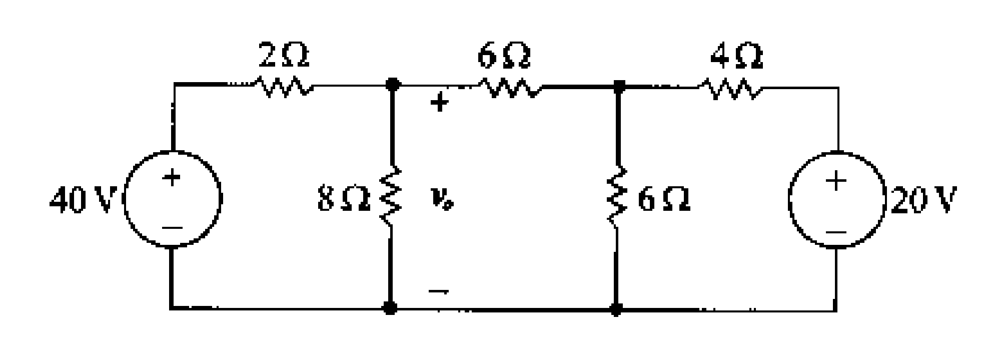


图 4.21 例 4.4 电路

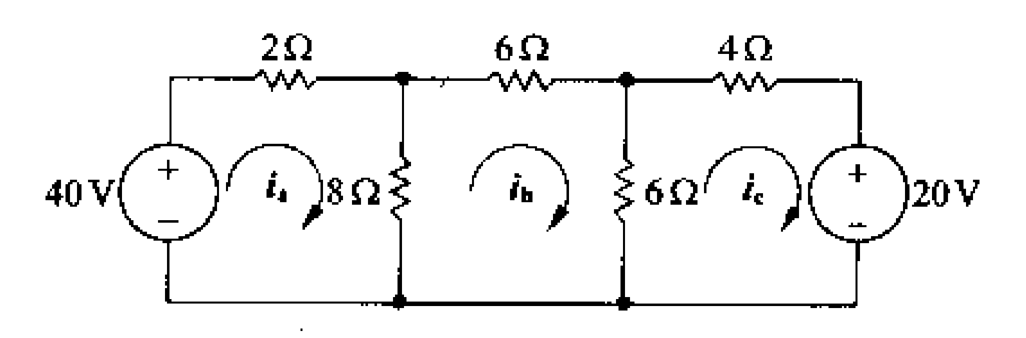


图 4.22 用来分析图 4.21 所示电路的三个网孔电流

可以用计算器解这些方程式,也可以使用计算机工具。依靠手解三个或更多的联立方程式时,Cramer 方法是一个有用的工具。你可以在附录 A 中复习这个重要的工具。使用计算器、应用计算机程序或 Cramer 方法将方程式(4.32)变换如下:

$$10i_a-8i_b+0i_c=40$$
$$-8i_a+20i_b-6i_c=0$$
$$0i_a-6i_b+10i_c=-20 \quad (4.33)$$

三个网孔电流是:

$$i_a=5.6\text{ A}$$
$$i_b=2.0\text{ A}$$
$$i_c=-0.80\text{ A}$$

网孔电流 i_a 与 40 V 电源中的支路电流相同,因此该电源的功率是:

$$p_{40V}=-40i_a=-224\text{ W}$$

负号意味着这个电源向网络释放功率。20 V 电源中的电流与网孔电流 i_c 相同,因此:

$$p_{20V}=20i_c=-16\text{ W}$$

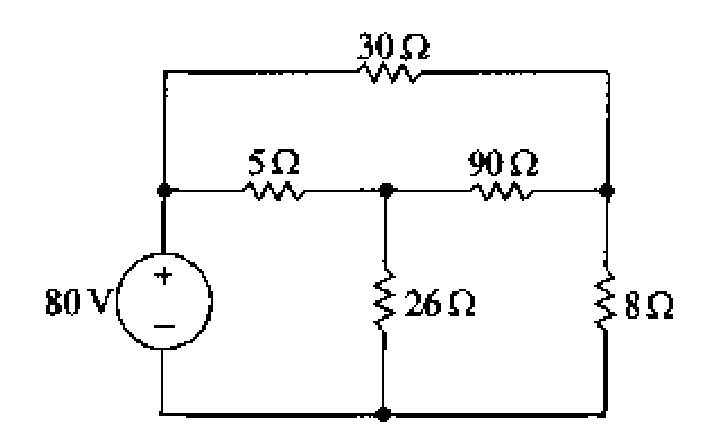
20 V 电源也向网络释放功率。

(b) 8 Ω 电阻中的电流为 i_a-i_b,其方向与电压降 v_o 的方向一致,所以:

$$v_0=8(i_a-i_b)=8(3.6)=28.8\text{ V}$$

练习题

4.11 电路如图所示,使用网孔电流法,求(a)80 V 电源向电路释放的功率,(b)8 Ω 电阻上消耗的功率。



答：(a) 400 W，(b) 50 W。

4.6　网孔电流法和非独立源

如果电路中包含非独立源，网孔电流方程式必须附加适当的约束方程式。例 4.5 说明了网孔电流法在含非独立源电路中的应用。

例 4.5　应用网孔电流法，确定图 4.23 所示电路中 4 Ω 电阻上的功率损耗。

解：

该电路有六个含未知电流的支路和四个节点。因此需要三个网孔电流描述电路。图 4.24 定义了这三个网孔电流。

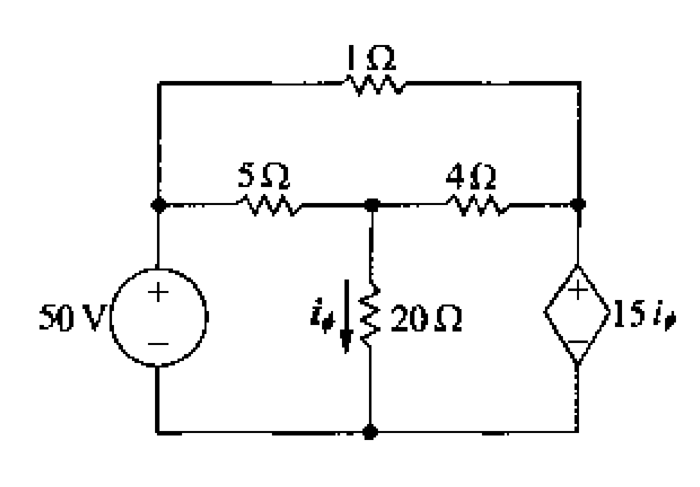


图 4.23　例 4.5 电路

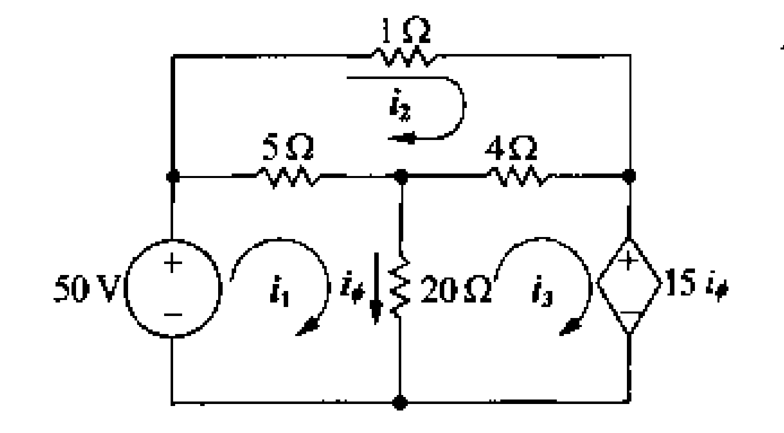


图 4.24　给图 4.23 所示电路标上三个网孔电流

三个网孔电流方程式是：

$$50 = 5(i_1 - i_2) + 20(i_1 - i_3)$$
$$0 = 5(i_2 - i_1) + 1i_2 + 4(i_2 - i_3)$$
$$0 = 20(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) + 15i_\phi \tag{4.34}$$

用网孔电流表示非独立电压源的控制电流：

$$i_\phi = i_1 - i_3 \tag{4.35}$$

这是由非独立源提供的附加方程式。将式(4.35)代入式(4.34)，集中每个方程式中 i_1, i_2 和 i_3 的系数，得到：

$$50 = 25i_1 - 5i_2 - 20i_3$$
$$0 = -5i_1 + 10i_2 - 4i_3$$
$$0 = -5i_1 - 4i_2 + 9i_3$$

因为要计算 4 Ω 电阻上的功率损耗，所以先计算网孔电流 i_2 和 i_3：

$$i_2 = 26\ \text{A}$$
$$i_3 = 28\ \text{A}$$

4 Ω 电阻中的电流从左向右定向则为 $i_3 - i_2$,即 2 A。因此功率损耗是:

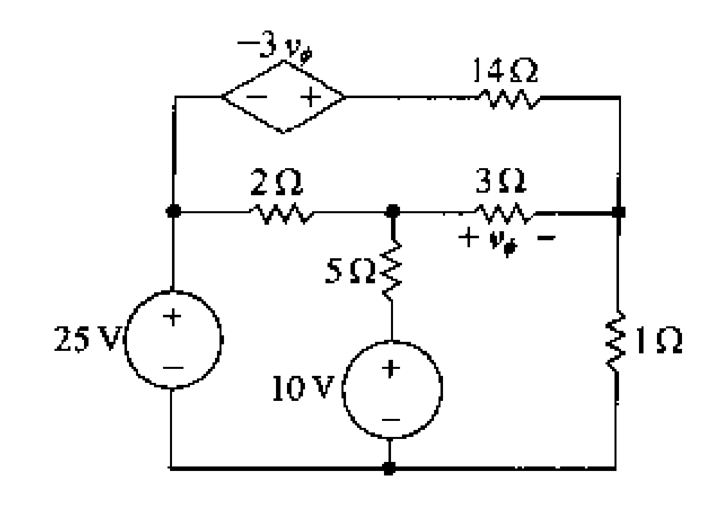
$$p_{4\Omega} = (i_3 - i_2)^2(4) = (2)^2(4) = 16\ \text{W}$$

如果没有说使用网孔电流法,你会选择节点电压法吗?由于有两个位于基本节点之间的电压源,可以将问题简化为求一个未知节点电压。以后将会给出更多种的选择。

练习题

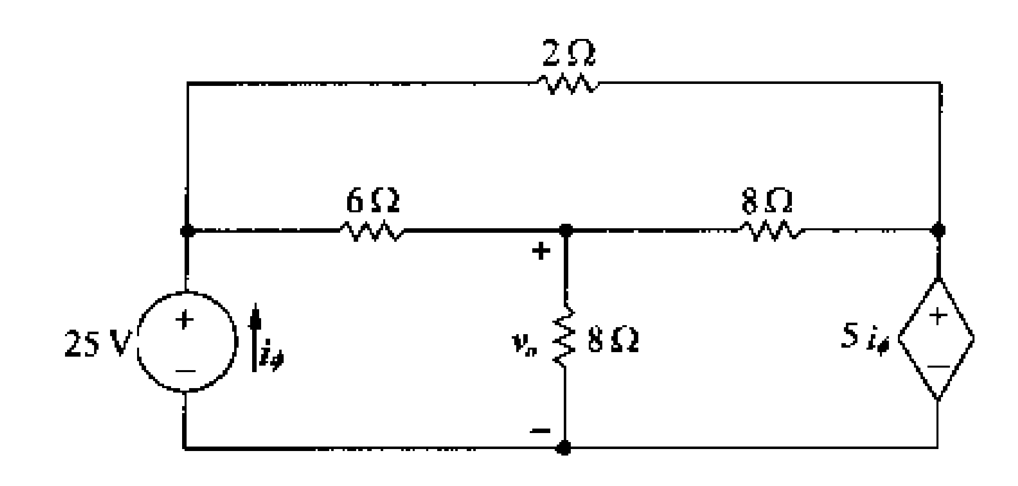
4.12 (a) 确定求解如图所示电路所需的网孔电流方程式的数目。

(b) 应用网孔电流法求非独立电压源释放的功率。



答:(a) 3,(b) -36 W。

4.13 应用网孔电流法求如图所示电路的 v_o。



答:16 V。

4.7 网孔电流法的特例

当支路包含电流源时,网孔电流法需要一些补充。图 4.25 所示电路描述了这类问题。

为了有助于讨论,定义了网孔电流 i_a, i_b 和 i_c 以及 5 A 电流源上的电压。注意:电路包含五个未知电流的支路和四个基本节点。需要列写两个[5 - (4 - 1)]网孔电流方程求解电路。电流源的存在使三个未知网孔电流简化为两个,因为它使 i_a和 i_c 之间的差等于 5 A。因此,如果知道了 i_a,也就知道了 i_c,反之亦然。

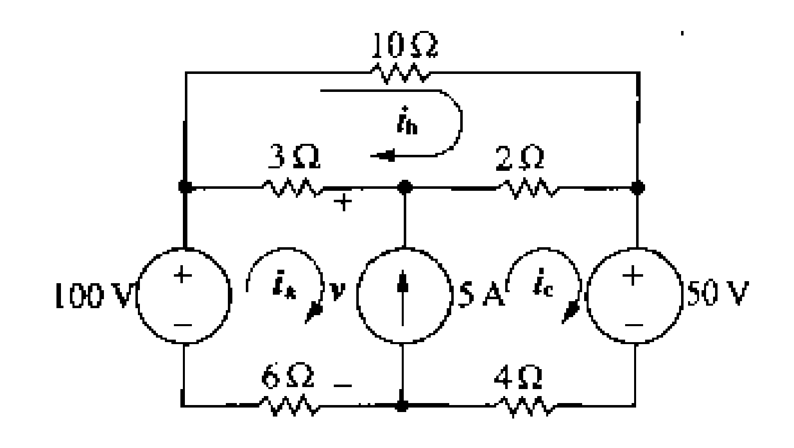


图 4.25 该电路表明支路包含独立电流源时的网孔分析

然而，当试图对网孔 a 或网孔 c 的电压求和时，必须引入 5 A 电流源上未知电压的方程式。因此，对网孔 a：

$$100 = 3(i_a - i_b) + v + 6i_a \tag{4.36}$$

对网孔 c：

$$-50 = 4i_c - v + 2(i_c - i_b) \tag{4.37}$$

现在将式(4.36)和式(4.37)相加消去 v，得到：

$$50 = 9i_a - 5i_b + 6i_c \tag{4.38}$$

对网孔 b 的电压求和，得到：

$$0 = 3(i_b - i_a) + 10i_b + 2(i_b - i_c) \tag{4.39}$$

将式(4.38)和式(4.39)简化为只有两个未知量的两个方程式，需要用到约束方程式：

$$i_c - i_a = 5 \tag{4.40}$$

以下结论留给读者验证：通过式(4.40)与式(4.38)和式(4.39)相结合，三个网孔电流的解是：

$$i_a = 1.75\ \text{A},\ i_b = 1.25\ \text{A 以及 } i_c = 6.75\ \text{A。}$$

4.7.1 超网孔的概念

如果使用超网孔的概念，不引入未知电压 v 也可以得到式(4.38)。为了创建超网孔，在写网孔电流方程式时，通过避开电流源支路，将电流源要从电路中移去。用网孔电流沿着超网孔写电压表达式。图 4.26 说明了超网孔的概念。

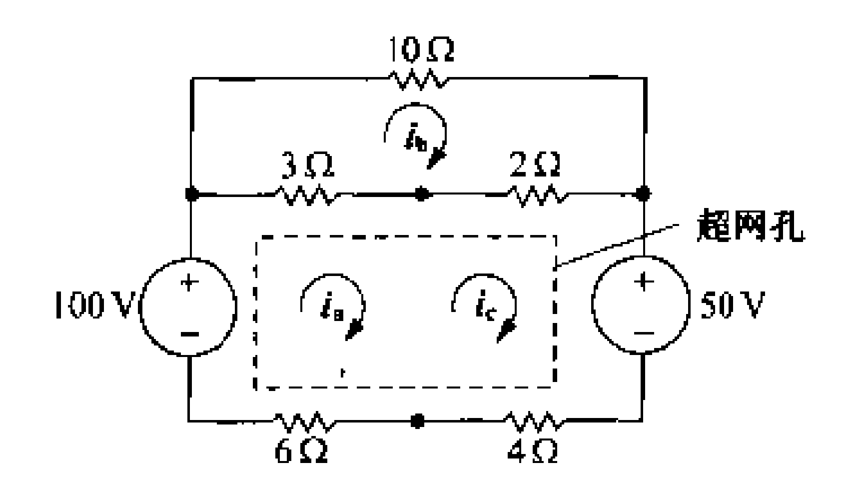


图 4.26 用图 4.25 电路说明超网孔的概念

沿着超网孔(用虚线表示)对电压求和，得到方程式：

$$-100 + 3(i_a - i_b) + 2(i_c - i_b) + 50 + 4i_c + 6i_a = 0 \tag{4.41}$$

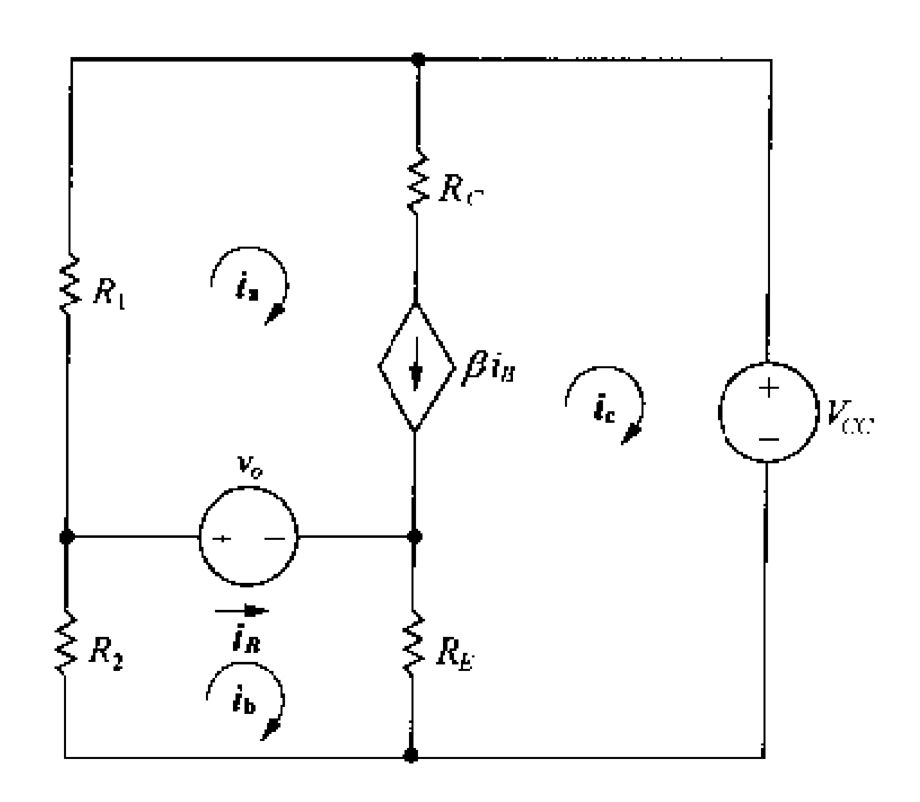
化简得：

$$50=9i_a-5i_b+6i_c \tag{4.42}$$

应当注意到，式(4.42)和式(4.38)是相同的。因此，超网孔没有引入电流源上的未知电压。应当强调的是，要花些时间仔细观察电路，找到捷径对简化分析非常有益。

4.7.2 放大电路的网孔电流分析

通过一个电路举例说明网孔电流法如何处理支路包含非独立源的情况。该电路在2.5节(图2.24)曾经给出。图4.27重新给出该电路，并将三个网孔电流表示为 i_a，i_b 和 i_c，这个电路有四个基本节点和五个含未知电流的基本支路。电路可以用两个[5-(4-1)]网孔电流方程描述。尽管在图4.27已经定义了三个网孔电流，由于非独立电流源在网孔电流 i_a 和 i_c 之间产生约束条件，所以只有两个未知的网孔电流。使用超网孔的概念，重新画出电路如图4.28所示。



4.27 图2.24电路加上网孔电流 i_a，i_b 和 i_c

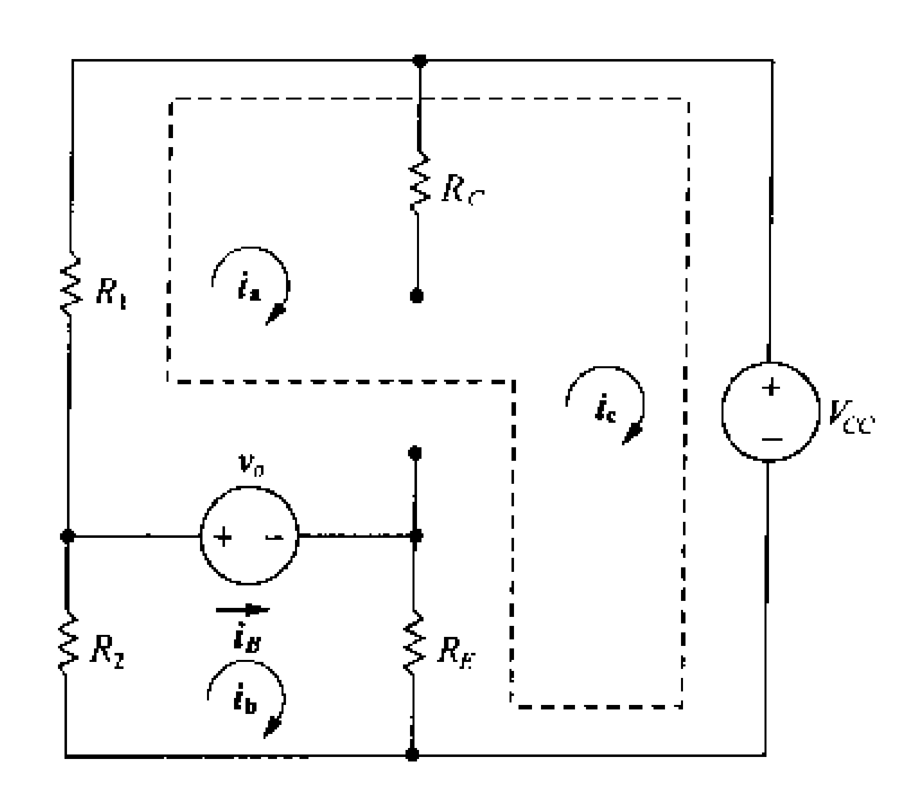


图4.28 用图4.27电路描述非独立电流源的存在创建了超网孔

用网孔电流 i_a，i_b 和 i_c 对超网孔电压求和，得到：

$$R_1i_a+V_{CC}+R_E(i_c-i_b)-v_o=0 \tag{4.43}$$

网孔b的方程是：

$$R_2i_b+v_o+R_E(i_b-i_c)=0 \tag{4.44}$$

非独立电流源提供的约束是：

$$\beta i_B=i_a-i_c \tag{4.45}$$

将控制非独立电流源的支路电流，表示为网孔电流的函数，得：

$$i_B=i_b-i_a \tag{4.46}$$

根据式(4.45)和式(4.46)，得：

$$i_c=(1+\beta)i_a-\beta i_b \tag{4.47}$$

使用式(4.47)消去式(4.43)和式(4.44)中的 i_c：

$$[R_1+(1+\beta)R_E]i_a-(1+\beta)R_Ei_b=v_o-V_{CC} \tag{4.48}$$

$$-(1+\beta)R_Ei_a+[R_2+(1+\beta)R_E]i_b=-v_o \tag{4.49}$$

可以证明,从式(4.48)和式(4.49)求得的解 i_a和 i_b 是:

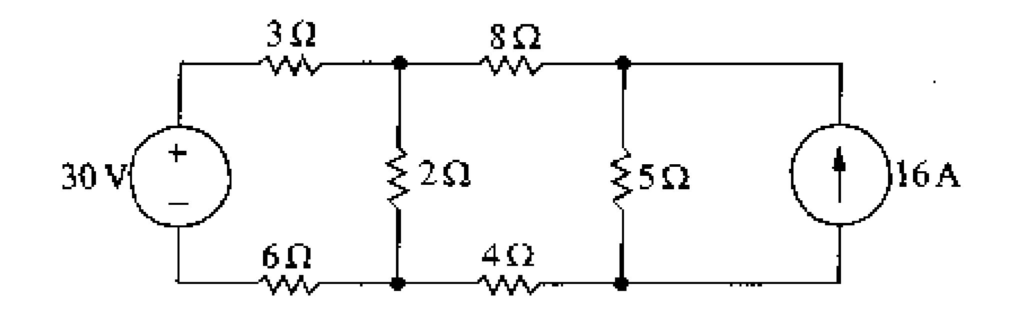
$$i_a = \frac{v_o R_2 - V_{CC} R_2 - V_{CC}(1+\beta) R_E}{R_1 R_2 + (1+\beta) R_E (R_1 + R_2)} \tag{4.50}$$

$$i_b = \frac{-v_o R_1 - (1+\beta) R_E V_{CC}}{R_1 R_2 + (1+\beta) R_E (R_1 + R_2)} \tag{4.51}$$

读者可以证明:用式(4.50)和式(4.51)求 i_B,结果与式(2.25)给出的结果相同。

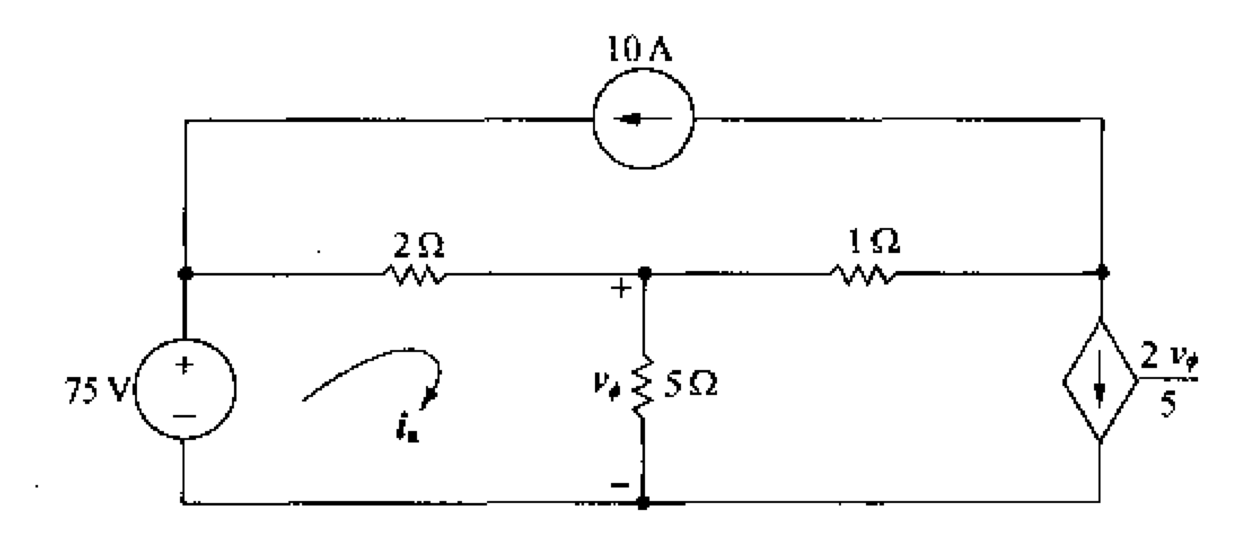
练习题

4.14 用网孔电流法求图示电路中 2 Ω 电阻上的功率损耗。



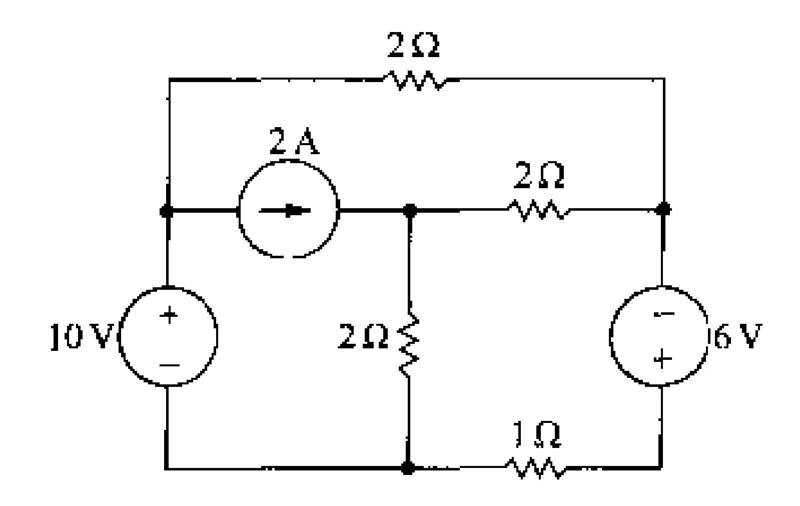
答:72 W。

4.15 用网孔电流法求图示电路中的网孔电流 i_a。



答:15 A。

4.16 用网孔电流法求图示电路中 1 Ω 电阻上的功率损耗。



答:36 W。

4.8　节点电压法与网孔电流法的比较

节点电压法和网孔电流法的最大优点是减少了必须求解的联立方程的数目。组织和列写这些方程式,应当对电路进行相当系统的分析。自然会出现这样的问题"什么情况下应该选择

节点电压法而不是网孔电流法,反之亦然?",可以猜到没有明确的答案。然而,提出这个问题,有助于在进入解答电路之前确定更为有效的方法。

- 方法之一是能用更少的联立方程求解吗?
- 电路包含超节点吗?如果是,用节点电压法可以减少求解方程式的数目。
- 电路包含超网孔吗?如果是,用网孔电流法可以减少求解方程式的数目。
- 只要求对给定电路的某个部分求解吗?如果是,哪种方法对求解电路的有关部分最有效?

最重要的是,在任何情况下,应当多花一些时间考虑可以使用的不同分析方法。例 4.6 和 4.7 说明了在节点电压法和网孔电流法之间做出选择的过程。

例 4.6 电路如图 4.29 所示,求 300 Ω 电阻上的功率损耗。

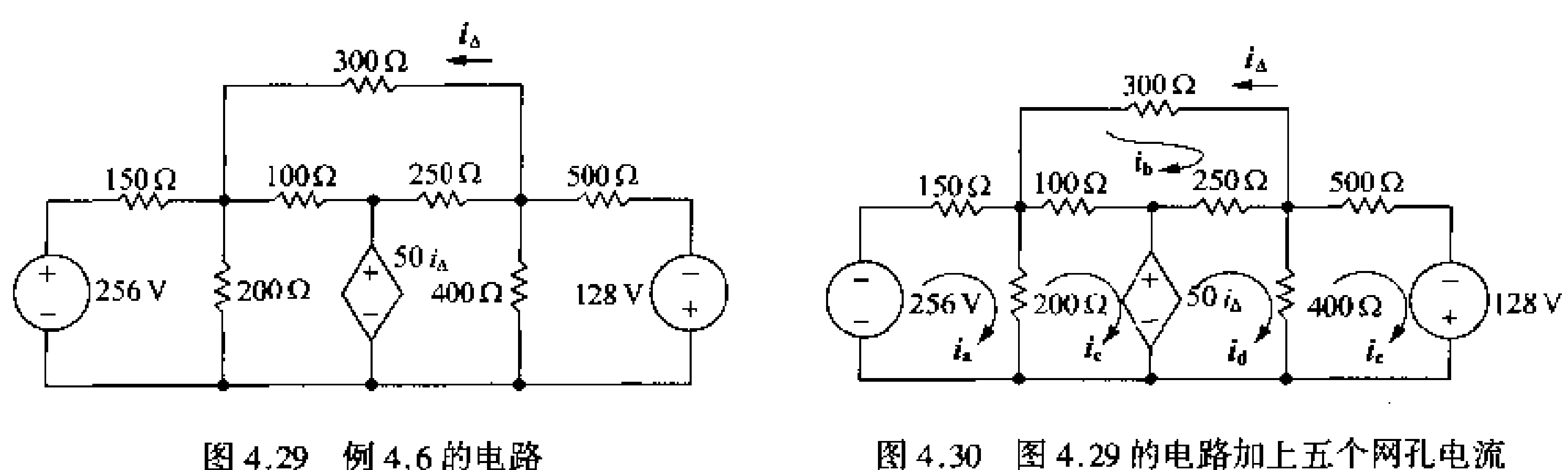


图 4.29 例 4.6 的电路　　　　图 4.30 图 4.29 的电路加上五个网孔电流

解:

为了求 300 Ω 电阻上的功率损耗,需要求电阻上的电流或电压。网孔电流法可以得到电阻上的电流,这种方法需要解五个联立网孔方程,如图 4.30 所示。在列五个方程式时,必须包含约束 $i_\Delta = -i_b$。

在进一步求解之前,看一看用节点电压法分析电路。值得注意的是,一旦知道了节点电压,就能够计算 300 Ω 电阻上的电流或是电压。电路有四个基本节点,因而只需要三个节点电压方程描述电路。因为非独立电压源在两个基本节点之间,所以只需要对两个节点的电流求和。因此,问题简化为列两个节点电压方程和一个约束方程。因为节点电压法只需要三个联立方程,所以更具吸引力。

一旦决定使用节点电压法,下一步是选择参考节点。图 4.29 所示电路有两个基本节点的优点需要考虑。图 4.31 选择第一个节点作为参考节点,未知节点电压就是 300 Ω 电阻上的电压,即图 4.31 中的 v_2。一旦知道了这个电压,可以使用下列表达式计算 300 Ω 电阻上的功率:

$$p_{300\Omega} = v_2^2/300$$

除了选择参考节点之外,还定义了三个节点电压 v_1, v_2 和 v_3。节点 1 和节点 3 形成一个超节点,因为这两个节点通过一个非独立电压源相连。节点电压相对于参考节点是电压升,在图 4.31 所示电路中,不再标出节点电压极性参考。

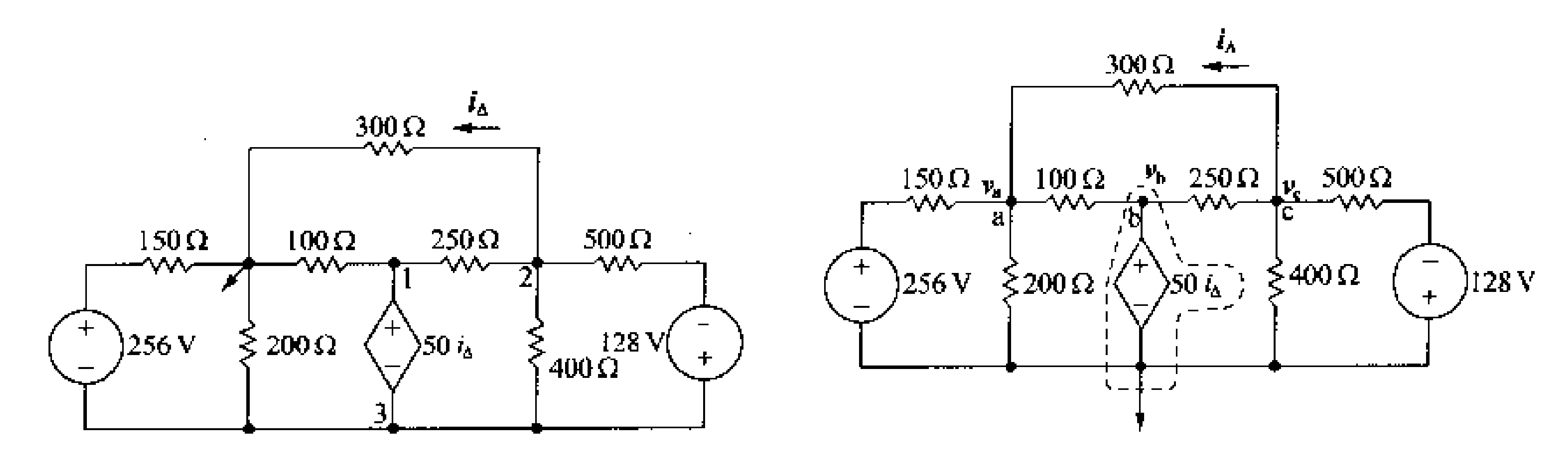


图 4.31　图 4.29 所示电路加上参考节点　　图 4.32　图 4.29 所示电路加上可选的参考节点

第二个节点作为参考节点的优点是节点处于电路低处，如图 4.32 所示。由于大多数支路与该节点连接，因此节点电压方程式比较容易写。然而，为了求 300 Ω 电阻上的电流或是电压，知道了节点电压 v_a 和 v_c，还需要继续进行计算。例如，300 Ω 电阻上的电流是 $(v_c - v_a)/300$，或者电阻上的电压是 $v_c - v_a$。

用下面一组方程式来比较这两个参考节点的选择。第一组基于图 4.31 所示电路，第二组基于图 4.32 所示电路。

- 组 1(图 4.31)

在超节点：

$$\frac{v_1}{100}+\frac{v_1-v_2}{250}+\frac{v_3}{200}+\frac{v_3-v_2}{400}+\frac{v_3-(v_2+128)}{500}+\frac{v_3+256}{150}=0$$

在 v_2：

$$\frac{v_2}{300}+\frac{v_2-v_1}{250}+\frac{v_2-v_3}{400}+\frac{v_2+128-v_3}{500}=0$$

对于超节点，约束方程式是：

$$v_3=v_1-50i_\Delta=v_1-\frac{v_2}{6}$$

- 组 2(图 4.32)

在 v_a：

$$\frac{v_a}{200}+\frac{v_a-256}{150}+\frac{v_a-v_b}{100}+\frac{v_a-v_c}{300}=0$$

在 v_c：

$$\frac{v_c}{400}+\frac{v_c+128}{500}+\frac{v_c-v_b}{250}+\frac{v_c-v_a}{300}=0$$

对于超节点，约束方程式是：

$$v_b=50i_\Delta\frac{50(v_c-v_a)}{300}=\frac{v_c-v_a}{6}$$

可以验证任意一组的结论都是相同的，300 Ω 电阻上的功率损耗是16.75 W。

例 4.7　求图 4.33 所示电路中的电压 v_o。

解:

如果不仔细看,节点电压法似乎更加吸引人,因为可以通过选择非独立电流源底端作为参考节点,定义未知电压作为节点电压。电路有四个基本节点和两个电压控制电流源,因此,节点电压法需要三个节点电压方程式和两个约束方程式。

如果用网孔电流法求 v_o,电路包含三个网孔,可以用最左边的一个计算 v_o。如果让 i_b 表示最左边的网孔电流,那么,$v_o = 193 - 10i_a$。两个电流源的存在将问题简化为处理一个超网孔方程式和两个约束方程式。因此网孔电流法更吸引人。

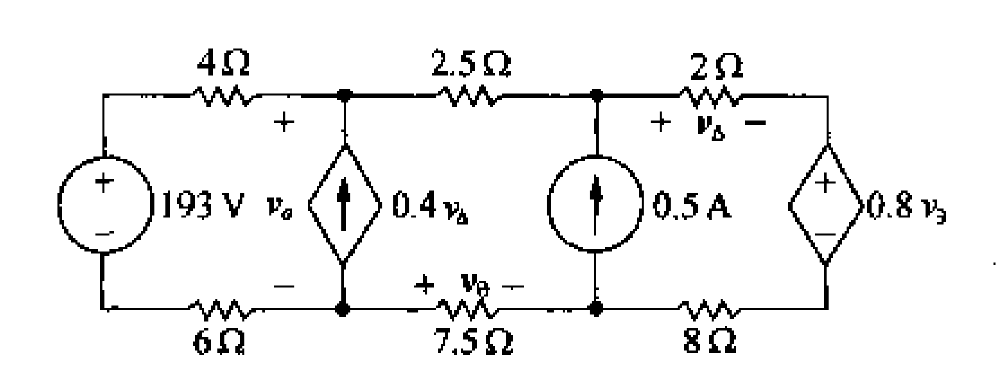


图 4.33 例 4.7 的电路

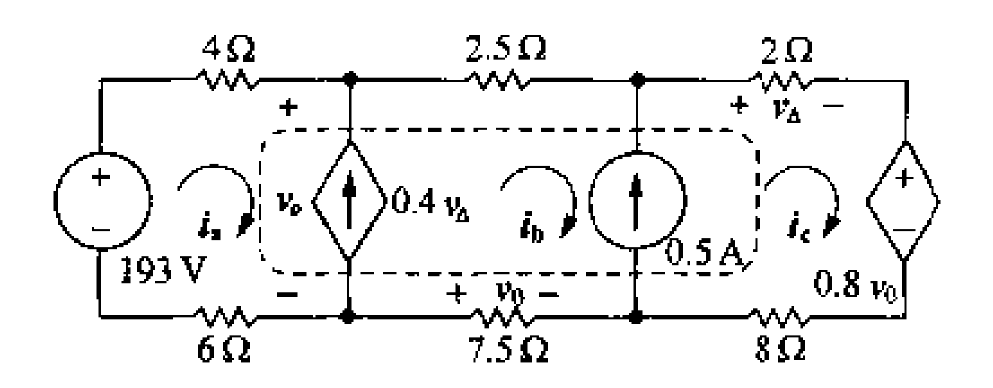


图 4.34 图 4.33 所示电路标上三个网孔电流

为了有助于比较上述两种方法,简要说明这两种方法。网孔电流方程基于图 4.34 所示电路;节点电压方程基于图 4.35 所示电路。

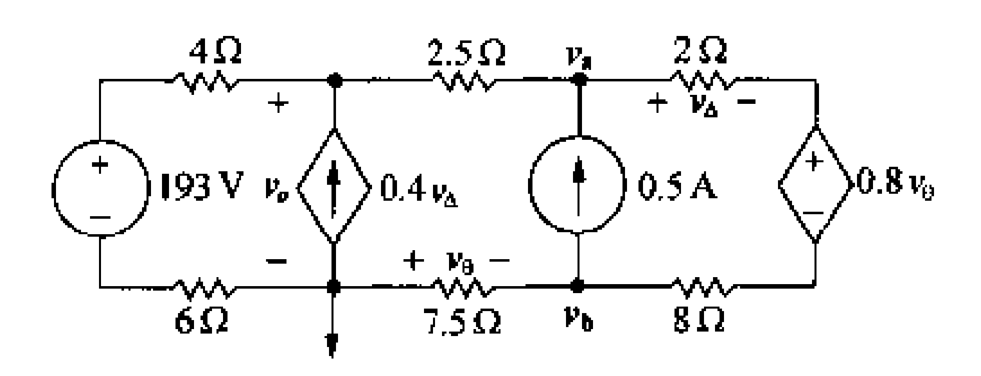


图 4.35 图 4.33 所示电路标上节点电压

超网孔方程式是:

$$193 = 10i_a + 10i_b + 10i_c + 0.8v_\theta$$

约束方程式是:

$$i_b - i_a = 0.4v_\Delta = 0.8i_c \quad v_\theta = -7.5i_b \quad i_c - i_b = 0.5$$

使用约束方程和超网孔方程解出 i_a:

$$160 = 80i_a \text{ 或 } i_a = 2\ \text{A}$$

$$v_o = 193 - 20 = 173\ \text{V}$$

节点电压方程是:

$$\frac{v_o - 193}{10} - 0.4v_\Delta + \frac{v_o - v_a}{2.5} = 0$$

$$\frac{v_a - v_o}{2.5} - 0.5 + \frac{v_a - (v_b + 0.8v_\theta)}{10} = 0$$

$$\frac{v_b}{7.5} + 0.5 + \frac{v_b + 0.8v_\theta - v_a}{10} = 0$$

约束方程是:

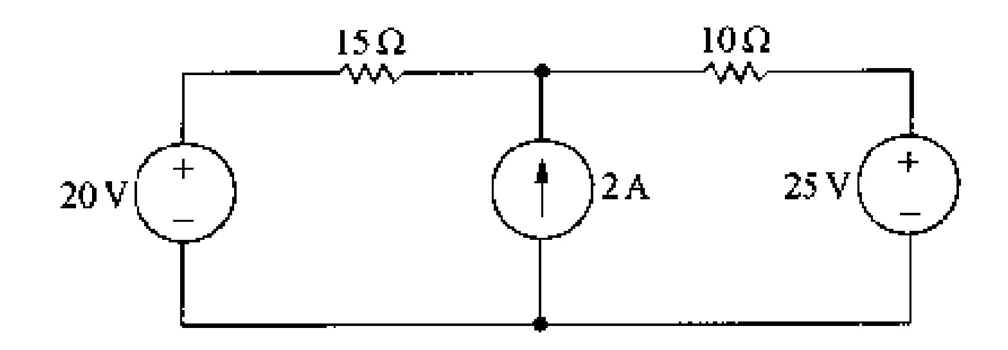
$$v_\theta = -v_b$$

$$v_\Delta = \left[\frac{v_a - (v_b + 0.8 v_\theta)}{10} \right] 2$$

用约束方程将节点电压方程简化为包含 v_o，v_a 和 v_b 的三个联立方程。可以验证用节点电压法也得到 $v_o = 173$ V。

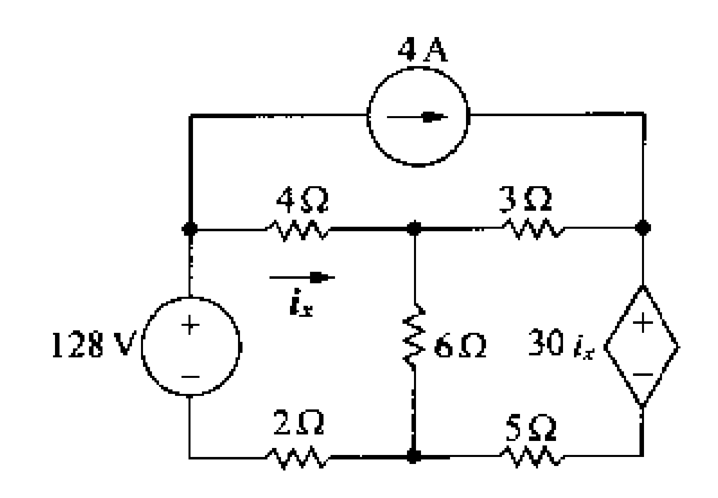
练习题

4.17 电路如图所示，求 2 A 电流源释放的功率。



答：70 W。

4.18 电路如图所示，求 4 A 电流源释放的功率。



答：40 W。

4.9　电源变换

尽管节点电压法和网孔电流法是求解电路的有效方法，人们依然对能够用来简化电路的方法感兴趣。串联并联简化法和 Δ－Y 变换已经在简化方法的名单之内，现在用电源变换来扩展这份简化名单。电源变换，如图 4.36 所示，与电阻串联的电压源可以用与同样电阻并联的电流源代替，反之亦然。双箭头强调电源变换是双向的，即开始于其中一结构能得到另一结构。

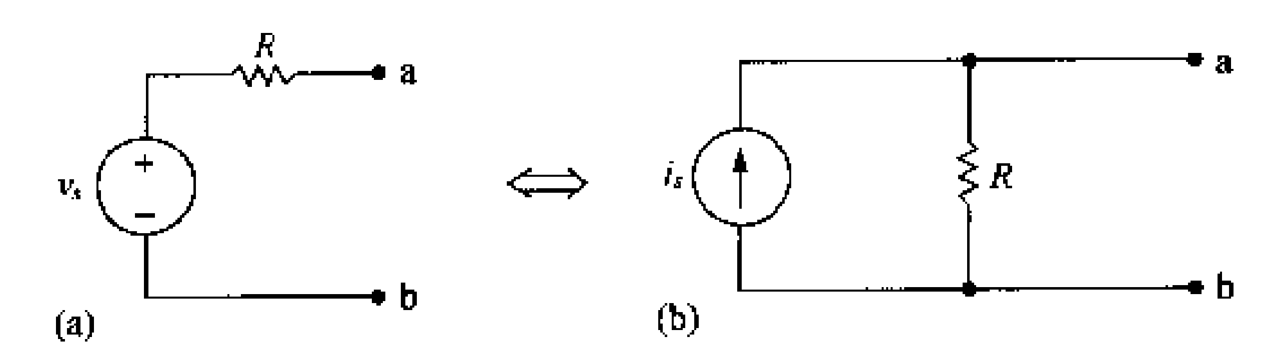


图 4.36　电源变换

需要求 v_s 和 i_s 之间的关系式,应当保证图 4.36 中两种结构在节点 a,b 是等效的。等效指的是电阻 R_L 无论连接在图 4.36 (a)还是图 4.36 (b)的节点 a,b 之间,R_L 上有相同的电流,相同的电压降。

假定 R_L 连接在图 4.36 (a)的节点 a,b 之间,使用欧姆定律,R_L 上的电流是:

$$i_L = \frac{v_s}{R + R_L} \tag{4.52}$$

假定相同的电阻 R_L 连接在图 4.36 (b)的节点 a,b 之间,使用分流公式,R_L 上的电流是:

$$i_L = \frac{R}{R + R_L} i_s \tag{4.53}$$

如果图 4.36 中两个电路是等效的,这些电阻上的电流就一定是相等的。式(4.52)和(4.53)的右边相等,写出等式并化简:

$$i_s = \frac{v_s}{R} \tag{4.54}$$

如果图 4.36 的电路满足式(4.54),那么无论 R_L 的数值是多少,两个电路中 R_L 上的电流是相同的。如果两个电路中通过 R_L 的电流是相同的,那么两个电路中 R_L 上的电压降也是相同的。在节点 a,b 处,电路是等效的。

如果 v_s 的极性反过来,为了保持等效,i_s 的方向也必须反过来。

例 4.8 将说明如何使用电源变换简化电路的分析。

例 4.8 (a) 电路如图 4.37 所示,求 6 V 电源的功率。

(b) 说明 6 V 电源是吸收还是释放功率。

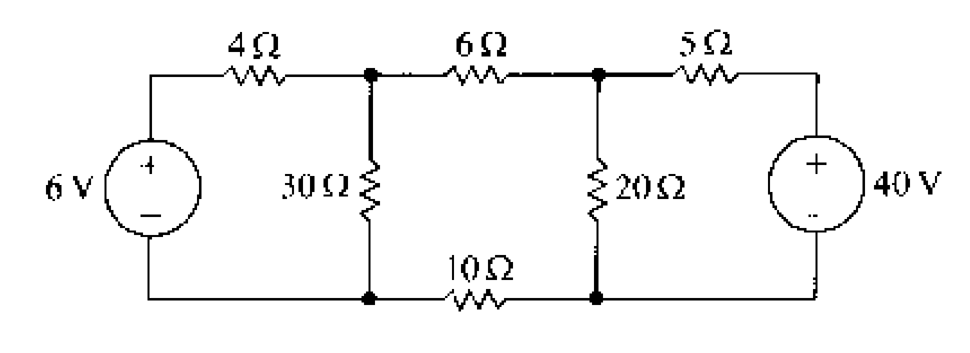


图 4.37 例 4.8 的电路

解:

(a) 研究图 4.37 所示电路,求解 6 V 电源的功率是最关心的问题,可以使用几种方法。电路有四个基本节点和六个含未知电流的基本支路。因此,可以通过求解三个[6 - (4 - 1)]网孔电流方程式或三个[4 - 1]节点电压方程式求解包含 6 V 电源支路的电流。选择网孔电流方法涉及求解一个网孔电流,它相当于 6 V 电源上的支路电流。选择节点电压方法涉及求解 30 Ω 电阻上的电压,根据这个电压,可以计算 6 V 电源上的支路电流。由于焦点仅仅集中在一个支路电流,所以,可以首先使用电源变换来简化电路。

在简化电路时,必须要保持包含 6 V 电源支路的特性。不用保持包含 40 V 电源支路的特性。首先,将与 5 Ω 电阻串联的 40 V 电源变换为与 5 Ω 电阻并联的 8 A 电流源,如图 4.38 (a)所示。接着,用 4 Ω 电阻代替 20 Ω 和 5 Ω 电阻的并联。由于 4 Ω 电阻与 8 A 电流源并联,因此,可以用 32 V 电源与 4 Ω 电阻串联来替换,如图 4.38(b)所示。32 V 电源与 20 Ω 电阻串联,可以替换为 1.6 A 电流源与 20 Ω 电阻并联,如图 4.38(c)

所示。20 Ω 和 30 Ω 并联电阻可以简化为一个 12 Ω 电阻。1.6 A 电流源与 12 Ω 电阻的并联组合再变换为 19.2 V 电压源与 12 Ω 电阻的串联，图 4.38(d)给出最后变换的结果。电流是(19.2 - 6)/16，即 0.825 A，其方向与 6 V 电源上的电压降方向一致。因此，6 V 电源功率是：

$$p_{6V} = (0.825)\ (6) = 4.95\ \mathrm{W}$$

(b) 电压源是吸收功率。

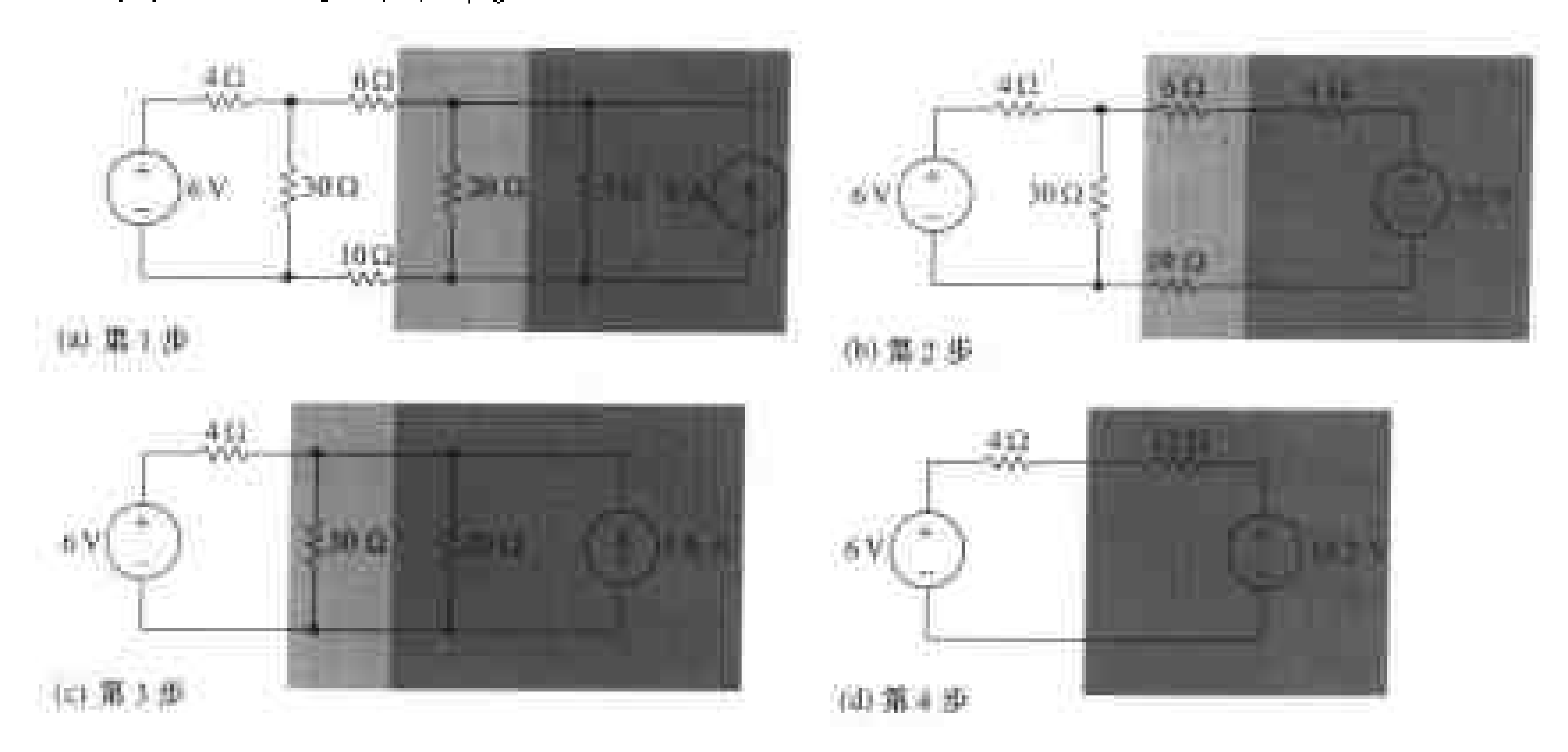


图 4.38　一步一步简化图 4.37 所示电路

根据图 4.38 描述的电源变换，有一个问题：“如果一个电阻 R_p 与电压源并联或一个电阻 R_s 与电流源串联会发生什么现象?”在这两种情况下，电阻对 a，b 端的等效电路没有影响，图 4.39 概括了这一结论。

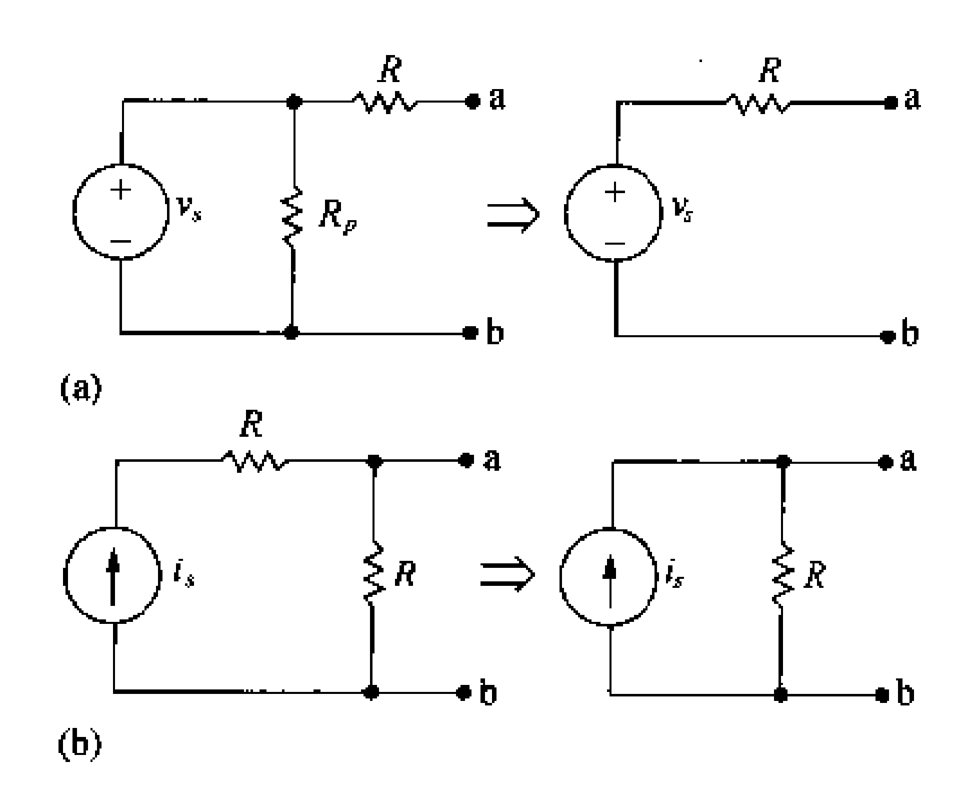


图 4.39　包含电阻与电压源并联或与电流源串联的等效电路

图 4.39 (a)描述的两个电路相对于端子 a，b 是等效的，因为对于接在节点 a，b 之间的电阻 R_L，它们产生相同的电压和电流。图 4.39 (b)的电路也是如此。例 4.9 说明了图 4.39 等效电路的应用。

例 4.9 (a) 用电源变换求图 4.40 所示电路中的电压 v_o。

(b) 求 250 V 电压源提供的功率。

(c) 求 8 A 电流源提供的功率。

解:

(a) 首先移去 125 Ω 和 10 Ω 电阻,因为 125 Ω 电阻与 250 V 电压源并联,10 Ω 电阻与 8 A 电流源串联。将串联的电阻组合成一个 20 Ω 电阻。图 4.41 给出了简化后的电路。

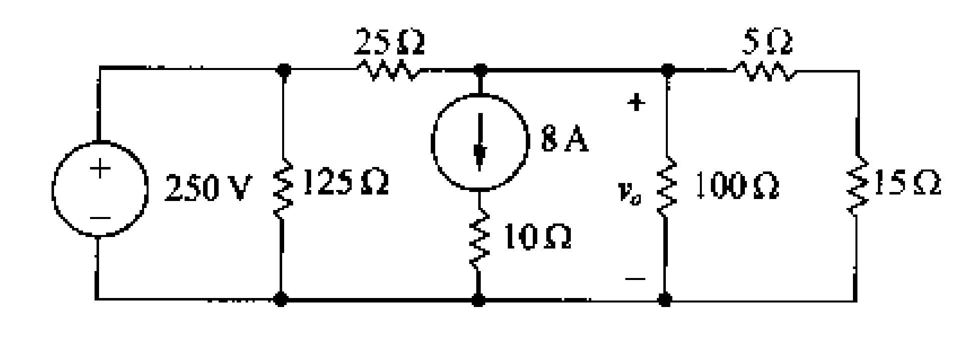


图 4.40 例 4.9 的电路

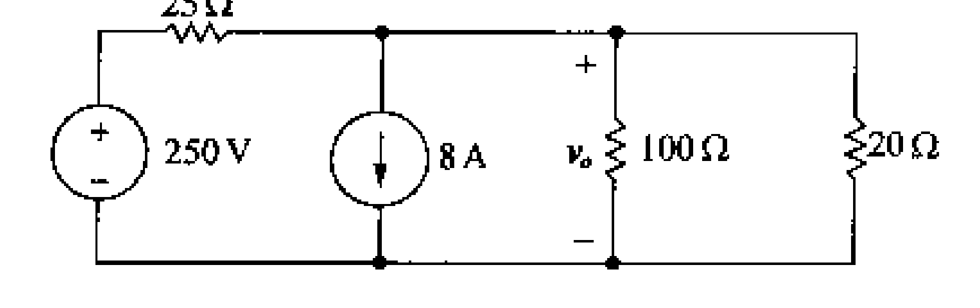


图 4.41 图 4.40 所示电路的简化形式

用电源变换,将 10 A 电源与 25 Ω 电阻的并联替换为 250 V 电压源和 25 Ω 电阻的串联,如图 4.42 所示。接下来化简图 4.42 所示电路,用基尔霍夫电流定律将并联的电流源合并为单个电源。并联的电阻合并为单个电阻。图 4.43 给出了合并结果,因此 $v_o = 20$ V。

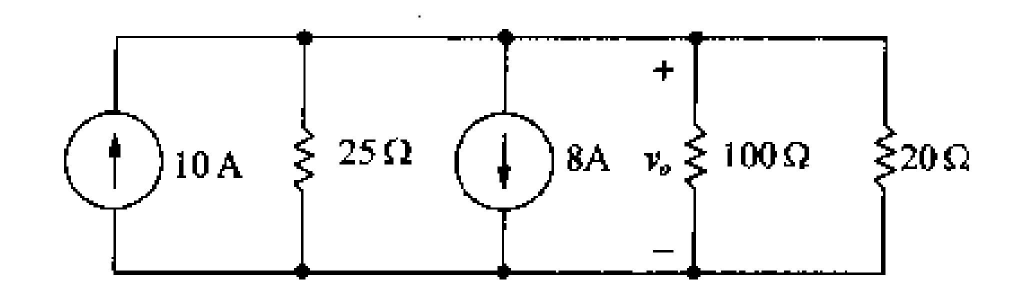


图 4.42 图 4.41 所示电路的电源变换

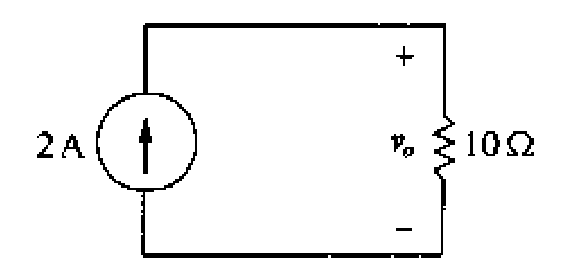


图 4.43 图 4.42 所示电路合并电源和电阻

(b) 250 V 电压源提供的电流等于 125 Ω 电阻上的电流加上 25 Ω 电阻上的电流。因此:

$$i_s = \frac{250}{125} + \frac{250 - 20}{25} = 11.2 \text{ A}$$

所以,电压源提供的功率是:

$$p_{250V} = (250)(11.2) = 2800 \text{ W}$$

(c) 为了求 8 A 电流源提供的功率,首先求电源上的电压。如果用 v_s 表示电源上的电压,电源上端为正,得到:

$$v_s + 8(10) = v_o = 20$$

即:

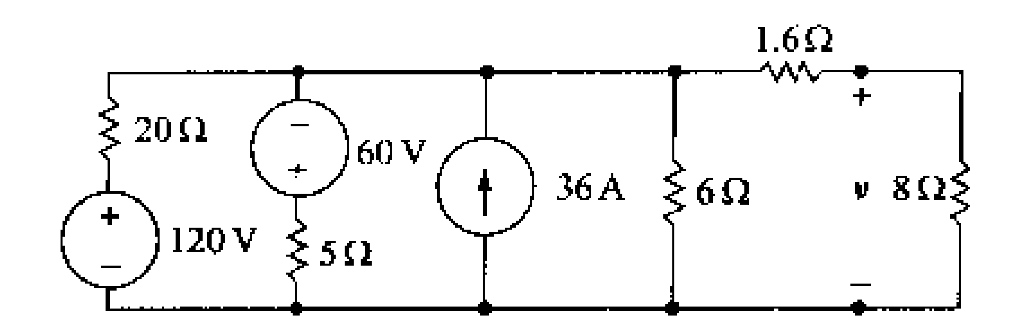
$$v_s = -60 \text{ V}$$

8 A 电流源提供的功率是 480 W。注意:125 Ω 电阻和 10 Ω 电阻不影响 v_o 值,但是影响功率的计算。

练习题

4.19 (a) 连续使用电源变换求图示电路中的电压 v_o。

(b) 120 V 电源释放到电路的功率是多少?



答:(a) 48 V,(b) 374.4 W。

4.10 戴维南与诺顿等效电路

有时在电路分析中,注意力会集中在一对特殊的端子上。例如,把烤面包机连接到电源插座上。主要关心的是烤面包机端子的电压和电流,而电源插座上的电压或电流对连接烤面包机的影响,不太关心或根本不关心。可以扩大一下关心的范围,从端子行为扩展到一组电器,每个电器所需的功率都不同。应当注意到,电器变化时,电源插座上的电压和电流如何变化。换句话说,要将注意力集中在提供电源插座的电路行为上,而不是仅仅在电源插座的端子上。

戴维南与诺顿等效是电路简化方法,这种方法将注意力集中在端子行为,因而对电路分析有很大的帮助。尽管在这里讨论是因为这两种简化方法适合电阻电路,但实际上戴维南与诺顿等效电路可以用于任何由线性元件组成的电路。

参考图 4.44 所示的戴维南等效电路。图 4.44 (a)表示由电源(独立源和非独立源)和电阻组成的任何电路。字母 a 和 b 表示关心的一对端子。图 4.44 (b)所示的是戴维南等效电路。因此,戴维南等效电路是一个独立电压源 V_{Th}和一个电阻 R_{Th}的串联,其替代了电源和电阻的互连,V_{Th}和 R_{Th}的串联等效于原始电路。如果将相同的负载接到每个电路的 a,b 端,在负载端将得到相同的电压和电流。对于负载电阻所有可能的值,等效保持不变。

为了用戴维南等效电路表示原始电路,必须确定戴维南电压 V_{Th}和戴维南电阻 R_{Th}。首先,应当注意到如果负载电阻无穷大,电路就具备了开路条件。图 4.44 (b)所示电路 a,b 端的开路电压是 V_{Th}。根据假设,它一定与原始电路 a,b 端的开路电压相同。那么,要想获得戴维南电压 V_{Th},可以简单地计算原始电路的开路电压。

将负载电阻减少到零,电路就具备了短路条件。如果将戴维南等效电路的 a,b 端短路,直接从 a 到 b 的短路电流是:

$$i_{sc} = \frac{V_{\mathrm{Th}}}{R_{\mathrm{Th}}} \tag{4.55}$$

根据假设,这个短路电流一定与原始网络 a,b 端的短路电流相同。根据式(4.55),得:

$$R_{\mathrm{Th}} = \frac{V_{\mathrm{Th}}}{i_{sc}} \tag{4.56}$$

因此戴维南电阻是开路电压与短路电流的比。

4.10.1 求戴维南等效电路

为了求图 4.45 所示电路的戴维南等效电路,首先计算开路电压 v_{ab},注意到当端子 a,b 开

路时,没有电流通过 4 Ω 电阻,因此,开路电压 v_{ab} 与 3A 电流源上的电压 v_1 相同。通过解节点电压方程式求解电压 v_1。

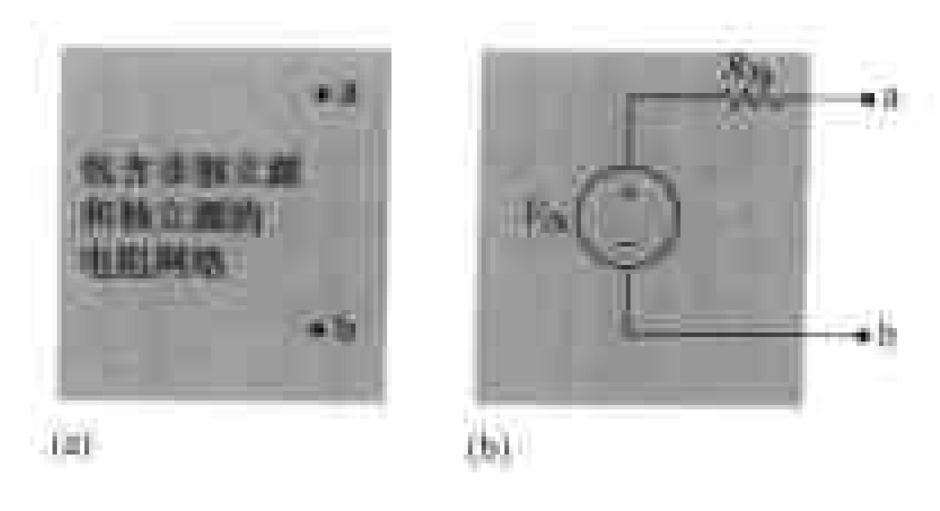




图 4.44 (a) 一个一般电路 (b) 戴维南等效电路

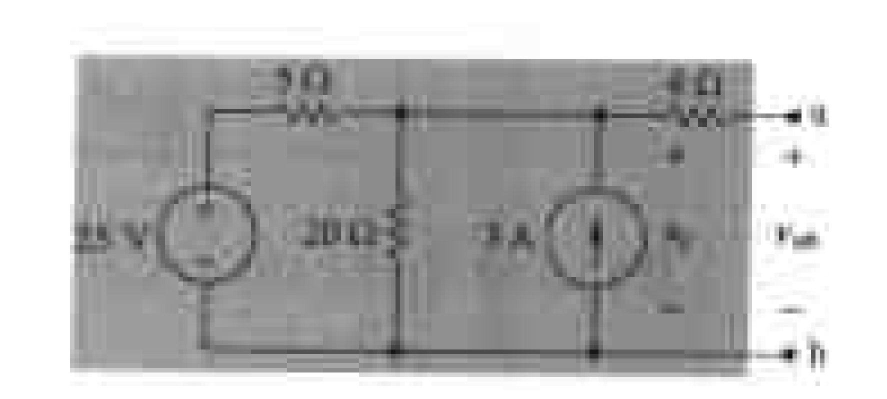


图 4.45 说明戴维南等效电路

选择较低的节点作为参考节点,得:

$$\frac{v_1 - 25}{5} + \frac{v_1}{20} - 3 = 0 \tag{4.57}$$

解出 v_1:

$$v_1 = 32 \text{ V} \tag{4.58}$$

因此,电路的戴维南电压是 32 V。

下一步是将负载端短路,求短路电流。图 4.46 给出短路电路。注意到短路电流与 a,b 端开路电压降的方向一致。如果短路电流与 a,b 端开路电压升的方向一致,式(4.56)必须加入一个负号。

一旦 v_2 已知,短路电流(i_{sc})很容易求。因此,问题简化为求 v_2。如果选择较低的节点作为参考节点,列写包含 v_2 的方程式:

$$\frac{v_2 - 25}{5} + \frac{v_2}{20} - 3 + \frac{v_2}{4} = 0 \tag{4.59}$$

解式(4.59)中的 v_2,得:

$$v_2 = 16\text{V} \tag{4.60}$$

因此短路电流是:

$$i_{sc} = \frac{16}{4} = 4 \text{ A} \tag{4.61}$$

现在求戴维南电阻,将式(4.58)和(4.61)的数值结果代入式(4.56):

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{sc}} = \frac{32}{4} = 8 \ \Omega \tag{4.62}$$

图 4.47 给出图 4.45 所示电路的戴维南等效电路。

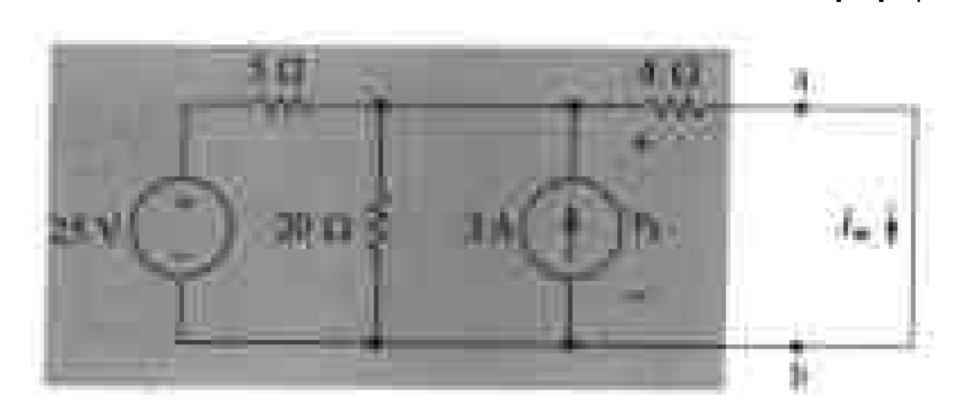


图 4.46 图 4.45 所示电路 a 和 b 端短路

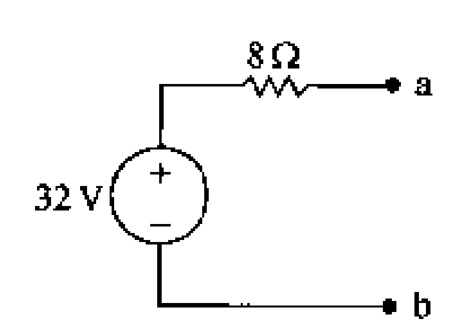


图 4.47 图 4.45 所示电路的戴维南等效电路

应该做如下校验，如果 24 Ω 电阻接到图 4.45 所示电路的 a，b 端，电阻两端的电压将是 24 V，通过的电流将是 1 A，同样的情况也将发生在图 4.47 所示的戴维南电路。连接在节点 a，b端的电阻无论是什么值，图 4.45 和图 4.47 所示电路之间的等效关系始终保持。

4.10.2　诺顿等效

诺顿等效电路由一个独立电流源和诺顿等效电阻并联组成。利用电源变换，可以简单地从戴维南等效电路得到诺顿等效电路。因此，诺顿电流等于端口的短路电流，诺顿电阻等于戴维南电阻。

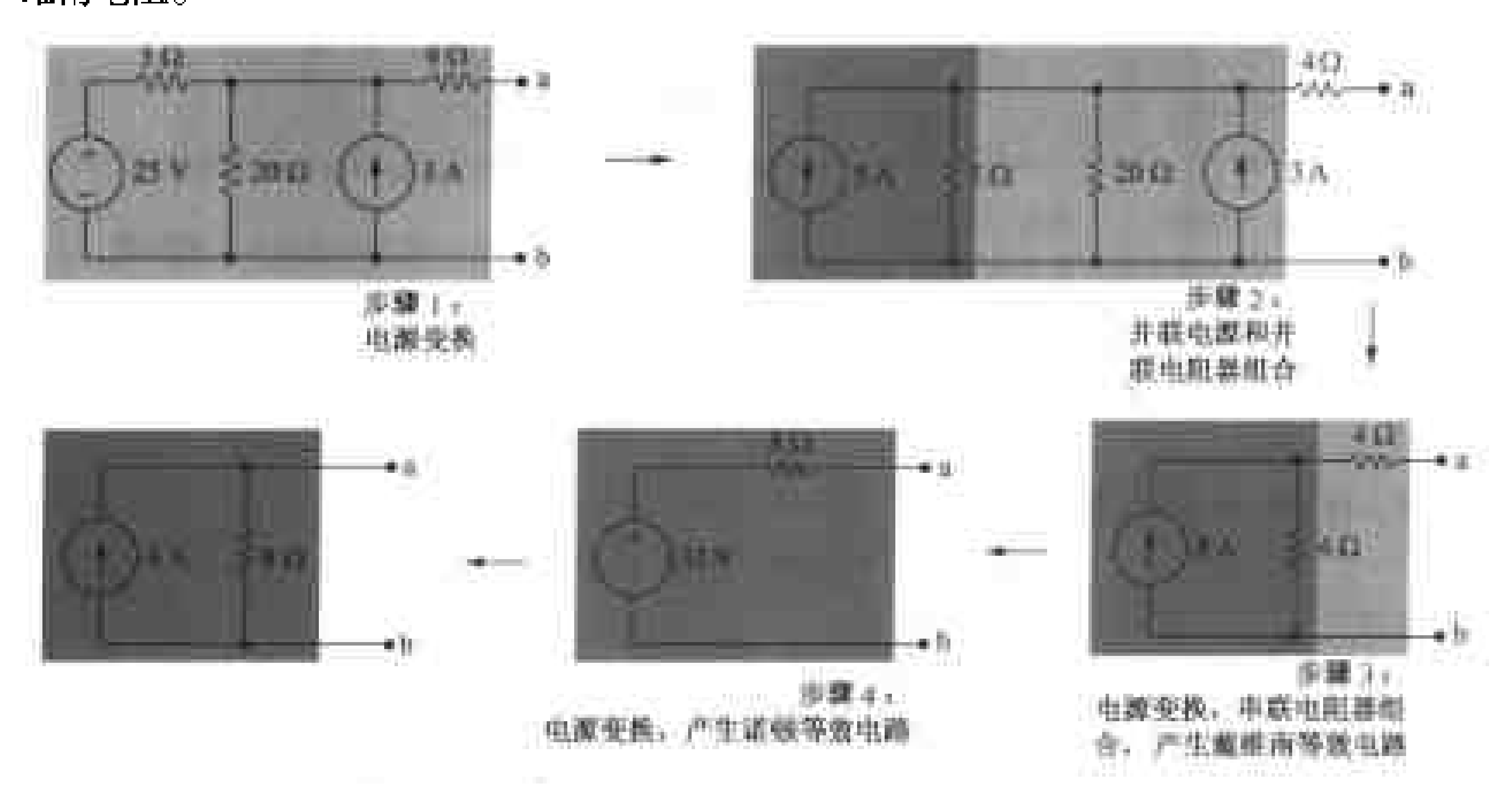


图 4.48　一步一步地推导图 4.45 所示电路的戴维南和诺顿等效电路

4.10.3　使用电源变换

有时可以有效地利用电源变换得到戴维南或诺顿等效电路。例如，可以连续地使用电源变换，得到图 4.45 所示电路的戴维南和诺顿等效电路，如图 4.48 所示。当网络仅仅包含独立源时这种方法最有效。非独立源的存在需要保持控制电压或电流的特性，而且约束通常禁止用电源变换连续地化简电路。通过例 4.10，将讨论对于包含非独立源的电路，求其戴维南等效电路的问题。

例 4.10　图 4.49 所示电路包含非独立源，求其戴维南等效电路。

解：

分析图 4.49 电路的第一步是识别标记 i_x 的电流一定是零。（注意：i_x 缺少返回左边部分电路的路径。）开路电压（即戴维南电压）是 25 Ω 电阻两端的电压。因为 $i_x = 0$，则有：

$$V_{Th} = v_{ab} = (-20i)(25) = -500i$$

电流 i 是：

$$i = \frac{5 - 3v}{2000} = \frac{5 - 3V_{Th}}{2000}$$

在写方程式时，可以看出戴维南电压与控制电压相同。联立两个方程，解得：

$$V_{Th} = -5\ \text{V}$$

为了计算短路电流，令 a，b 端短路。当 a，b 端短路时，控制电压 v 为零。因此，图 4.49 电路短路后变为图 4.50 所示的形式。由于 25 Ω 电阻被短路，从非独立电流源流出的全部电流出现在短路处。因此：

$$i_{sc} = -20i$$

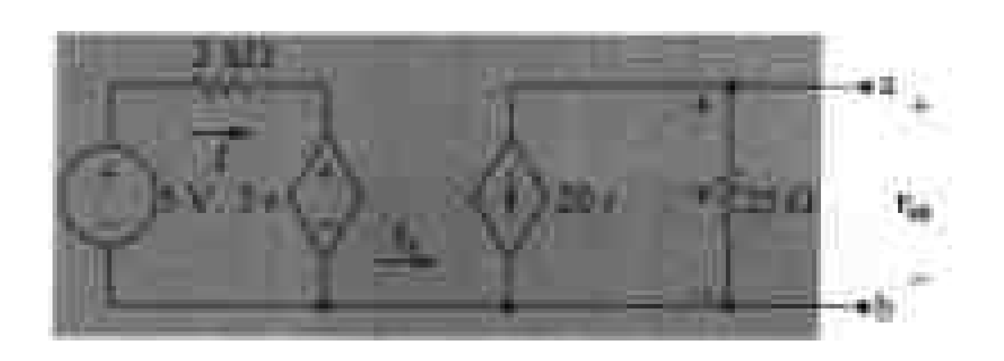


图 4.49　说明对包含非独立源的电路求戴维南等效电路

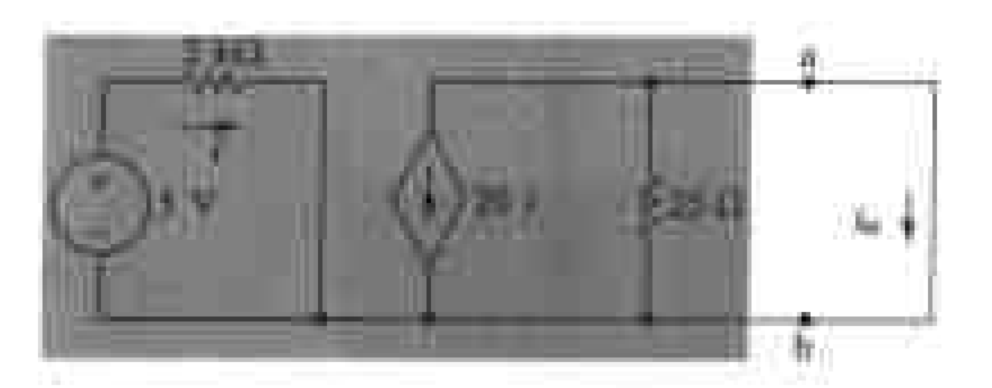


图 4.50　图 4.49 所示电路 a，b 端短路

当电压控制电压源变为零后，电流控制电流源是：

$$i = \frac{5}{2000} = 2.5\ \text{mA}$$

联立这两个方程式，求短路电流：

$$i_{sc} = -20(2.5) = -50\ \text{mA}$$

根据 i_{sc}和 V_{Th}，得到：

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{sc}} = \frac{-5}{-50} \times 10^3 = 100\ \Omega$$

图 4.51 给出图 4.49 所示电路的戴维南等效电路。注意：图 4.51 戴维南电压源标的参考极性与前述的 V_{Th}表达式一致。

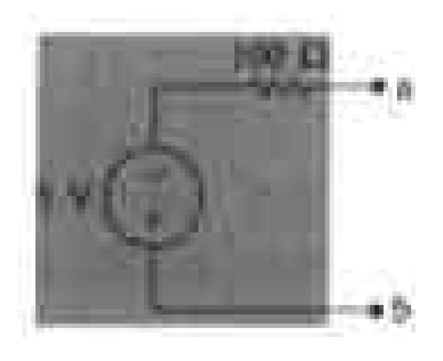
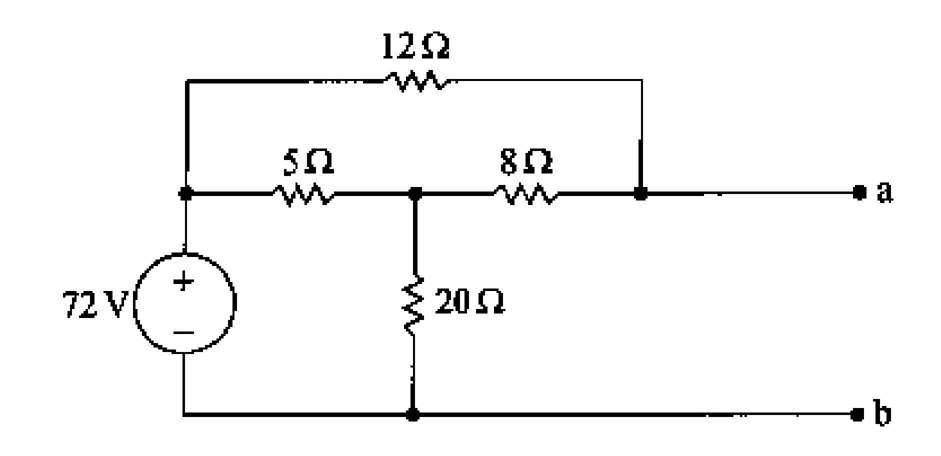


图 4.51　图 4.49 所示电路的戴维南等效电路

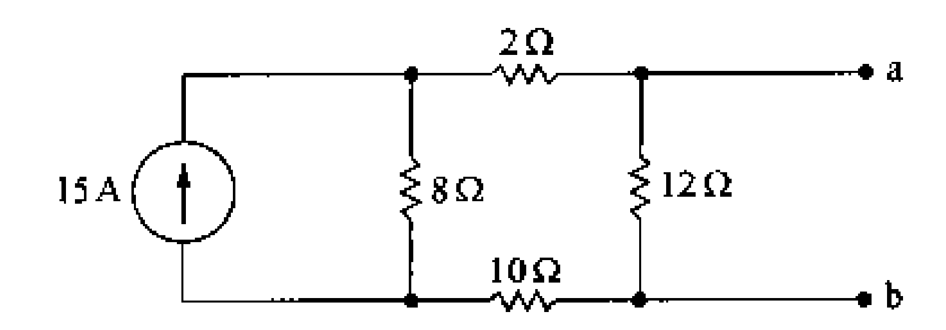
练习题

4.20　求图示电路 a，b 端的戴维南等效电路。



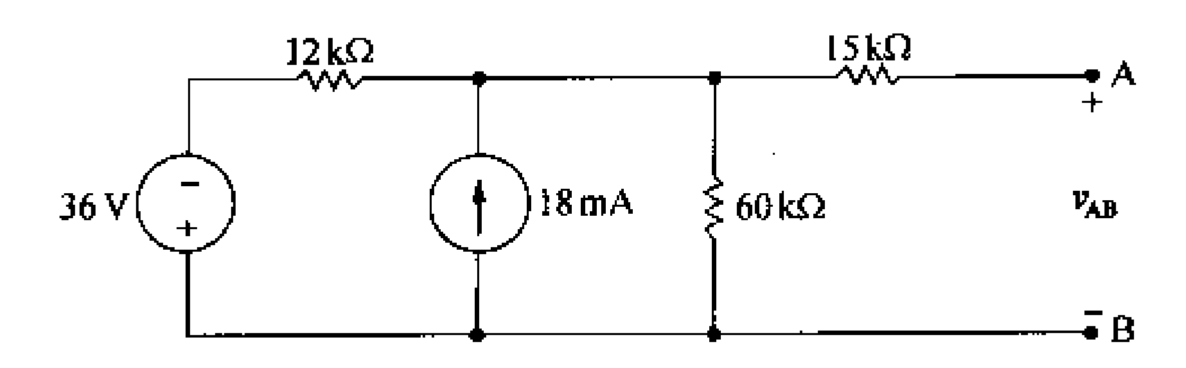
答：$v_{ab}=V_{Th}=64.8\ \text{V}$，$R_{Th}=6\ \Omega$。

4.21 求图示电路 a，b 端的诺顿等效电路。



答：$I_N=6\ \text{A}$(指向 a)，$R_N=7.5\ \Omega$。

4.22 用内电阻为 100 kΩ 的电压表测量图示电路的电压 v_{AB}。电压读数是多少？



答：120 V。

4.11 导出戴维南等效电路的补充

在 4.10 节讨论并说明了确定 R_{Th} 的方法，求 R_{Th} 并不总是很容易。另外有两种方法使用起来较简单。如果网络仅仅包含独立源，第一种方法有用。对于这样一个网络，为了计算 R_{Th}，首先使所有独立源无效，然后计算从指定端口看进去的电阻。使电压源无效是将其短路，使电流源无效是将其开路。例如，图 4.52 所示电路，使独立源无效后的简化电路如图 4.53 所示。从 a，b 端看进去的电阻表示为 R_{ab}，它由 5 Ω 和 20 Ω 电阻的并联再与 4 Ω 电阻串联组成。因此：

$$R_{ab}=R_{Th}=4+\frac{5\times 20}{25}=8\ \Omega \tag{4.63}$$

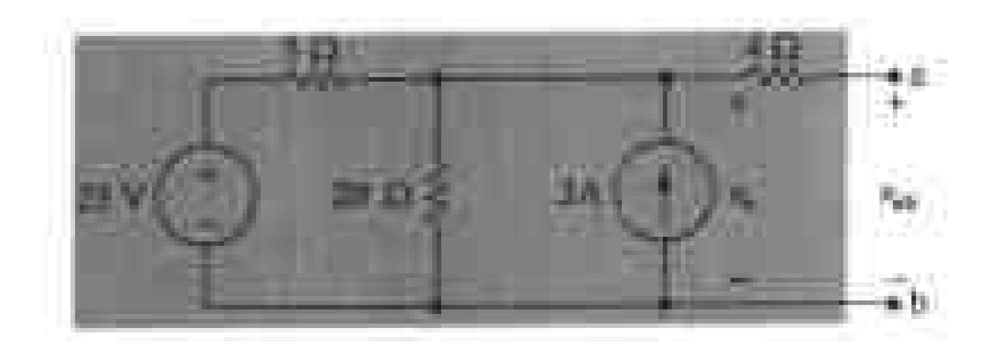




图 4.52 用来说明戴维南等效电路

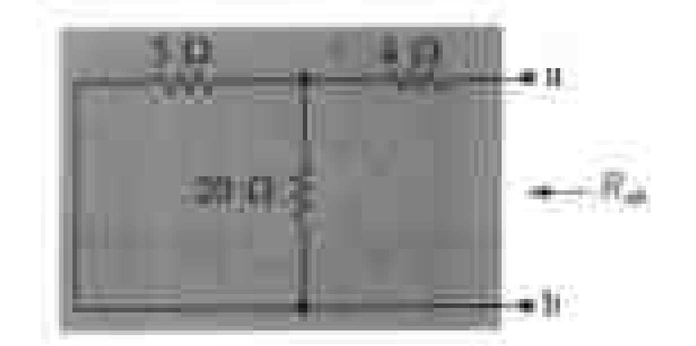


图 4.53 图 4.52 所示电路中的独立源失效

从式(4.63)得到 R_{Th} 比从式(4.57)～(4.62)得到 R_{Th} 要简单得多。

如果电路或网络包含非独立源，另一种求戴维南电阻 R_{Th} 的方法如下所述。首先使所有独立源无效，然后在 a，b 端施加一个测试电压源或测试电流源，戴维南电阻等于测试电源上的电压与测试电源释放的电流之比。例 4.11 使用与例 4.10 相同的电路，说明这种求 R_{Th} 的交替法。

例 4.11 使用上面所述的交替法求图 4.49 电路的戴维南电阻 R_{Th}。

解:

首先使电路中的独立电压源失效,然后在电路的 a,b 端施加一个测试电压源或测试电流源。如果采用测试电压源,将已知非独立电压源的电压并且已知控制电流 i。所以,选择测试电压源。图 4.54 给出了计算戴维南电阻的电路。

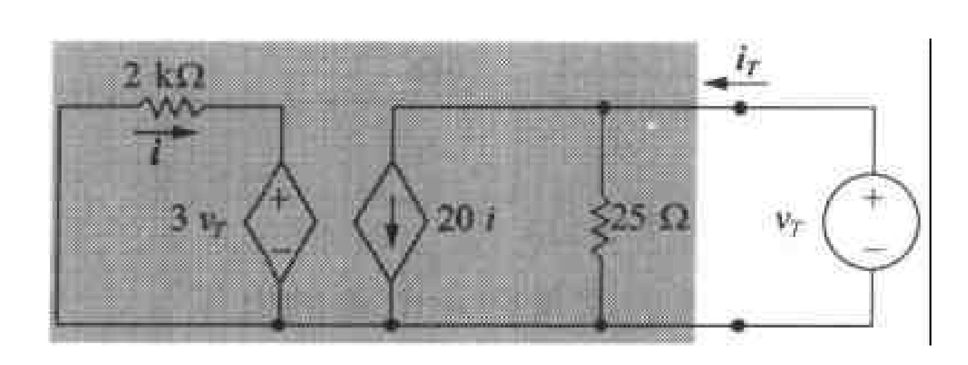


图 4.54 用交替法计算戴维南电阻

测试电压源记为 v_T,由它产生的电流记为 i_T。为了求戴维南电阻,只需求解图 4.54 所示电路中测试电压的电压和电流的比,即 $R_{Th}=v_T/i_T$。根据图 4.54,得:

$$i_T=\frac{v_T}{25}+20i \tag{4.64}$$

$$i=\frac{-3v_T}{2}\ \text{mA} \tag{4.65}$$

将式(4.65)代入式(4.64),解出 v_T/i_T:

$$i_T=\frac{v_T}{25}-\frac{60v_T}{2000} \tag{4.66}$$

$$\frac{i_T}{v_T}=\frac{1}{25}-\frac{6}{200}=\frac{50}{5000}=\frac{1}{100} \tag{4.67}$$

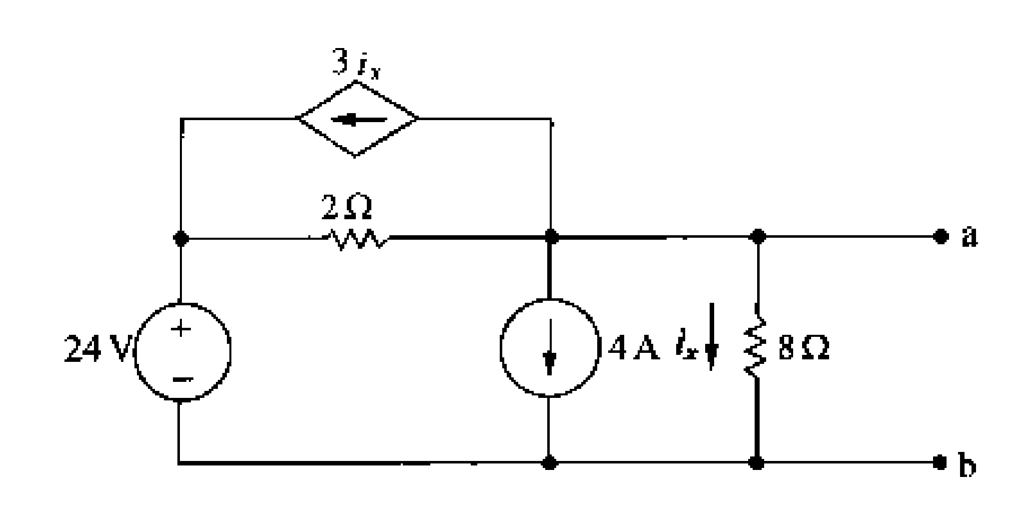
根据式(4.66)和(4.67),有:

$$R_{Th}=\frac{v_T}{i_T}=100\ \Omega \tag{4.68}$$

一般来讲,这些计算要比那些涉及短路电流的计算要容易,然而,如果网络仅仅包含电阻和非独立源时,只能使用交替法,因为戴维南电压和短路电流的比是不确定的。即比是 0/0。(参见习题 4.69 和 4.70)

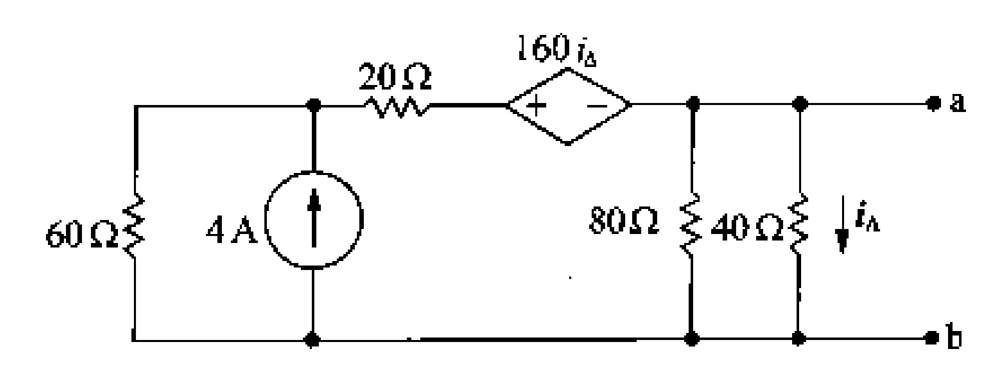
练习题

4.23 求图示电路 a,b 端的戴维南等效电路。



答：$V_{Th}=v_{ab}=8\text{ V}$，$R_{Th}=1\ \Omega$。

4.24 求图示电路 a，b 端的戴维南等效电路。（提示：定义最左边节点的电压为 v，V_{Th} 作为右边节点电压，列写两个节点方程。）



答：$V_{Th}=v_{ab}=30\text{ V}$，$R_{Th}=10\ \Omega$。

4.11.1 戴维南等效用于放大电路

有的时候，可以通过使用戴维南等效简化电路中的一部分，达到简化一个较大网络分析的目的。回忆 2.5 节的介绍及 4.4 节和 4.7 节分析的电路，为了有助于下面的讨论，重新画出电路并标出关心的支路电流，如图 4.55 所示。

如果采用以前的做法，i_B 是求其他支路电流的关键。重画电路如图 4.56 所示，将 V_0 左边的电路用戴维南等效电路代替，要确定这种替代不影响支路电流 i_1，i_2，i_B 和 i_E。

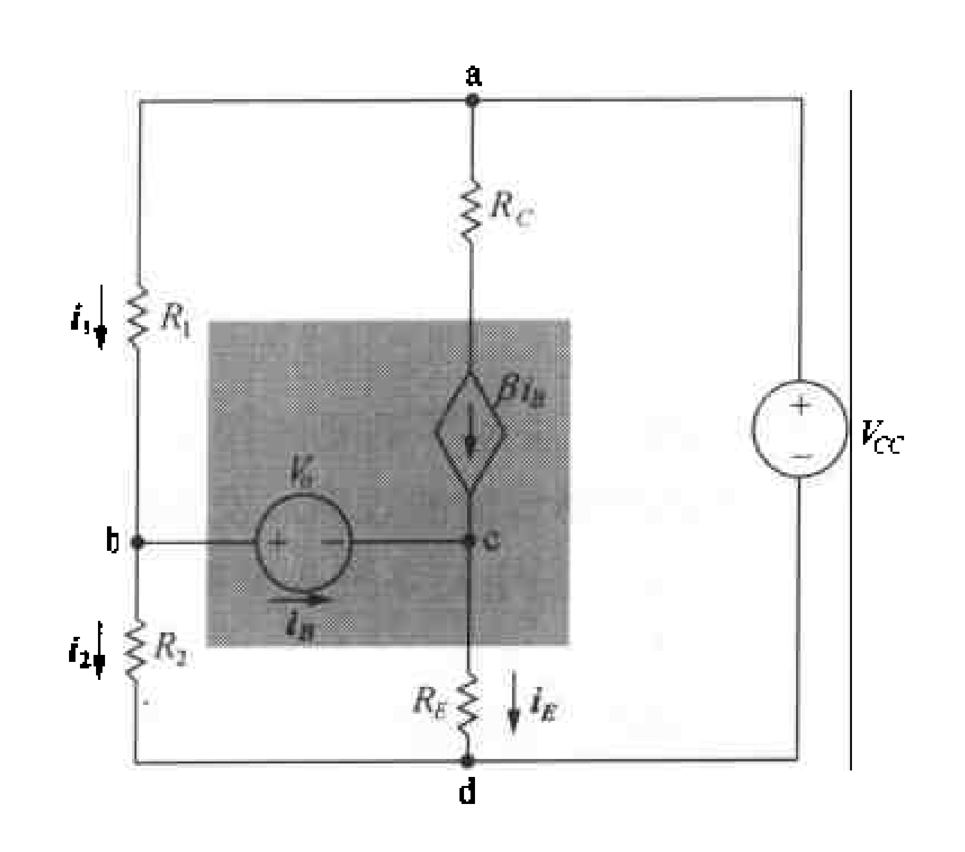



图 4.55　戴维南等效应用于电路的分析

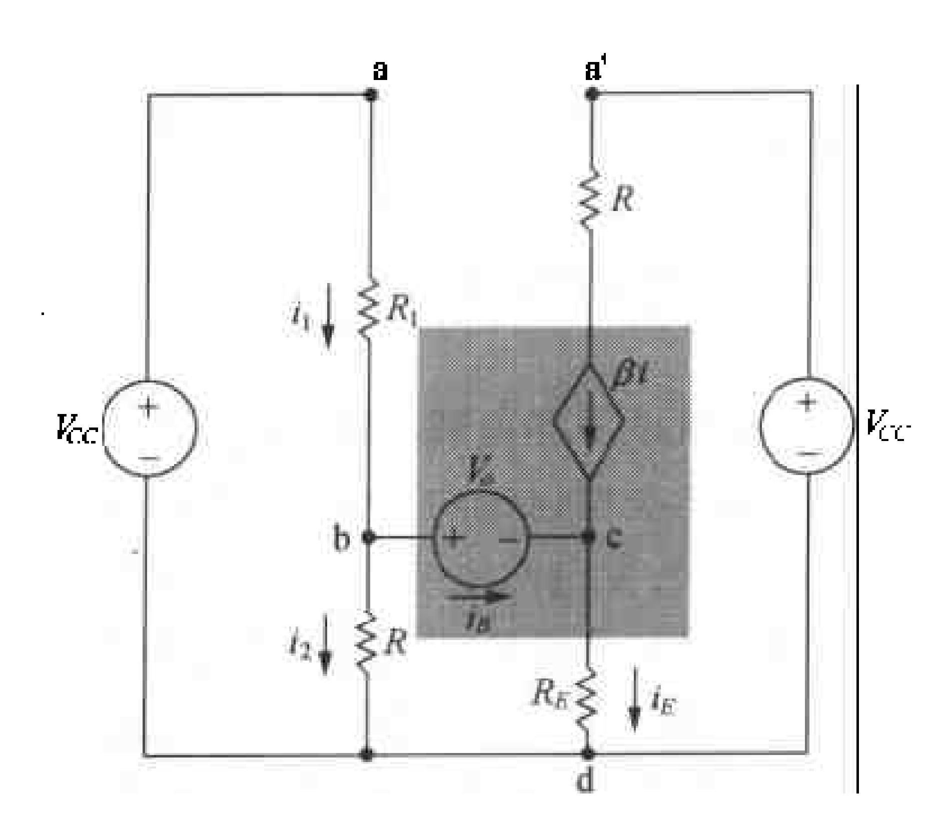


图 4.56　图 4.55 所示电路的变化形式

现在用 b，d 端的戴维南等效电路代替由 V_{CC}，R_1 和 R_2 组成的电路。戴维南电压和电阻分别是：

$$V_{Th}=\frac{V_{CC}R_2}{R_1+R_2} \tag{4.69}$$

$$R_{Th}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \tag{4.70}$$

用戴维南等效，图 4.56 电路变为图 4.57 所示的电路形式。

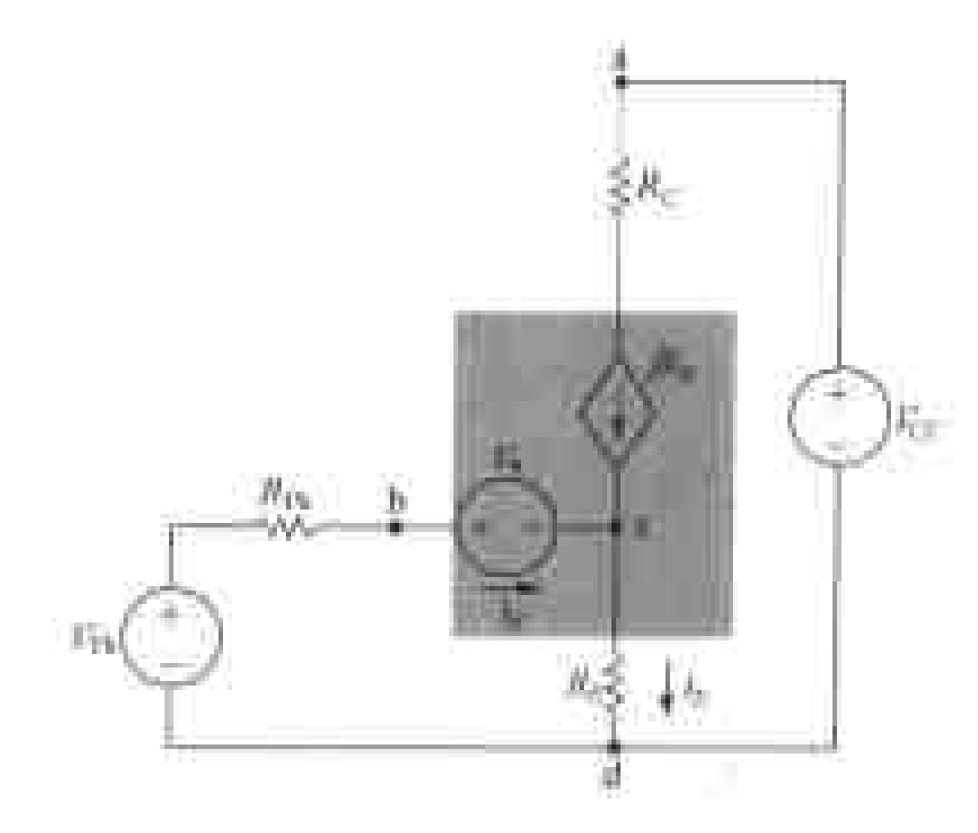


图 4.57 图 4.56 所示电路用戴维南等效变换

现在,通过对左边网孔的电压求和推导 i_B 方程。在列网孔方程时,已知 $i_E=(1+\beta)i_B$,因此,有:

$$V_{\mathrm{Th}}=R_{\mathrm{Th}}i_B+V_o+R_E(1+\beta)i_B \tag{4.71}$$

依据:

$$i_B=\frac{V_{\mathrm{Th}}-V_o}{R_{\mathrm{Th}}+(1+\beta)R_E} \tag{4.72}$$

将式(4.69)和式(4.70)代入式(4.72),得到了与式(2.25)相同的表达式。注意:将戴维南等效电路融入原始电路后,可以列一个方程就能得到 i_B 的解。

4.12 最大功率传输

在分析从电源到负载功率传输系统的设计方案时,电路分析方法起了重要的作用。用系统的两个基本类型讨论功率传输问题。第一个基本类型将强调功率传输的效率。发电站系统是最好的例子,发电站系统与产生、传输、分配大量的电功率有关。发电站系统效率低,产生的功率有很大的比例损耗在传输和分配过程中,功率被浪费了。

系统的第二个基本类型强调功率传输。通信和仪器系统最能说明问题,因为通过电信号传输信息或数据时,发送器和探测器的有用功率受到限制,因此,传输尽可能多的功率到接受器或负载是人们期望的。对于这种应用,由于是小功率传输,传输的效率不是主要关心的问题。现在只考虑系统中的最大功率传输,系统的模型是纯电阻电路。

有了图 4.58 所示电路的帮助,最大功率传输就有了最好的描述。假定一个电阻网络包含独立源和非独立源,指定的一对端子 a,b 上连接着负载 R_L。问题是确定 R_L 的阻值,使 R_L 能得到最大的功率。求解过程的第一步是认为电阻网络总是能被戴维南等效电路替换的。所以图 4.58 所示的电路重新画出,如图 4.59 所示,用戴维南等效电路代替原网络将大大简化求 R_L 的过程。推导 R_L 需要将 R_L 上的功率损耗表示为三个电路参数 V_{Th},R_{Th}和 R_L 的函数。因此:

$$p=i^2R_L=\left(\frac{V_{\mathrm{Th}}}{R_{\mathrm{Th}}+R_L}\right)^2R_L \tag{4.73}$$

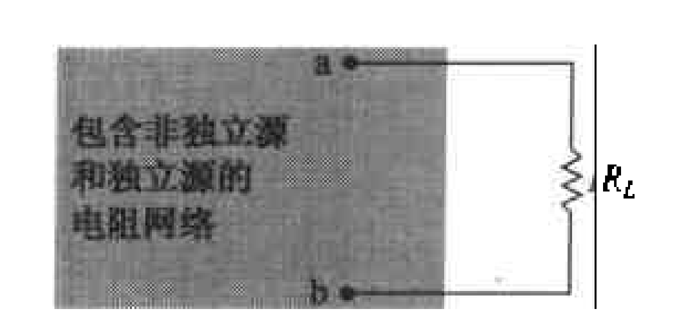


图 4.58　描述最大功率传输的电路

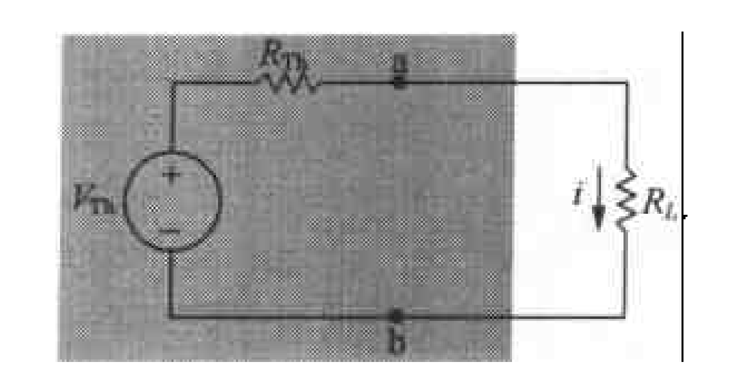


图 4.59　针对最大功率传输，确定 R_L 值的电路

第二步，给定电路的 V_{Th}和 R_{Th}将是固定的，因此功率损耗是单变量 R_L 的函数。为了求最大功率的 R_L 的值，使用基本微积分。先列写 p 对 R_L 的导数，因此：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}R_L} = V_{Th}^2\left[\frac{(R_{Th}+R_L)^2 - R_L\cdot 2(R_{Th}+R_L)}{(R_{Th}+R_L)^4}\right] \tag{4.74}$$

令导数为零，p 为最大值，则：

$$(R_{Th}+R_L)^2 = 2R_L(R_{Th}+R_L) \tag{4.75}$$

解式(4.75)得：

$$R_L = R_{Th} \tag{4.76}$$

因此，最大功率传输发生在负载电阻 R_L 等于戴维南电阻 R_{Th}时。为了求最大功率损耗，只要将式(4.76)代入式(4.73)：

$$p_{max} = \frac{V_{Th}^2 R_L}{(2R_L)^2} = \frac{V_{Th}^2}{4R_L} \tag{4.77}$$

将负载电阻调整到满足最大功率传输时的电路分析，在例 4.12 给予了说明。

例 4.12　(a) 电路如图 4.60 所示，求能够将最大功率传输到 R_L 的阻值。

(b) 计算能够释放到 R_L 的最大功率。

(c) 当 R_L 调节到满足最大功率传输时，360 V 电源释放功率的百分之多少送给 R_L？

解：

(a) a，b 端左边电路的戴维南电压是：

$$V_{Th} = \frac{150}{180}\times 360$$
$$= 300\ \text{V}$$

戴维南电阻是：

$$R_{Th} = \frac{(150)(30)}{180} = 25\ \Omega$$

将 a，b 端左边电路用戴维南等效电路代替，所得电路如图 4.61 所示。因此 R_L 必须等于 25 Ω 才能实现最大功率传输。

(b) 能够释放到 R_L 的最大功率是：

$$p_{max} = \left(\frac{300}{50}\right)^2(25)$$
$$= 900\ \text{W}$$

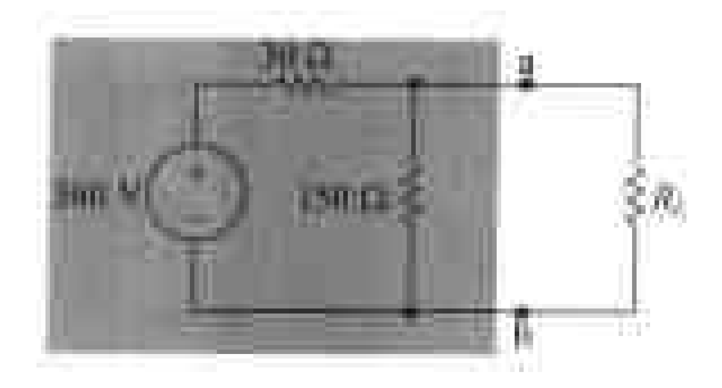


图 4.60 例 4.12 电路

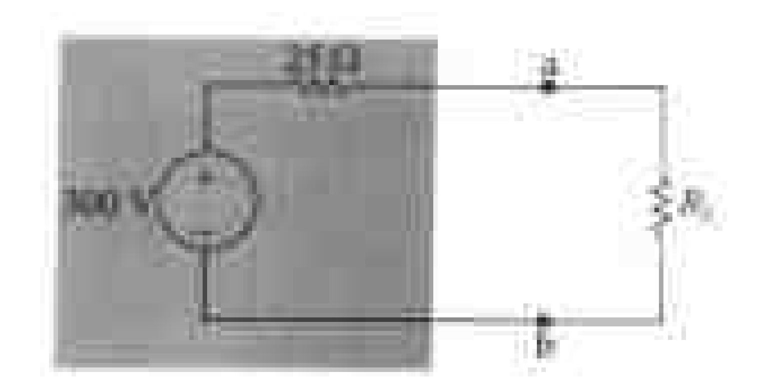


图 4.61 利用戴维南等效方法简化的图 4.60 所示电路

(c) 当 R_L 等于 25 Ω 时，电压 v_{ab} 是：

$$v_{ab} = \left(\frac{300}{50}\right)(25)$$
$$= 150 \text{ V}$$

根据图 4.60，当 v_{ab} 等于 150 V 时，与电源电压升方向一致的电压源电流是：

$$i_s = \frac{360-150}{30} = \frac{210}{30}$$
$$= 7 \text{ A}$$

因此，电源释放功率 2520 W 到电路，即：

$$p_s = -i_s(360)$$
$$= -2520 \text{ W}$$

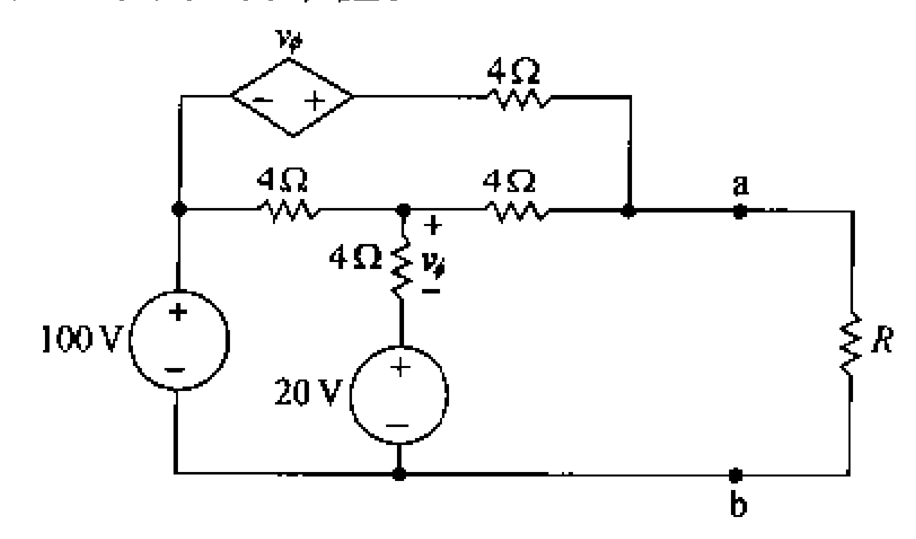
电源功率释放到负载的百分比是：

$$\frac{900}{2520} \times 100 = 35.71\%$$

练习题

4.25 (a) 电路如图所示，求能使最大功率释放到 a，b 端的 R 值。

(b) 求释放到 R 的最大功率值。



答：(a) 3 Ω，(b) 1.2 kW。

4.26 假定练习题 4.25 的电路释放最大功率到负载电阻 R。

(a) 100 V 电源释放到网络的功率是多少？

(b) 非独立电压源释放到网络的功率是多少？

(c) 由两个电源产生的全部功率的百分之多少释放到负载电阻 R？

答：(a) 3 000 W，(b) 800 W，(c) 31.58%。

4.13 叠加法

一个线性系统服从叠加原理。叠加原理是这样叙述的：当一个线性系统被一个以上的独立源激励或驱动时，全部响应是单独响应的代数和。单独响应是独立源单独激励的结果。因为处理的电路是由线性电路元件互连构成的，所以，可以直接应用叠加原理分析由一个以上独立源驱动的电路。现在，将讨论限定在简单电阻网络，尽管原理可以应用于任何线性系统。

叠加法应用于电路的分析和设计。在分析一个包含多个独立电压源和电流源的复杂电路时，如果一次考虑一个独立源的影响，需求解的方程通常数量少而且简单。应用叠加法，可以简化分析。应该了解到，有时应用叠加法实际上使分析复杂化，与其他方法相比，将会产生更多要求解的方程。如果电路中的独立源是不同的，才需要使用叠加法。在前面几章里，所有独立源都是直流电源，所以不需要用叠加法。这里介绍叠加法是因为后面章节的电路分析中要用到叠加法。

叠加法应用在设计领域，目的是为了合成一个期望的电路响应，这个响应不能由单电源的电路实现。如果期望的电路响应可以写成两个或两个以上响应的代数和，那么响应的每一项可以由包含一个独立源的电路实现。这种具有复杂响应电路的设计方法，允许设计人员考虑几种简单的设计，而不是用一种复杂的设计。

为了说明叠加原理，用它来求图 4.62 所示电路的支路电流。先求由 120 V 电压源作用产生的支路电流。加撇号表示这些电流，用开路代替电流源使其无效，如图 4.63 所示。电路中的支路电流仅仅是电压源作用的结果。

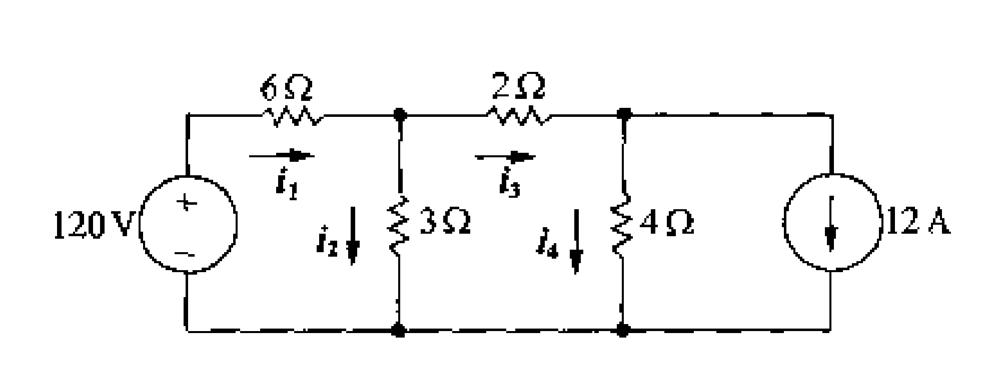


图 4.62　说明叠加法的电路

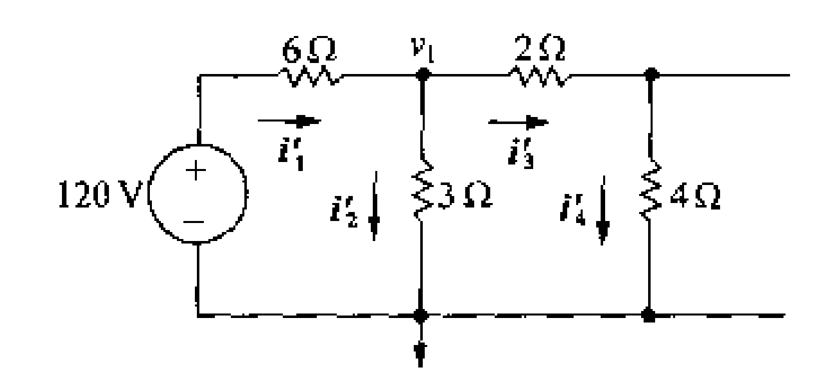


图 4.63　图 4.62 电路的电流源失效

一旦知道了 3 Ω 电阻上的节点电压，可以容易地求出图 4.63 所示电路的支路电流。将这个电压表示为 v_1：

$$\frac{v_1 - 120}{6} + \frac{v_1}{3} + \frac{v_1}{2+4} = 0 \tag{4.78}$$

根据：

$$v_1 = 30\ \text{V} \tag{4.79}$$

现在可以直接写出支路电流 $i'_1 \sim i'_4$ 的表达式：

$$i'_1 = \frac{120 - 30}{6} = 15\ \text{A} \tag{4.80}$$

$$i'_2 = \frac{30}{3} = 10\ \text{A} \tag{4.81}$$

$$i'_3 = i'_4 = \frac{30}{6} = 5\ \text{A} \tag{4.82}$$

为了求由电流源作用产生的支路电流分量，应让理想电压源失效，求解图 4.64 所示的电路。给电流加双撇号表示它们是由理想电流源作用产生的电流分量。

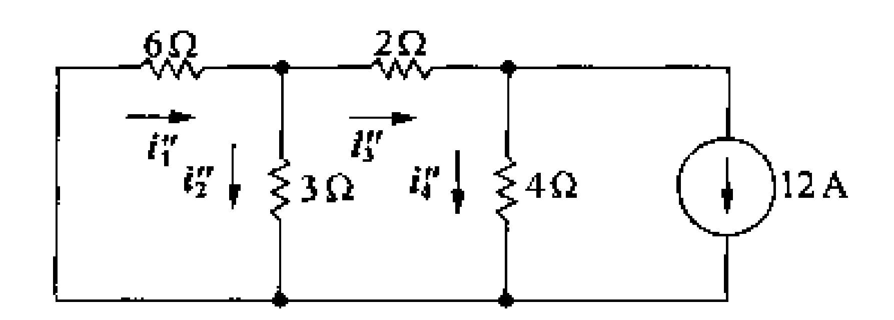


图 4.64 图 4.62 电路的电压源失效

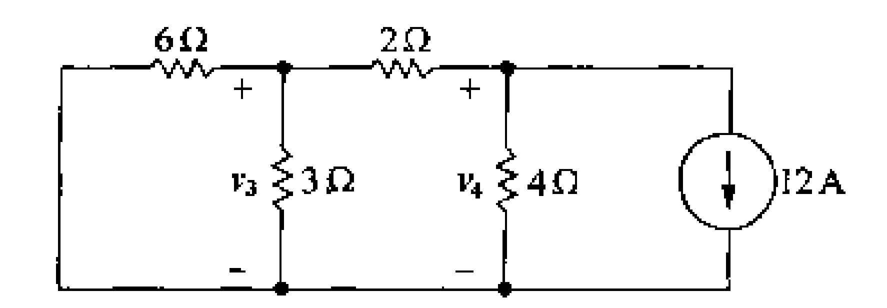


图 4.65 图 4.64 电路的节点电压 v_3 和 v_4

为了求解图 4.64 所示电路的支路电流，先分别求 3 Ω 和 4 Ω 电阻上的节点电压。图 4.65 标出了这两个节点电压。描述电路的两个节点电压方程是：

$$\frac{v_3}{3} + \frac{v_3}{6} + \frac{v_3 - v_4}{2} = 0 \tag{4.83}$$

$$\frac{v_4 - v_3}{2} + \frac{v_4}{4} + 12 = 0 \tag{4.84}$$

求解式(4.83)和式(4.84)的 v_3 和 v_4，得到：

$$v_3 = -12\ \text{V} \tag{4.85}$$

$$v_4 = -24\ \text{V} \tag{4.86}$$

现在，可以直接用节点电压 v_3 和 v_4 求出支路电流 $i''_1 \sim i''_4$：

$$i''_1 = \frac{-v_3}{6} = \frac{12}{6} = 2\ \text{A} \tag{4.87}$$

$$i''_2 = \frac{v_3}{3} = \frac{-12}{3} = -4\ \text{A} \tag{4.88}$$

$$i''_3 = \frac{v_3 - v_4}{2} = \frac{-12+24}{2} = 6\ \text{A} \tag{4.89}$$

$$i''_4 = \frac{v_4}{4} = \frac{-24}{4} = -6\ \text{A} \tag{4.90}$$

为了求原电路的支路电流，即电流 i_1, i_2, i_3 和 i_4，只要将式(4.87)~(4.90)给定的电流与式(4.80)~(4.82)给定的电流相加即可：

$$i_1 = i'_1 + i''_1 = 15 + 2 = 17\ \text{A} \tag{4.91}$$

$$i_2 = i'_2 + i''_2 = 10 - 4 = 6\ \text{A} \tag{4.92}$$

$$i_3 = i'_3 + i''_3 = 5 + 6 = 11\ \text{A} \tag{4.93}$$

$$i_4 = i'_4 + i''_4 = 5 - 6 = -1\ \text{A} \tag{4.94}$$

可以校验式(4.91)~(4.94)给定的电流就是图 4.62 所示电路的支路电流。

对于包含独立源和非独立源两种电源的线性电路，应用叠加法分析时，必须认识到，非独立源从不失效。例 4.13 说明了当电路包含独立源和非独立源时叠加法的应用。

例 4.13 电路如图 4.66 所示，用叠加原理求 v_o。

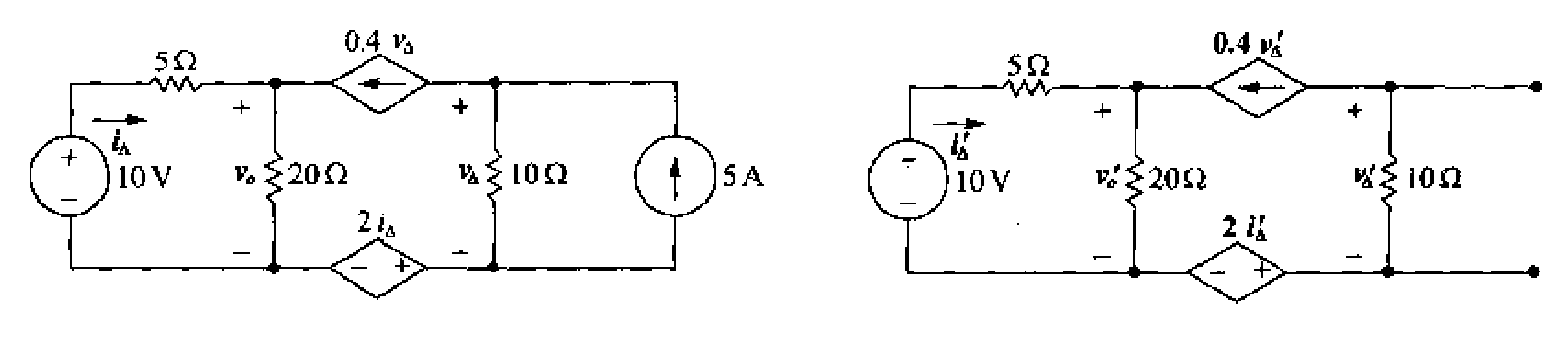


图 4.66 例 4.13 电路

图 4.67 图 4.66 电路使 5A 电源失效

解：

先求 10 V 电源单独作用产生的分量，电路如图 4.67 所示，5 A 电源失效。v'_Δ 一定等于 $(-0.4v'_\Delta)(10)$。因此 v'_Δ 一定是零，包含两个非独立源的支路开路，而且：

$$v'_o = \frac{10}{25}(20) = 8\ \text{V}$$

当 10 V 电源失效时，电路简化为如图 4.67 所示的电路形式。为了便于讨论，加入一个参考节点，标出节点 a，b 和 c。

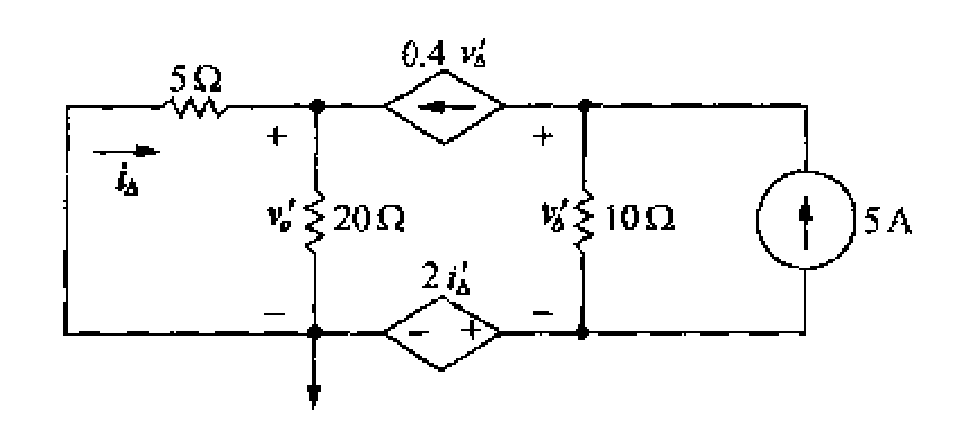


图 4.68 图 4.66 电路使 10 V 电源失效

对离开节点 a 的电流求和，产生：

$$\frac{v''_o}{20} + \frac{v''_o}{5} - 0.4v''_\Delta = 0, \text{即 } 5v''_o - 8v''_\Delta = 0$$

对离开节点 b 的电流求和，得：

$$0.4v''_\Delta + \frac{v_b - 2i''_\Delta}{10} - 5 = 0, \qquad \text{即 } 4v''_\Delta + v_b - 2i''_\Delta = 50$$

现在用：

$$v_b = 2i''_\Delta + v''_\Delta$$

求 v''_Δ 的值：

$$5v''_\Delta = 50, \qquad \text{即 } v''_\Delta = 10\ \text{V}$$

根据节点 a 方程：

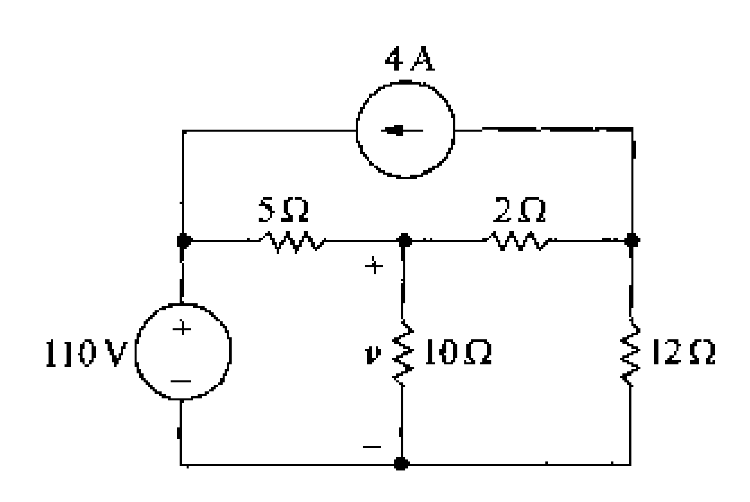
$$5v''_o = 80, \qquad \text{即 } v''_o = 16\text{V}$$

v_o 的值是 v'_o 和 v''_o 的代数和，即 24 V。

练习题

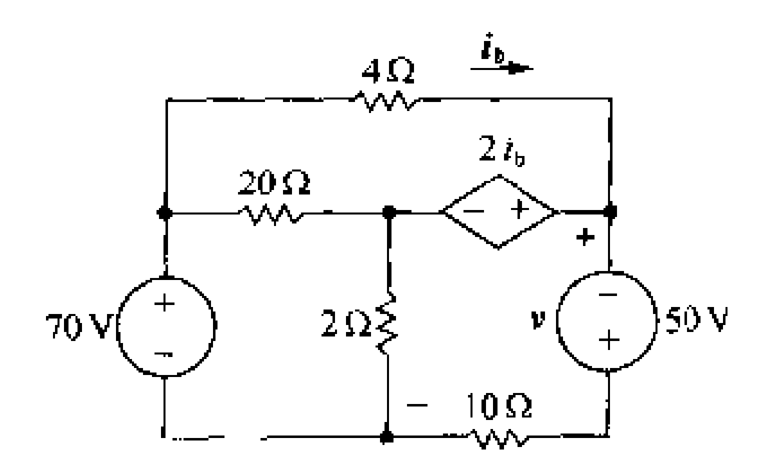
4.27 (a) 用叠加原理求图示电路的电压 v。

(b) 求 10 Ω 电阻上的功率损耗。



答:(a) 50 V,(b) 250 W。

4.28 用叠加原理求图示电路的电压 v。



答:30 V。

实例

实际电阻电路二

制造同样的电路组件是不可能的。例如,相同制造过程生产的电阻,阻值变化达 20%。所以,创建一个电系统时,设计者必须考虑组件变化对系统性能的影响。一种评价这些影响的方法是性能灵敏度分析。灵敏度分析允许设计者计算组件数值变化时对系统输出的影响。下面将会看到,如何使设计者能够对每个系统的组件,给出可以接受的组件值容差。

考虑如图 4.69 所示的电路。为了说明灵敏度分析,将研究相对电阻 R_1 变化时,节点电压 v_1 和 v_2 的灵敏度。使用节点分析法可以得到 v_1 和 v_2 的方程,将其作为电路电阻和电源电流的函数。结果为式(4.95)和式(4.96):

$$v_1 = \frac{R_1\{R_3R_4I_{g2} - [R_2(R_3+R_4)+R_3R_4]I_{g1}\}}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_3R_4} \tag{4.95}$$

$$v_2 = \frac{R_3R_4[(R_1+R_2)I_{g2} - R_1I_{g1}]}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_3R_4} \tag{4.96}$$

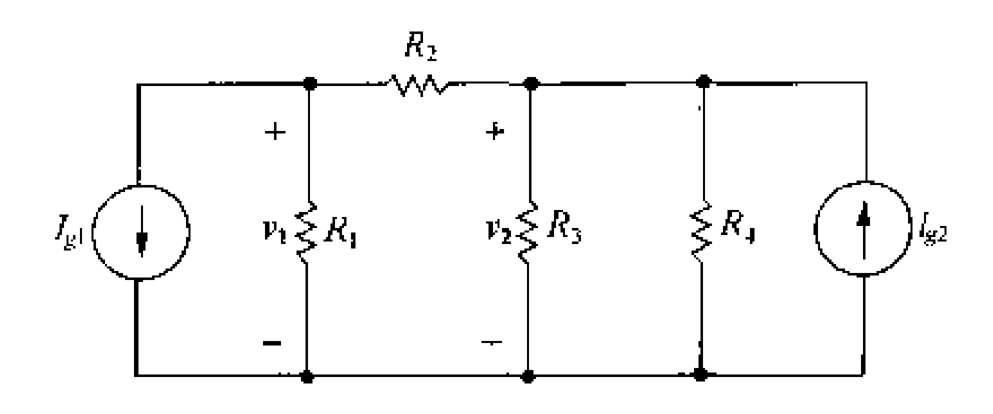


图 4.69　说明灵敏度分析的电路

v_1 相对于 R_1 的灵敏度通过式(4.95)对 R_1 求导获得，v_2 相对于 R_1 的灵敏度通过式(4.96)对 R_1 求导获得，得到：

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}R_1}=\frac{[R_3R_4+R_2(R_3+R_4)]\{R_3R_4I_{g2}-[R_3R_4+R_2(R_3+R_4)]I_{g1}\}}{[(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_3R_4]^2} \tag{4.97}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}R_1}=\frac{R_3R_4\{R_3R_4I_{g2}-[R_2(R_3+R_4)+R_3R_4]I_{g1}\}}{[(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_3R_4]^2} \tag{4.98}$$

现在考虑一个例子，用实际组件的数值说明式(4.97)和(4.98)的使用。

例　假定图 4.69 所示电路中组件的标称值是：$R_1=25\ \Omega$，$R_2=5\ \Omega$，$R_3=50\ \Omega$，$R_4=75\ \Omega$，$i_{g1}=12\ \mathrm{A}$，$i_{g2}=16\ \mathrm{A}$。如果 R_1 的值与它的标称值相差 10%，用灵敏度分析预测 v_1 和 v_2 的值。

解：

根据式(4.95)和式(4.96)，求 v_1 和 v_2 的标称值。得：

$$v_1=\frac{25\{2750(16)-[5(125)+3750]12\}}{30(125)+3750}$$

$$=25\ \mathrm{V} \tag{4.99}$$

和

$$v_2=\frac{3750[30(16)-25(12)]}{30(125)+3750}$$

$$=90\ \mathrm{V} \tag{4.100}$$

现在根据式(4.97)和(4.98)，可以求得 R_1 变化时 v_1 和 v_2 的灵敏度。因此：

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}R_1}=\frac{[3750+5(125)]-\{3750(16)-[3750+5(125)]12\}}{[(30)(125)+3750]^2}$$

$$=\frac{7}{12}\ \mathrm{V}/\Omega \tag{4.101}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}R_1}=\frac{3750\{3750(16)-[5(125)+3750]12\}}{(7500)^2}$$

$$=0.5\ \mathrm{V}/\Omega \tag{4.102}$$

如何使用式(4.101)和式(4.102)给出的结果？假定 R_1 比它的标称值少 10%，即 $R_1=22.5\ \Omega$，那么 $\Delta R_1=-2.5\ \Omega$，式(4.101)预测 Δv_1 将是：

$$\Delta v_1=\left(\frac{7}{12}\right)(-2.5)=-1.4583\ \mathrm{V}$$

所以，如果 R_1 比它的标称值少 10%，分析预测 v_1 将是：

$$v_1 = 25 - 1.4583 = 23.5417 \text{ V} \tag{4.103}$$

类似地,对于式(4.102)有:

$$\Delta v_2 = 0.5(-2.5) = -1.25 \text{ V}$$

$$v_2 = 90 - 1.25 = 88.75 \text{ V}$$

通过将 $R_1 = 22.5\ \Omega$ 代入式(4.95)和式(4.96),来确认式(4.103)和式(4.104)的结果。结果是:

$$v_1 = 23.4780 \text{ V} \tag{4.105}$$

$$v_2 = 88.6960 \text{ V} \tag{4.106}$$

对于 v_1 和 v_2,为什么用灵敏度分析预测的值与将 R_1 代入方程式计算得到的准确值之间有差别?根据式(4.97)和式(4.98),v_1 和 v_2 相对于 R_1 的灵敏度是 R_1 的函数,因为 R_1 在式(4.97)和式(4.98)的分母中出现,这意味着当 R_1 变化时,灵敏度也随之变化,因此,不能指望在 R_1 发生较大变化时,式(4.97)和式(4.98)能给出准确的结果。当 R_1 变化 10% 时,v_1 和 v_2 的预测值和准确值之间的误差百分数都比较小。v_1 的误差百分数为 0.2713%,v_2 的误差百分数为 0.0676%。

根据这个例子,可以看到,对于其他的组件值,即 R_2,R_3,R_4,i_{g1}和 i_{g2},如果要求确定 v_1 和 v_2 的灵敏度,工作量非常大。幸运的是,PSpice 软件有灵敏度函数,可以对电路进行灵敏度分析。PSpice 软件的灵敏度函数计算两种类型的灵敏度。第一种称做单位灵敏度,第二种称做 1%灵敏度。对于上述例子给出的电路,电阻的单位变化是 1 Ω,电流源的单位变化是 1 A。与之形成对照,1%灵敏度分析确定的是电阻和电源变化的影响为它们标称值的 1%。

对于图 4.69 所示电路,PSpice 软件灵敏度分析的结果如表 4.2 所示。因为这里分析的是线性电路,所以,如果有一个以上的组件值发生变化时,可以使用叠加法预测 v_1 和 v_2 的值。例如,假定 R_1 减少到 24 Ω,R_2 减少到 4 Ω。根据表 4.2,对于 R_1 和 R_2 的变化,可以结合 v_1 和 v_2 的单位灵敏度得到:

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta R_1} + \frac{\Delta v_1}{\Delta R_2} = 0.5833 - 5.417 = -4.8337 \text{ V}/\Omega$$

类似地:

$$\frac{\Delta v_2}{\Delta R_1} + \frac{\Delta v_2}{\Delta R_2} = 0.5 + 6.5 = 7.0 \text{ V}/\Omega$$

如果 R_1 和 R_2 都减少 1 Ω,将得到:

$$v_1 = 25 + 4.8227 = 29.8337 \text{ V}$$

$$v_2 = 90 - 7 = 83 \text{ V}$$

如果将 $R_1 = 24\ \Omega$ 和 $R_2 = 4\ \Omega$ 代入式(4.95)和(4.96),得到:

$$v_1 = 29.793 \text{ V}$$

$$v_2 = 82.759 \text{ V}$$

预测的两个数值与实际节点电压相比,相差在零点几伏特之内。

表 4.2　PSpice 软件灵敏度分析结果

元件名称	元件值	元件灵敏度（伏特/单位）	标准化灵敏度（伏特/百分数）
(a)节点电压 v_1 的 DC 灵敏度			
R_1	25	0.5833	0.1458
R_2	5	-5.417	-0.2708
R_3	50	0.45	0.225
R_4	75	0.2	0.15
I_{g1}	12	-14.58	-1.75
I_{g2}	16	12.5	2
(b) v_2 灵敏度输出			
R_1	25	0.5	0.125
R_2	5	6.5	0.325
R_3	50	0.54	0.27
R_4	75	0.24	0.18
I_{g1}	12	-12.5	-1.5
I_{g2}	16	15	2.4

电路设计者利用灵敏度分析的结果，确定哪个组件值的变化对电路输出的影响最大。正如从表 4.2 PSpice 软件灵敏度分析看到的那样，节点电压 v_1 和 v_2 相对于 R_2 变化的灵敏度比相对于 R_1 变化的灵敏度大得多，v_1 是(5.417/0.5833)，即相对于 R_2 变化的灵敏度大约是相对于 R_1 变化的灵敏度的 9 倍。v_2 是(6.5 / 0.5)，即相对于 R_2 变化的灵敏度是相对于 R_1 变化的灵敏度的 13 倍。因此在该电路中，如果保持 v_1 和 v_2 的标称值是重要的话，那么，R_2 的容差要求比 R_1 的容差要求要更高。

小结

- 掌握基本术语以及相应的概念。基本术语是节点、基本节点、路径、支路、基本支路、网孔和平面电路。表 4.1 给出了这些术语的定义和例子。
- 本章介绍了两个新的电路分析方法：
  - 节点电压法适用于平面和非平面电路。在基本节点中选择一个参考节点，对其余的基本节点分配电压变量，并用基尔霍夫电流定律对每个节点列写一个方程。方程的数目为 $n-1$，其中 n 是基本节点的数目。
  - 网孔电流法只适用于平面电路。对每个网孔定义网孔电流，并用基尔霍夫电压定律对每个网孔列写一个方程。方程的数目为 $b-(n-1)$，其中 b 是含未知电流支路的数目，n 是节点的数目。网孔电流用来求支路电流。
- 本章介绍了几种新的化简方法：
  - 电流变换允许将电压源(v_s)和电阻(R)的串联变换成电流源(i_s)和电阻(R)的并联，反之亦然。对于端电压和端电流来说，两个组合一定是等效的。端子等效提供了：

$$i_s = \frac{v_s}{R}$$

■ 戴维南等效和诺顿等效电路允许将一个由电源和电阻组成的电路简化为一个等效电路,可以是一个电压源和一个电阻的串联(戴维南),也可以是一个电流源和一个电阻的并联(诺顿)。对于端电压和端电流来说,简化的电路和原电路一定是等效的。要牢牢记住:(1)戴维南电压(V_{Th})是原电路两端的开路电压,(2)戴维南电阻(R_{Th})是戴维南电压和原电路两端短路电流之比,(3)将戴维南等效电路进行电源变换就得到诺顿等效电路。

- 最大功率传输是一种方法,用来计算能够释放到负载 R_L 的最大p 值。当 $R_L = R_{Th}$时,发生最大功率传输。戴维南电阻是从电阻 R_L 两端看进去的电阻。最大功率传输的方程式是:

$$p = \frac{V_{Th}^2}{4R_L}$$

- 在具有多个独立源的电路中,叠加法允许一次用一个电源激励,然后对电压和电流响应求代数和,以确定所有独立源激励时的电压和电流响应。在应用叠加法时,非独立源永远不能失效。

习题

4.1 假定图 P4.1 所示电路中 i_g 已知,电阻 $R_1 \sim R_5$ 也已知。

(a) 有多少未知电流?

(b) 使用基尔霍夫电流定律(KCL)能写出多少个独立的方程?

(c) 写一组独立的 KCL 方程。

(d) 根据基尔霍夫电压定律(KVL),能够得到多少独立的方程?

(e) 写一组独立的 KVL 方程。

P4.2 用节点电压法求 2 A 电源从图 P4.2 所示电路中吸收的功率。

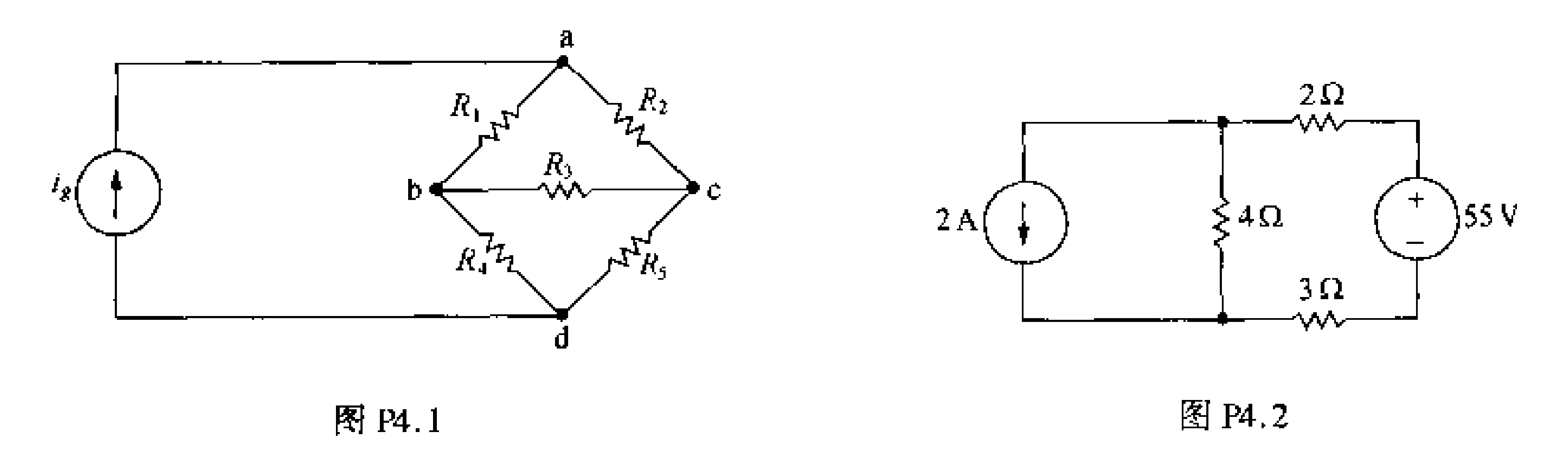


图 P4.1　　图 P4.2

P4.3 用节点电压法求图 P4.3 所示电路中的 v_1 和 60 V 电源释放的功率。

P4.4 (a) 用节点电压法求图 P4.4 所示电路中的支路电流 $i_a \sim i_c$。

(b) 求电路中全部产生的功率。

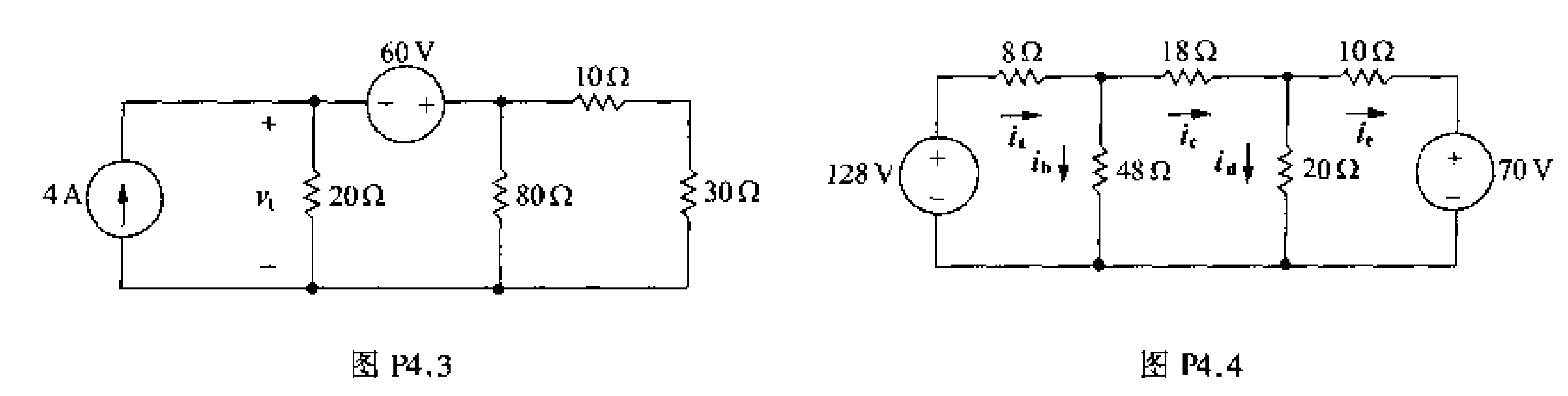


图 P4.3　　图 P4.4

P4.5　用节点电压法求图 P4.5 所示电路中的 v_o。

P4.6　图 P4.6 所示电路是一个住宅功率分布电路的直流模型。

(a) 用节点电压法求支路电流 $i_1 \sim i_6$。

(b) 通过验证消耗的全部功率等于产生的全部功率来检验所求的电流。

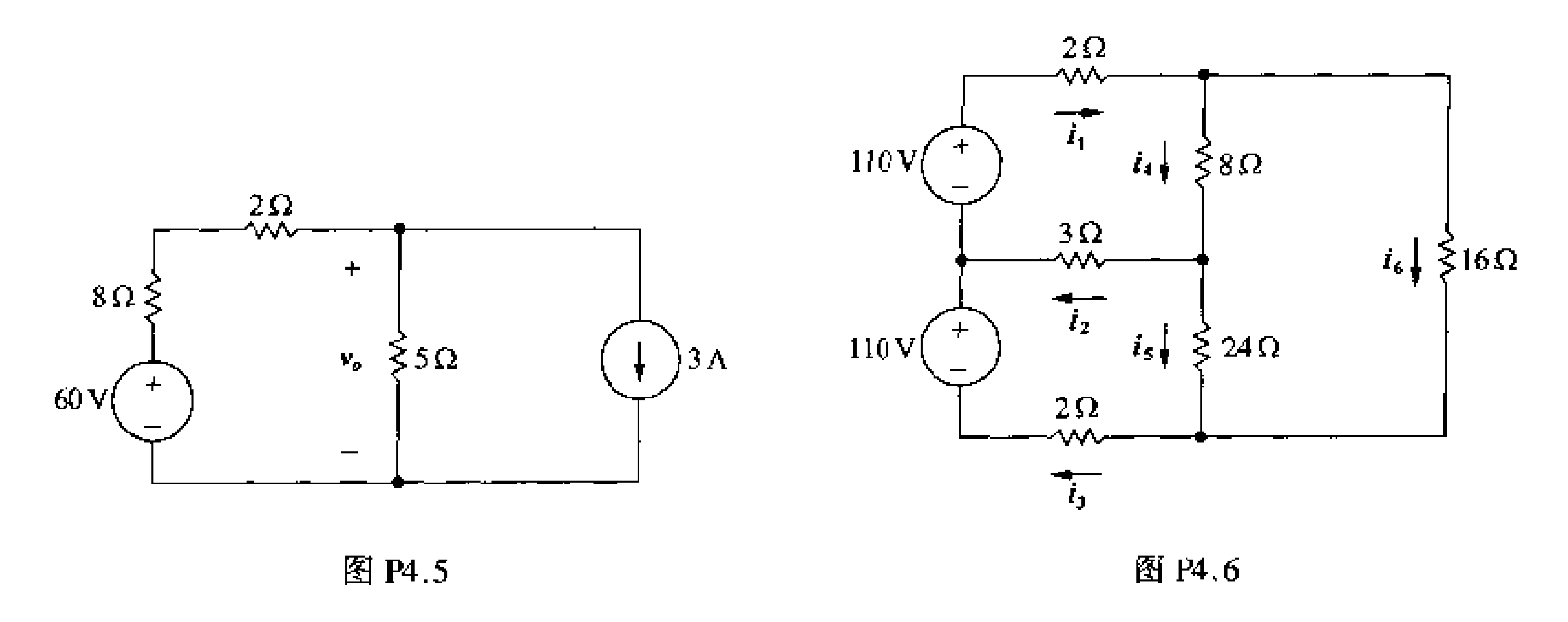


图 P4.5　　图 P4.6

P4.7　用节点电压法求图 P4.7 所示电路中的 v_1 和 v_2。

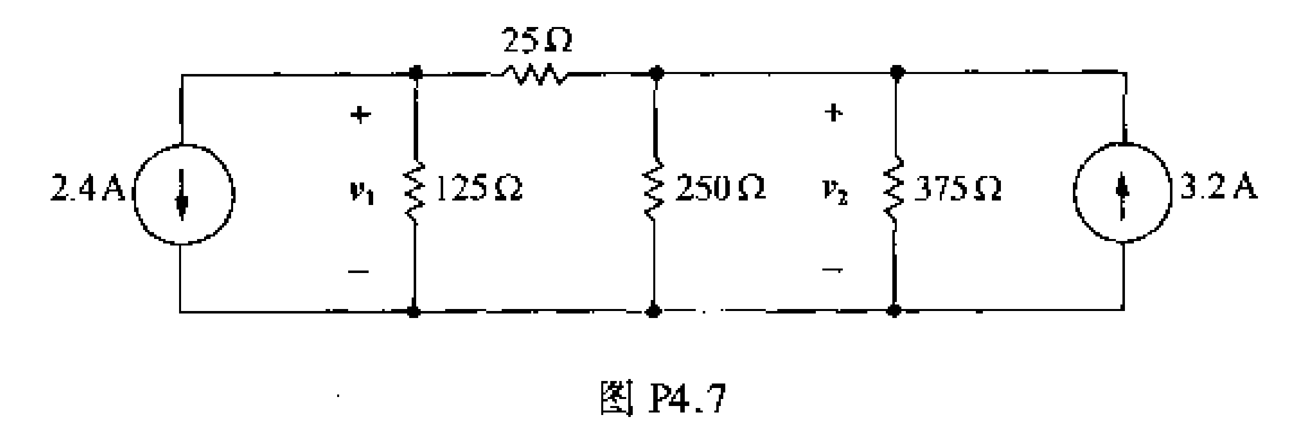


图 P4.7

P4.8　(a) 用节点电压法求图 P4.8 所示电路中的 v_1，v_2 和 v_3。

(b) 640 V 电压源向电路释放了多少功率？

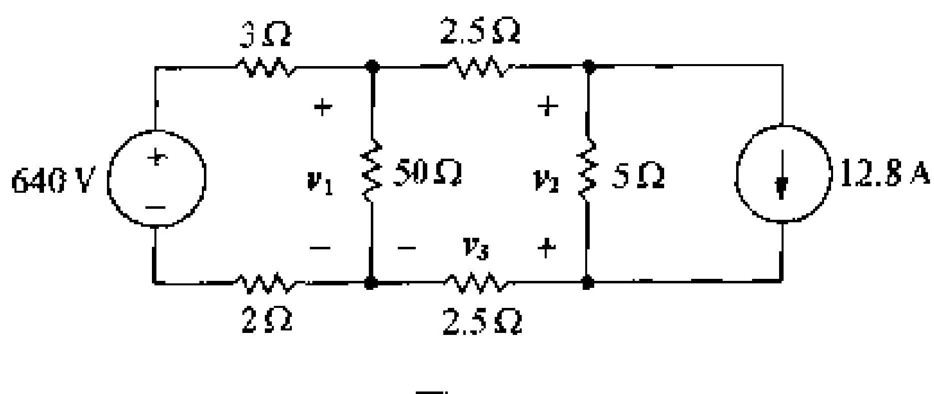


图 P4.8

P4.9　用节点电压法求图 P4.9 所示电路中的 v_1 和 v_2。

P4.10　用节点电压法求图 P4.10 所示电路中的 v_o。

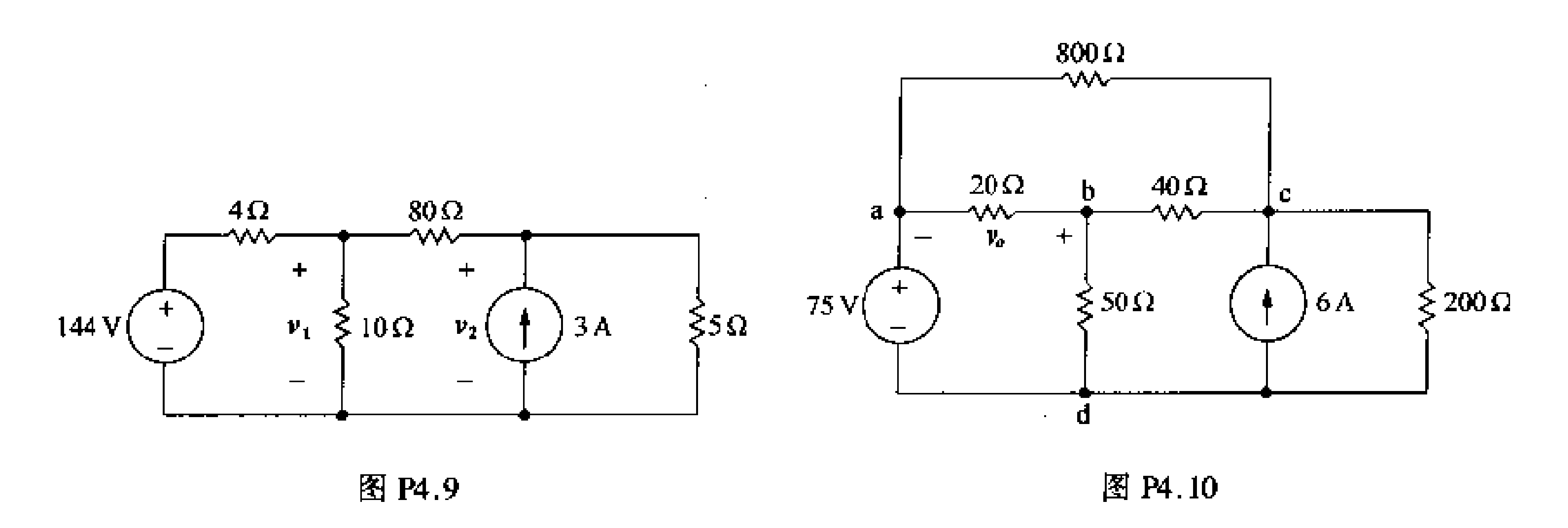


图 P4.9　　　　图 P4.10

P M4.11　用节点电压法求图 P4.11 所示电路中的 v_o。

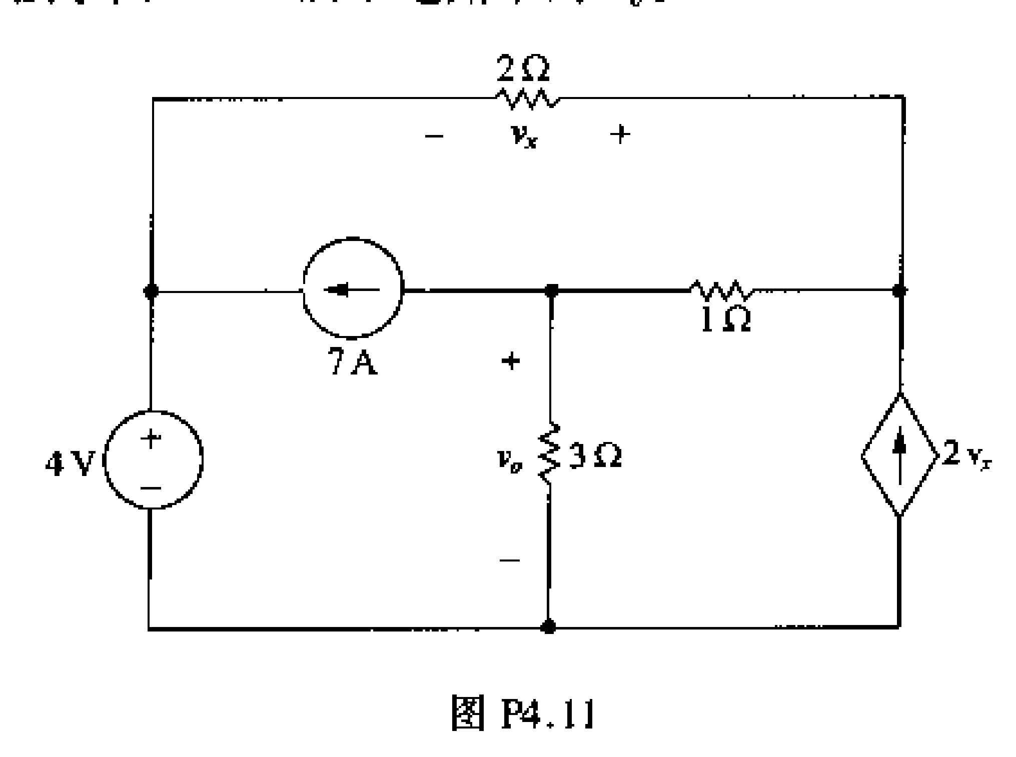


图 P4.11

P4.12　用节点电压法求图 P4.12 所示电路中的全部功率损耗。

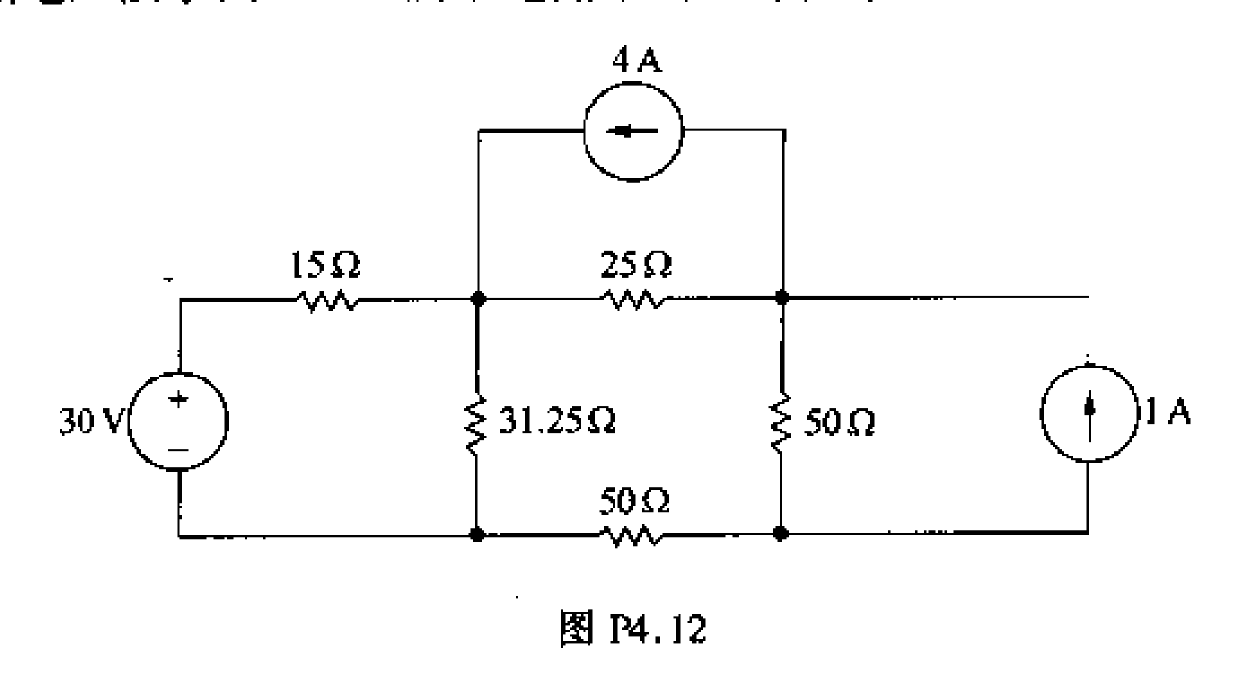


图 P4.12

P4.13　用节点电压法求图 P4.13 所示电路中的 i_o。

P4.14　在图 P4.5 电路中，用一个 100 Ω 电阻与 3 A 电流源串联。

(a) 求 v_o。

(b) 求 3 A 电流源产生的功率。

(c) 求 60 V 电压源产生的功率。

(d) 检验全部产生的功率等于全部消耗的功率。

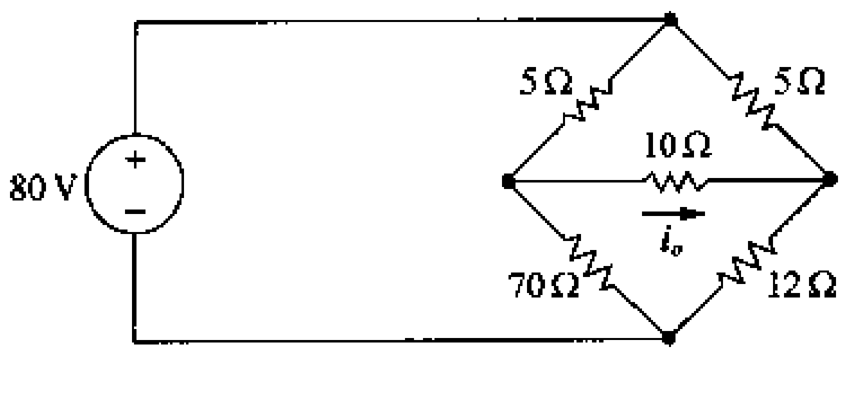


图 P4.13

(e) 任何有限的电阻与 3 A 电流源串联,对 v_o 值有什么影响?

P4.15 (a) 求图 P4.5 电路中 3 A 电流源产生的功率。

(b) 求图 P4.5 电路中 60 V 电压源产生的功率。

(c) 检验全部产生的功率等于全部消耗的功率。

P4.16 (a) 用节点电压法求图 P4.16 所示电路中的支路电流 i_1, i_2 和 i_3。

(b) 通过验证电路中消耗的功率等于产生的功率检验所求的电流。

M4.17 (a) 用节点电压法求图 P4.17 所示电路中 5 Ω 电阻上的功率损耗。

(b) 求 500 V 电源提供的功率。

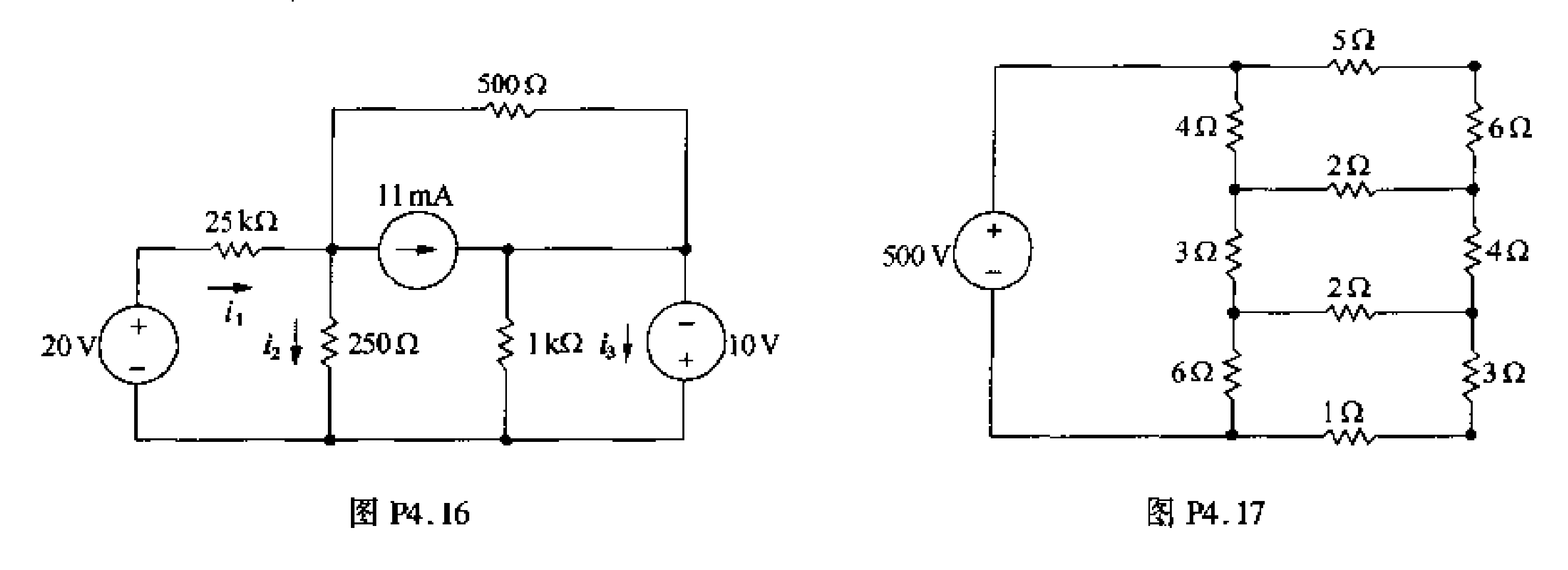


图 P4.16　　　　图 P4.17

P4.18 (a) 用节点电压法证明图 P4.18 所示电路中的输出电压 v_o 等于电压源的平均值。

(b) 如果 $v_1 = 150$ V, $v_2 = 200$ V, $v_3 = -50$ V,求 v_o。

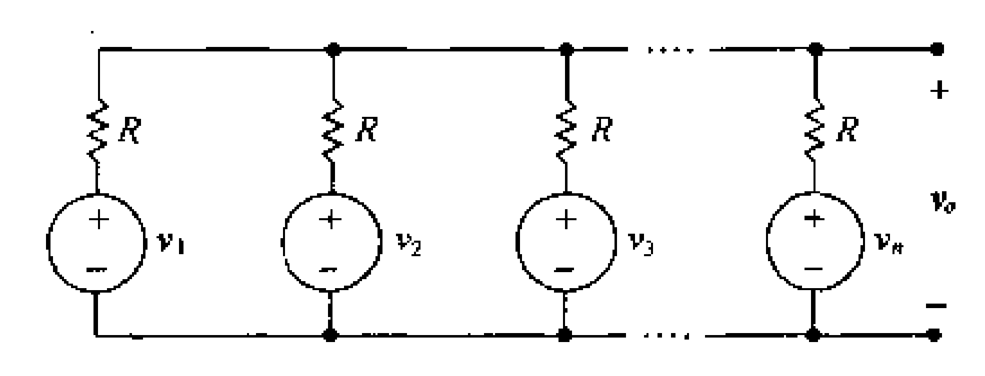


图 P4.18

4.19 证明用式(4.16),(4.17)和式(4.19)解 i_B,其结果与式(2.25)相同。

P4.20 用节点电压法求图 P4.20 所示电路中的 v_o。

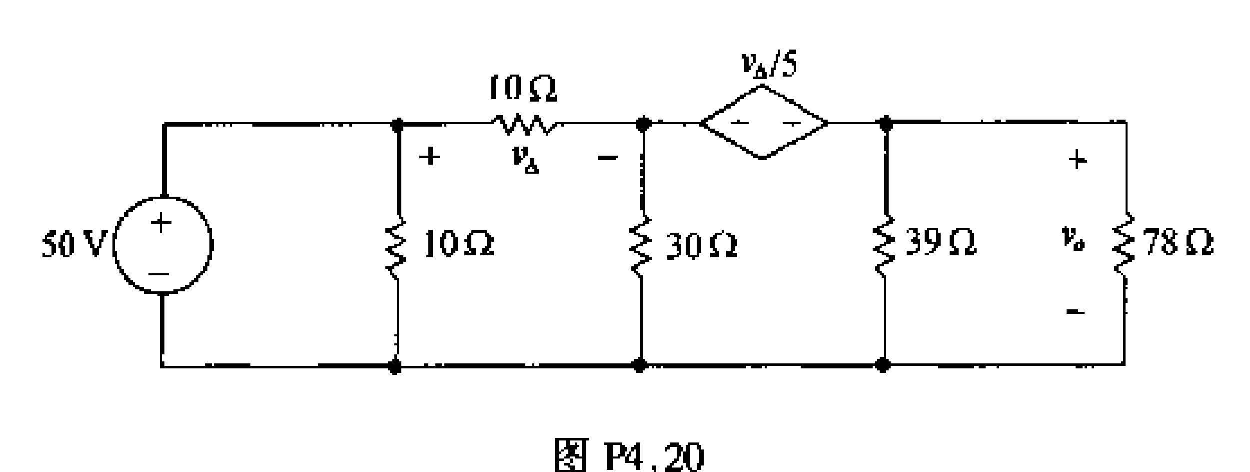


图 P4.20

P4.21 用节点电压法计算图 P4.21 所示电路中非独立电压源释放的功率。

P4.22 (a) 用节点电压法求图 P4.22 所示电路中的 v_o。

(b) 求非独立源吸收的功率。

(c) 求独立源产生的全部功率。

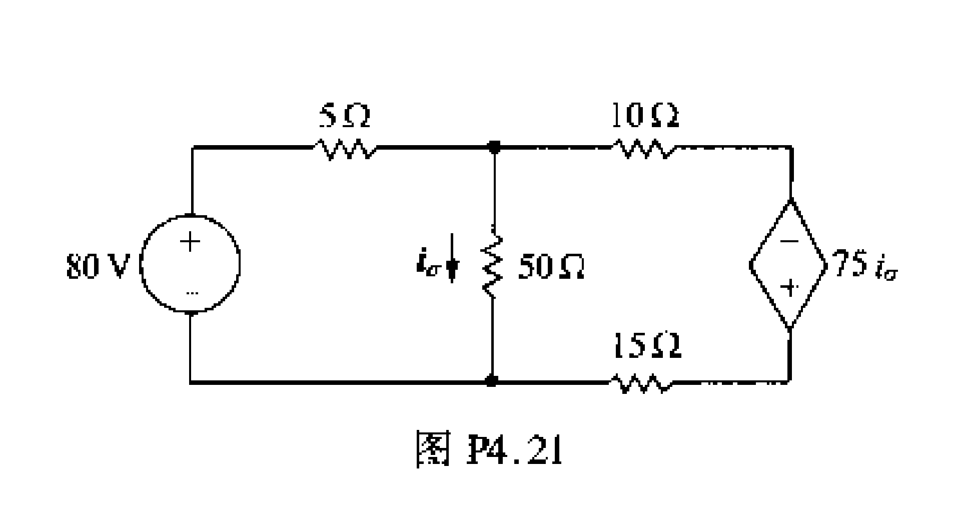


图 P4.21

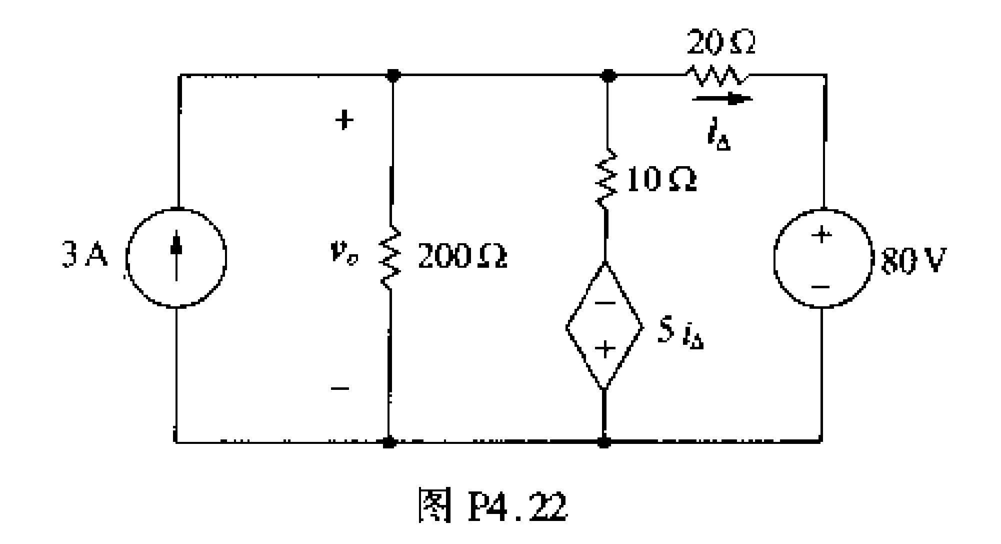


图 P4.22

P4.23 (a) 求图 P4.23 所示电路中的节点电压 v_1, v_2 和 v_3。

(b) 求电路消耗的全部功率。

P4.24 (a) 用节点电压法求图 P4.24 所示电路产生的全部的功率。

(b) 通过求电路吸收的全部功率检验答案。

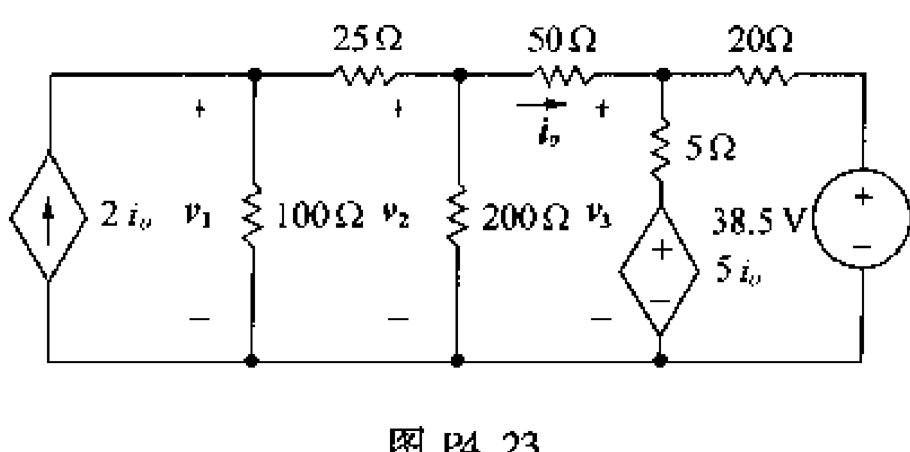




图 P4.23

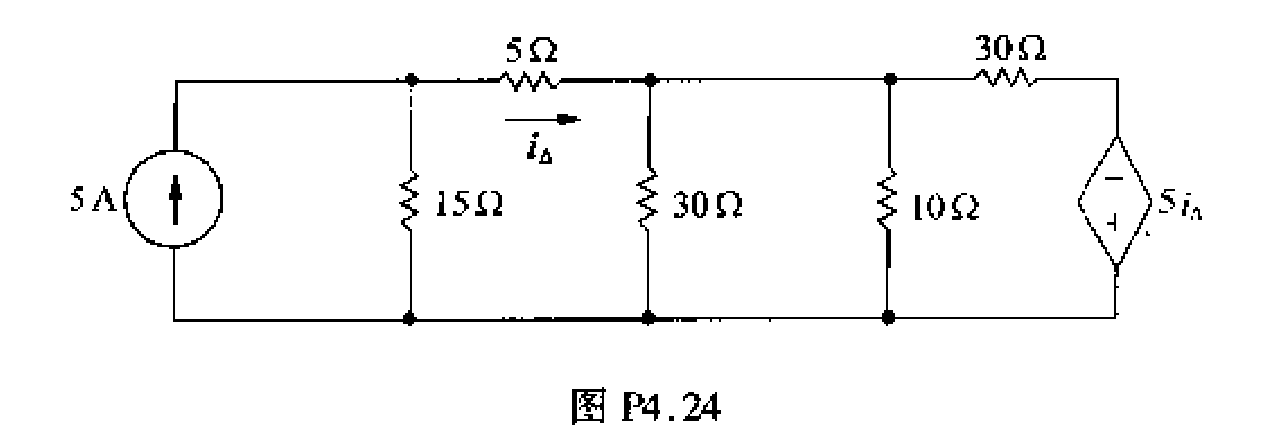


图 P4.24

P4.25 假定你是一个主管工程师,你的一个职员被指派分析某个电路,如图 4.25 所示。参考节点和节点号码被分析者标在图上,他的分析结果 v_3 和 v_4 分别是 235 V 和 222 V。

通过检查电路产生的全部功率和消耗的全部功率来检查这些值。你同意分析者提交的解答吗?

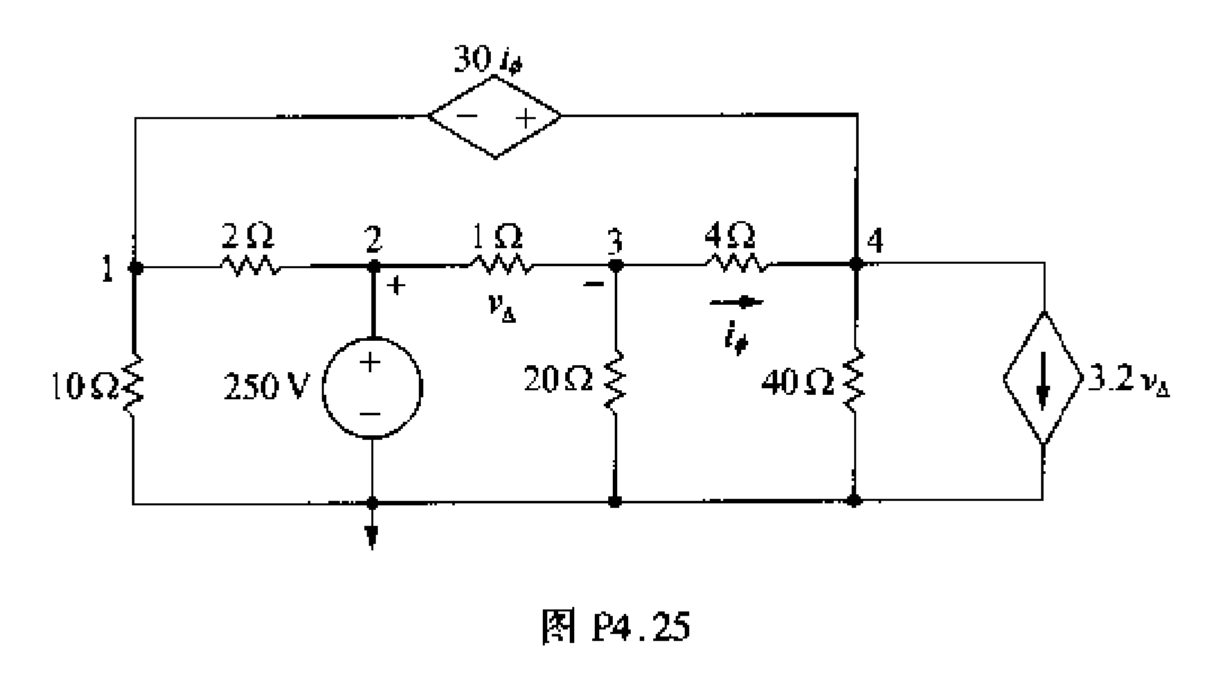


图 P4.25

P4.26 用节点电压法求图 P4.26 所示电路中 20 V 电源产生的功率。

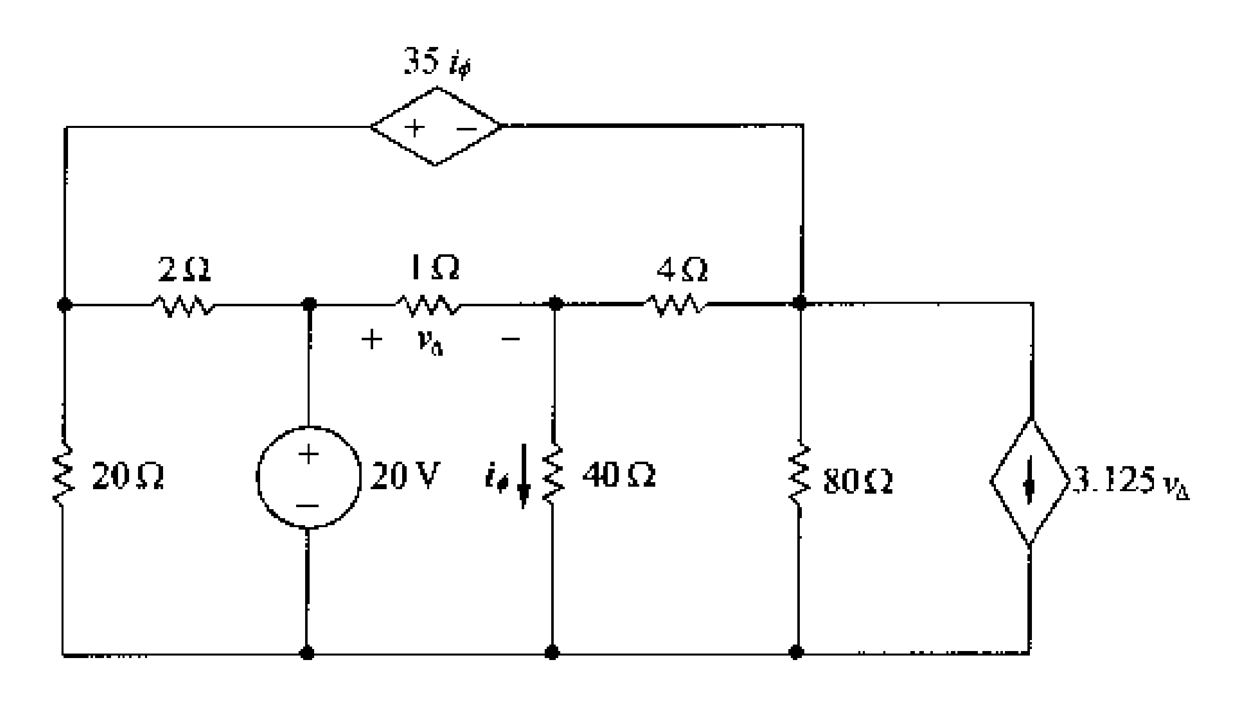


图 P4.26

P4.27 用网孔电流法求图 P4.27 所示电路中的全部功率损耗。

P4.28 假定图 P4.27 所示电路中的 18 V 电源增加到 100 V，求电路中的全部功率损耗。

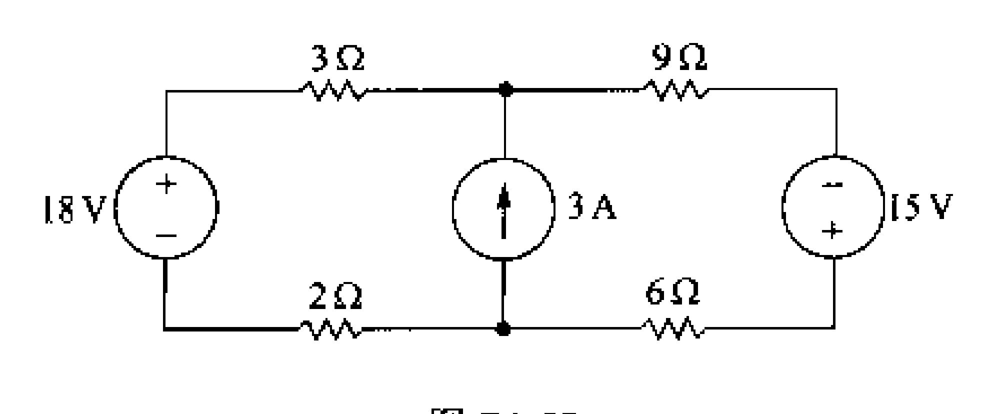


图 P4.27

4.29 (a) 假定图 P4.27 所示电路中的 18 V 电源变化到 −10 V，求电路中的全部功率损耗。

(b) 如果 3 A 电流源被短路，重复(a)。

(c) 解释为什么(a)和(b)的答案相同。

P4.30 (a) 用网孔电流法求图 P4.30 所示电路中的支路电流 i_a，i_b 和 i_c。

(b) 如果 64 V 电源的极性被颠倒，重复(a)。

P4.31 (a) 用网孔电流法求 30 A 电流源释放多少功率至图 P4.31 所示电路。

(b) 求释放到电路的全部功率。

(c) 通过证明电路中产生的全部功率等于消耗的全部功率检验计算。

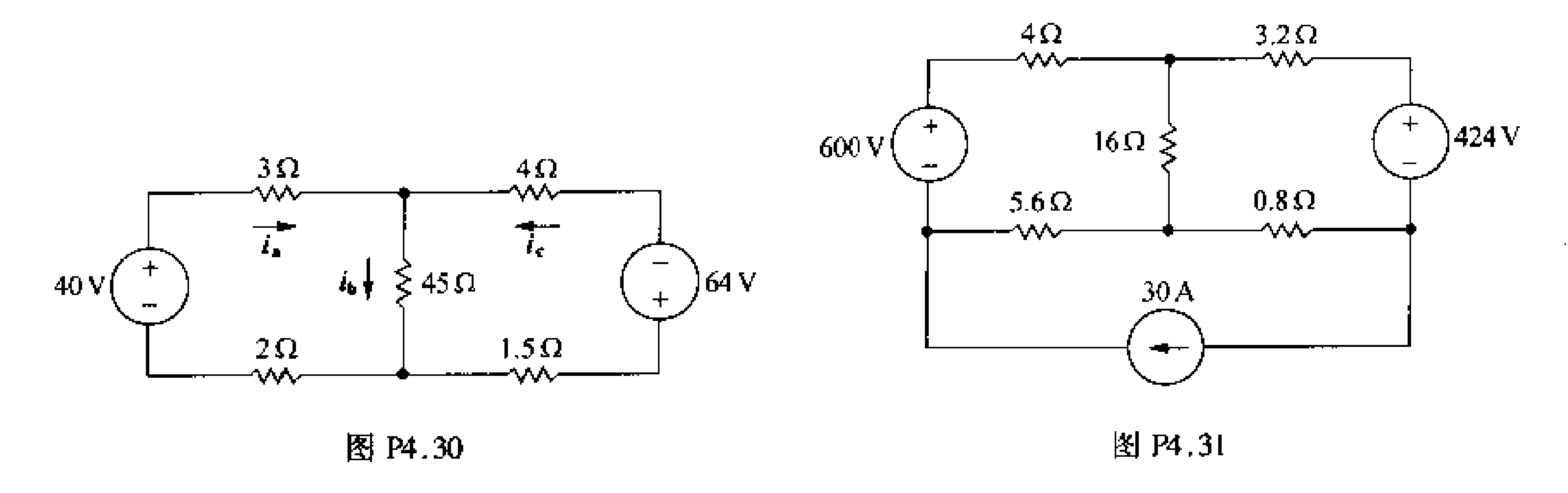


图 P4.30　　图 P4.31

P4.32 (a) 用网孔电流法求图 P4.32 所示电路产生的全部功率。

(b) 通过证明产生的功率等于消耗的功率检验答案。

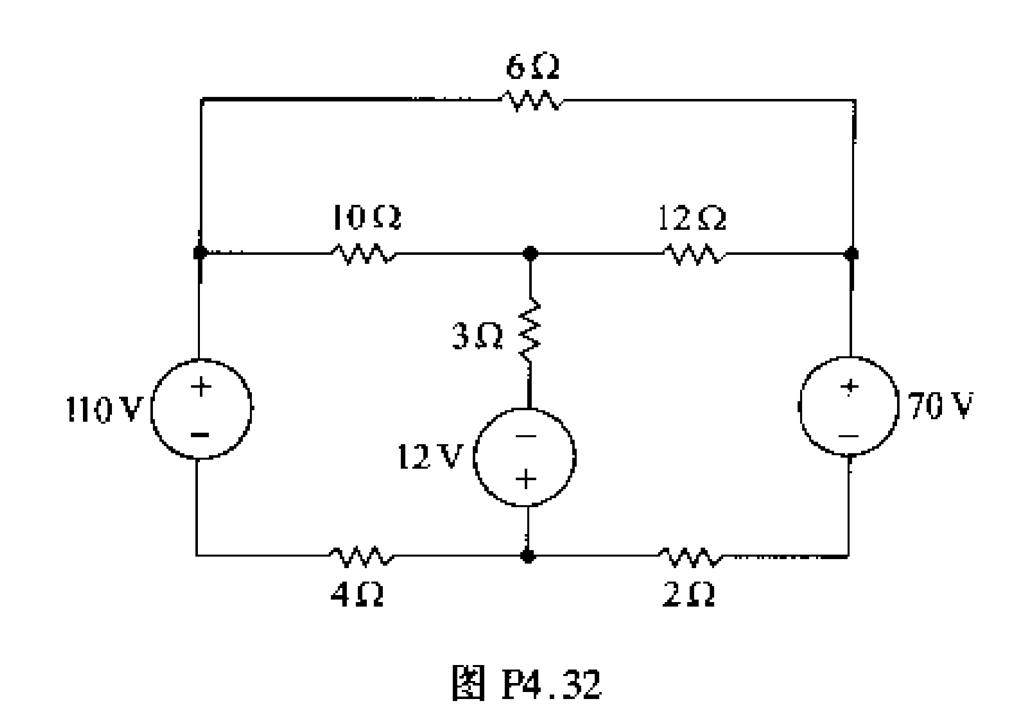


图 P4.32

P4.33 (a) 用网孔电流法求图 P4.33 所示电路中的 i_{Δ}。

(b) 求独立电流源释放的功率。

(c) 求非独立电压源释放的功率。

P4.34 用网孔电流法求图 P4.34 所示电路产生的全部功率。

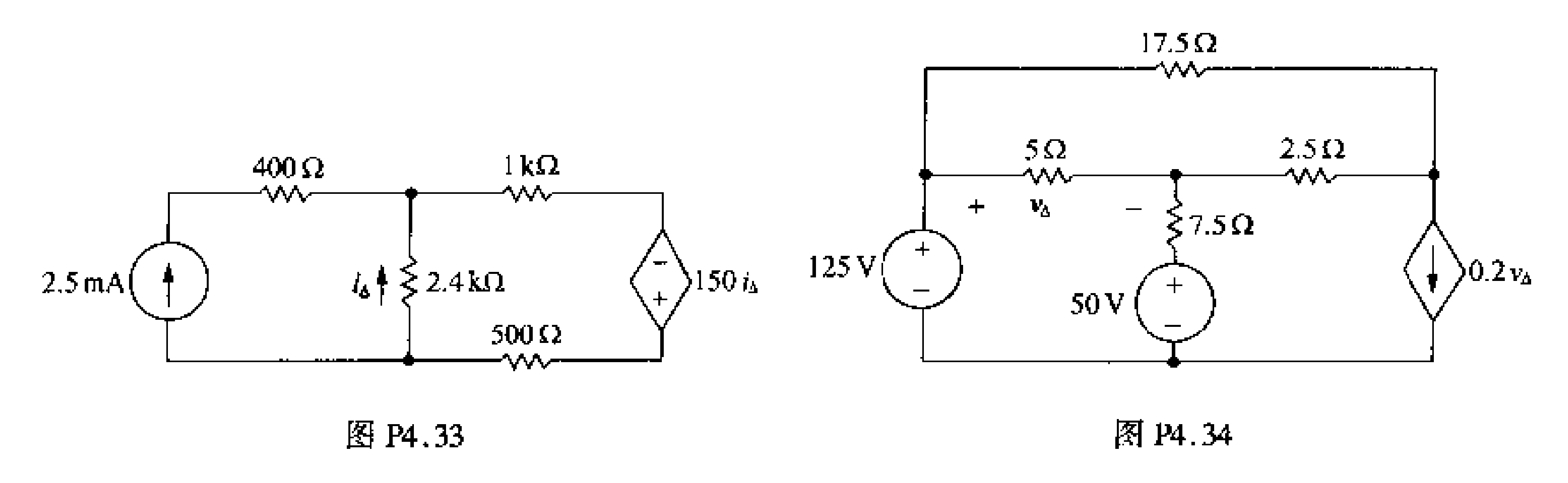


图 P4.33　　　　图 P4.34

P4.35 用网孔电流法求图 P4.35 所示电路中 8 Ω 电阻上的功率损耗。

P4.36 (a) 用网孔电流法求图 P4.36 所示电路中的支路电流 $i_a \sim i_e$。

(b) 通过证明电路产生的全部功率等于消耗的全部功率检验解答。

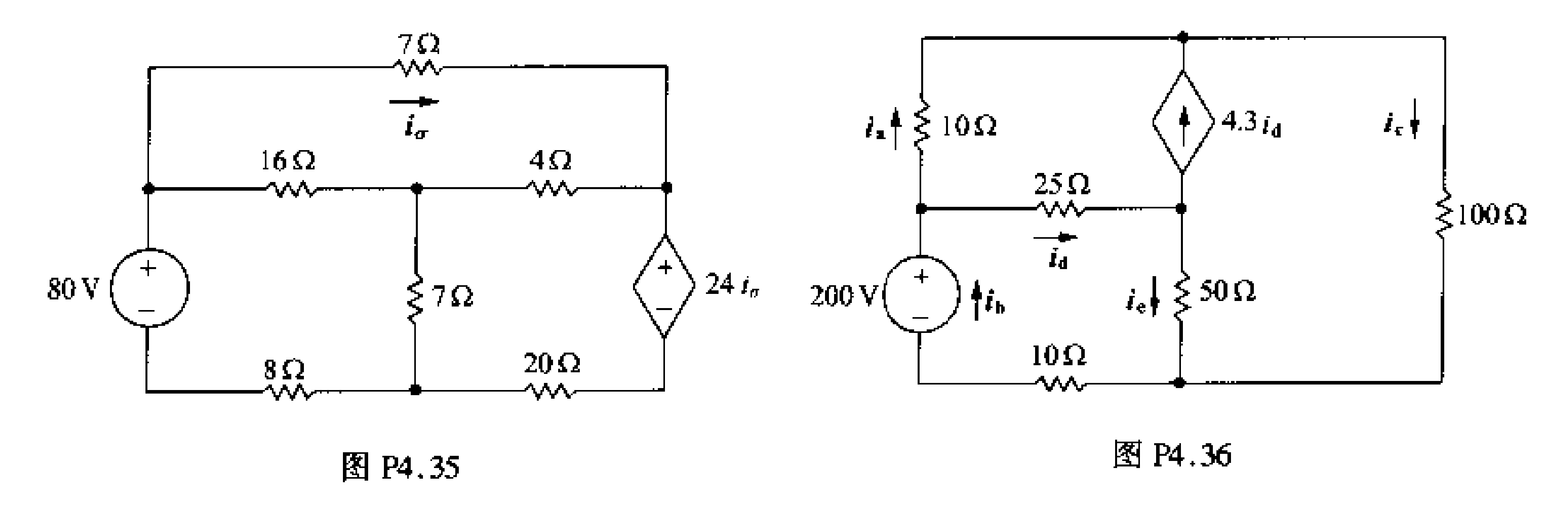


图 P4.35　　　　图 P4.36

P4.37 用网孔电流法求图 P4.37 所示电路中非独立电压源释放的功率。

P4.38 用网孔电流法求图 P4.38 所示电路中产生的全部功率。

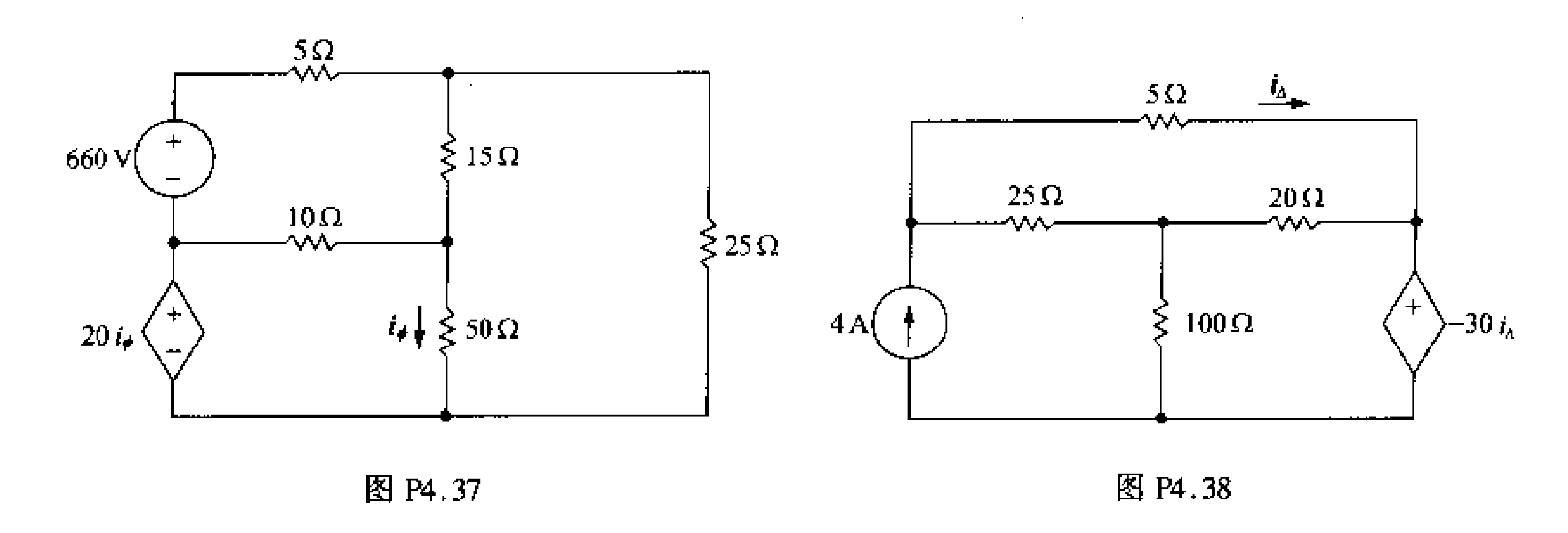


图 P4.37　　图 P4.38

P4.39 (a) 用网孔电流法求图 P4.39 所示电路中的 v_o。

(b) 求非独立源释放的功率。

P4.40 用网孔电流法求图 P4.40 所示电路中非独立电压源产生的功率。

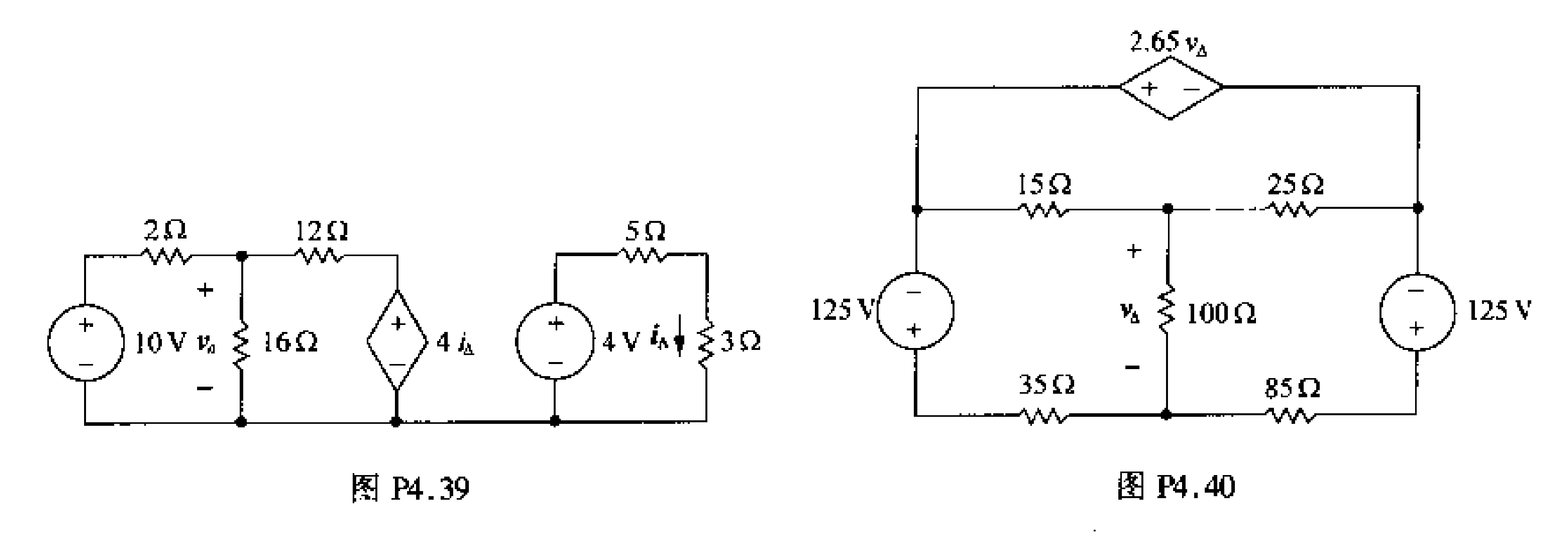


图 P4.39　　图 P4.40

P4.41 (a) 用网孔电流法确定图 P4.41 所示电路中哪个电源产生功率。

(b) 求消耗在电路中的全部功率。

P4.42 (a) 用网孔电流法求图 P4.42 所示电路中释放到 2 Ω 电阻上的功率。

(b) 在电路中产生的全部功率有百分之多少释放到 2 Ω 电阻上?

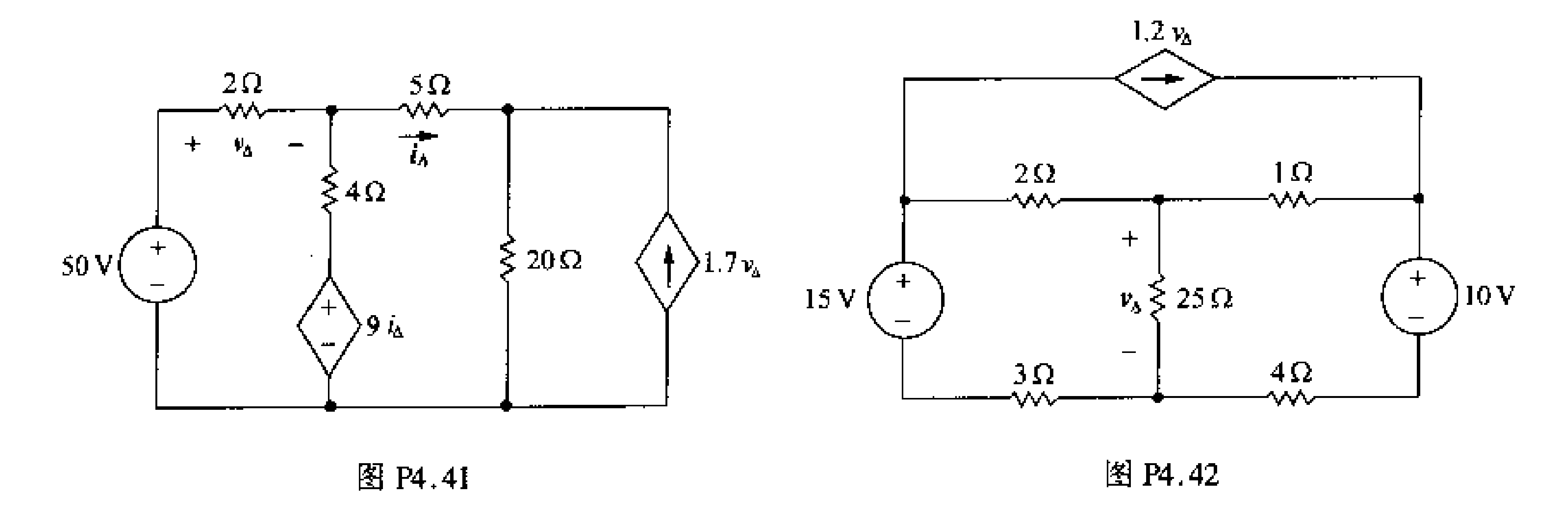


图 P4.41　　图 P4.42

P4.43 图 P4.43 所示电路中的可变直流电压源调整到使 i_o 为零。

(a) 求 V_{dc} 值。

(b) 通过证明产生的功率等于消耗的功率检验答案。

P4.44 调整图 P4.44 所示电路中的可变直流电流源，使 15 A 电流源产生的功率是3 750 W，求此时 i_{dc} 值。

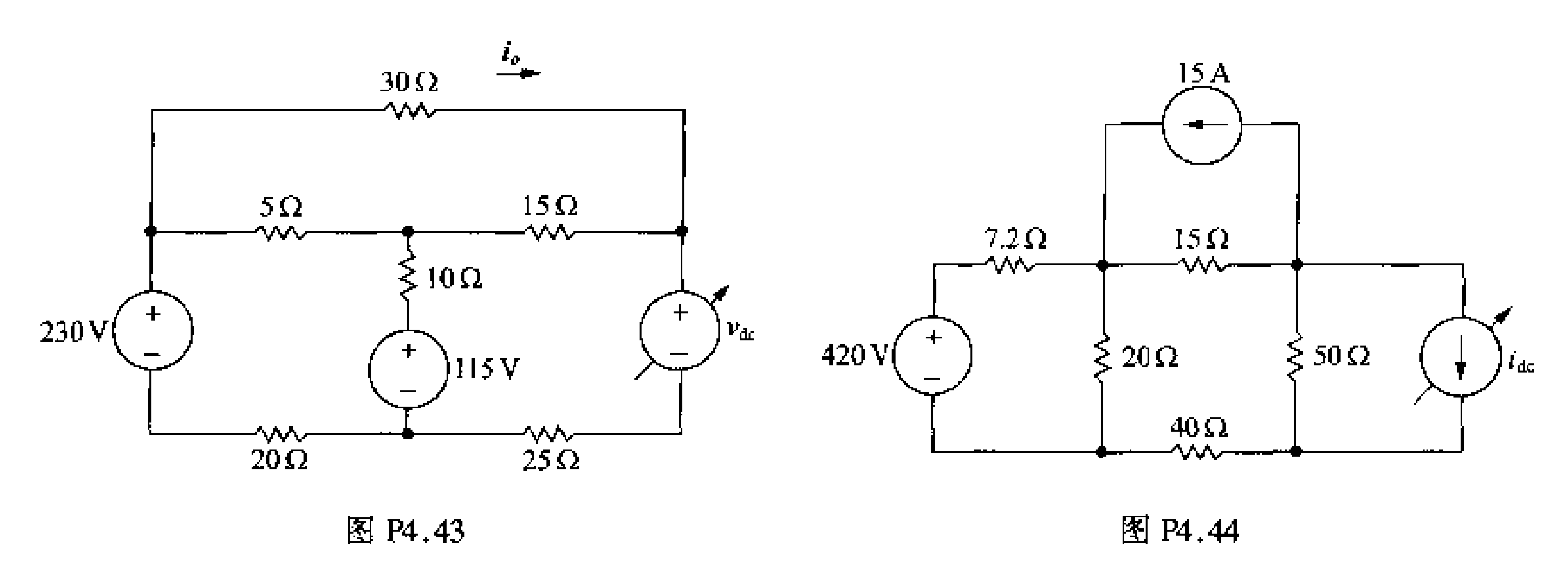


图 P4.43　　图 P4.44

P4.45 图 P4.45 所示电路是一个典型的三线分配系统的直流形式。电阻 R_a，R_b 和 R_c 表示三条导线的电阻，三条导线连接到三个负载 R_1，R_2 和 R_3，提供125/250 V 电压。电阻 R_1 和 R_2 表示连接到 125 V 电路的负载，电阻 R_3 表示连接到 250 V 电路的负载。

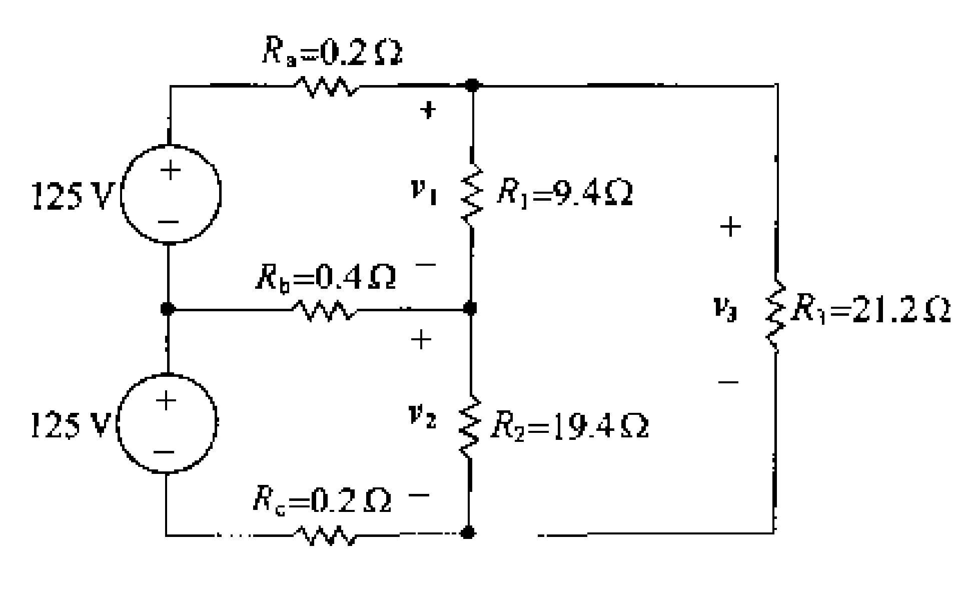


图 P4.45

(a) 计算 v_1，v_2 和 v_3。

(b) 计算释放到 R_1，R_2 和 R_3 上的功率。

(c) 电源产生的全部功率有百分之多少释放到负载上？

(d) R_b 支路表示分配电路的中性导线。如果中性导线开路，会带来什么不利影响？(提示：计算 v_1 和 v_2，使用这个电路上的电器或负载应该有 125 V 额定标称电压。)

4.46 证明在图 P4.45 电路中只要 $R_1 = R_2$，中性导线上的电流就为零。(提示：求解作为 R_1 和 R_2 函数的中性导线电流。)

P4.47 (a) 求图 P4.47 所示电路中的支路电流 $i_a \sim i_e$。

(b) 通过证明产生的全部功率等于消耗的全部功率检验答案。

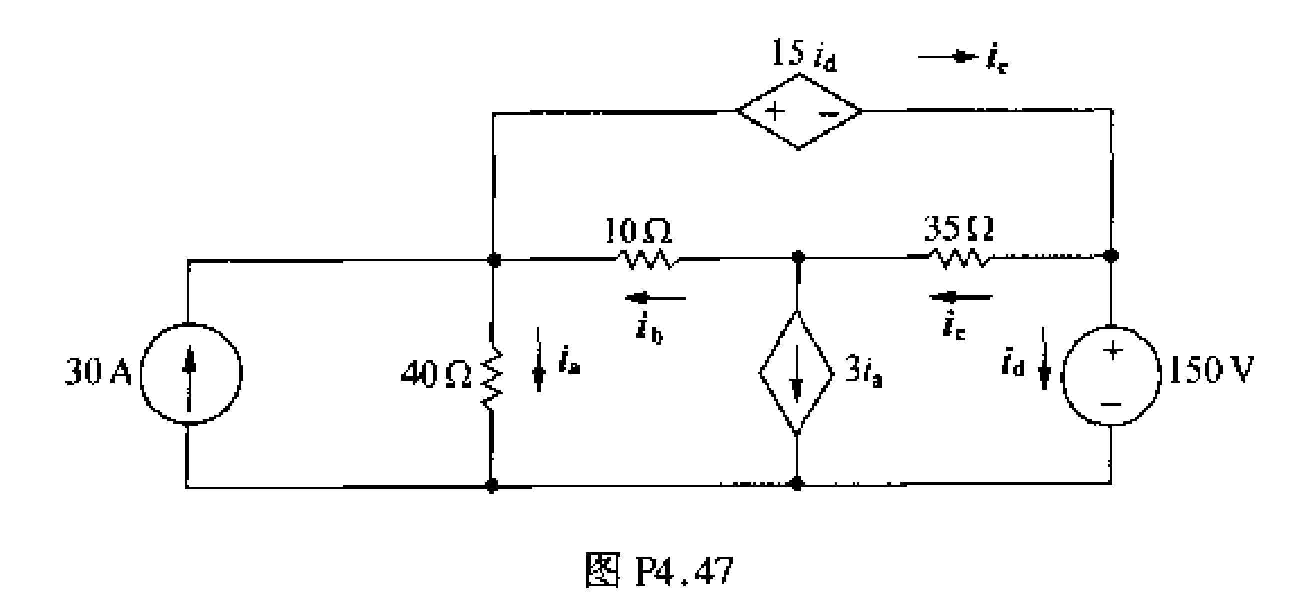


图 P4.47

P4.48 (a) 若要求图 P4.48 所示电路中 20 V 电源吸收的功率，是用节点电压法还是用网孔电流法？解释其选择。

(b) 使用在(a)中选择的方法求功率。

P4.49 假定求图 P4.49 所示电路中 10 Ω 电阻上的功率损耗。

(a) 将推荐哪种电路分析方法？解释为什么。

(b) 使用推荐的分析方法求 10 Ω 电阻上的功率损耗。

(c) 如果问题是求 19.6 A 电流源产生的功率，改变前面的推荐吗？请解释。

(d) 求 19.6 A 电流源产生的功率。

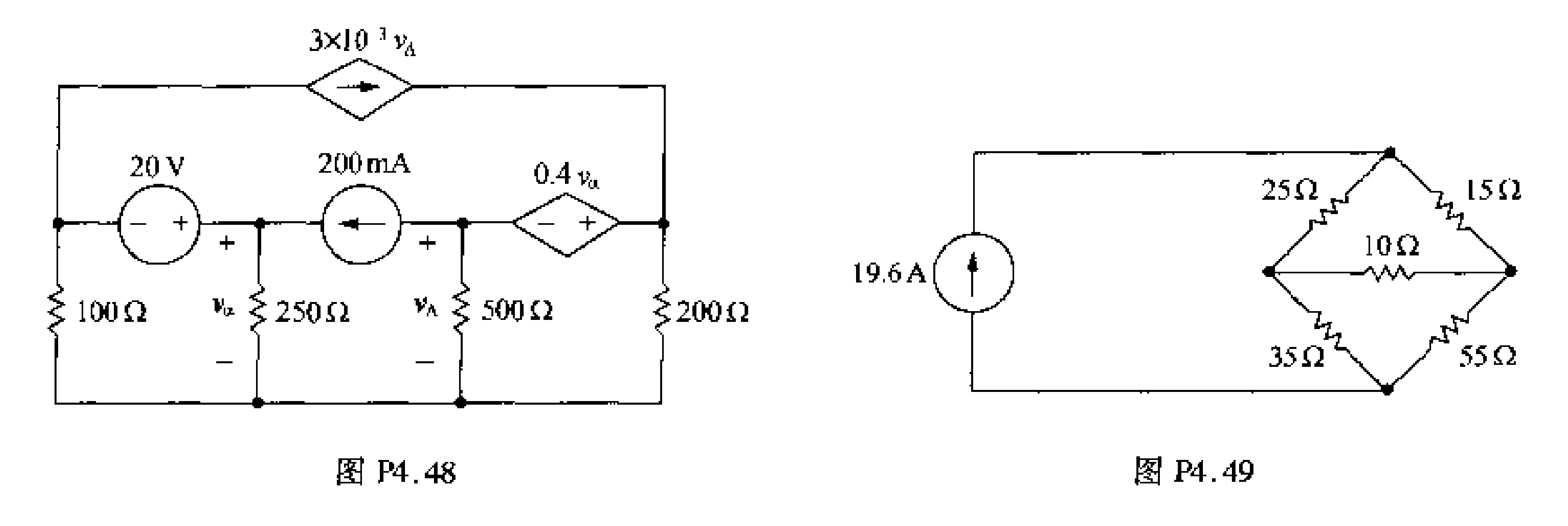


图 P4.48　　　　图 P4.49

P4.50 一个 25 Ω 电阻与图 P4.49 所示电路中的 19.6 A 电流源并联。假定计算电流源产生的功率。

(a) 推荐哪种电路分析方法？解释为什么。

(b) 求电流源产生的功率。

P4.51 (a) 连续使用适当的电源变换，求图 P4.51 所示电路中 5 kΩ 电阻上的电流。

(b) 使用(a)的结果，倒回电路以求 75 V 电源产生的功率。

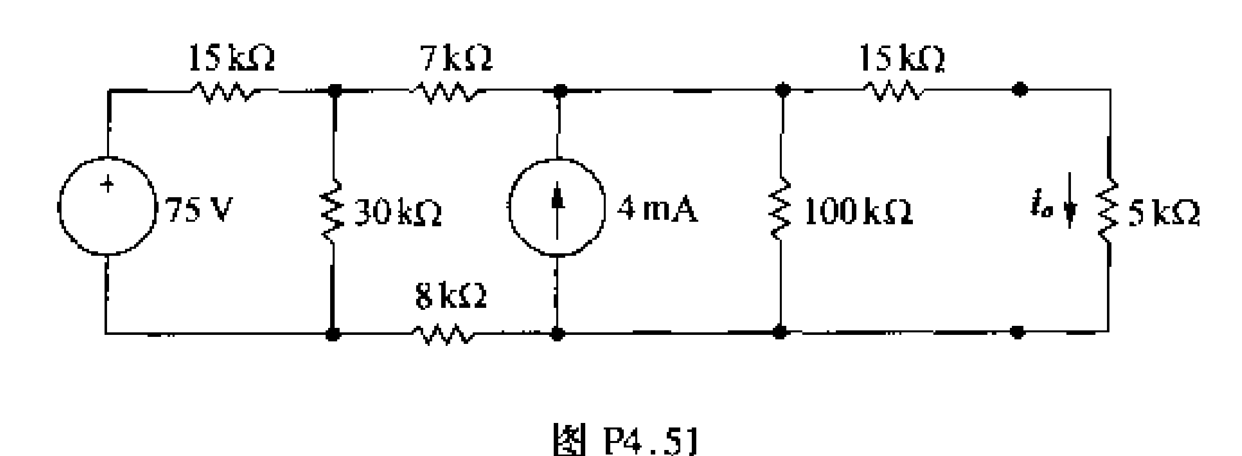


图 P4.51

P4.52 (a) 连续使用电源变换，求图 P4.52 所示电路中的电流 i_o。

(b) 用节点电压法求 i_o 检验答案。

P4.53 (a) 用电源变换，求图 P4.53 所示电路中的 v_o。

(b) 求 300 V 电源产生的功率。

(c) 求 10 A 电流源产生的功率。

(d) 检验产生的全部功率等于消耗的全部功率。

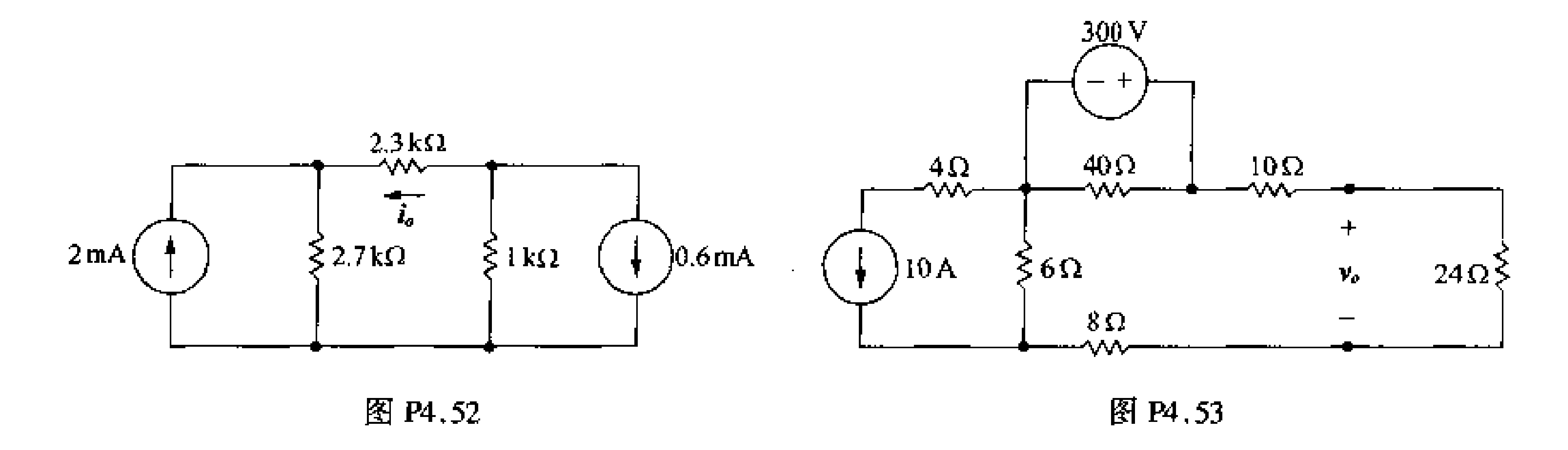


图 P4.52　　图 P4.53

P4.54 (a) 连续使用电源变换,求图 P4.54 所示电路中的电流 i_o。

(b) 用网孔电流法求 i_o 检验答案。

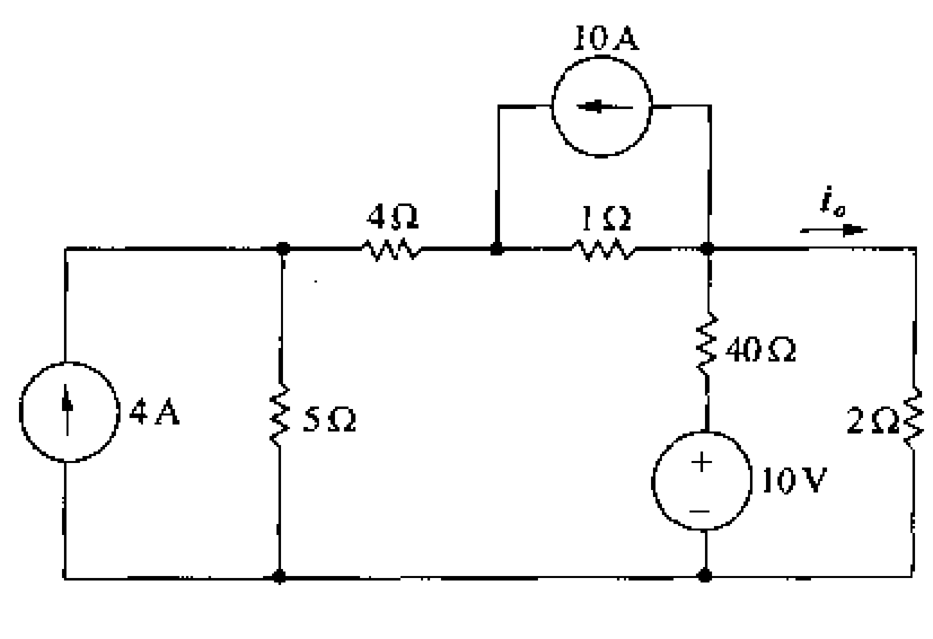


图 P4.54

4.55 一个汽车电池,当与汽车收音机连接时,提供 12.5 V 电压;当与一组前灯连接时,提供 11.7 V 电压。假定收音机模拟为 6.25 Ω 电阻,前灯模拟为 0.65 Ω 电阻。求电池的戴维南和诺顿等效电路。

P4.56 求图 P4.56 所示电路 a,b 端的戴维南等效电路。

P4.57 用一个电压表与一个 100 kΩ 的电阻测量图 P4.57 所示电路中的电压 v_{ab}。

(a) 电压表的读数是多少?

(b) 如果误差百分数定义为[(测量值 - 实际值)/ 实际值] × 100%,那么电压表读数的误差百分数是多少?

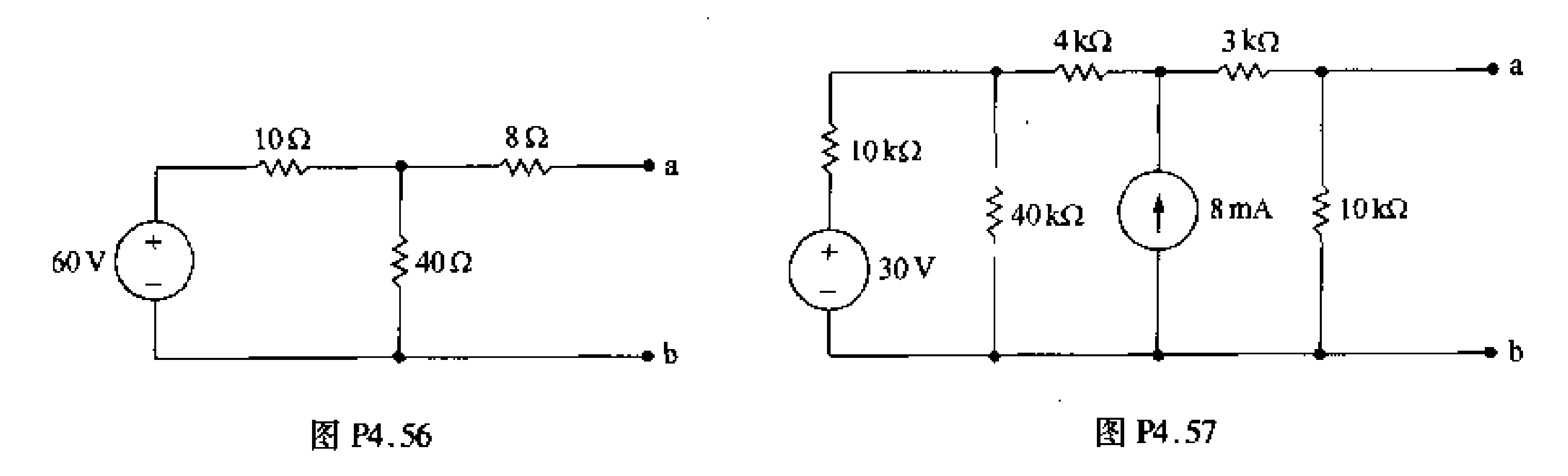


图 P4.56　　图 P4.57

P4.58 (a) 通过求电路的开路电压和短路电流求解图 P4.58 所示电路 a,b 端的戴维南等效电路。

(b) 移去独立源求解戴维南电阻。将结果与(a)所求的戴维南电阻比较。

P4.59 求图 P4.59 所示电路 a,b 端的戴维南等效电路。

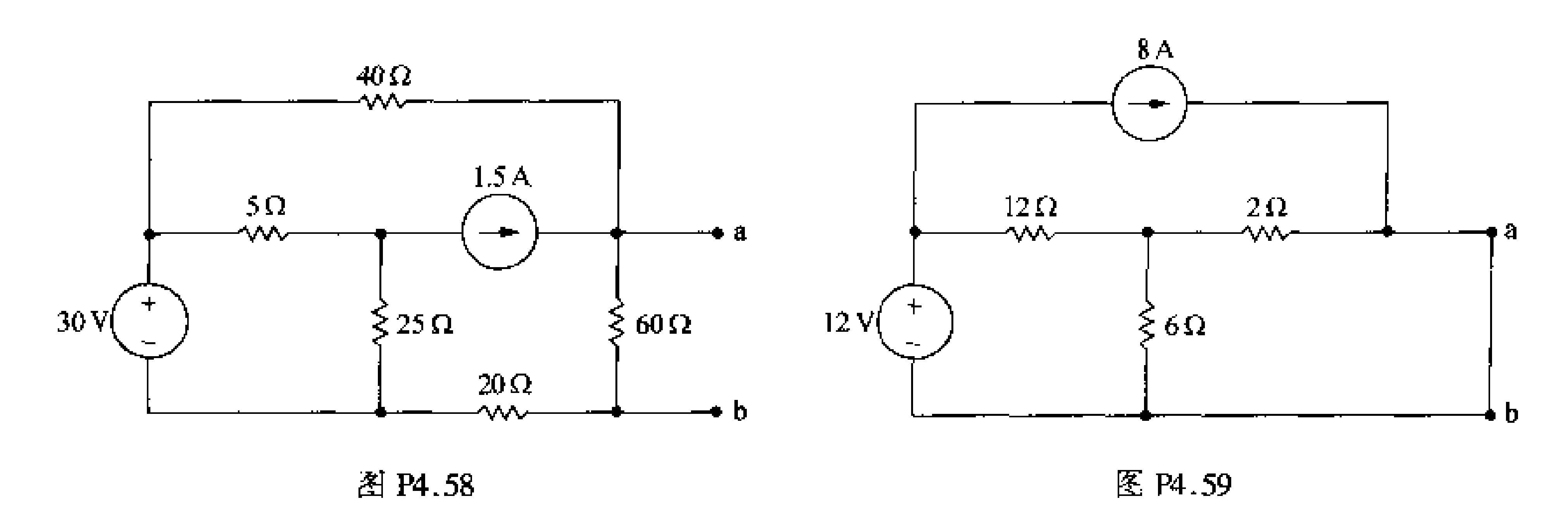


图 P4.58　　图 P4.59

P4.60　求图 P4.60 所示电路 a,b 端的戴维南等效电路。

P4.61　求图 P4.61 所示电路 a,b 端的戴维南等效电路。

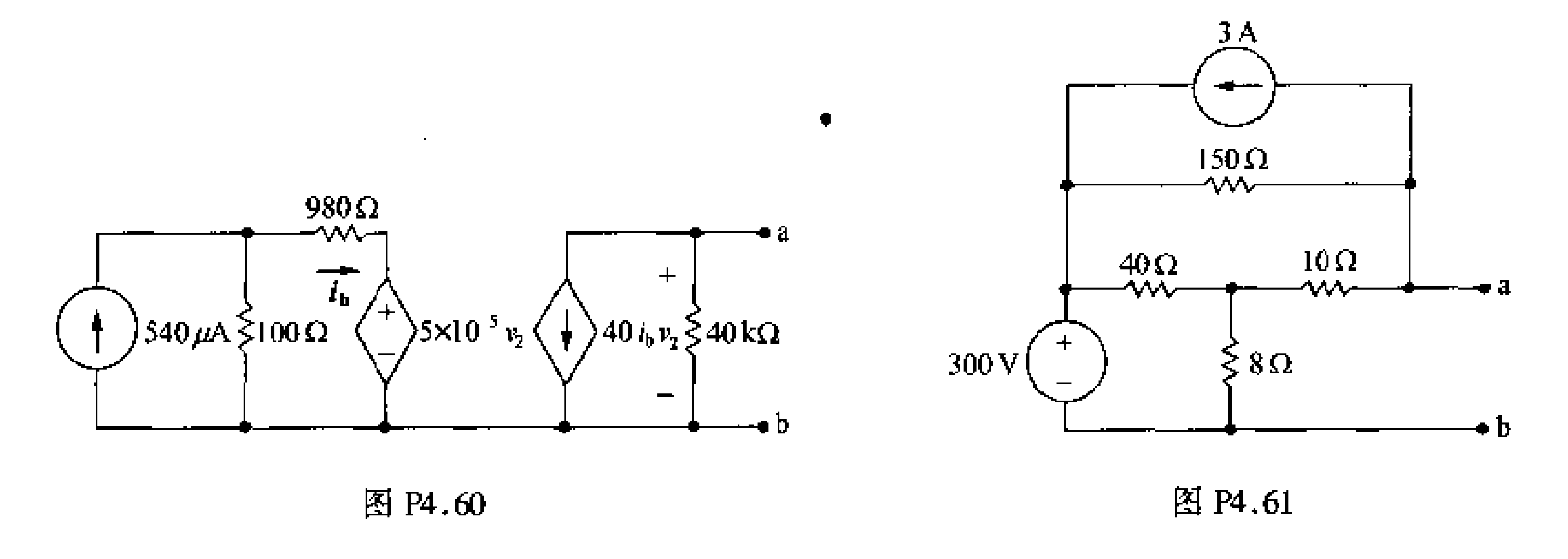


图 P4.60　　图 P4.61

P4.62　求图 P4.62 所示电路 a,b 端的诺顿等效电路。

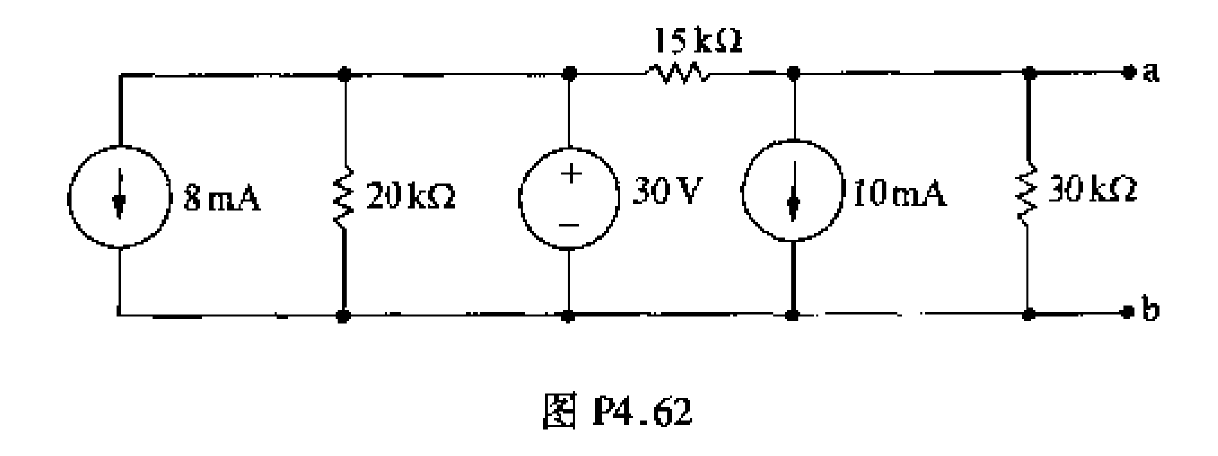


图 P4.62

P4.63　确定图 P4.63 所示电路中的 i_o 和 v_o，其中 R_o 是 0 Ω,2 Ω,6 Ω,10 Ω,15 Ω,20 Ω,30 Ω,40 Ω,50 Ω 和 70 Ω。

P4.64　在 R_2 等于 1 200 Ω 时，图 P4.64 所示电路中的惠斯登电桥平衡。如果检流计有30 Ω电阻，当 R_2 调整到 1 204 Ω 电桥不平衡时，检流计检测到的电流是多少？（提示：当 R_2 等于 1 204 Ω 时，求检流计两端的戴维南等

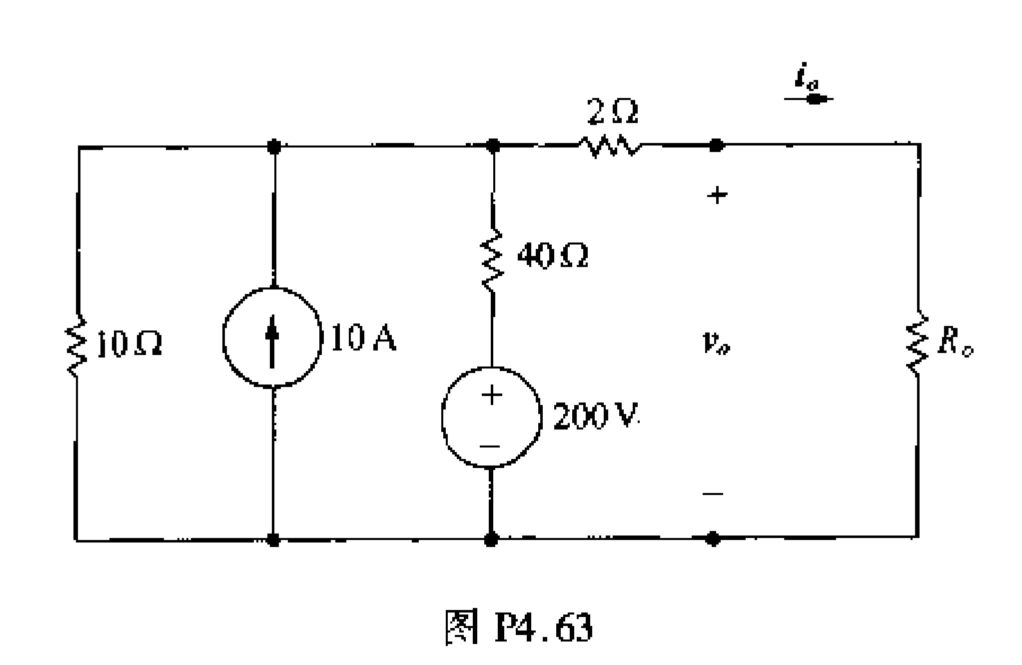


图 P4.63

效电路,注意,一旦求出戴维南等效电路,求检流计支路的不平衡电流是很容易的。)

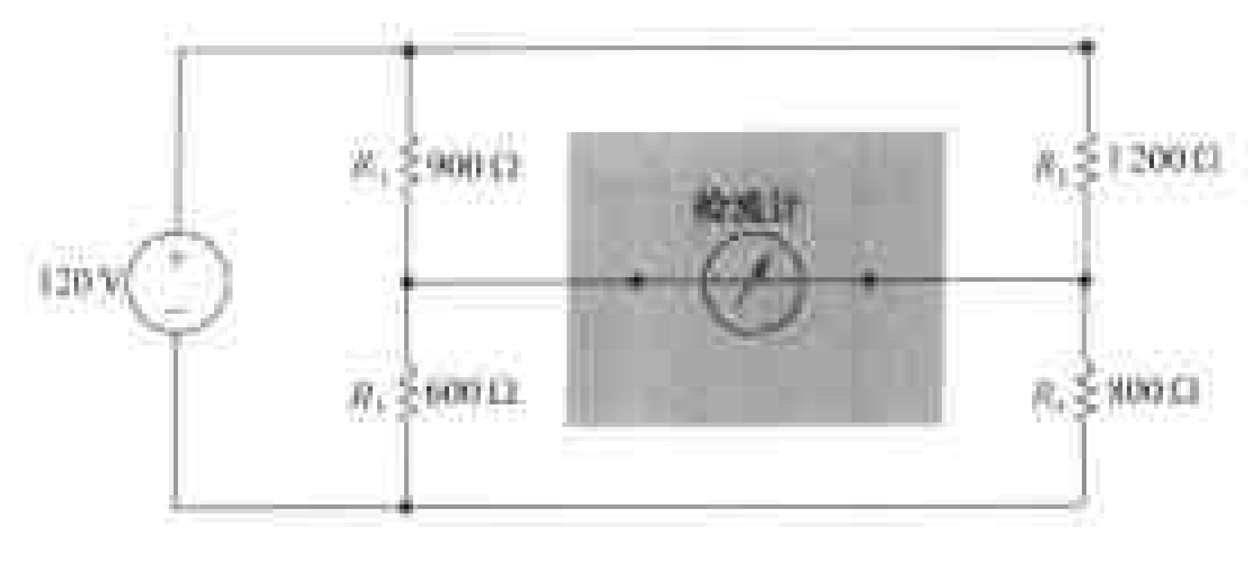


图 P4.64

P4.65 用电压表测量图 P4.65 中的电压 v_e,它的读数是 7.5 V。

(a) 电压表的电阻是多少?

(b) 电压测量的误差百分数是多少?

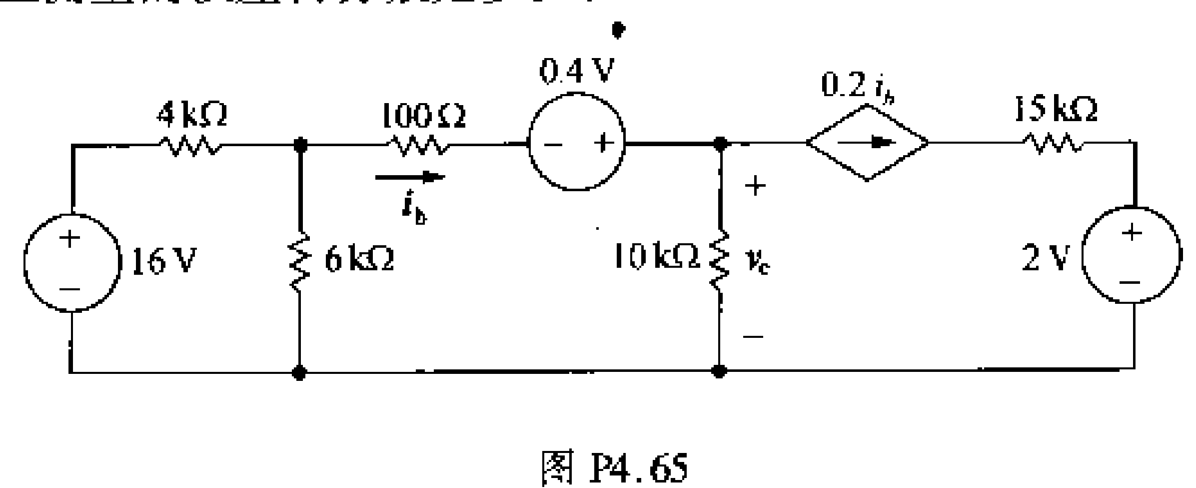


图 P4.65

P4.66 求图 P4.66 所示电路 a,b 端的戴维南等效电路。

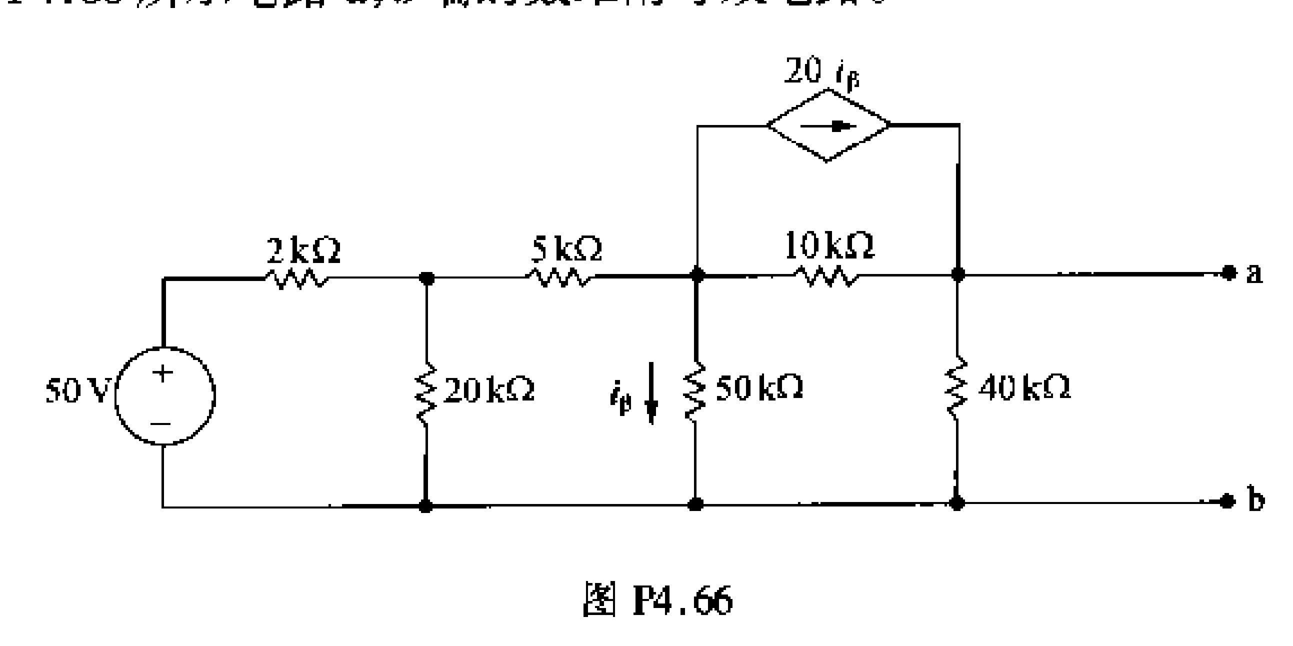


图 P4.66

4.67 戴维南等效电路也可以通过测量所关心的一对端子来确定。假定图 P4.67 所示电路 a,b 端被测量,当 15 kΩ 电阻连接到 a,b 端时,电压 v_{ab} 的测量值为45 V,当5 kΩ电阻连接到 a,b 端时,电压 v_{ab} 的测量值为 25 V。求网络 a,b 端的戴维南等效电路。

P4.68 用电流表测量图 P4.68 中的电流 i_ϕ,其读数是 10 A。

(a) 电流表的电阻是多少?

(b) 电流测量的误差百分数是多少?

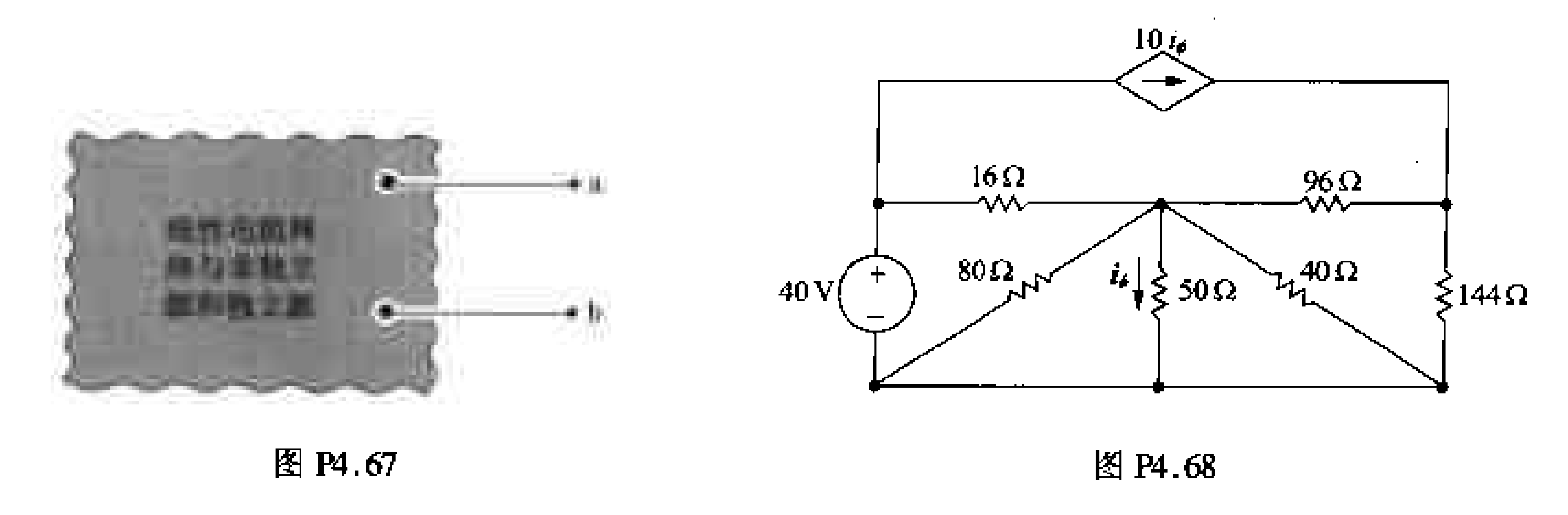


图 P4.67　　图 P4.68

P4.69 求图 P4.69 所示电路 a,b 端的戴维南等效电路。

P4.70 求图 P4.70 所示电路 a,b 端的戴维南等效电路。

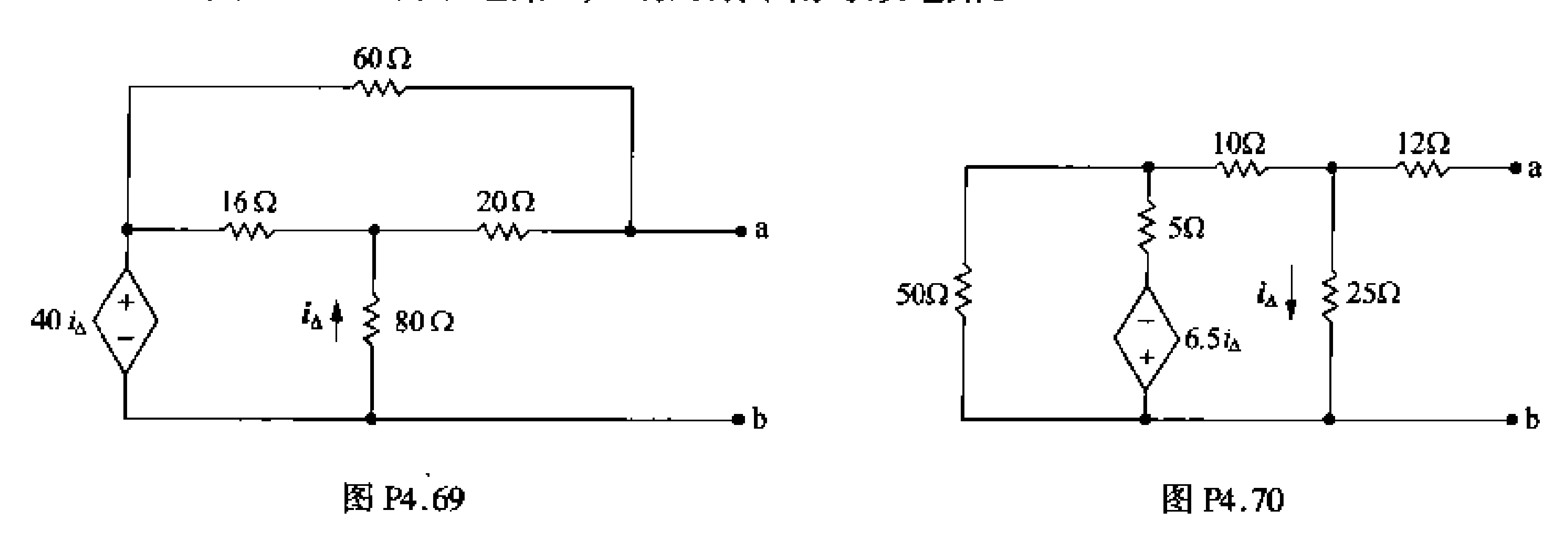


图 P4.69　　图 P4.70

P4.71 (a) 求图 P4.71 所示电路中的可变电阻 R_o 的值,使得最大功率传输到 6 Ω 电阻。(提示:草率得出的结论可能出错。)

(b) 能够释放到 6 Ω 电阻的最大功率是多少?

图 P4.71

P4.72 一个可变电阻连接在图 P4.66 所示电路 a,b 端,可变电阻已调节到使最大功率传输到 R_o。

(a) 求 R_o 的值。

(b) 求释放到 R_o 的最大功率。

(c) 求电路中产生的全部功率有百分之多少释放到 R_o。

4.73 (a) 计算问题 4.63 中释放到每个 R_o 的功率值。

(b) 相对电阻 R_o,绘出释放到 R_o 的功率图。

(c) R_o 是什么值时,释放到 R_o 的功率为最大值?

P4.74 在图 P4.74 所示电路中的可变电阻(R_o),已调整到使电阻上的功率损耗为 250 W。求满足这个条件的 R_o 的值。

P4.75 图 P4.75 所示电路中的可变电阻已调节到使最大功率传输到 R_o。

(a) 求 R_o 的值。

(b) 求能够释放到 R_o 的最大功率。

P4.76 图 P4.75 所示电路中,当 R_o 设置满足最大功率传输时,电路产生的全部功率的百分

之多少消耗在 R_o 上?

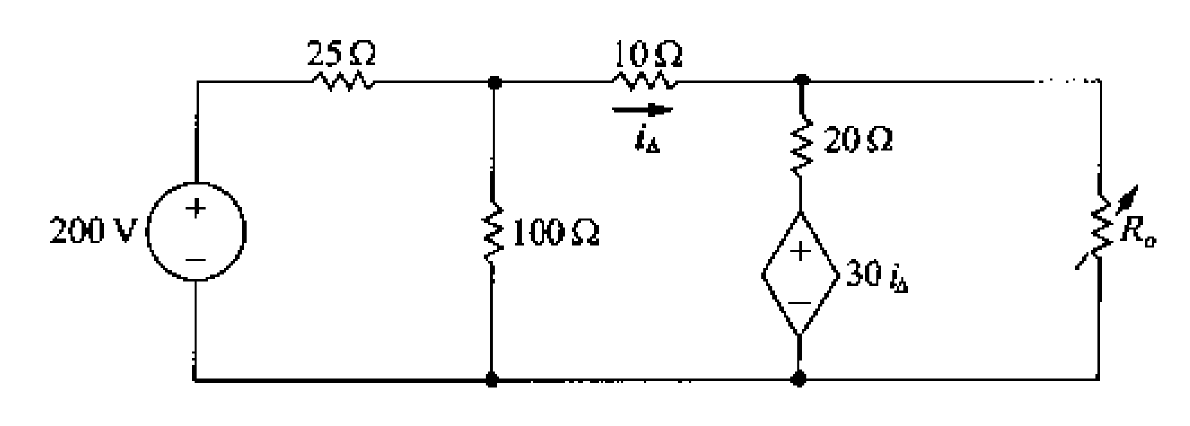


图 P4.74

P4.77 图 P4.77 所示电路中的可变电阻(R_o)已调节到使最大功率传输到 R_o。

(a) 求 R_o 的值。

(b) 求能够释放到 R_o 的最大功率。

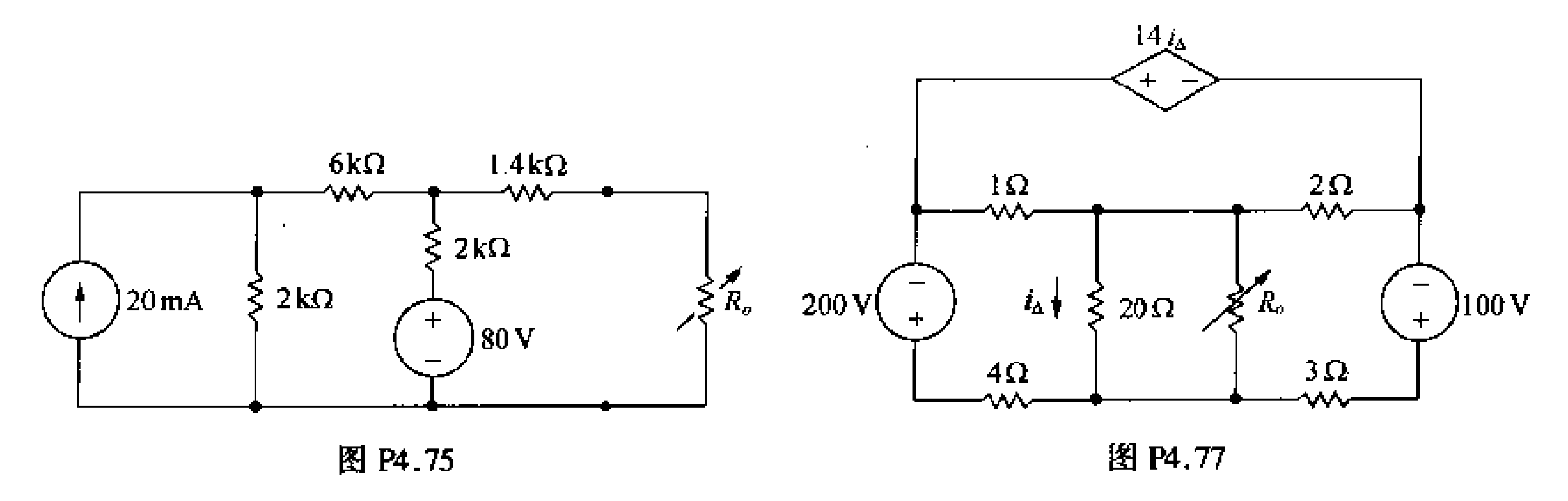


图 P4.75　　图 P4.77

P4.78 图 P4.77 所示电路中,电路产生的全部功率的百分之多少释放到 R_o 上?

P4.79 图 P4.79 所示电路中的可变电阻(R_L)已调节到使最大功率传输到 R_L。

(a) 求 R_L 的值。

(b) 求传输到 R_L 的最大功率。

P4.80 图 P4.80 所示电路中的可变电阻(R_o)已调节到使最大功率传输到 R_o。电路产生的全部功率的百分之多少释放到 R_o 上?

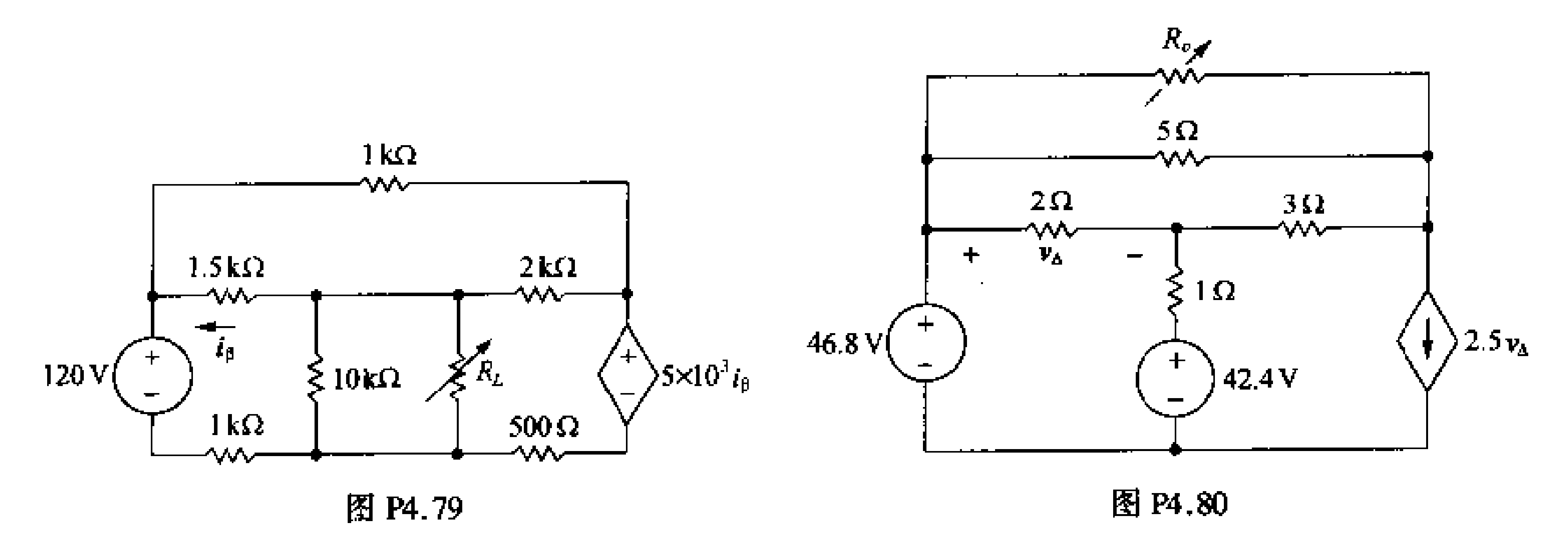


图 P4.79　　图 P4.80

P4.81 图 P4.81 所示电路中的可变电阻(R_o)经过调节,它能从电路吸收到最大功率。

(a) 求 R_o 的值。

(b) 求最大功率。

(c) 电路产生的全部功率的百分之多少释放到 R_o 上?

P4.82 图 P4.82 所示电路中的可变电阻(R_o)已调节到使最大功率传输到 R_o。

(a) 求 R_o 的值。

(b) 求释放到 R_o 的最大功率。

(c) 当 R_o 已调节到(a)求的值时,280 V 电源释放到电路的功率是多少?

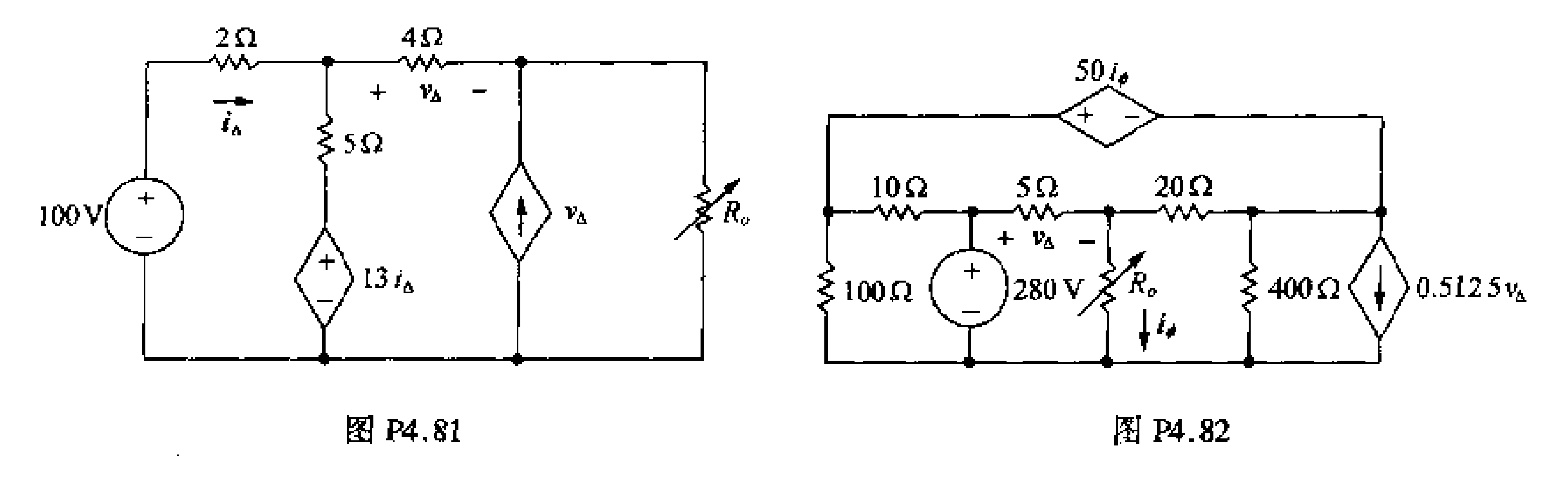


图 P4.81　　　图 P4.82

P4.83 用叠加原理求图 P4.34 电路中离开 50 V 电源正端的电流。

P4.84 用叠加原理求图 P4.42 电路中的 v_Δ。

P4.85 用叠加原理求图 P4.40 电路中的 v_Δ。

P4.86 用叠加原理求图 P4.47 电路中非独立电流源上的电压。非独立电流源的上端设为电压的正参考极性。

P4.87 用叠加原理求图 P4.87 电路中的 i_o 和 v_o。

P4.88 用叠加原理求图 P4.88 电路中的电流 i_o。

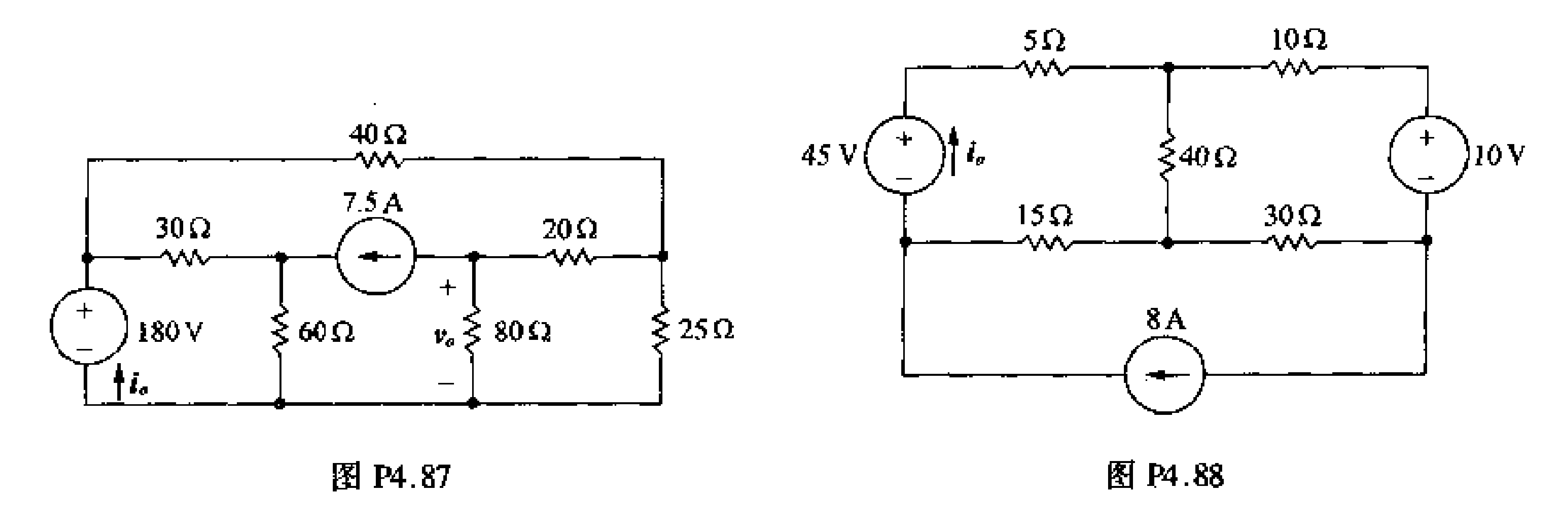


图 P4.87　　　图 P4.88

P4.89 用叠加原理求图 P4.89 所示电路中的电流 i_o。

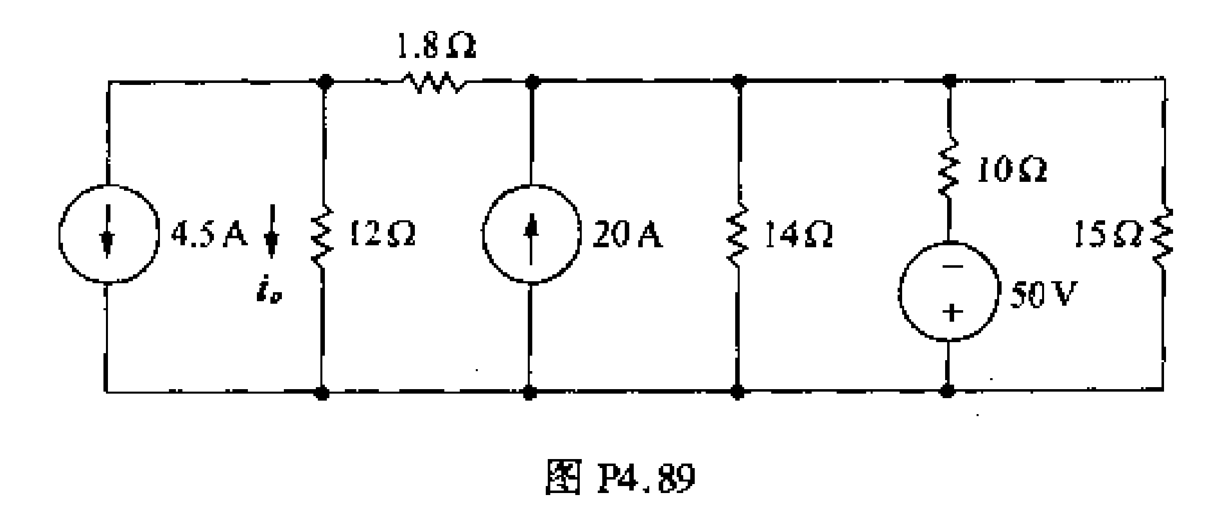


图 P4.89

P4.90 (a) 用叠加原理求图 P4.90 中 10 Ω 电阻上的电流。

(b) 求 10 Ω 电阻上的功率损耗。

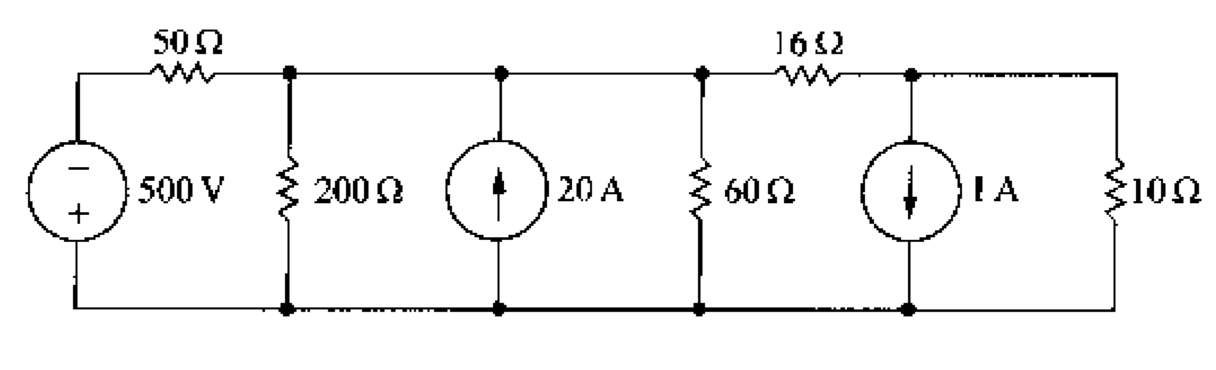


图 P4.90

P4.91 用叠加原理求图 P4.91 电路中的 v_o。

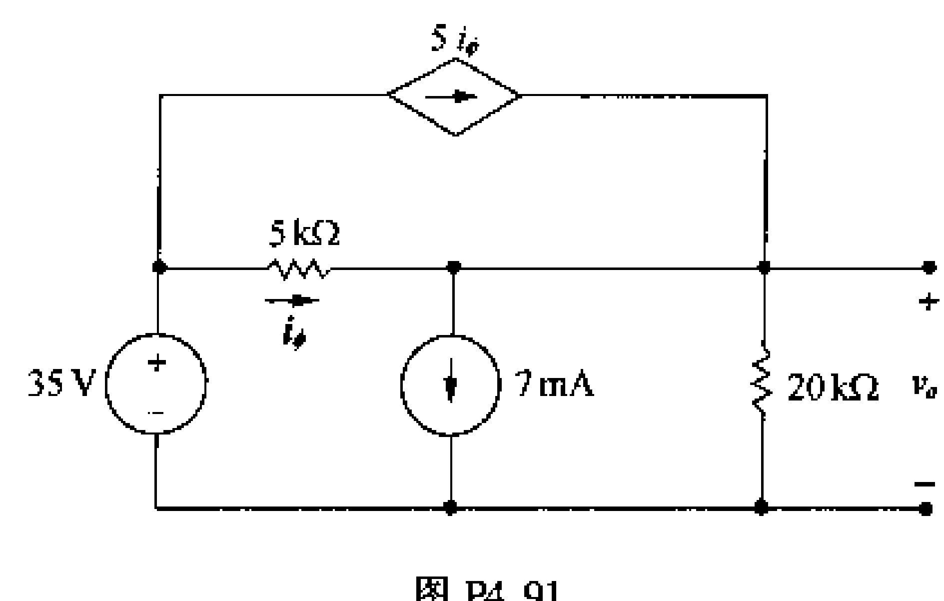


图 P4.91

P4.92 (a) 图 P4.92 所示电路中,在 10 mA 电流源接触到 a,b 端之前,电流 i_o 已知,结果为 1.5 mA,使用叠加原理求电流源接触到 a,b 端后的 i_o 值。

(b) 通过以下方式检验答案:求三个电源同时激励时的 i_o。

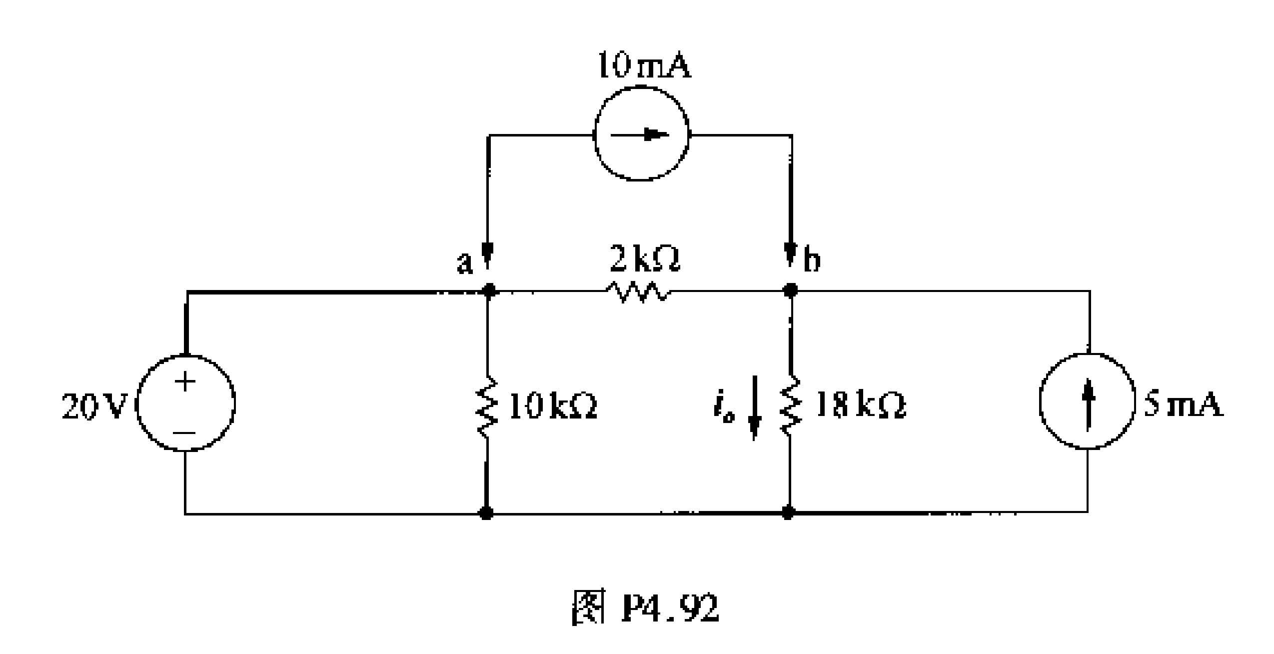


图 P4.92

4.93 实验室测量一个直流电压源,无负载时测得端电压为 75 V,连接有 20 Ω 电阻负载时,端电压为 60 V。

(a) 求直流电压源两端的戴维南等效电路。

(b) 证明电源的戴维南电阻表达式如下所示:

$$R_{Th} = \left(\frac{V_{Th}}{v_o} - 1\right) R_L$$

其中:

V_{Th} = 戴维南电压

v_o = 相对于负载电阻 R_L 的端电压

4.94 两个理想直流电源用电导线连接，电线电阻为 $r\ \Omega/\mathrm{m}$，如图 P4.94 所示。一个电阻为 $R\ \Omega$ 的负载在两个电源之间移动。如果 x 等于负载与电源 v_1 的间隔，如果 L 等于电源之间的间隔。

(a) 证明：

$$v=\frac{v_1RL+R(v_2-v_1)x}{RL+2rLx-2rx^2}$$

(b) 证明电压 v 将是最小值，如果：

$$x=\frac{L}{v_2-v_1}\left[v_1-\pm\sqrt{v_1v_2-\frac{R}{2rL}(v_1-v_2)^2}\right]$$

(c) 如果 $L=16$ km, $v_1=1\,000$ V, $v_2=1\,200$ V, $R=3.9\ \Omega$, $r=5\times10^{-5}\ \Omega/\mathrm{m}$，求 x。

(d) 对于(c)，v 的最小值是多少？

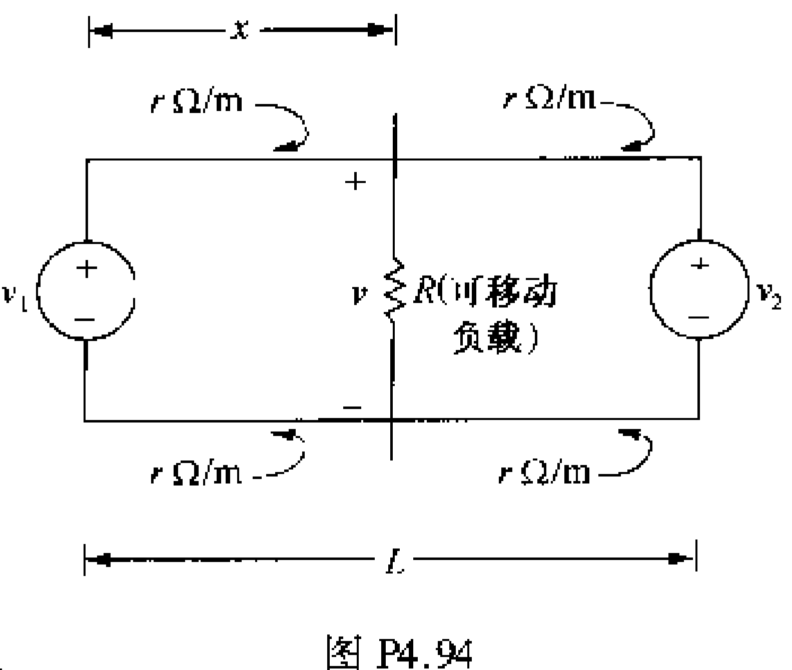


图 P4.94

4.95 假定管理员请你确定图 P4.95 电路中 1V 电源产生的功率。在计算 1V 电源产生的功率之前，管理员请你提交一份计划，说明你如何处理问题。接着，管理员请你解释选择这个解决方案的理由。

(a) 叙述你的计划，解释你的理由。

(b) 用你在(a)中计划的方法，求 1 V 电源产生的功率。

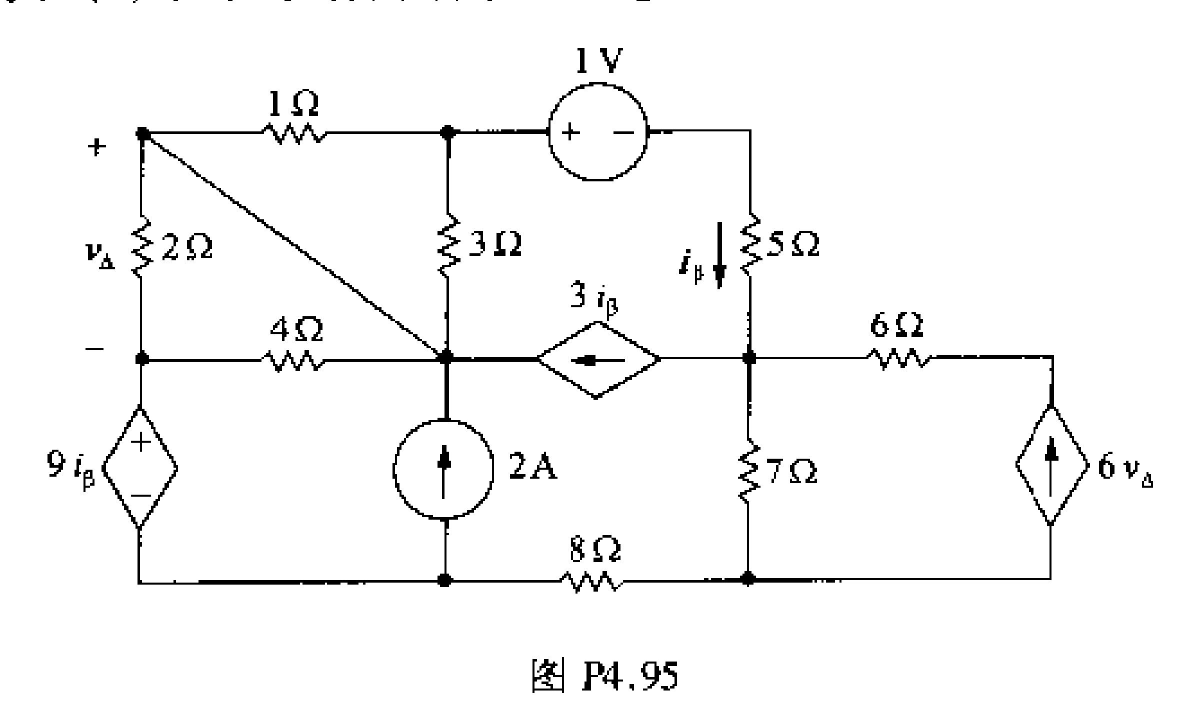


图 P4.95

P4.96 图 P4.96 电路中 2A 电流源吸收的功率。

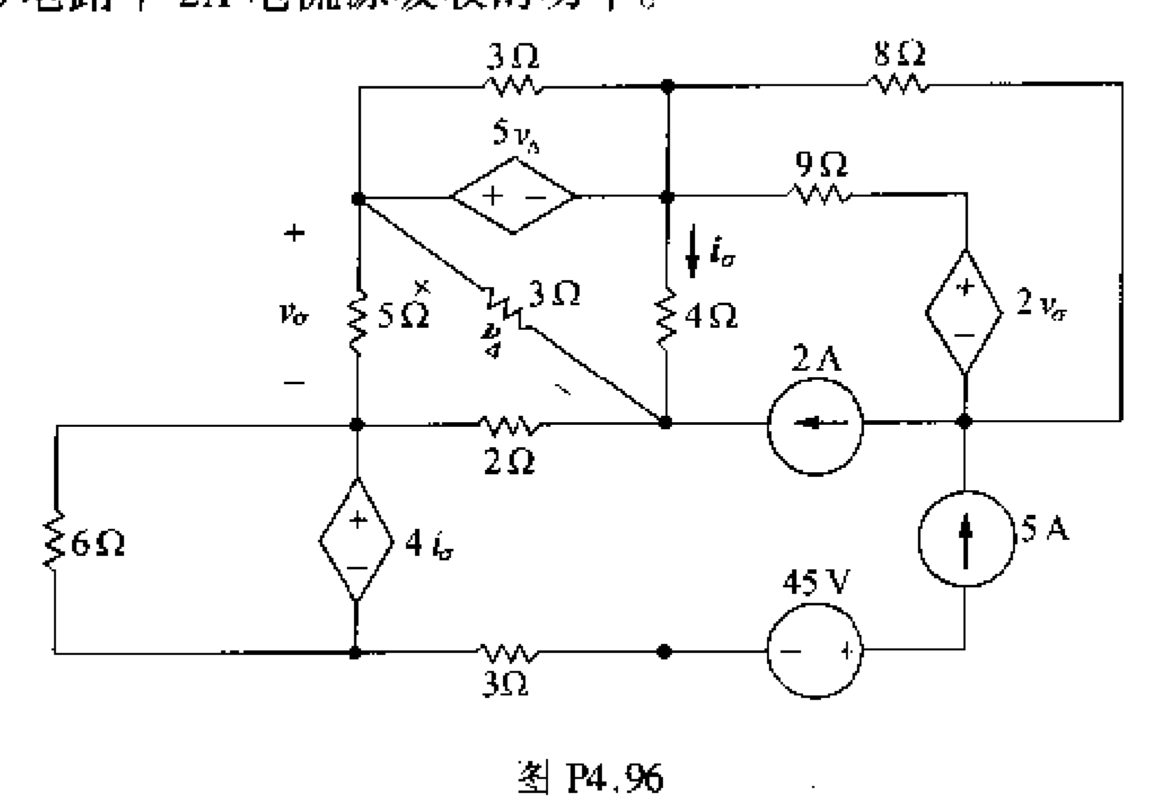


图 P4.96

P4.97 求图 P4.97 电路中 v_1,v_2 和 v_3。

P4.98 求图 P4.98 电路中的 i_1。

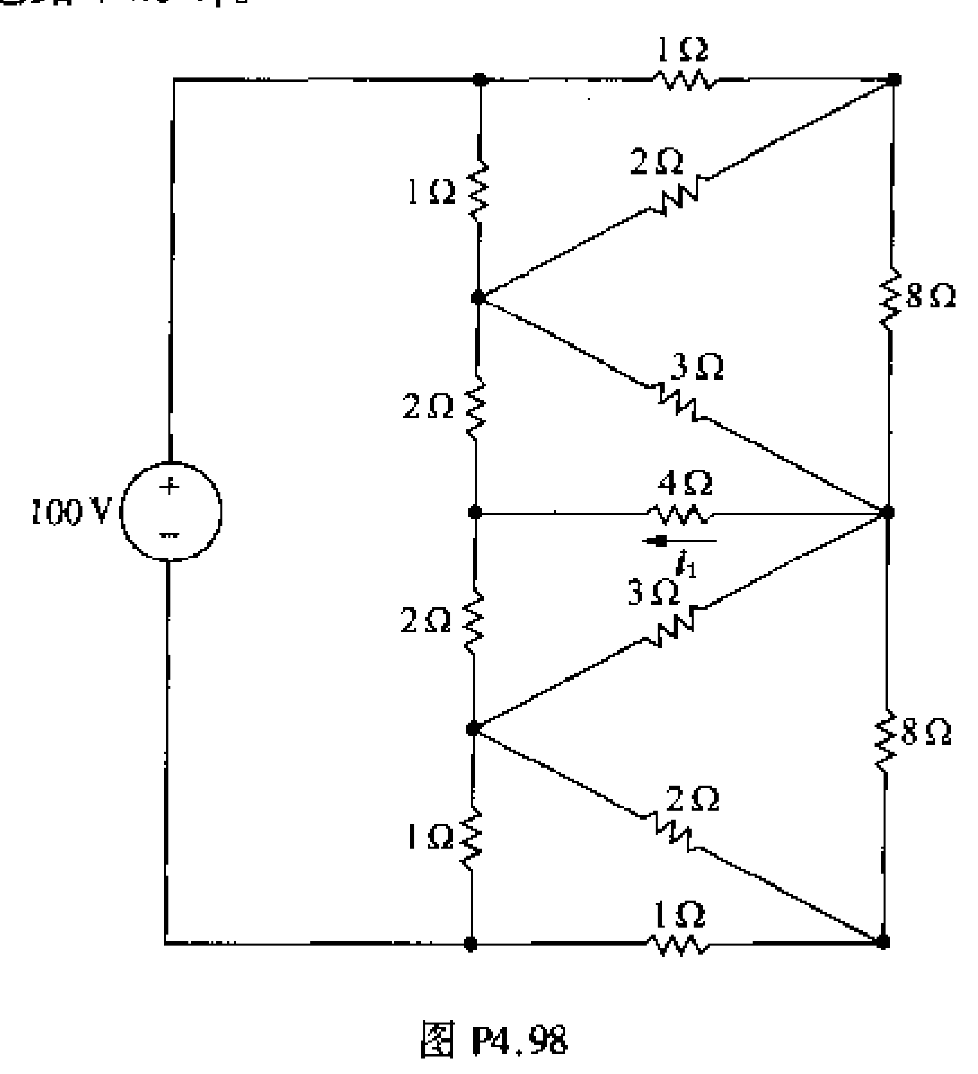


图 P4.98

◆4.99 在图 4.69 电路中,针对电源电流 I_{g1}和 I_{g2}的变化,推导 v_1 和 v_2 的灵敏度表达式。

P◆4.100 假定图 4.69 所示电路中组件的标称值是:$R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$, $R_4 = 75\ \Omega$, $I_{g1} = 12$ A, $I_{g2} = 16$ A。如果 I_{g1}的值减小到 11 A,其他组件均保持在标称值,预测 v_1 和 v_2 的值。使用类似 PSpice 或 Matlab 的工具检验其答案。

P◆4.101 如果 I_{g2}的值增加到 17 A,其他组件均保持在标称值,重复问题 4.100。使用类似 PSpice 或 Matlab 的工具检验其答案。

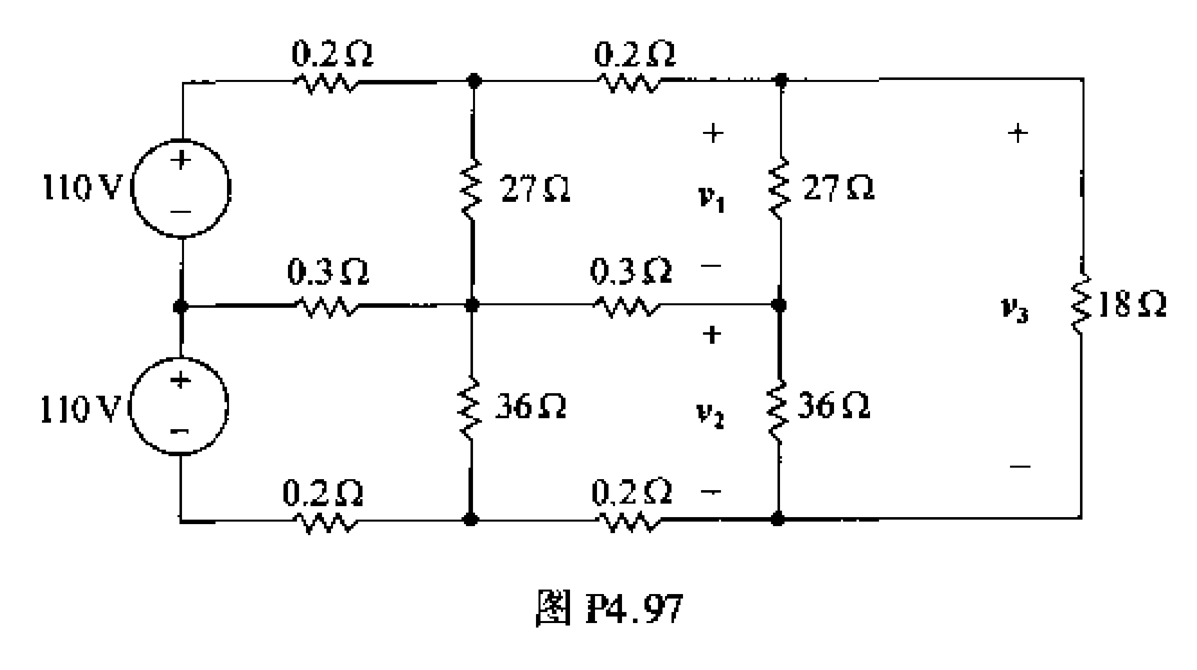


图 P4.97

P◆4.102 如果 I_{g1} 的值减小到 11 A,而且 I_{g2} 的值增加到 17 A,重复问题 4.100。使用类似 PSpice 或 Matlab 的工具检验其答案。

◆4.103 如果 R_1 和 R_3 比标称值增加 10%,R_2 和 R_4 比标称值减少 10%,I_{g1}和 I_{g2}保持在标称值没变。使用表 4.2 给出的结果,预测 v_1 和 v_2 的值。将预测值与 v_1 和 v_2 的实际值进行比较。

第5章 运算放大器

实例

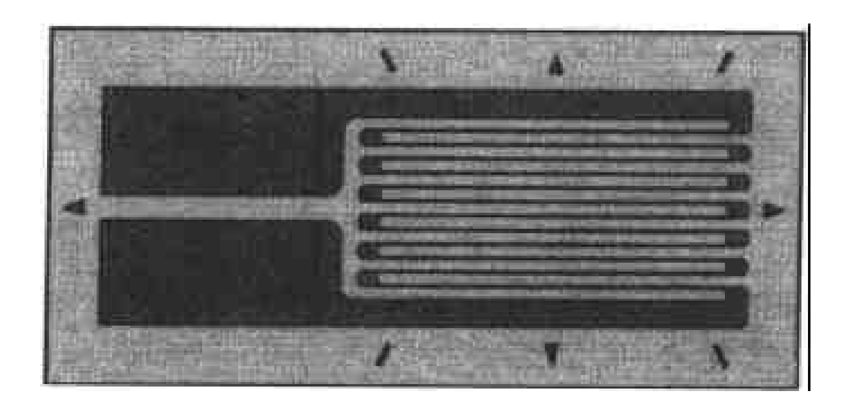
张力计量器一

如果实际不接触如图所示的金属棒,如何测量它的弯曲度呢?一种方法是使用张力计量器。计量器上有传感器,传感器是一种仪器,它可以把测量的量转变成更方便形式的量。对于金属棒,希望测量的量是弯曲的角度。直接测量角度非常困难,而且可能有危险。可以改为在金属棒上固定一个张力计量器。张力计量器是一个细金属丝栅格,其电阻随着金属丝的伸长或缩短变化:

$$\Delta R = 2R\frac{\Delta L}{L}$$

其中 R 是计量器静止时的电阻,$\Delta L/L$ 是计量器伸长的部分(定义为"张力"),常数2是典型厂商的计量器系数,ΔR 是由金属棒弯曲导致的电阻变化。典型的做法是将成对张力计量器分别固定在棒的对面。当棒弯曲时,一对计量器的金属丝拉长变细,电阻增加,另一对计量器的金属丝缩短变粗,电阻减少。

电阻张力计量器



电阻的变化又是如何测量的呢?一种方法是使用电阻表。但是,张力计量器的电阻变化一般非常小,以至于电阻表不能准确地测量。通常成对的张力计量器连接形成一个惠斯登电桥,两个电桥腿之间的电压差可以测量。为了准确地测量电压差,使用运算放大器电路将其放大。当介绍了运算放大器和一些重要的应用电路之后,将引入使用张力计量器测量金属棒弯曲量的电路。

被称为运算放大器的电子电路越来越重要。然而运算放大器电路的详细分析需要懂得电子器件,如二极管和晶体管。读者可能会奇怪,为什么要在讨论电子组件之前介绍运算放大器电路。有几方面的理由,首先通过探讨运算放大器的端子行为,你可以理解运算放大器为何可

以作为电路模块使用。从介绍性的角度看,并不需要完全理解电子组件对端子行为的作用。第二,运算放大器的模型需要使用非独立源,因此,我们有机会在实际电路中使用非独立电源,而不是将它作为一个抽象的电路组件。第三,能够用运算放大器和电阻器的组合实现一些非常有用的功能,比如比例求和、符号变换和减法运算等。最后,在第6章介绍电感器和电容器之后,可以讲解如何使用运算放大器设计微分和积分电路。

如果把精力集中在运算放大器的端子行为,就意味着采取黑盒子的操作方法。也就是说,既不关心放大器的内部结构,也不关心结构内的电压和电流。重要的是用放大器的端子特性说明电压和电流制约着端子。

最初使用运算放大器电路时,把它作为模拟计算机中的模块。之所以被称做"运算",因为是用在实现积分、微分、加法、符号变换和比例等数学运算。近年来,尽管应用范围已经超出了数学运算,然而原始名称仍然使用。工程师和技术员有创造技术性行话的倾向,因此运算放大器被广泛地简称为"运放"。

5.1 运算放大器端子

因为强调运算放大器(运放)的端子行为,所以,首先讨论一个商用器件的端子。在1968年,仙童半导体公司推出一种被广泛接受的运放:$\mu A741$(前缀 μA 是仙童公司用来表示放大器的微电路制作方式的)。这种放大器有几种不同的封装形式可以使用,在讨论中假定采用八脚双列直插式(*DIP*)。图5.1给出封装的顶视图,端子名称在端子旁给出。

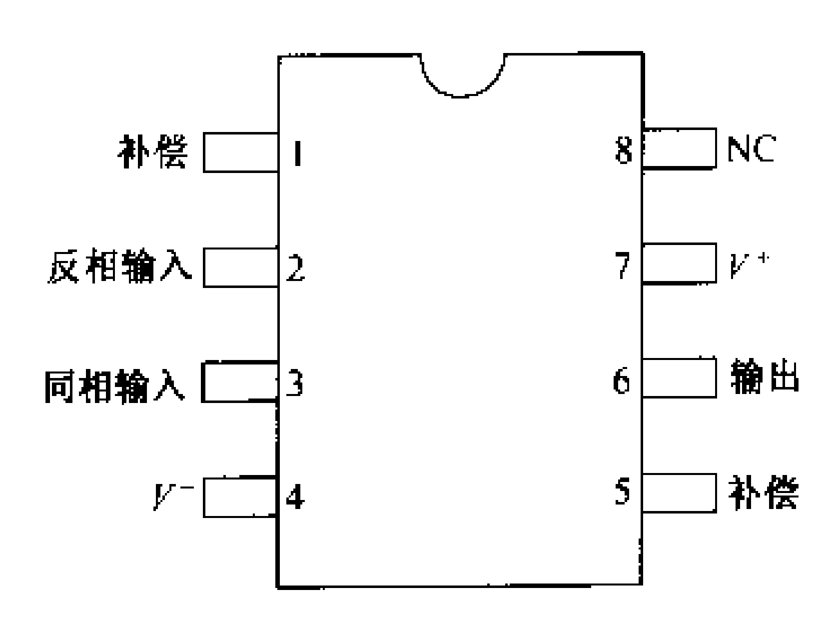


图5.1 八脚DIP封装(顶视)

主要关心的端子有:

- 反相输入
- 同相输入
- 输出
- 正电源(V^+)
- 负电源(V^-)

人们很少关心或不关心其余的三个端子。补偿端可以用于辅助电路,补偿因为老化和缺陷引起的性能退化。退化在大多数情况下可以忽略,所以补偿端通常不用。不关心端子8,这是因为它是一个不用的端子。NC代表没有连接,它意味着该端子没有连接放大器电路。

图 5.2 给出广泛使用的运放电路符号,包含五个主要关心的端子。使用文字标注端子,在电路图中不太方便,所以采用以下方式简化端子名称。同相输入端标记加号(+),反相输入端标记减号(-)。电源端,总是画在三角形的外侧,记为 V^+ 和 V^-,三角形盒子的顶点理解为输出端。图 5.3 概括了这些简化的名称。

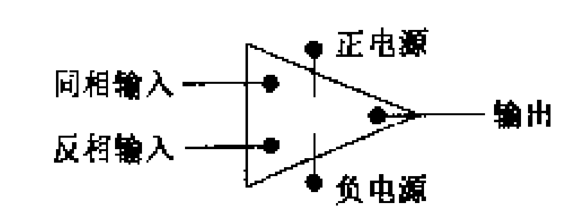


图 5.2 运算放大器(运放)的电路符号

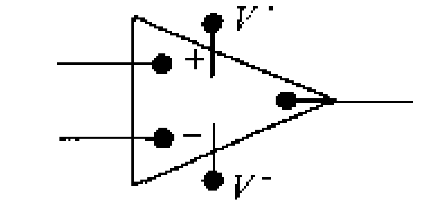


图 5.3 运放的简化电路符号

5.2 端电压和端电流

这里介绍用来描述运放特性的端电压和端电流,电压变量根据公共参考节点测量。图5.4 给出了电压变量和它的参考极性。

所有电压相对于公共节点为电压升。这样便于使用节点电压法进行分析。正电源电压 (V_{CC})接在 V^+ 与公共节点之间。负电源电压($-V_{CC}$)接在 V^- 与公共节点之间。反相输入端和公共节点之间的电压标记为 v_n;同相输入端和公共节点之间的电压标记为 v_p;输出端和公共节点之间的电压标记为 v_o。

图 5.5 给出电流变量和它的参考方向。应当注意,所有电流的参考方向都是进入运算放大器的端子:i_n 是进入反相输入端的电流;i_p 是进入同相输入端的电流;i_o 是进入输出端的电流;i_{c+} 是进入正电源端的电流;i_{c-} 是进入负电源端的电流。

运放的端子特性与线性电路元件相同,特性受输入电压和输入电流的约束。根据运放集成电路的电压传输特性获得电压约束,如图 5.6 所示。

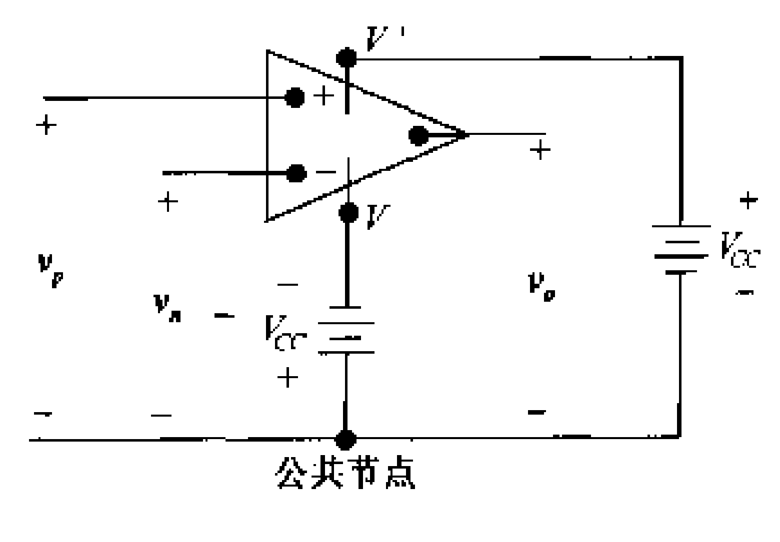


图 5.4 端电压变量

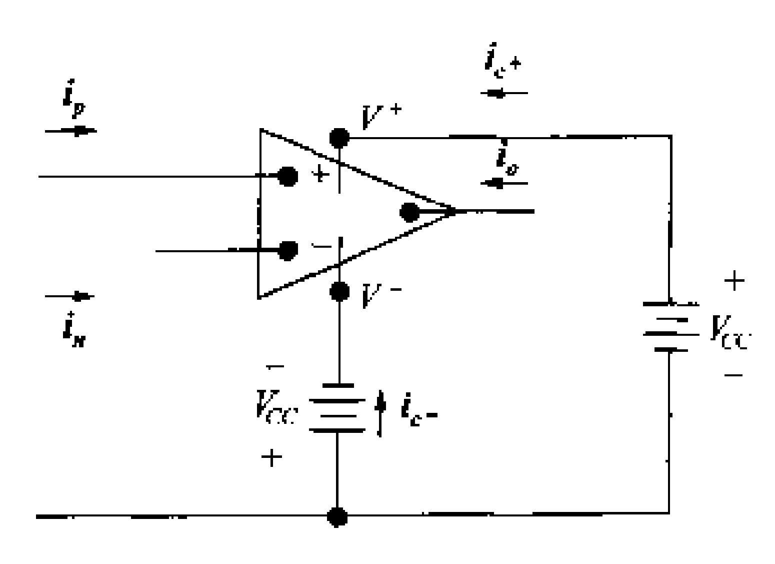


图 5.5 端电流变量

电压传输特性描述了以输入电压为变量的输出电压的变化规律。即电压是怎样从输入传输到输出的。对于运放,输出电压是两个输入电压之差($v_p - v_n$)的函数。电压传输特性的方程是:

$$v_o = \begin{cases} -V_{CC} & A(v_p - v_n) < -V_{CC} \\ A(v_p - v_n) & -V_{CC} \leq A(v_p - v_n) \leq +V_{CC} \\ +V_{CC} & A(v_p - v_n) > +V_{CC} \end{cases} \tag{5.1}$$

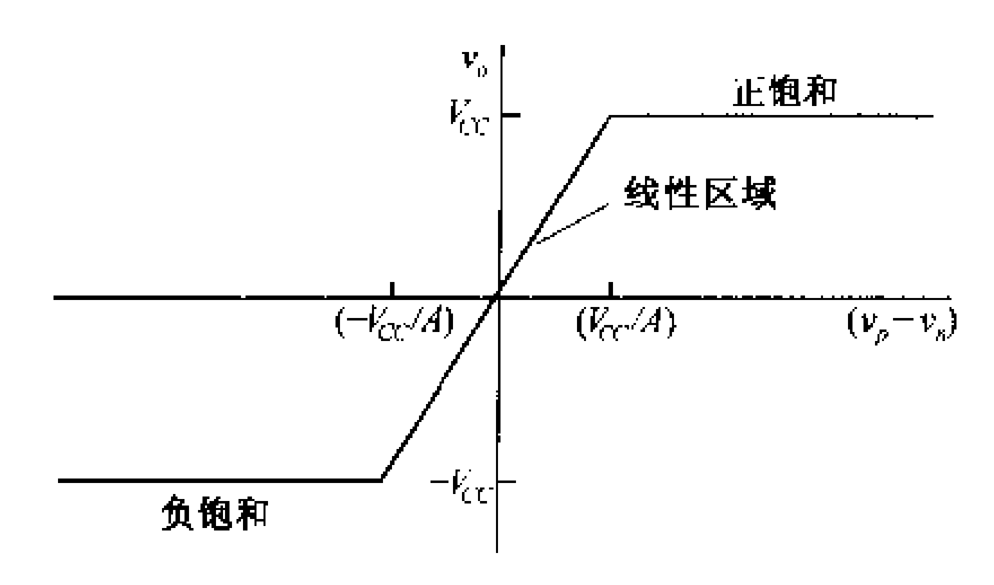


图 5.6 运放的电压传输特性

从图 5.6 和式(5.1)可以看出,运放有三个明显的工作区域。当输入电压差($|v_p - v_n|$)数值很小时,运放的特性像线性器件,输出电压是输入电压的线性函数。线性区域外,运放的输出饱和,运放的特性像非线性器件,因为输出电压不再是输入电压的线性函数。当运放处于线性工作状态时,其输出电压等于输入电压之差乘以一个常数(即增益)A。

将运放限制在线性工作区时,输入电压 v_p和 v_n 受到约束。约束来之于方程(5.1)中 V_{CC}和 A 的典型值。对于多数运放,推荐的直流电源电压很少超过 20 V,增益 A 很少低于10 000,即 10^4。从图 5.6 和式(5.1)看到,在线性区,输入电压差($|v_p - v_n|$)的数值必须小于 $20/10^4$,即 2 mV。

前面学习的电路中典型节点电压比 2 mV 大得多。所以小于 2 mV 的电压差意味着两个电压基本相等。因此,在运放处于线性工作区而且节点电压又比 2 mV 大得多的时候,运放的输入电压约束是:

$$v_p = v_n \tag{5.2}$$

式(5.2)给出了理想运放输入电压之间的关系。理想运放的 A 值无穷大。

式(5.2)中输入电压的约束被称做运放输入的虚短条件。有人自然要问,当运放嵌入在电路中时,运放的输入如何能维持虚短,确保线性工作呢?答案是将信号从输出端反馈到反相输入端,这种结构被称为负反馈,因为输入信号要减去从输出端反馈来的信号。负反馈引起输入电压差的减小。由于输出电压与减小的输入电压成比例,所以输出电压也减小。而运放工作在它的线性区。

如果运放受到电路的限制,不能提供一条反馈路径从运放的输出到反相输入端,那么运放通常会饱和。没有负反馈,输入信号的差必须非常小才能避免饱和。即使电路为运放提供了负反馈路径,也不能确保它工作在线性区。那么,怎样才能知道运放是否工作在线性区呢?

回答是,不用知道!为了摆脱困境,假定电路工作在线性状态,进行电路分析,然后检查结果是否矛盾。比如,假定电路中的运放工作在线性区,而且计算出运放的输出电压是 10 V。在检查电路时,发现 V_{CC}是 6 V,结果是矛盾的。因为运放的输出电压不会比 V_{CC}大,因此,假定线性工作是错误的,运放输出一定在 6 V 时饱和。

这样就确定了输入电压的约束,它基于集成运放电路的电压传输特性。假定运放被限制

在线性工作区以及 V_{CC}和 A 的典型值。式(5.2)表示了理想运放的电压约束,即,A 值无穷大。

现在把注意力转向输入电流的约束。集成运放电路的分析表明,从运放输入端看进去的等效电阻非常大,典型值为 1 MΩ 或更大。理想情况下,等效输入电阻无穷大。因而电流约束是:

$$i_p = i_n = 0 \tag{5.3}$$

电流约束与电压约束不同,它不以运放工作在线性区的假设为基础。式(5.2)和(5.3)一起形成了端子行为的约束,它定义了理想运放的模型。

根据基尔霍夫电流定律,知道进入运算放大器的电流之和为零,即:

$$i_p + i_n + i_o + i_{c^+} + i_{c^-} = 0 \tag{5.4}$$

将式(5.3)给出的约束代入式(5.4),得:

$$i_o = -(i_{c^+} + i_{c^-}) \tag{5.5}$$

式(5.5)说明尽管输入端的电流忽略不计,输出端的电流依然可以估计。

在开始分析包含运放的电路之前,需进一步简化电路符号。已知放大器工作在线性区,直流电压 $\pm V_{CC}$不进入电路方程式。在这种情况下,可以从符号中去掉电源端,如图 5.7 所示。特别要注意的是:因为电源端子被去掉,符号会产生一个危险的推断,即 $i_p + i_n + i_o = 0$。当然情况并不是这样,应该是 $i_p + i_n + i_o + i_{c-} + i_{c+} = 0$。换句话说,理想运放模型约束 $i_p = i_n = 0$,并不意味着 $i_o = 0$。

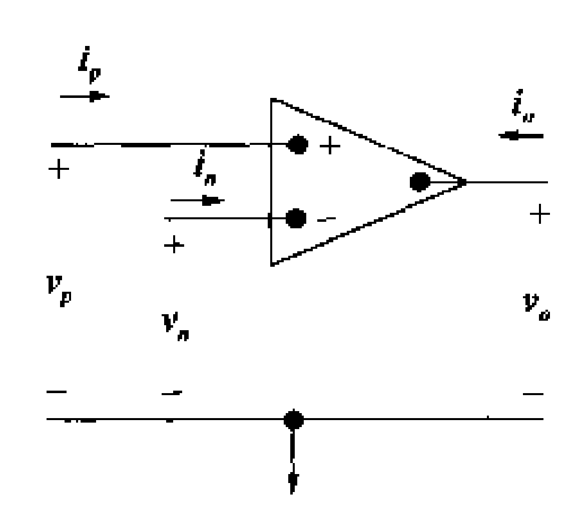


图 5.7　电源端移去的运放符号

正负电源电压在数值上不一定相等。在线性区内,v_o 必须位于两个电源之间。比如,如果 $V^+ = 15$ V,$V^- = -10$ V,那么 $-10\text{ V} \leqslant v_o \leqslant 15\text{ V}$。在所有工作条件下 A 并不是一个常数。然而现在假定它是常数。有关 A 是如何变化以及为什么变化的讨论,必须要推迟到学了构成放大器的电子器件和组件之后才能进行。

例 5.1 说明式(5.2)和式(5.3)的应用。用这些方程式预测包含运放的电路的行为时,实际上使用了器件的理想模型。

例 5.1　图 5.8 所示电路中的运放是理想的。

(a) 如果 $v_a = 1$ V,$v_b = 0$ V,计算 v_o。

(b) 如果 $v_a = 1$ V,$v_b = 2$ V,计算 v_o。

(c) 如果 $v_a = 1.5$ V,为了避免放大器饱和,确定 v_b 的范围。

解:

(a) 因为存在负反馈路径,从运放的输出到反相输入端通过一个 100 kΩ 电阻器,可以假定

运放工作在线性区。在反相输入端可以列写一个节点电压方程式。根据连接的电压源有 $v_p = v_b = 0$ V,根据方程 5.2 表示的电压约束有 $v_p = v_n$,因此,反相输入端的电压是零,在 v_n 处的节点电压方程式是:

$$i_{25} + i_{100} = i_n$$

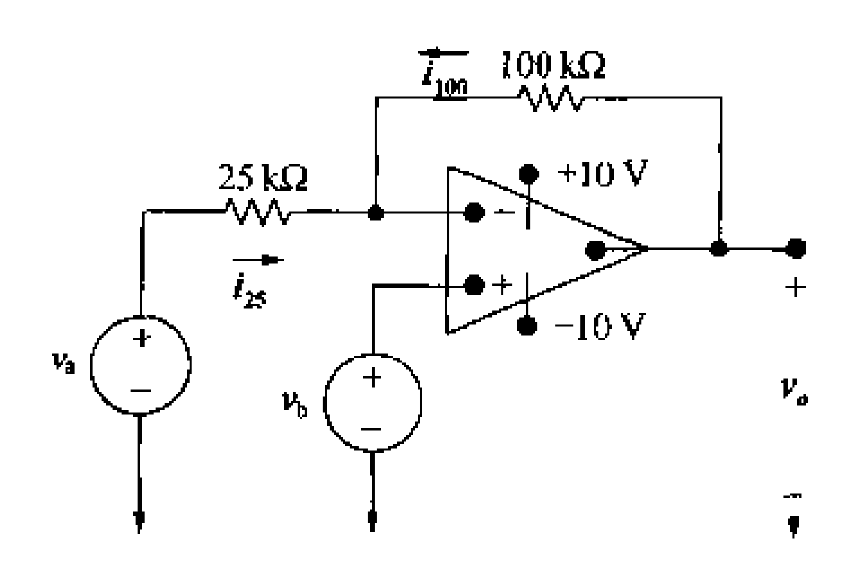


图 5.8 例 5.1 电路

根据欧姆定律:

$$i_{25} = (v_a - v_n)/25 = \frac{1}{25}\ \text{mA}$$

$$i_{100} = (v_o - v_n)/100 = v_o/100\ \text{mA}$$

电流约束需要 $i_n = 0$。将三个电流值代入节点电压方程式,得到:

$$\frac{1}{25} + \frac{v_o}{100} = 0$$

因此,v_o 是 −4 V。v_o 处于 ±10 V 之间,运放工作在线性区。

(b) 使用和(a)相同的过程,得到:

$$v_p = v_b = v_n = 2V$$

$$i_{25} = \frac{v_a - v_n}{25} = \frac{1-2}{25} = -\frac{1}{25}\ \text{mA}$$

$$i_{100} = \frac{v_o - v_n}{100} = \frac{v_o - 2}{100}\ \text{mA}$$

$$i_{25} = -i_{100}$$

因此,$v_o = 6$ V。v_o 仍然处于 ±10 V 之间。

(c) 和前面相同,$v_n = v_p = v_b$ 以及 $i_{25} = -i_{100}$。因为 $v_a = 1.5$ V,则:

$$\frac{1.5 - v_b}{25} = -\frac{v_o - v_b}{100}$$

解出作为 v_o 函数的 v_b,有:

$$v_b = \frac{1}{5}(6 + v_o)$$

现在,如果放大器处于线性工作区内,$-10\ \text{V} \leqslant v_o \leqslant 10\ \text{V}$,将这些对 v_o 的限制代入 v_b 表达式,得到 v_b 的限制范围是:

$$-0.8\ \text{V} \leqslant v_b \leqslant 3.2\ \text{V}$$

练习题

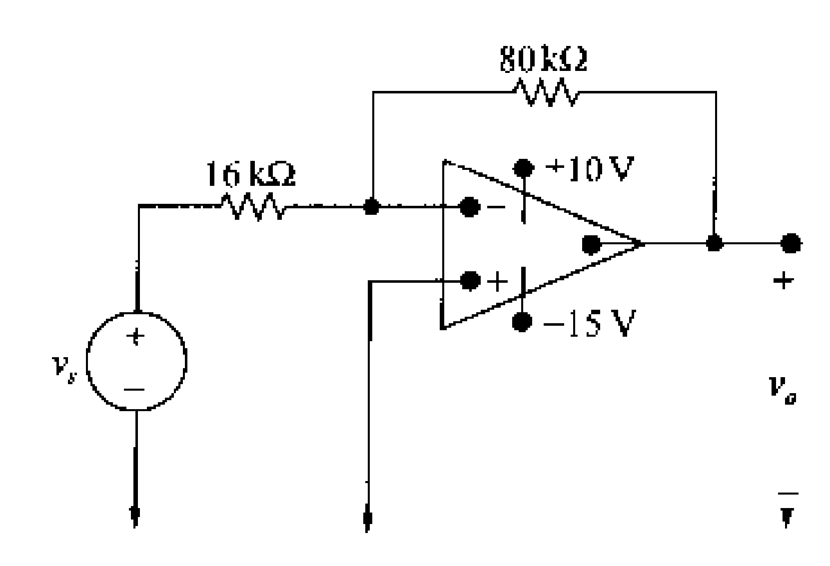
5.1 假定图示电路中的运放是理想的。

(a) 根据下列 v_s 的值计算 v_o。v_s 是 0.4 V,2.0 V,3.5 V、-1.6 V 和 -2.4 V。

(b) 为了避免放大器饱和,确定 v_s 的范围。

答:(a) -2 V, - 10 V, - 15 V,3 V,8 V 和 10 V。

(b) $-2\ V \leq v_s \leq 3\ V$。



5.3 反相放大器电路

这里将讨论一些重要的运放电路应用,用式(5.2)和式(5.3)模拟器件运放电路的特性。图 5.9 给出反相放大器电路。假定运放工作在线性区。除了运放,电路还包含两个电阻器(R_f 和 R_s),一个电压信号源(v_s),一根同相输入端和公共节点之间的短路线。

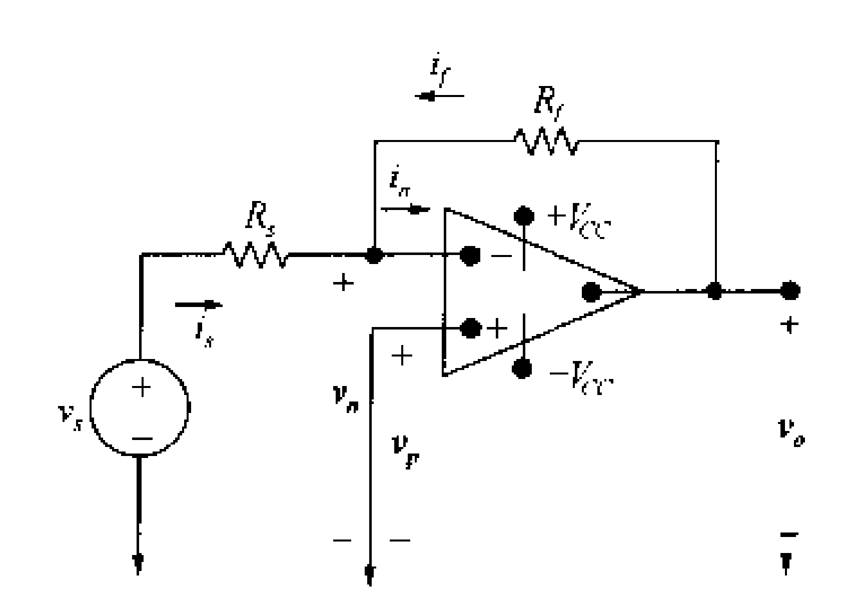


图 5.9 反相放大器电路

现在分析图 5.9 所示电路,假定运放是理想运放。目标是求输出电压 v_o 的表达式,v_o 作为源电压 v_s 的函数。在运放的反相端,用节点电压方程式,即:

$$i_s + i_f = i_n \tag{5.6}$$

因为电压 $v_p = 0$,根据式(5.2)的电压约束,得到 $v_n = 0$。因此:

$$i_s = \frac{v_s}{R_s} \tag{5.7}$$

$$i_f = \frac{v_o}{R_f} \tag{5.8}$$

用式(5.3)叙述的电流约束,即:

$$i_n = 0 \tag{5.9}$$

将式(5.7)~(5.9)代入式(5.6)结果为:

$$v_o = \frac{-R_f}{R_s} v_s \tag{5.10}$$

输出电压与输入是反相的,且成比例。输入与输出反相,故称该电路为反相放大器。比例系数,即增益为 R_f/R_s。

式(5.10)给出的结果,只有当图 5.9 电路中的运放是理想的时候才是正确的。即,如果 A 是无穷大且输入电阻无穷大。对于实际的运放,式(5.10)是近似的,通常也可以使用。(关于这一点,将在以后讨论。)式(5.10)很重要,因为它告诉我们,如果运放的增益 A 很大,可以用外部电阻器 R_f 和 R_s 表示反相放大器的增益。增益 R_f/R_s 的上限由电源电压和信号电压 v_s 确定。如果假定两个电源电压相等,即 $V^+ = -V^- = V_{CC}$,得到:

$$|v_o| < V_{CC}, \left|\frac{R_f}{R_s}v_s\right| < V_{CC}, \frac{R_f}{R_s} < \left|\frac{V_{CC}}{v_s}\right| \tag{5.11}$$

例如,如果 $V_{CC} = 15$ V,$v_s = 10$ mV,比 R_f/R_s 一定小于 1 500。

在图 5.9 所示的反相放大器电路中,电阻器 R_f 提供了负反馈的连接。即,它将输出端和反相输入端连在一起。如果将 R_f 移走,负反馈路径开路,放大器被称做工作在开环状态。图 5.10 所示为开环状态。

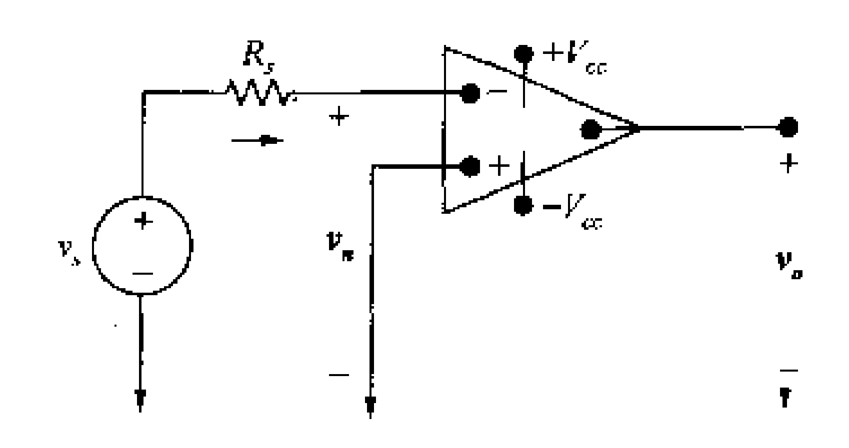


图 5.10　反相放大器工作在开环状态

反馈路径开路彻底改变了电路的行为。首先,输出电压是:

$$v_o = -Av_n \tag{5.12}$$

假定,$V^+ = -V^- = V_{CC}$,为了工作在线性区,则 $|v_n| < V_{CC}/A$。因为反相输入电流几乎为零,R_s 上电压降几乎为零,反相输入电压基本等于信号电压 v_s,即,$v_n \approx v_s$。因此,只有当 $|v_s| < V_{CC}/A$时,运放才能开环工作在线性区。如果$|v_s| > V_{CC}/A$,运放完全进入饱和状态。如果 $v_s < -V_{CC}/A$,运放饱和在 $+V_{CC}$;如果 $v_s > V_{CC}/A$,运放饱和在 $-V_{CC}$。由于如式(5.12)所示的关系在没有反馈路径时发生,所以 A 的值通常称做运放的开环增益。

练习题

5.2　练习题 5.1 电路中的源电压是 −640 mV,80 kΩ 反馈电阻器由一个可变电阻器 R_x 代替,为了使反相放大器工作在线性区,R_x 的范围是什么?

答：$0 \leqslant R_x \leqslant 250\ \text{k}\Omega$。

5.4 求和放大器电路

求和放大器的输出电压是反相的，与放大器输入电压之和成比例。图 5.11 给出了有三个输入电压的求和放大器。

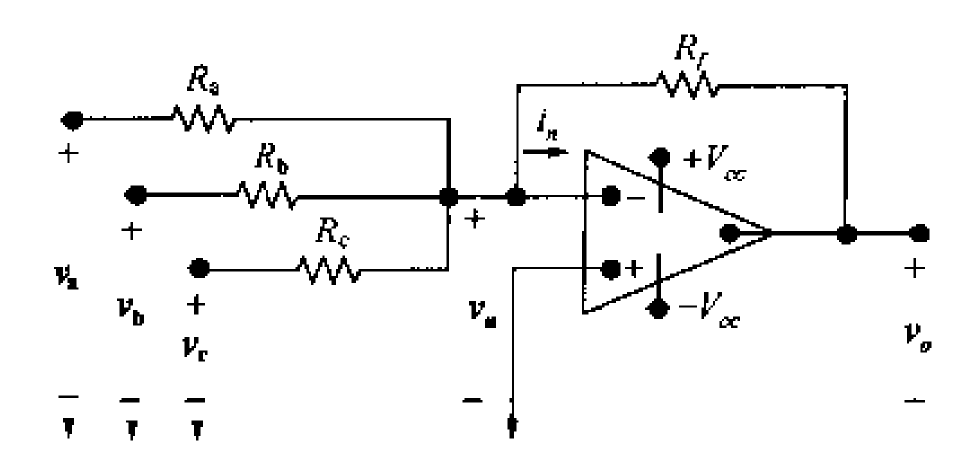


图 5.11 求和放大器

要得到输出电压 v_o 和三个输入电压 v_a，v_b 和 v_c 的关系式，可以先对离开反相输入端的电流求和：

$$\frac{v_n - v_a}{R_a} + \frac{v_n - v_b}{R_b} + \frac{v_n - v_c}{R_c} + \frac{v_n - v_o}{R_f} + i_n = 0 \tag{5.13}$$

假定是理想运放，由于 v_p 点接地，同时使用电压和电流约束得到 $v_n = v_p = 0$，以及 $i_n = 0$，可以将式(5.13)简化为：

$$v_o = -\left(\frac{R_f}{R_a}v_a + \frac{R_f}{R_b}v_b + \frac{R_f}{R_c}v_c\right) \tag{5.14}$$

式(5.14)说明输出电压是反相的，与三个输入电压之和成比例。

如果 $R_a = R_b = R_c = R_s$，式(5.14)可简化为：

$$v_o = -\frac{R_f}{R_s}(v_a + v_b + v_c) \tag{5.15}$$

如果 $R_f = R_s$，输出电压与输入电压的和正好反相。即：

$$v_o = -(v_a + v_b + v_c) \tag{5.16}$$

这里讨论的求和放大器有三个输入信号，其实输入电压的数目根据需要增加。例如，若希望对 16 路录制的音频信号求和形成一路音频信号，图 5.11 所示的求和放大器则包含 16 个不同阻值的输入电阻，这样出现在输出信号中的每个输入音频信号，有不同的放大系数。求和放大器起着音频混频器的作用。同反相放大器相同，求和放大器电路的比例系数取决于外部电阻器 $R_f, R_a, R_b, R_c, \cdots, R_n$。

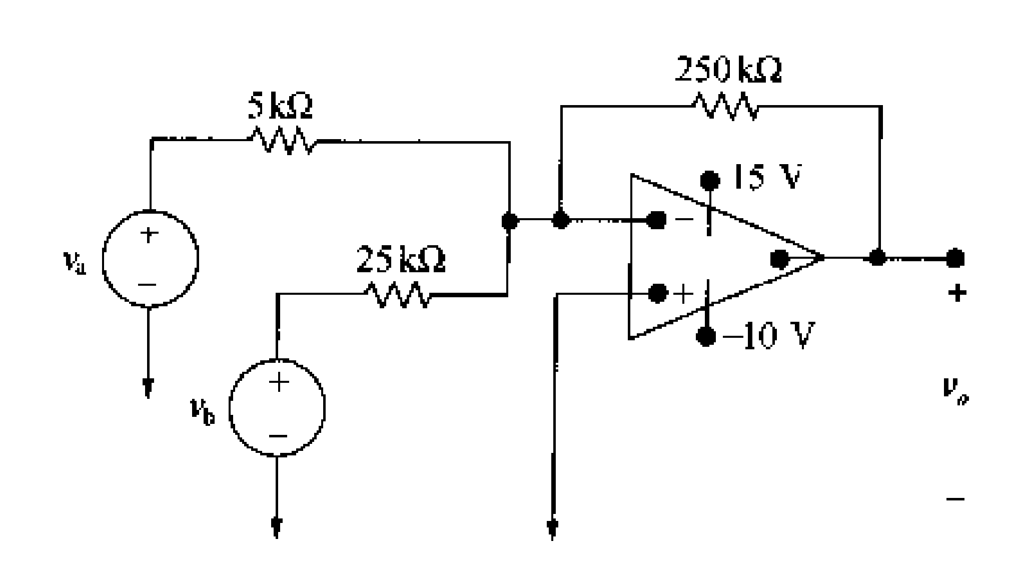
练习题

5.3 (a) 求图示电路中的 v_o，假如 $v_a = 0.1$ V，$v_b = 0.25$ V。

(b) 如果 $v_b = 0.25$ V，在运放饱和之前，v_a 可以达到多大？

(c) 如果 $v_a = 0.10$ V，在运放饱和之前，v_b 可以达到多大？

(d) 将 v_b 极性反相,重复(a),(b)和(c)。



答:(a) −7.5 V,(b) 0.15 V,(c) 0.5 V,(d) −2.5 V,0.25 V,2 V。

5.5 同相放大器电路

图 5.12 给出了同相放大器电路。信号源 v_g 与电阻器 R_g 串联。为了推导作为源电压函数的输出电压表达式,假定理想运放工作在线性区。因此,以式(5.2)和式(5.3)作为基础开始推导。因为运放输入电流为零,则有 $v_p = v_g$,根据式(5.2),有 $v_n = v_g$。因为输入电流为零,($i_p = i_n = 0$),电阻器 R_f 和 R_s 对 v_o 形成了一个空载电压分压器。因此:

$$v_n = v_g = \frac{v_o R_s}{R_s + R_f} \tag{5.17}$$

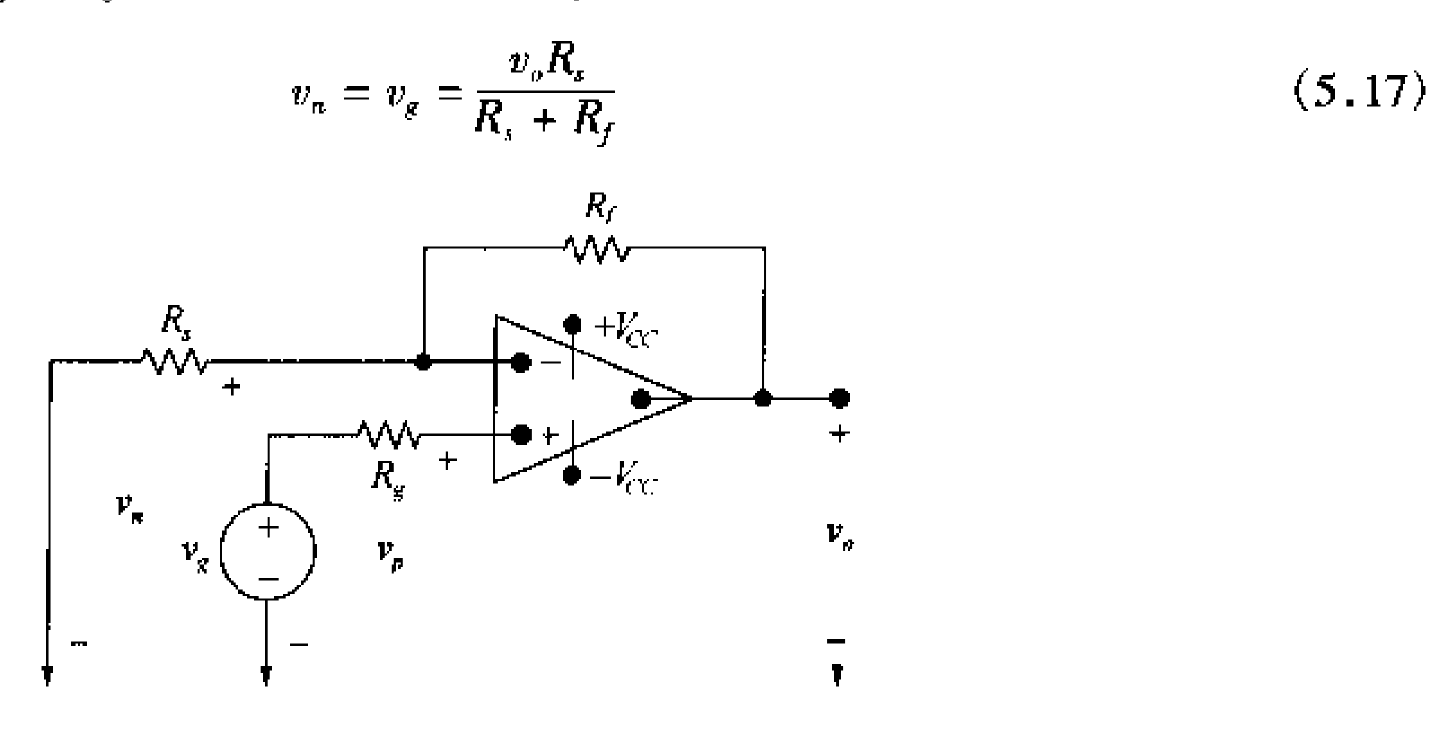


图 5.12 同相放大器

求解式(5.17)中的 v_o,得到所需的表达式:

$$v_o = \frac{R_s + R_f}{R_s} v_g \tag{5.18}$$

运放工作在线性区,需要满足:

$$\frac{R_s + R_f}{R_s} < \left| \frac{V_{CC}}{v_g} \right|$$

因为假定是理想运放,因此,可以将输出电压表示为输入电压和外部电阻器(R_f 和 R_s)的函数。

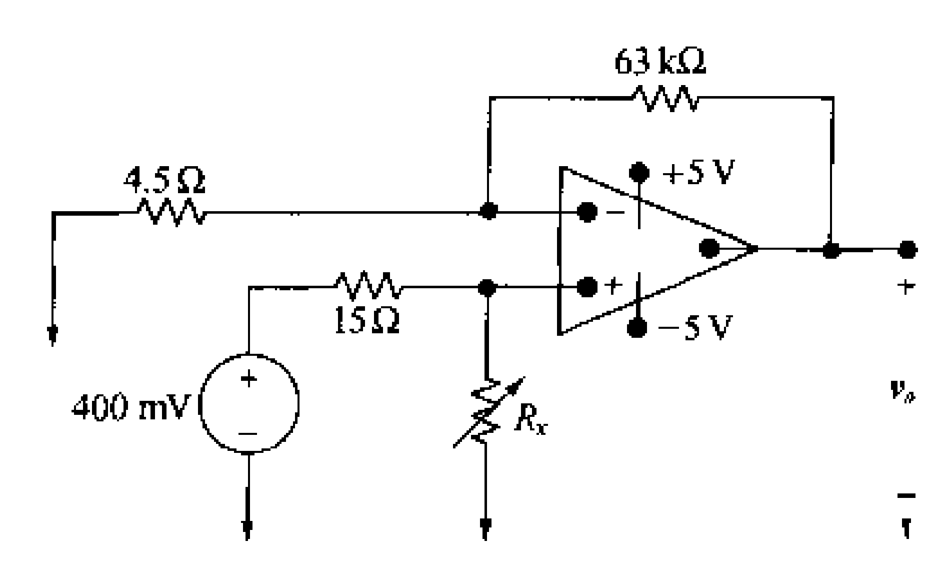
练习题

5.4 假定图示电路中的运放是理想的。

(a) 当可变电阻器调到 60 kΩ 时,求输出电压。

(b) 如使放大器不饱和,R_x 可以到多大?

答:(a) 4.8 V,(b) 75 kΩ。



5.6 差分放大器电路

差分放大器的输出电压与两个输入电压的差成比例。为了说明问题,分析图 5.13 所示的差分放大器电路。假定理想运放工作在线性区,推导 v_o 与两个输入电压 v_a 和 v_b 之间的关系,可以先对离开反相输入节点的电流求和。

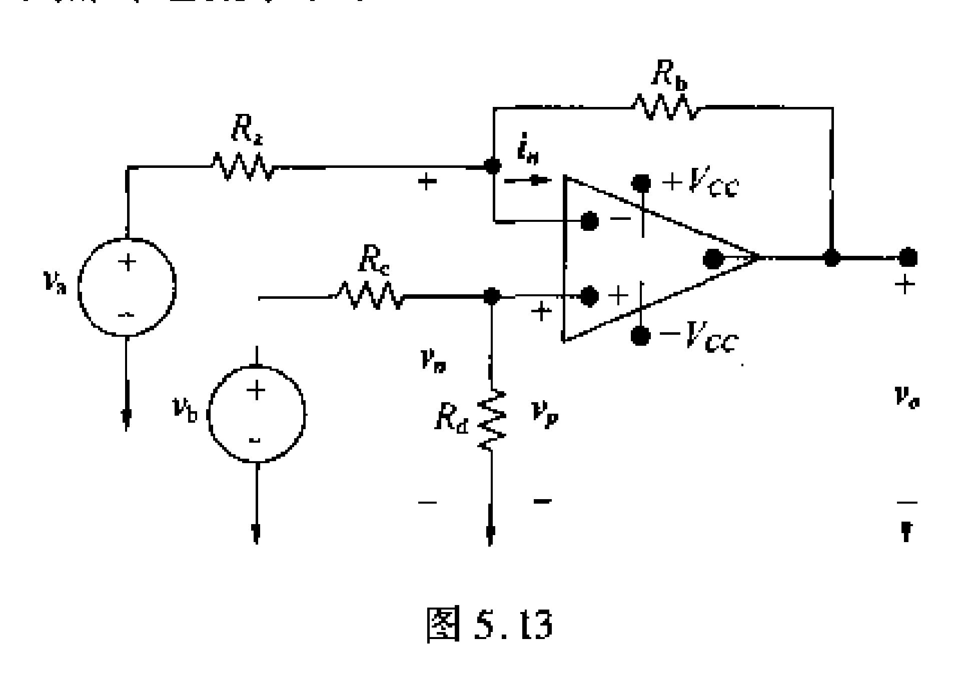


图 5.13

则有:

$$\frac{v_n - v_a}{R_a} + \frac{v_n - v_o}{R_b} + i_n = 0 \tag{5.19}$$

因为运放是理想的,用电压和电流的约束关系,得到:

$$i_n = i_p = 0 \tag{5.20}$$

$$v_n = v_p = \frac{R_d}{R_c + R_d} v_b \tag{5.21}$$

联立式(5.19),(5.20)和式(5.21),得到所希望的关系式:

$$v_o = \frac{R_d(R_a + R_b)}{R_a(R_c + R_d)} v_b - \frac{R_b}{R_a} v_a \tag{5.22}$$

式(5.22)说明输出电压与一定比例的 v_a 和一定比例的 v_b 之差成比例。一般来说,v_b 的比例系数与 v_a 的不同,然而,每个输入电压的比例系数如果满足下面的关系式,则可以使比例系数相等:

$$\frac{R_a}{R_b}=\frac{R_c}{R_d} \tag{5.23}$$

当满足式(5.23)时,输出电压的表达式被简化为:

$$v_o=\frac{R_b}{R_a}(v_b-v_a) \tag{5.24}$$

式(5.24)说明输出电压可以与输入电压 v_a 和 v_b 之差成比例。正如前面讨论的理想放大器电路,比例由外部电阻控制。此外,输出电压与输入电压之间的关系不受放大器输出端的负载电阻的影响。

练习题

5.5 (a) 用叠加原理推导式(5.22)。

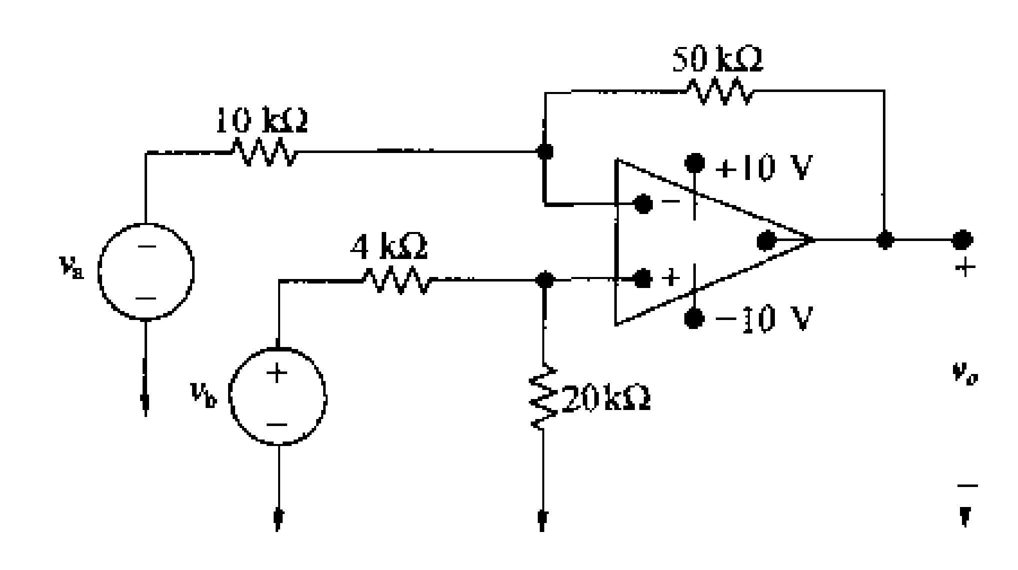
(b) 推导式(5.23)和(5.24)。

答:(a) $v'_o=-\frac{R_b}{R_a}v_a$, $v''_o=\frac{R_d(R_a+R_b)}{R_a(R_c+R_d)}v_b$, $v_o=v'_o+v''_o$,(b) 推导。

5.6 (a) 图示差分放大器,$v_b=4.0$ V。v_a 在什么范围变化使得电路工作在线性区?

(b) 将 20 kΩ 电阻减小到 8 kΩ,重复(a)。

答:(a) 2 V$\leqslant v_a \leqslant$6 V,(b) 1.2 V$\leqslant v_a \leqslant$5.2 V。



5.6.1 关于差分放大器的其他问题

如果用另外两个电压重新定义差分放大器的输入,可以更仔细地分析差分放大器的特性。首先是差模输入,指的是图 5.13 中两个输入电压之间的差:

$$v_{dm}=v_b-v_a \tag{5.25}$$

第二是共模输入,指的是图 5.13 中两个输入电压的平均电压:

$$v_{cm}=(v_a+v_b)/2 \tag{5.26}$$

根据式(5.25)和(5.26),可以用差模和共模电压 v_{dm}和 v_{cm}表示原始输入电压 v_a和 v_b:

$$v_a=v_{cm}-\frac{1}{2}v_{dm} \tag{5.27}$$

$$v_b=v_{cm}+\frac{1}{2}v_{dm} \tag{5.28}$$

将式(5.27)和式(5.28)代入式(5.22),得到用差模和共模电压表示的差分放大器输出:

$$v_o=\left[\frac{R_aR_d-R_bR_c}{R_a(R_c+R_d)}\right]v_{cm}$$
$$+\left[\frac{R_d(R_a+R_b)+R_b(R_c+R_d)}{2R_a(R_c+R_d)}\right]v_{dm} \quad (5.29)$$
$$=A_{cm}v_{cm}+A_{dm}v_{dm} \quad (5.30)$$

其中 A_{cm}是共模增益，A_{dm}是差模增益。现在将 $R_c=R_a$ 和 $R_d=R_b$ 代入式(5.29)，其中 R_c 和 R_d 的值满足式(5.23)。得到：

$$v_o=(0)v_{cm}+\left(\frac{R_b}{R_a}\right)v_{dm} \quad (5.31)$$

因此，一个理想差分放大器有 $A_{cm}=0$，该放大器只放大输入电压的差模部分，消除了输入电压的共模部分。图 5.14 给出了用差模和共模输入电压代替 v_a 和 v_b 的差分放大器。

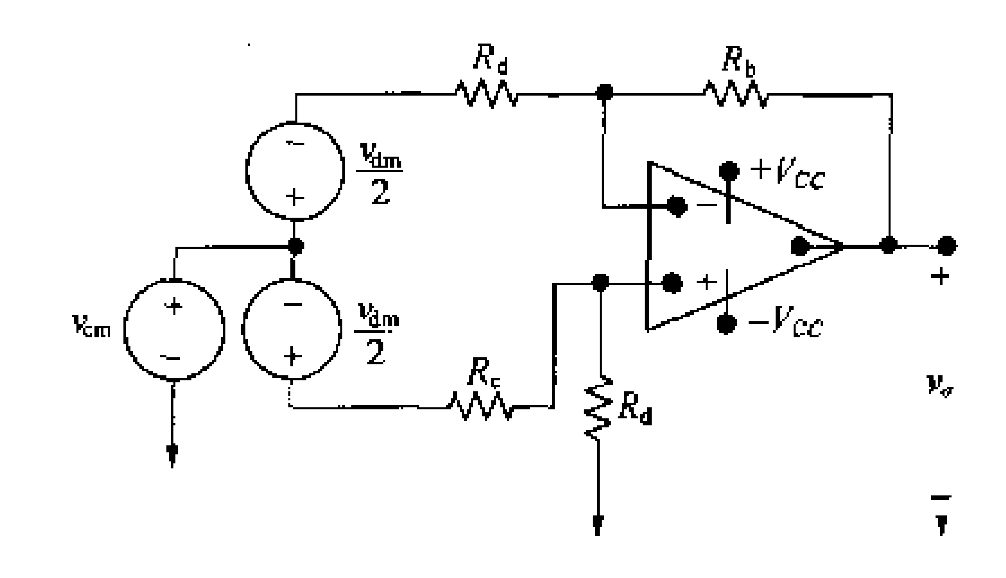


图 5.14　用差模和共模输入电压表示的差分放大器

式(5.30)提供了有关差分放大器功能的重要特性，因为在许多应用中，差模信号包含了有用的信息，而共模信号是所有电子信号中产生的噪声。例如，一个心电图记录仪的电极测量由你身体的心跳产生的电压，该电压值与电极中来自灯和电设备的电噪声相比非常小，噪声作为测量电压的共模部分，而心率电压由差模部分组成。因此，一个理想的差分放大器将只放大我们关心的电压并抑制噪声。

5.6.2　衡量差分放大器性能的共模抑制比

理想的差分放大器有零共模增益和非零(通常很大)差模增益。两个因素将影响理想共模增益：电阻失配(即式(5.23)不满足)或非理想运放(即式(5.20)不满足)。这里将讨论电阻失配对差分放大器性能的影响。

假定选择的电阻器值不满足式(5.23)，电阻 R_a，R_b，R_c 和 R_d的关系是：

$$\frac{R_a}{R_b}=(1-\varepsilon)\frac{R_c}{R_d}$$

所以：

$$R_a=(1-\varepsilon)R_c \quad 且 \quad R_b=R_d \quad (5.32)$$

或：

$$R_d=(1-\varepsilon)R_b \quad 且 \quad R_a=R_c \quad (5.33)$$

其中 ε 是非常小的数。为了观察电阻失配对差分放大器共模增益的影响，将式(5.33)代入式

(5.29),并对表达式 A_{cm}进行化简:

$$A_{cm} = \frac{R_a(1-\epsilon)R_b - R_aR_b}{R_a[R_a+(1-\epsilon)R_b]} \tag{5.34}$$

$$= \frac{-\epsilon R_b}{R_a+(1-\epsilon)R_b} \tag{5.35}$$

$$\approx \frac{-\epsilon R_b}{R_a+R_b} \tag{5.36}$$

因为 ϵ 非常小,所以,式(5.35)分母中的$(1-\epsilon)$接近于1,由此得到近似式(5.36)。而当差分放大器中的电阻满足式(5.23)时,$\epsilon=0$,而且由式(5.36)得到 $A_{cm}=0$。

现在计算电阻失配对差模增益的影响,将式(5.33)代入式(5.29),并对表达式 A_{dm}进行化简:

$$A_{dm} = \frac{(1-\epsilon)R_b(R_a+R_b)+R_b[R_a+(1-\epsilon)R_b]}{2R_a[R_a+(1-\epsilon)R_b]} \tag{5.37}$$

$$= \frac{R_b}{R_a}\left[1-\frac{(\epsilon/2)R_a}{R_a+(1-\epsilon)R_b}\right] \tag{5.38}$$

$$\approx \frac{R_b}{R_a}\left[1-\frac{(\epsilon/2)R_a}{R_a+R_b}\right] \tag{5.39}$$

采用与计算 A_{cm}时相同的原理,得到近似式(5.39)。当差分放大器的电阻满足式(5.23)时,$\epsilon=0$,而且由式(5.39)得到 $A_{dm}=R_b/R_a$。

共模抑制比(CMRR)可以用于衡量差分放大器的理想程度。它定义为差模增益与共模增益之比:

$$\text{CMRR} = \left|\frac{A_{dm}}{A_{cm}}\right| \tag{5.40}$$

CMRR越高,差分放大器就越接近理想。可以在 CMRR 中看到电阻失配的影响,只要将式(5.36)和(5.39)代入式(5.40):

$$\text{CMRR} \approx \left|\frac{\frac{R_b}{R_a}[1-(R_a\epsilon/2)/(R_a+R_b)]}{-\epsilon R_b/(R_a+R_b)}\right| \tag{5.41}$$

$$\approx \frac{R_a(1-\epsilon/2)+R_b}{\epsilon R_a} \tag{5.42}$$

$$\approx \frac{1+R_b/R_a}{\epsilon} \tag{5.43}$$

根据式(5.43),如果差分放大器中的电阻器相匹配,$\epsilon=0$,而且 CMRR = ∞。即使电阻器失配,可以通过增大差模增益(R_b/R_a)减小失配的影响。

开始曾经提到过产生非零共模增益的另一个原因是非理想运放造成的。运放本身就是差分放大器,因为在线性工作区,它的输出与输入的差成比例,即 $v_o=A(v_p-v_n)$。非理想运放的输出不是严格地与输入(差模输入)之间的差成比例,与共模信号的关系也是如此。集成电路组件的内部失配使运放的特性不理想,同样,差分放大器电路中的电阻器失配也会使它的特性不理想。尽管非理想运放的讨论超出了本课程的范围,但应该注意到 CMRR 常用来评估运放的特性是否接近理想情况。事实上,在实际中这是为运放确定级别的主要方法之一。

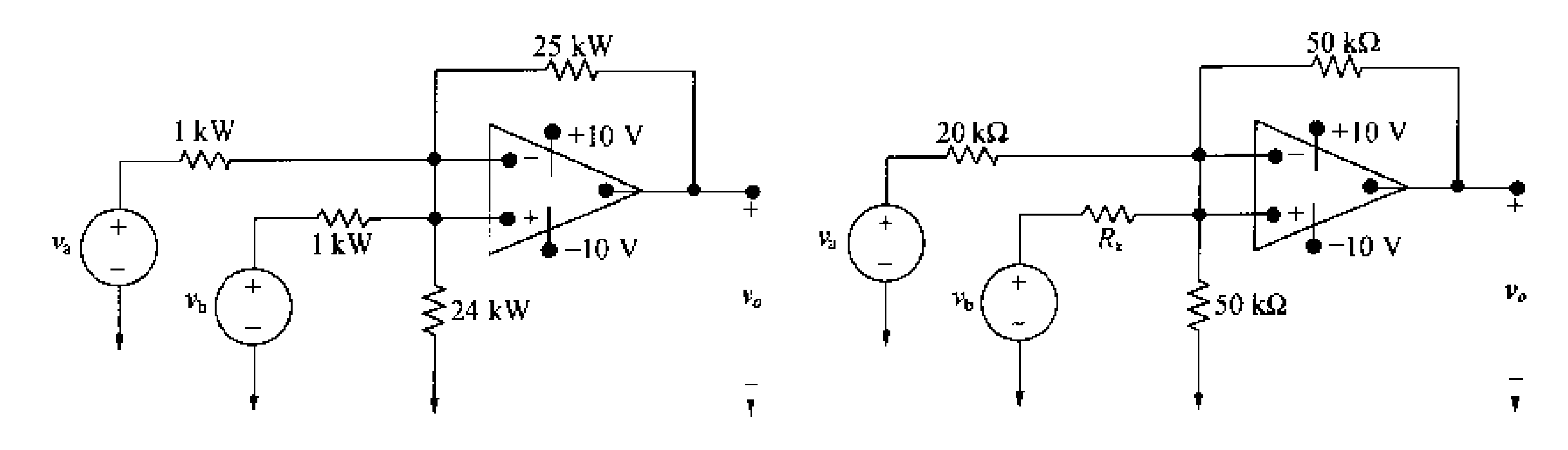
练习题

5.7 图示差分放大器中，计算（a）差模增益，（b）共模增益，（c）CMRR。

答：(a) 24.98，(b) -0.04，(c) 624.5。

5.8 图示差分放大器中，R_x 为多少能使 CMRR≥1 000？

答：19.93 kΩ 或 20.07 kΩ。



5.7 实际的运算放大器模型

现在考虑一个实际的模型来预测处于线性工作区的运放性能。这样的模型将对理想运放的三处进行修改：(1)有限的输入电阻 R_i，(2)有限的开环增益 A，(3)非零的输出电阻 R_o。图 5.15 所示电路说明了实际的模型。

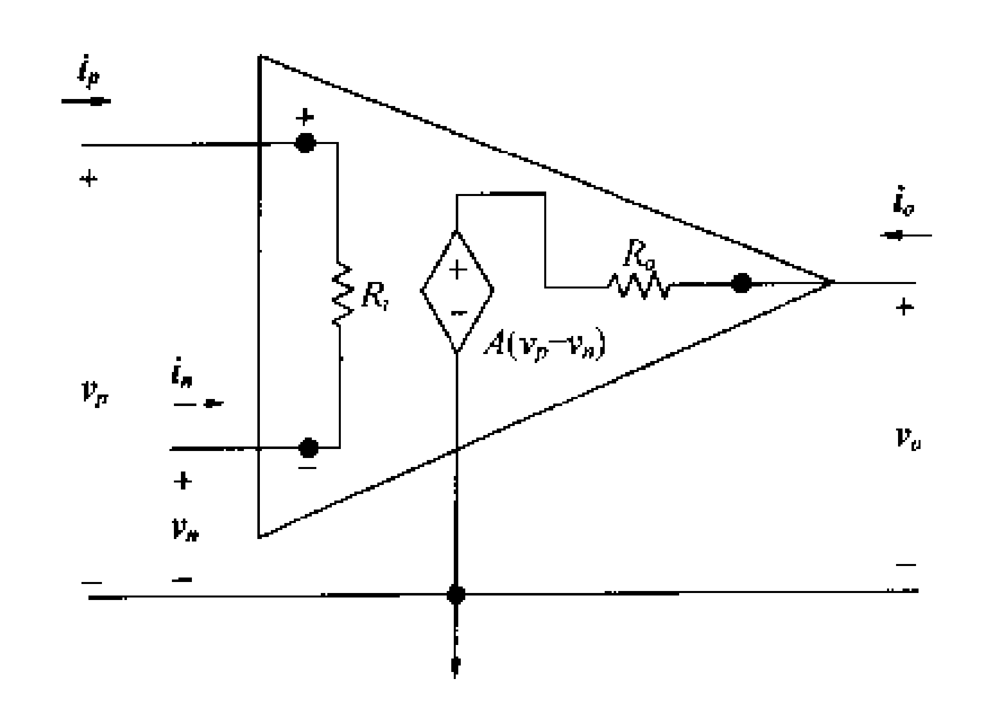


图 5.15 运算放大器的等效电路

只要使用图 5.15 所示的等效电路，就意味着忽视下面的假定：$v_n = v_p$（式(5.2)）和 $i_n = i_p = 0$（式(5.3)）。此外，因为存在非零输出电阻器 R_o，式(5.1)不再正确。另一种理解图 5.15 所示电路的方法是将过程颠倒过来，即，如果 $R_i \to \infty$，$A \to \infty$ 以及 $R_o \to 0$，可以看到电路简化为理想模型。对于 μA741 运放，R_i，A 以及 R_o 的典型数值分别是 2 MΩ，10^5 和 75 Ω。

尽管 R_i 和 R_o 的存在，使得含运放的电路分析起来更加麻烦，但是这样的分析仍然是容易理解的。为了说明这一点，使用图 5.15 所示的等效电路分析一个反相放大器和一个同相放大

器。先从反相放大器的分析开始。

使用实际的运放模型分析反相放大器电路。

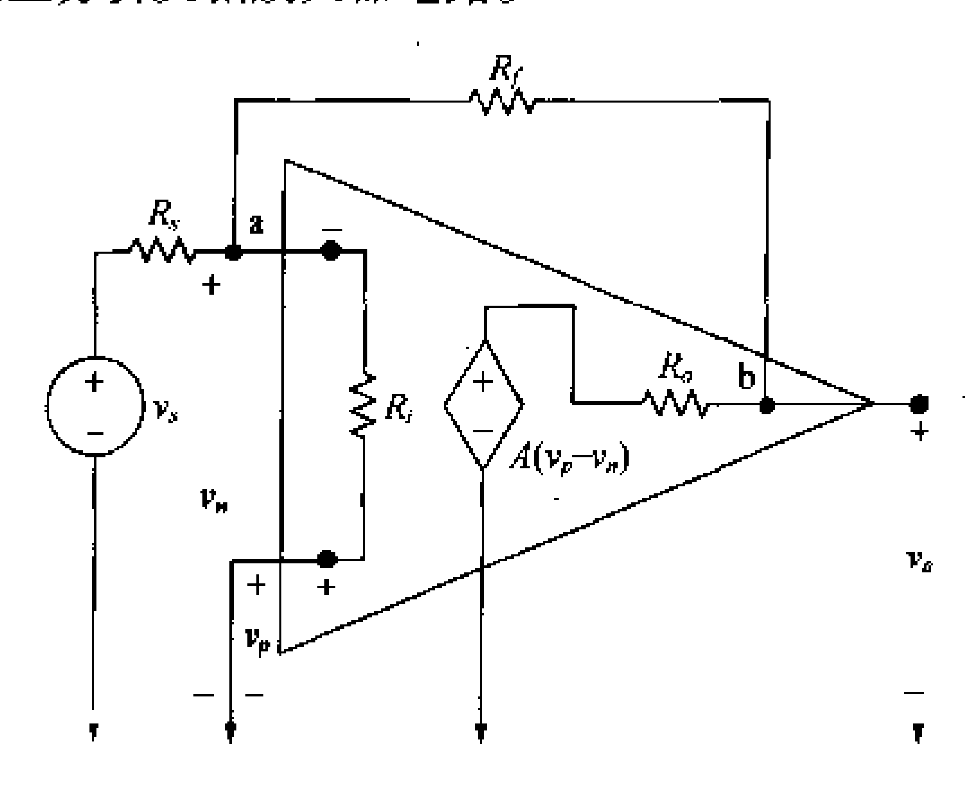


图 5.16 反相放大器电路

如果用图 5.15 所示的运放电路,则反相放大器电路如图 5.16 所示。目的是将输出电压 v_o 表示为源电压 v_s 的函数。通过列写描述电路的两个节点电压方程式,然后解方程组,求 v_o,就能得到所需的表达式。在图 5.16 中,两个节点记为 a 和 b。由于同相输入端与外部短路,即 $v_p=0$,两个节点电压方程式如下:

$$\text{节点 a:}\frac{v_n-v_s}{R_s}+\frac{v_n}{R_i}+\frac{v_n-v_o}{R_f}=0 \tag{5.44}$$

$$\text{节点 b:}\frac{v_o-v_n}{R_f}+\frac{v_o-A(-v_n)}{R_o}=0 \tag{5.45}$$

重新整理式(5.44)和(5.45),以便使用克莱姆方法解 v_o:

$$\left(\frac{1}{R_s}+\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_f}\right)v_n-\frac{1}{R_f}v_o=\frac{1}{R_s}v_s \tag{5.46}$$

$$\left(\frac{A}{R_o}-\frac{1}{R_f}\right)v_n+\left(\frac{1}{R_f}+\frac{1}{R_o}\right)v_o=0 \tag{5.47}$$

解 v_o,得到:

$$v_o=\frac{-A+(R_o/R_f)}{\frac{R_s}{R_f}\left(1+A+\frac{R_o}{R_i}\right)+\left(\frac{R_s}{R_i}+1\right)+\frac{R_o}{R_f}}v_s \tag{5.48}$$

注意,当 $R_i\to\infty$,$A\to\infty$ 以及 $R_o\to 0$ 时,式(5.48)则简化为式(5.10)。

如果图 5.16 所示的反相放大器在输出端加一个 R_L Ω 的负载电阻,v_o 与 v_s 之间的关系变为:

$$v_o=\frac{-A+(R_o/R_f)}{\frac{R_s}{R_f}\left(1+A+\frac{R_o}{R_i}+\frac{R_o}{R_L}\right)+\left(1+\frac{R_o}{R_L}\right)+\left(1+\frac{R_s}{R_i}\right)+\frac{R_o}{R_f}}v_s \tag{5.49}$$

习题 5.38,5.40,5.41 和 5.43 将使读者进一步熟悉有关式(5.48)和式(5.49)的数值计算。

5.7.1 用实际的运放模型分析同相放大器电路

如果用图 5.15 所示的等效电路分析同相放大器，则电路如图 5.17 所示。将电压源 v_g 与电阻 R_g 串联表示信号源。电阻 R_L 表示放大器的负载。分析的目的就是推导作为 v_g 函数的 v_o 表达式。为此，列写节点 a 和 b 的节点电压方程式。

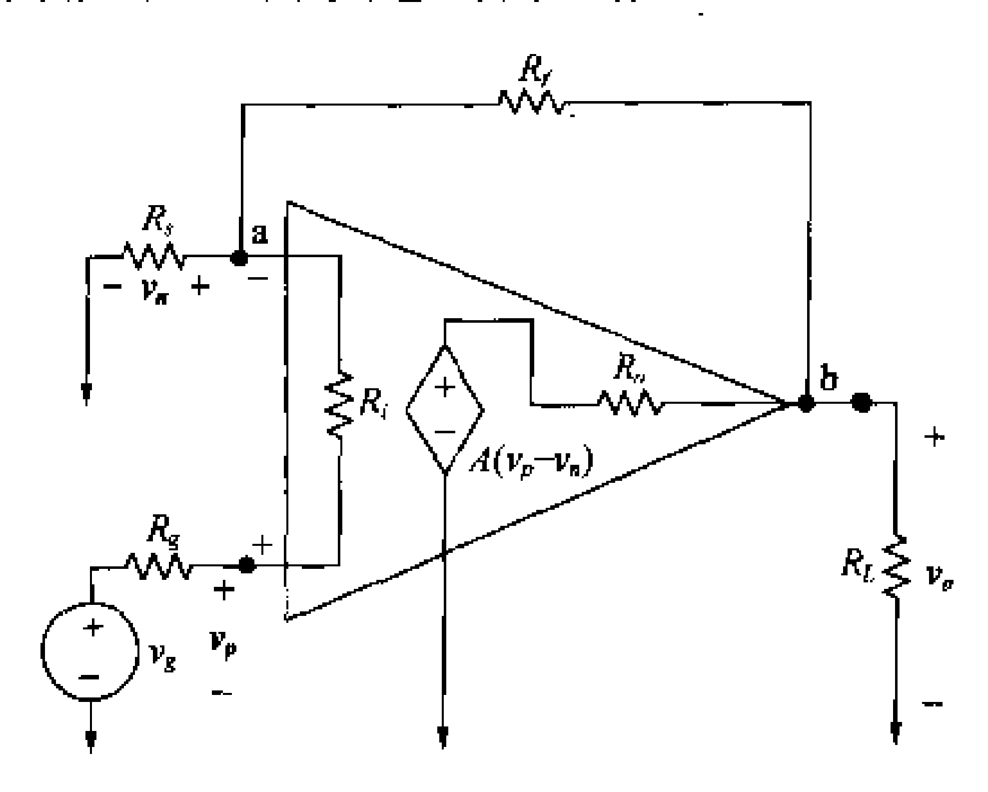


图 5.17　同相放大器电路

节点 a 有：

$$\frac{v_n}{R_s} + \frac{v_n - v_g}{R_g + R_i} + \frac{v_n - v_o}{R_f} = 0 \tag{5.50}$$

节点 b 有：

$$\frac{v_o - v_n}{R_f} + \frac{v_o}{R_L} + \frac{v_o - A(v_p - v_n)}{R_o} = 0 \tag{5.51}$$

由于 R_g 上的电流与 R_i 上的电流相同，则有：

$$\frac{v_p - v_g}{R_g} = \frac{v_n - v_g}{R_i + R_g} \tag{5.52}$$

用式(5.52)从式(5.51)中消去 v_p，则生成两个包含未知电压 v_n 和 v_o 的方程式。经过代数处理，得到：

$$v_n\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_g + R_i} + \frac{1}{R_f}\right) - v_o\left(\frac{1}{R_f}\right) = v_g\left(\frac{1}{R_g + R_i}\right) \tag{5.53}$$

$$v_n\left[\frac{AR_i}{R_o(R_i + R_g)} - \frac{1}{R_f}\right] + v_o\left(\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L}\right) = v_g\left[\frac{AR_i}{R_o(R_i + R_g)}\right] \tag{5.54}$$

解 v_o，得：

$$v_o = \frac{[(R_f + R_s) + (R_s/R_o/AR_i)]v_g}{R_s + \frac{R_o}{A}(1 + K_r) + \frac{R_fR_s + (R_f + R_s)(R_i + R_g)}{AR_i}} \tag{5.55}$$

其中：

$$K_r = \frac{R_s + R_g}{R_i} + \frac{R_f + R_s}{R_L} + \frac{R_fR_s + R_fR_g + R_gR_s}{R_iR_L}$$

如果 $R_i \to \infty$，$A \to \infty$ 以及 $R_o \to 0$，式(5.55)则简化为式(5.18)。对于空载($R_L = \infty$)的同相放大器，式(5.55)简化为：

$$v_o = \frac{[(R_f + R_s) + R_sR_o/AR_i]v_g}{R_s + \frac{R_o}{A}\left(1 + \frac{R_s + R_g}{R_i}\right) + \frac{1}{AR_i}[R_fR_s + (R_f + R_s)(R_i + R_g)]} \qquad (5.56)$$

从式(5.55)推导式(5.56)时，将 K_r 简化为$(R_s + R_g)/R_i$。习题5.39说明了 R_i，A 以及 R_o 对同相放大器性能的影响。

实例

张力计量器二

弹性固体形状的变化对工程师来说是非常重要的，工程师设计的结构在外力的作用下会扭曲、伸长或弯曲。航空器框架是讨论结构的最好例子，工程师必须考虑它的弹性张力。使用张力计量器时需要知道计量器的物理结构，将计量器粘贴在结构表面时，需要知道计量器相对于结构上外力的方向。目的是指出张力计量器的测量在工程应用中是至关重要的，还有电路知识对于正确使用张力计量器有密切的关系。

图5.18所示电路提供了一种测量电阻变化的方法，电阻变化由前面叙述的张力计量器提供。电路是读者熟悉的差分放大器，用来放大张力计量器电桥提供的两个电压之差。一旦棒弯曲，一对张力计量器伸长，电桥中的阻值为 $R + \Delta R$，另一对张力计量器缩短，阻值为 $R - \Delta R$。分析这个电路，求出输出电压 v_o 和电阻变化之间的关系。ΔR 由张力计量器提供。

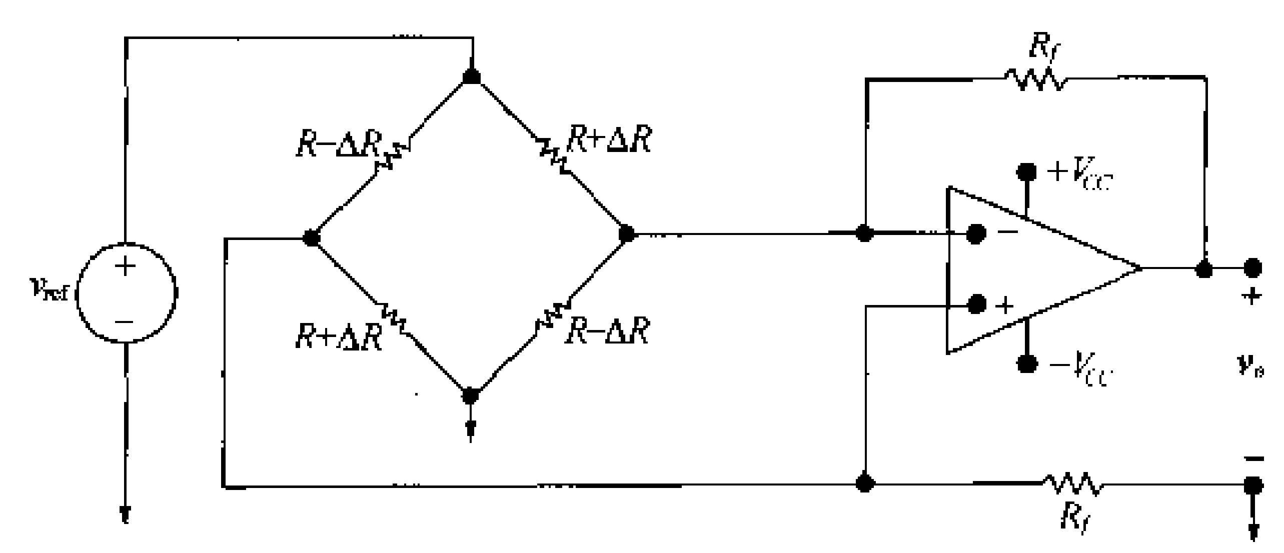


图5.18 用来测量张力计量器电阻变化的运放电路

假定运放是理想的。在运放的反相和同相输入端列写KCL方程式，得到：

$$\frac{v_{ref} - v_n}{R + \Delta R} = \frac{v_n}{R - \Delta R} + \frac{v_n - v_o}{R_f} \qquad (5.57)$$

$$\frac{v_{ref} - v_p}{R - \Delta R} = \frac{v_p}{R + \Delta R} + \frac{v_p}{R_f} \qquad (5.58)$$

重新整理式(5.58)，得到运放同相输入端的电压表达式：

$$v_p = \frac{v_{ref}}{(R-\Delta R)\left(\frac{1}{R+\Delta R}+\frac{1}{R-\Delta R}+\frac{1}{R_f}\right)} \tag{5.59}$$

假定运放工作在线性区，所以 $v_p = v_n$，式(5.59)中的 v_p 表达式一定也就是 v_n 表达式。因此可以将式(5.59)右边部分代入式(5.57)，代替其中的 v_n，并解出 v_o。经过代数运算后，有：

$$v_o = \frac{R_f(2\Delta R)}{R^2-(\Delta R)^2}v_{ref} \tag{5.60}$$

由于张力计量器提供的电阻变化非常小，$(\Delta R)^2 << R^2$，所以 $R^2-(\Delta R)^2 \approx R^2$，式(5.60)变为：

$$v_o \approx \frac{R_f}{R}2\delta v_{ref} \tag{5.61}$$

其中 $\delta = \Delta R/R$。

例： 假定图 5.18 所示电桥中的张力计量器电阻值为 120 Ω ± 1%。运放的电源是 ± 15 V，参考电压 v_{ref}取之正电源。

(a) 计算 R_f 值，使其满足当张力计量器伸长至最大长度时，输出电压为 5 V。

(b) 假定精确测量到输出电压变化 50 mV，那么张力计量器电阻变化多少毫欧？

解：

(a) 可以用式(5.61)求解 R_f，因为使用 1%计量器，所以，δ 值为 0.01：

$$\begin{aligned} R_f &= \frac{v_o R}{2\delta v_{ref}} \\ &= \frac{(5)(120)}{(2)(0.01)(15)} \\ &= 2\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

(b) 可以用式(5.61)求解 δ，给定的输出电压为 50 mV：

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{v_o R}{2R_f v_{ref}} \\ &= \frac{(0.05)(120)}{2(2000)(15)} \\ &= 100\times10^{-6} \end{aligned}$$

相对输出电压 50 mV 的变化，张力计量器电阻的变化如下：

$$\Delta R = \delta R = (100\times10^{-6})(120) = 12\ \text{m}\Omega$$

小结

- 理想运放的电压传输特性方程式是：

$$v_o = \begin{cases} -V_{CC} & A(v_p - v_n) < -V_{CC} \\ A(v_p - v_n) & -V_{CC} \leqslant A(v_p - v_n) \leqslant +V_{CC} \\ +V_{CC} & A(v_p - v_n) > +V_{CC} \end{cases}$$

  其中 A 是比例常数，称做开环增益，V_{CC}表示电源电压。

- 运放输出与反相输入之间的反馈路径可以保证运放工作在线性区，其中 $v_o = A(v_p - v_n)$。

- 工作在线性区的运放由于受到 V_{CC} 和 A 的限制,存在电压的约束。如果线性模型假定是理想的(意味着 A 假定是无穷大),如下的电压约束则构成理想运放模型的特征:

$$v_p = v_n$$

- 电流约束进一步构成理想运放模型的特征,因为集成运放电路的理想输入电阻无穷大。电流约束是:

$$i_p = i_n = 0$$

- 本章讨论了简单的理想运放模型和实际的模型。两种模型的差别如下:

简单的模型	实际的模型
无穷大输入电阻	有限的输入电阻
无穷大开路增益	有限的开路增益
零输出电阻	非零输出电阻

- 反相放大器是一个输出电压与输入电压反相且成比例的运放电路。
- 求和放大器是一个输出电压与输入电压之和成比例的运放电路。
- 同相放大器是一个输出电压与输入电压成比例的运放电路。
- 差分放大器是一个输出电压与输入电压之差成比例的运放电路。
- 对于差分放大器,两个电压输入可以用来计算共模和差模电压输入,即 v_{cm} 和 v_{dm},差分放大器的输出可以写成如下形式:

$$v_o = A_{cm}v_{cm} + A_{dm}v_{dm}$$

其中 A_{cm} 是共模增益,A_{dm} 是差模增益。

- 对于理想差分放大器,$A_{cm}=0$,为了衡量差分放大器是否接近理想情况,可以用共模抑制比:

$$\text{CMRR} = \left|\frac{A_{dm}}{A_{cm}}\right|$$

理想差分放大器的 CMRR 无穷大。

习题

P M5.1 满量程读数为 10 V 的电压表测量图 P5.1 电路中的输出电压。假定运放是理想的,电压表的读数是多少?

P5.2 求图 P5.2 电路中的 i_L(单位为微安)。

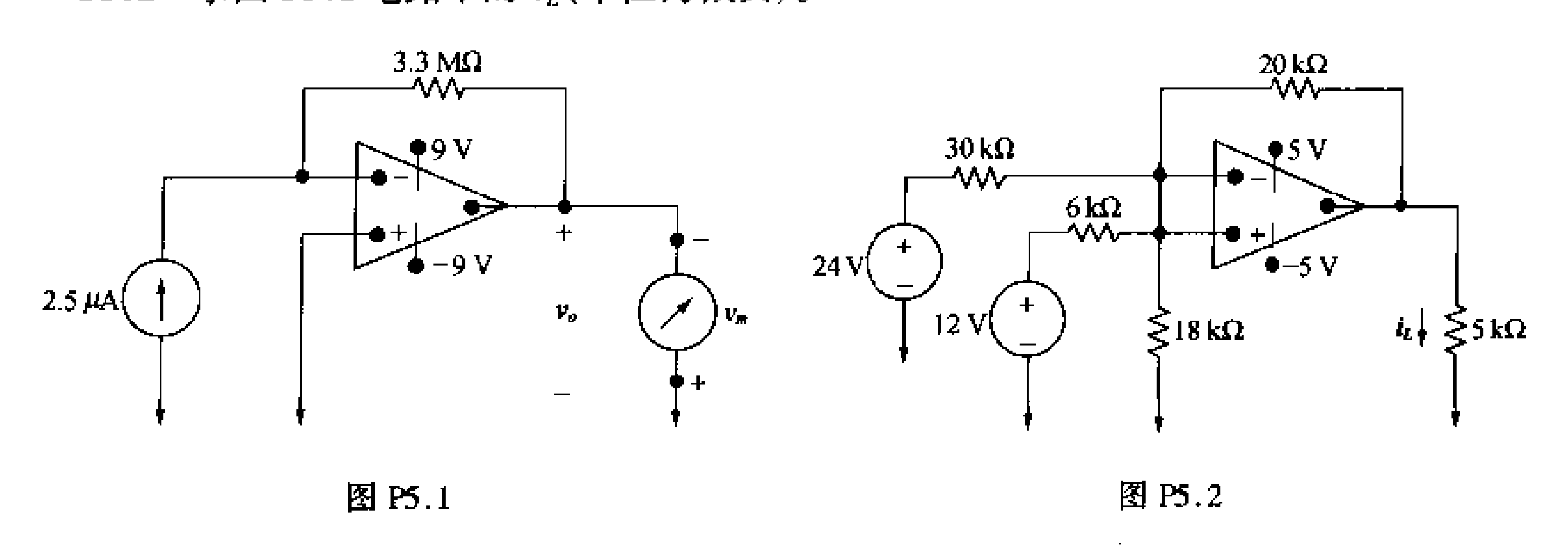


图 P5.1　　　图 P5.2

P5.3　图 P5.3 所示电路中的运放是理想的。

(a) 如果 $v_a = 1.5$ V, $v_b = 0$ V，计算 v_o。

(b) 如果 $v_a = 3.0$ V, $v_b = 0$ V，计算 v_o。

(c) 如果 $v_a = 1.0$ V, $v_b = 2$ V，计算 v_o。

(d) 如果 $v_a = 4.0$ V, $v_b = 2$ V，计算 v_o。

(e) 如果 $v_a = 6.0$ V, $v_b = 8$ V，计算 v_o。

(f) 如果 $v_b = 4.5$ V，给出 v_a 的范围，使放大器不饱和。

P5.4　图 P5.4 所示电路中的运放是理想的。

计算下列数值：

(a) v_a。

(b) v_o。

(c) i_a。

(d) i_o。

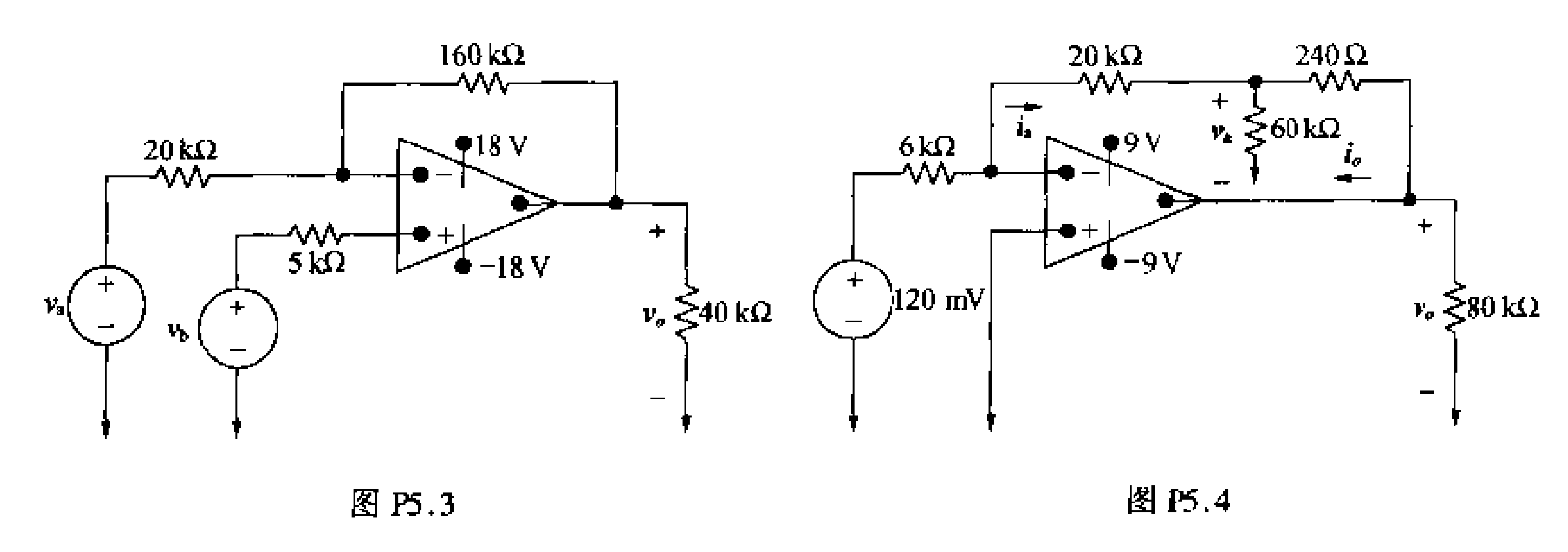


图 P5.3　　图 P5.4

P5.5　图 P5.5 所示电路中的运放是理想的。计算 v_o 值。

P5.6　图 P5.6 所示电路中的运放是理想的。计算 i_o 值。

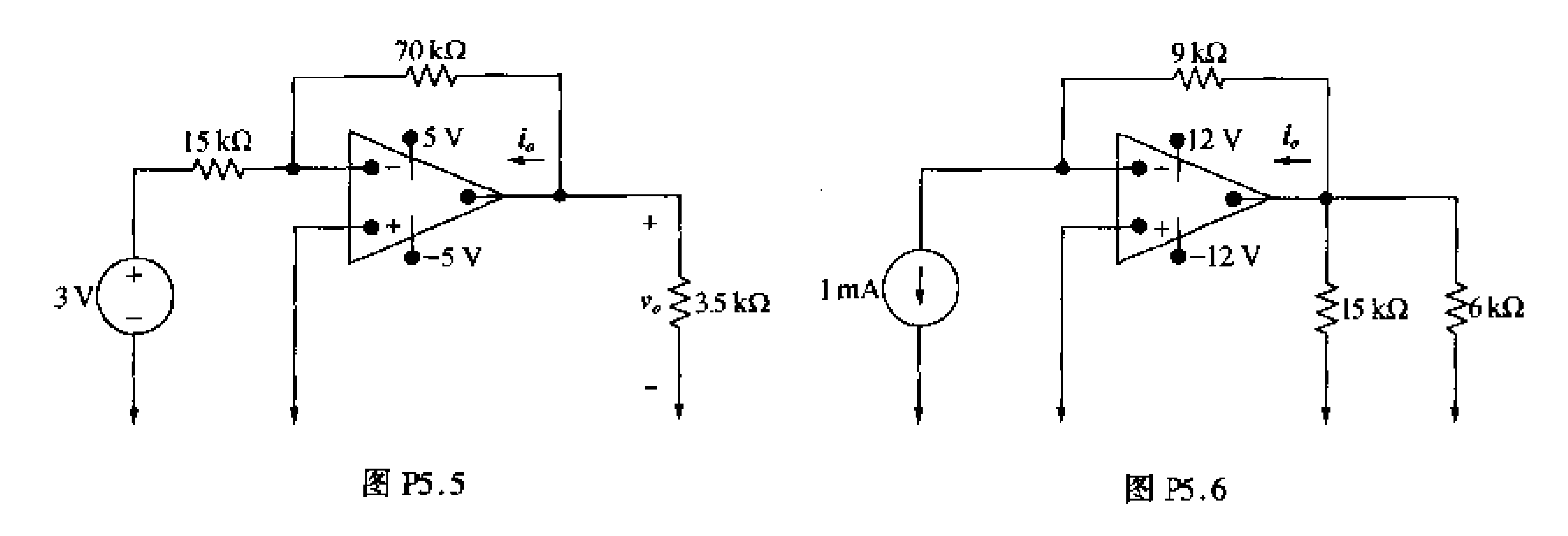


图 P5.5　　图 P5.6

P◇5.7　电路设计者称当 v_g 在 0 V 到 5 V 之间变化时，图 P5.7 电路产生的输出电压 v_o 将在 ±5 V 之间变化。假定运放是理想的。

(a) 绘图表示输出电压 v_o 是输入电压 v_g 的函数，$0\text{ V} \le v_g \le 5\text{ V}$。

(b) 你同意设计者的说法吗?

P5.8 图 P5.8 所示电路中的运放是理想的。

(a) 求 σ 值的范围,在该范围中运放不会饱和。

(b) 当 $\sigma=0.12$ 时,求 i_o 值(单位为微安)。

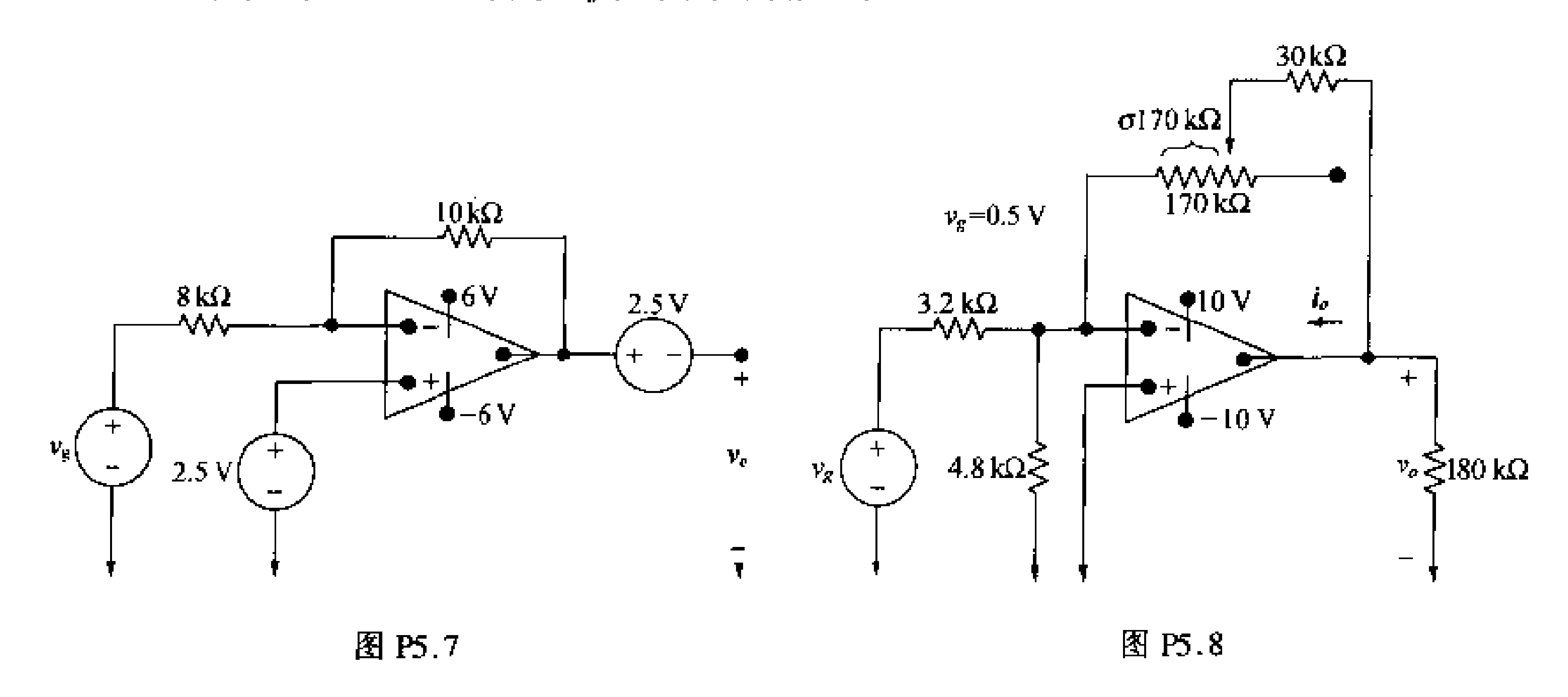


图 P5.7　　　　图 P5.8

P5.9 (a) 图 P5.9 所示电路中的运放是理想的。可变电阻器 R_Δ 的最大值是 150 kΩ,α 变化范围是 0.3 V$\leqslant\alpha\leqslant$0.75 V。如果 $v_g=50$ mV,计算 v_o 的范围。

(b) 如果 α 不受限制,α 值为多少将使运放饱和?

P5.10 (a) 图 P5.10 所示电路中的运放是理想的。如果 $v_a=18$ V,$v_b=6$ V,$v_c=-15$ V,$v_d=8$ V,求 v_o。

(b) 假定 v_a,v_b 和 v_d 的值同(a)保持不变,为了使运放工作在线性区,求出 v_c 的范围。

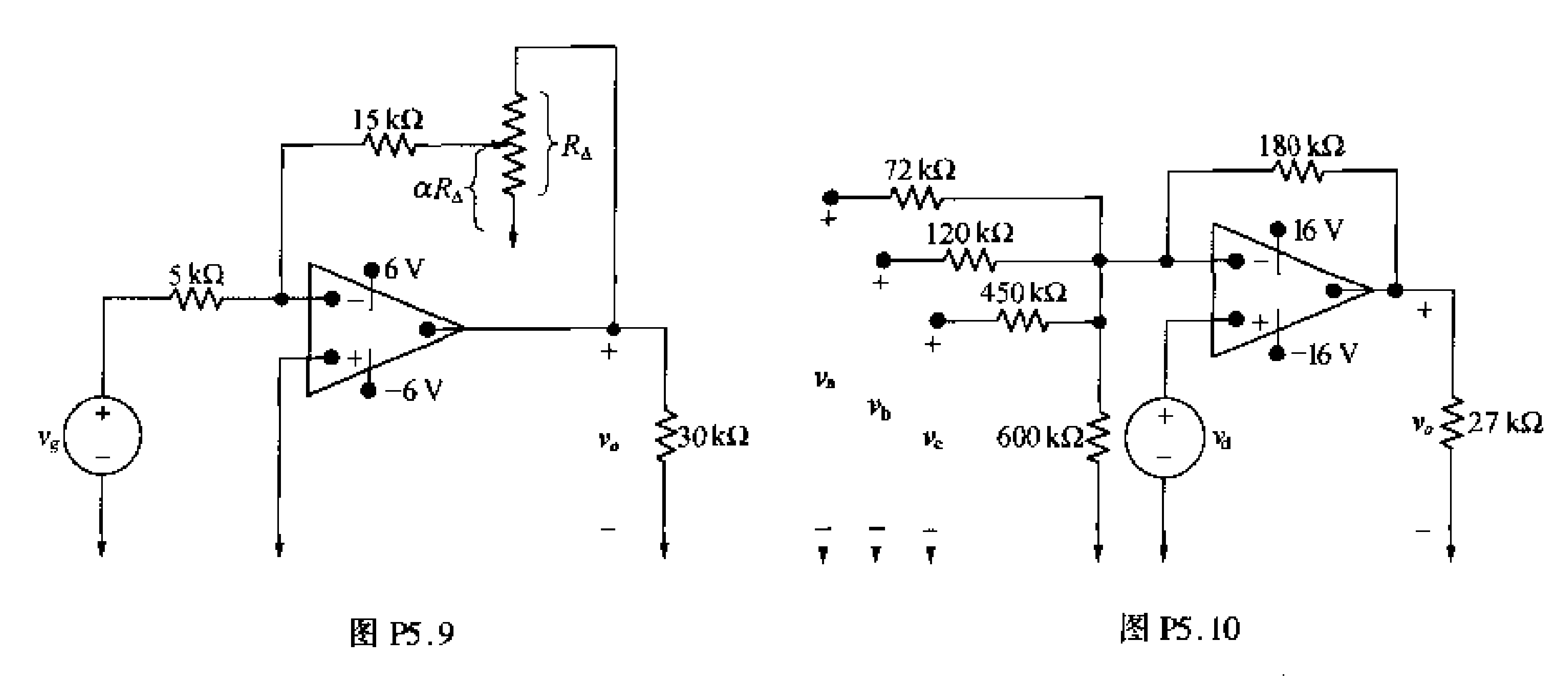


图 P5.9　　　　图 P5.10

P5.11 用一个可变电阻器 R_f 代替图 P5.10 电路中的 180 kΩ 反馈电阻器。输入电压的大小与习题 5.10 (a)相同。

(a) R_f 取什么值将引起运放饱和?注意 $0\leqslant R_f\leqslant\infty$。

(b) 如果 R_f 取(a)所求的值,多大的电流(单位为微安)进入运放的输出端?

P5.12 图 P5.12 电路中的运放是理想的。

(a) 如果 $v_a = 1.2$ V，$v_b = -1.5$ V，$v_c = 4$ V，求 v_o。

(b) v_a 和 v_c 的值分别保持在 1.2 V 和 4 V，如果要使运放工作在线性区，对 v_b 有什么限制？

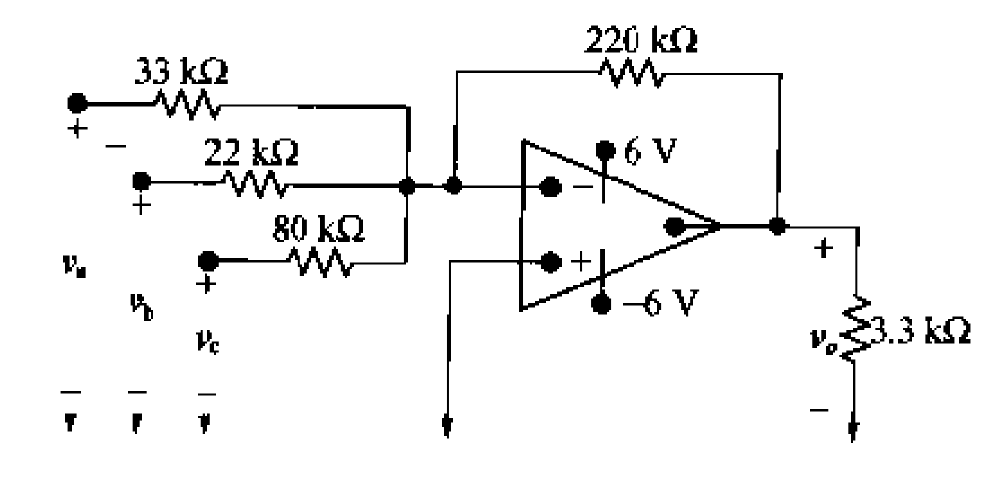


图 P5.12

P5.13 图 5.11 电路所示运放假定是理想的。给定 $R_a = 3$ kΩ，$R_b = 5$ kΩ，$R_c = 25$ kΩ，$v_a = 150$ mV，$v_b = 100$ mV，$v_c = 250$ mV，$V_{CC} = \pm 6$ V，指定 R_f 的范围，使运放工作在线性区。

P◇5.14 设计一个反相求和放大器，满足：

$$v_o = -(6v_a + 9v_b + 4v_c + 3v_d)$$

如果反馈电阻器（R_f）选择为 72 kΩ，画一个放大器的电路图，并给出 R_a，R_b，R_c 和 R_d 的值。

5.15 (a) 图 P5.15 中的理想运放工作在线性区。证明：

$$i_a = \frac{3v_g}{R}$$

(b) 证明如果下式成立，理想运放将饱和：

$$R_a = \frac{R(\pm V_{CC} - 2v_g)}{3v_g}$$

P5.16 在 R_L 值的一定范围内，图 P5.16 电路中的阴影区域内是个恒定电流源。

(a) 如果 $R_L = 2.5$ kΩ，求 i_L。

(b) 如果 i_L 为(a)中的值，求 R_L 的最大值。

(c) 假定 $R_L = 6.5$ kΩ，解释电路的工作情况。可以假定在所有工作条件下有 $i_p = i_n \approx 0$。

(d) 相对 $0 \leq R_L \leq 6.5$ kΩ，绘图表示 i_L。

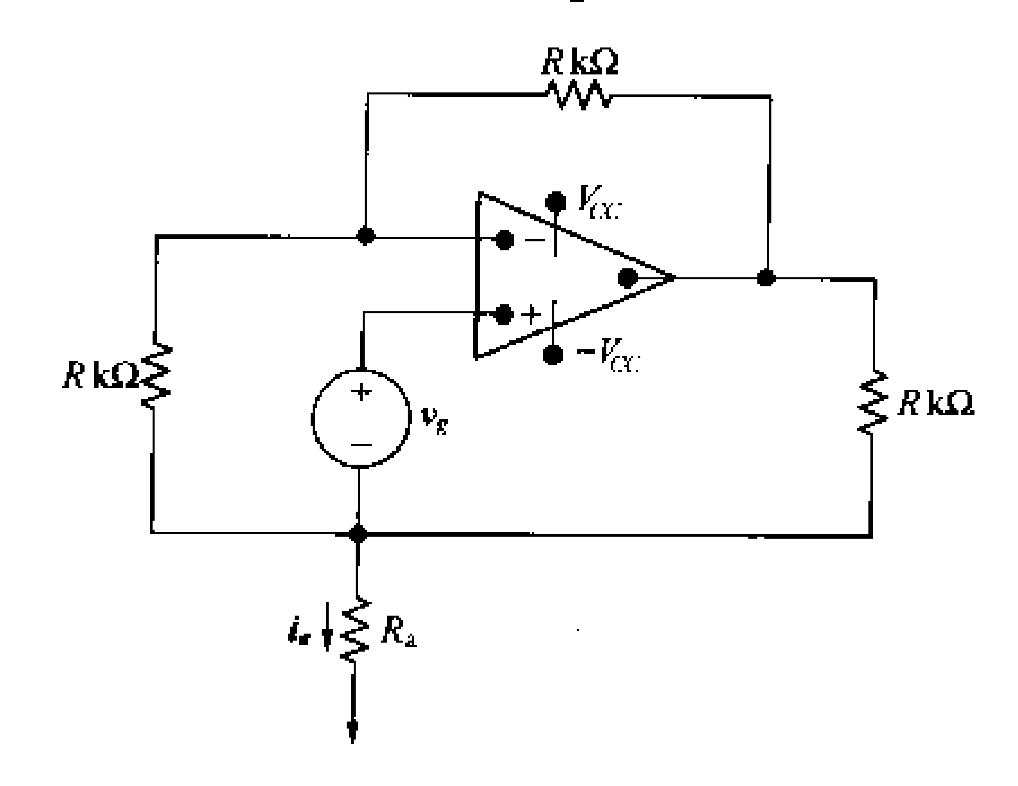


图 P5.15

图 P5.16

P5.17 图 P5.17 电路中的可变电阻器 R_o 调节到使源电流 i_g 为零。运放是理想的，而且 $0 \leq v_g \leq 1.2$ V。

(a) R_o 的值为多少?

(b) 如果 $v_g = 1.0$ V，多大的功率(微瓦)消耗在 R_o 上?

P5.18 求图 P5.18 电路中的 i_a。

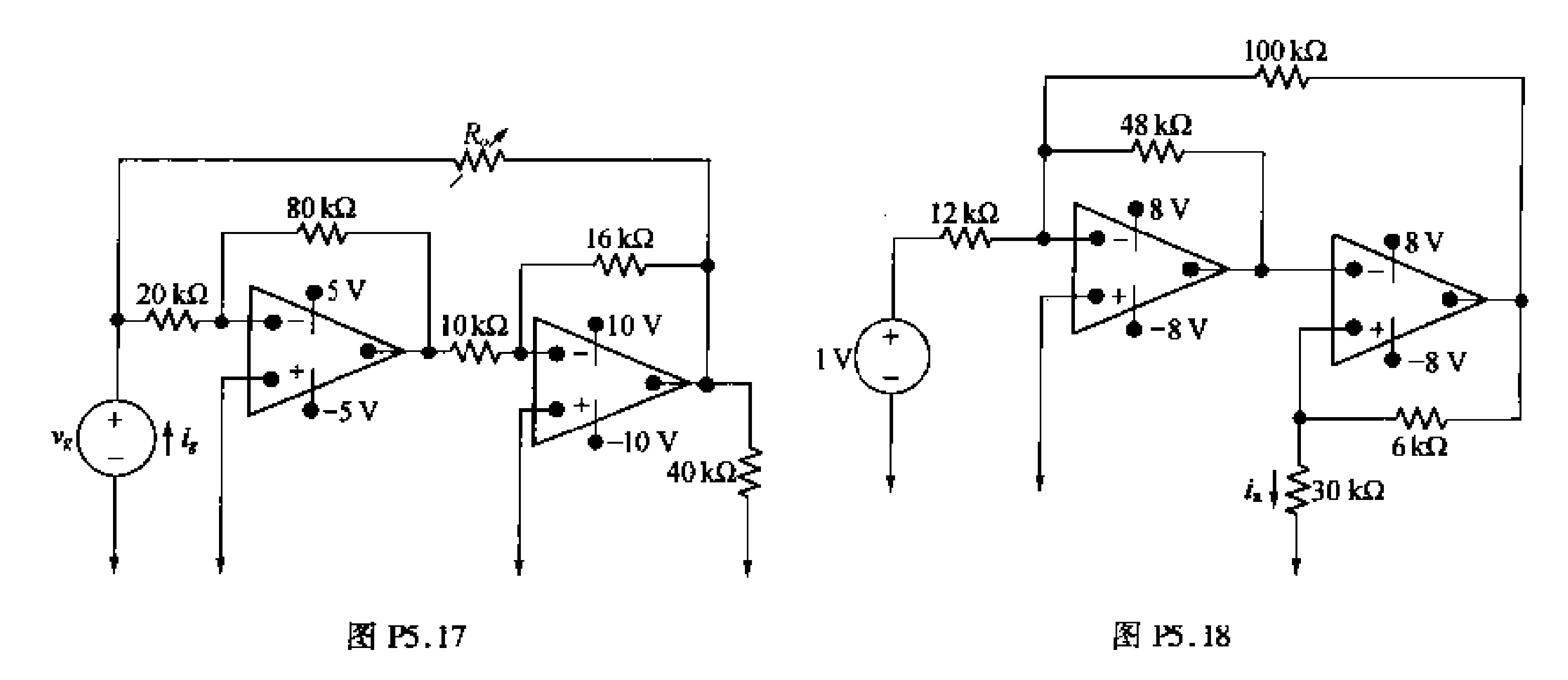


图 P5.17　　　　图 P5.18

P5.19 图 P5.19 电路中的运放是理想的。

(a) 求 i_a。

(b) 如果 $i_a = 0$，求左边电源电压值。

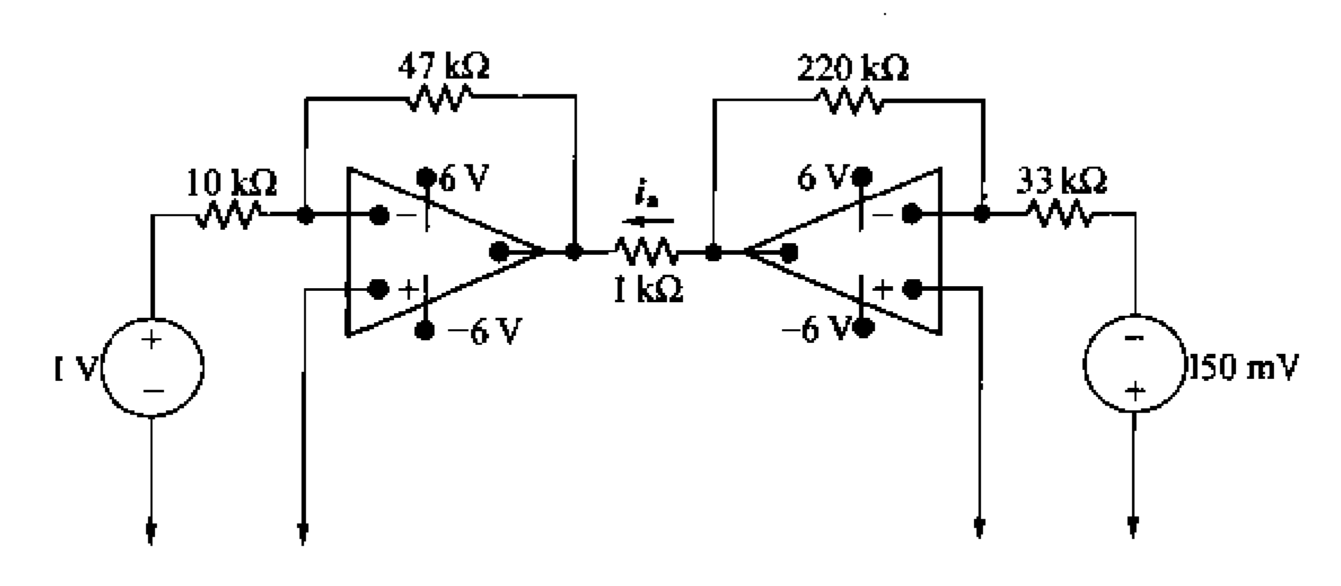


图 P5.19

P5.20 假定图 P5.20 电路中的理想运放工作在线性区。

(a) 计算 16 kΩ 电阻器上的功率损耗。

(b) 如果将运放从电路中移去，即 16 kΩ 电阻与 48 kΩ 电阻串联，重复(a)。

(c) 求(a)中所得功率与(b)中所得功率之比。

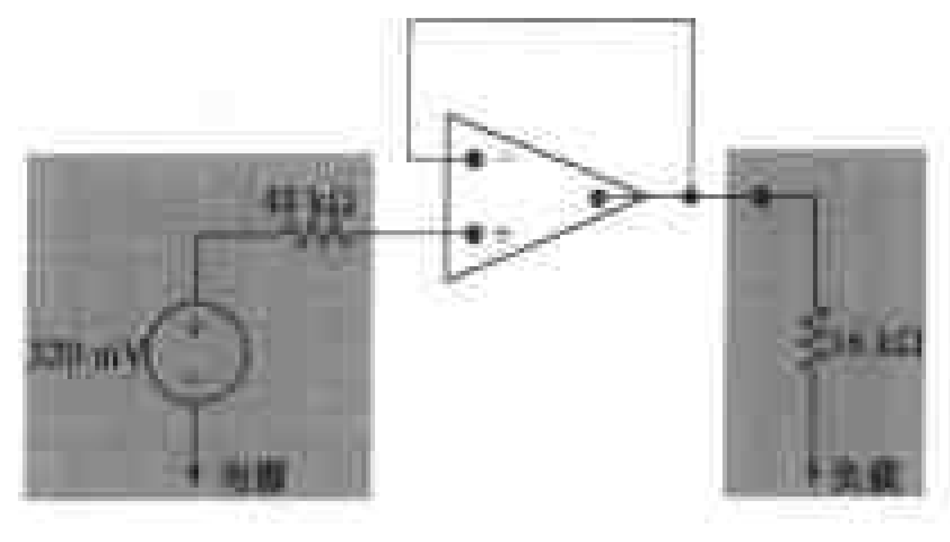


图 P5.20

(d) 在电源和负载之间插入的运放有用吗？请解释。

5.21 假定图 P5.21 电路中的理想运放工作在线性区。

(a) 证明 $v_o = [(R_1 + R_2)/R_1]\ v_s$。

(b) 如果 $R_1 \to \infty$ 而且 $R_2 \to 0$，会发生什么情况？

(c) 解释在 $R_1 \to \infty$，$R_2 \to 0$ 时，电路为什么被称做电压跟随器？

P5.22 图 P5.22 电路中的运放是理想的。

(a) 如果 $v_g = 3$ V，计算 v_o。

(b) 给出 v_g 值的范围，使运放工作在线性区。

(c) 假定 v_g 等于 5 V，并用可变电阻器代替 48 kΩ 电阻。可变电阻的值为多少会引起运放饱和？

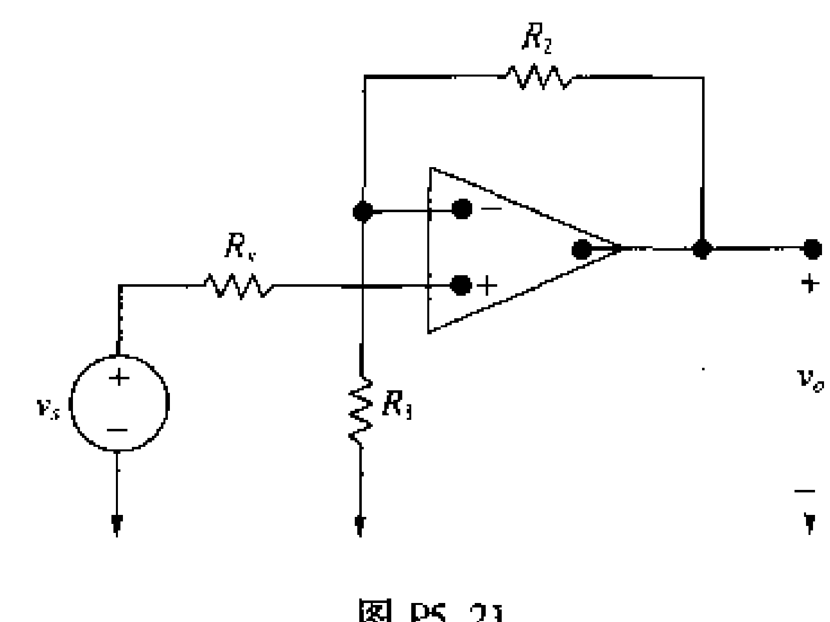


图 P5.21

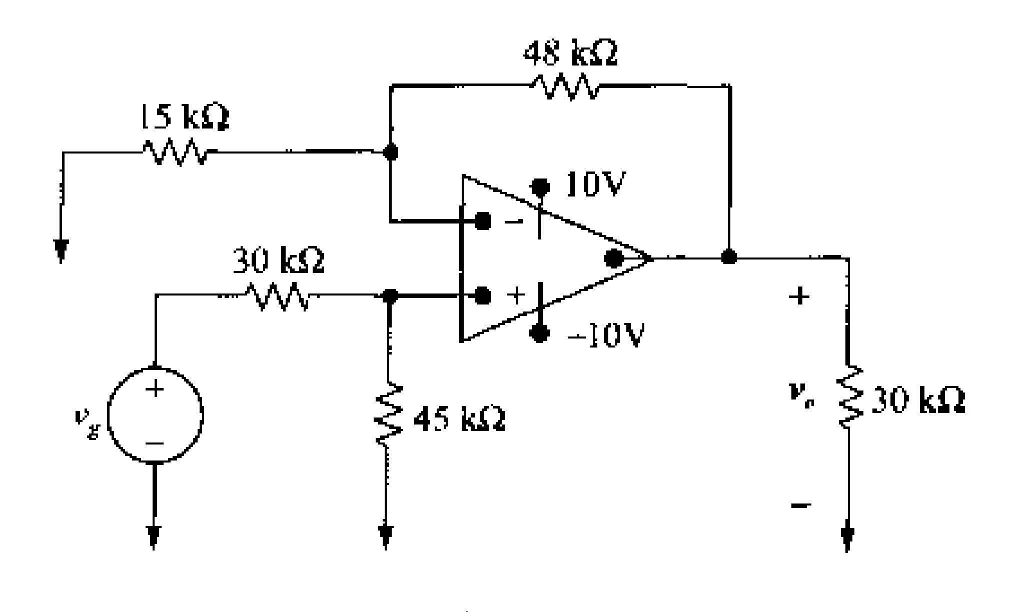


图 P5.22

P5.23 图 P5.23 所示同相求和放大器中的运放是理想的。

(a) 指定 R_f，R_b 和 R_c 的值，使得：

$$v_o = 3v_a + 2v_b + v_c$$

(b) 如果 $v_a = 0.80$ V，$v_b = 1.5$ V，$v_c = 2.1$ V，求 i_a，i_b，i_c，i_g 和 i_s（单位为微安）。

P5.24 图 P5.24 所示同相放大器中的运放是理想的。信号电压 v_a 和 v_b 分别是 500 mV 和 1 200 mV。

(a) 计算 v_o。

(b) 求 i_a 和 i_b。

(c) 与 v_a 和 v_b 关联的加权系数为多少？

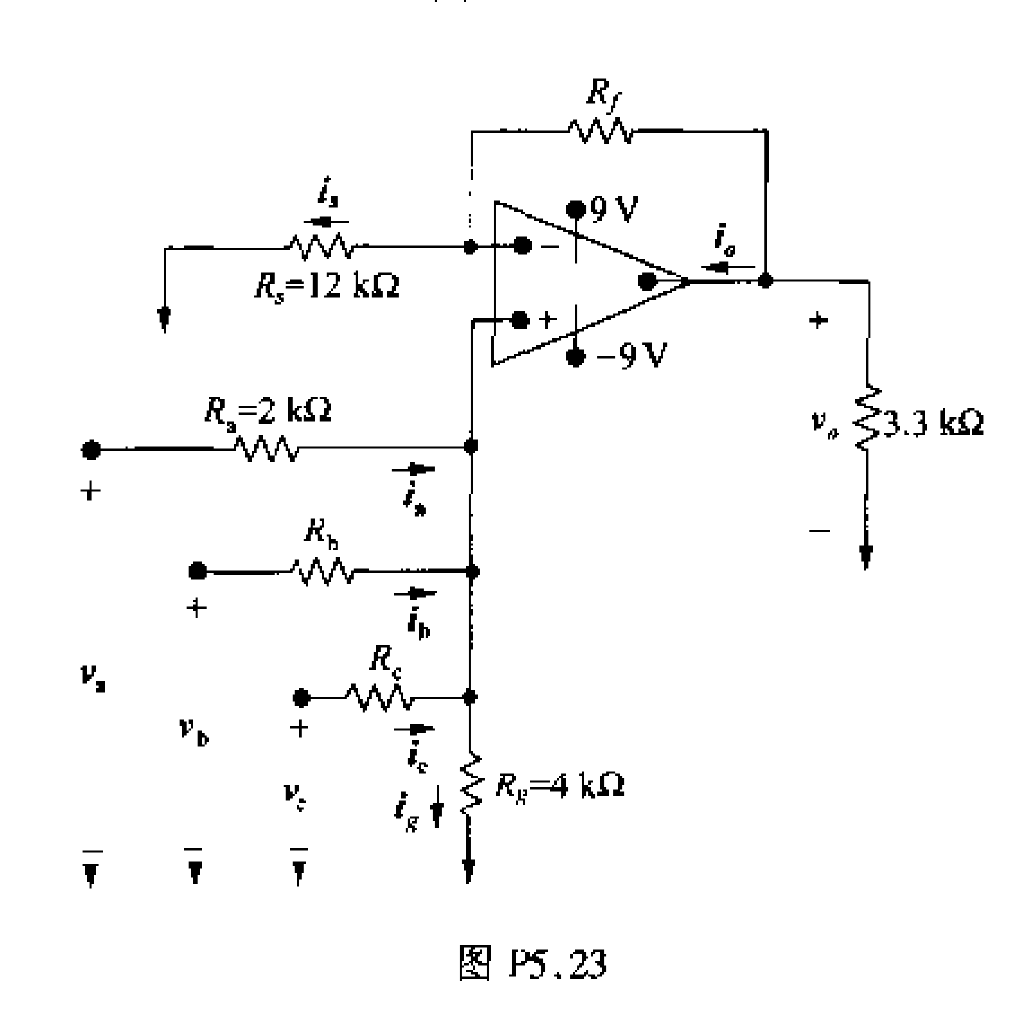


图 P5.23

P◇5.25 图 P5.25 所示电路是同相求和放大器。假定运放是理想的，设计电路使得：

$$v_o = 5v_a + 4v_b + v_c$$

(a) 给出 R_a，R_b 和 R_c 的值。

(b) 如果 $v_a = 0.5$ V，$v_b = 1.0$ V，$v_c = 1.5$ V，求 i_a，i_b 和 i_c（单位为微安）。

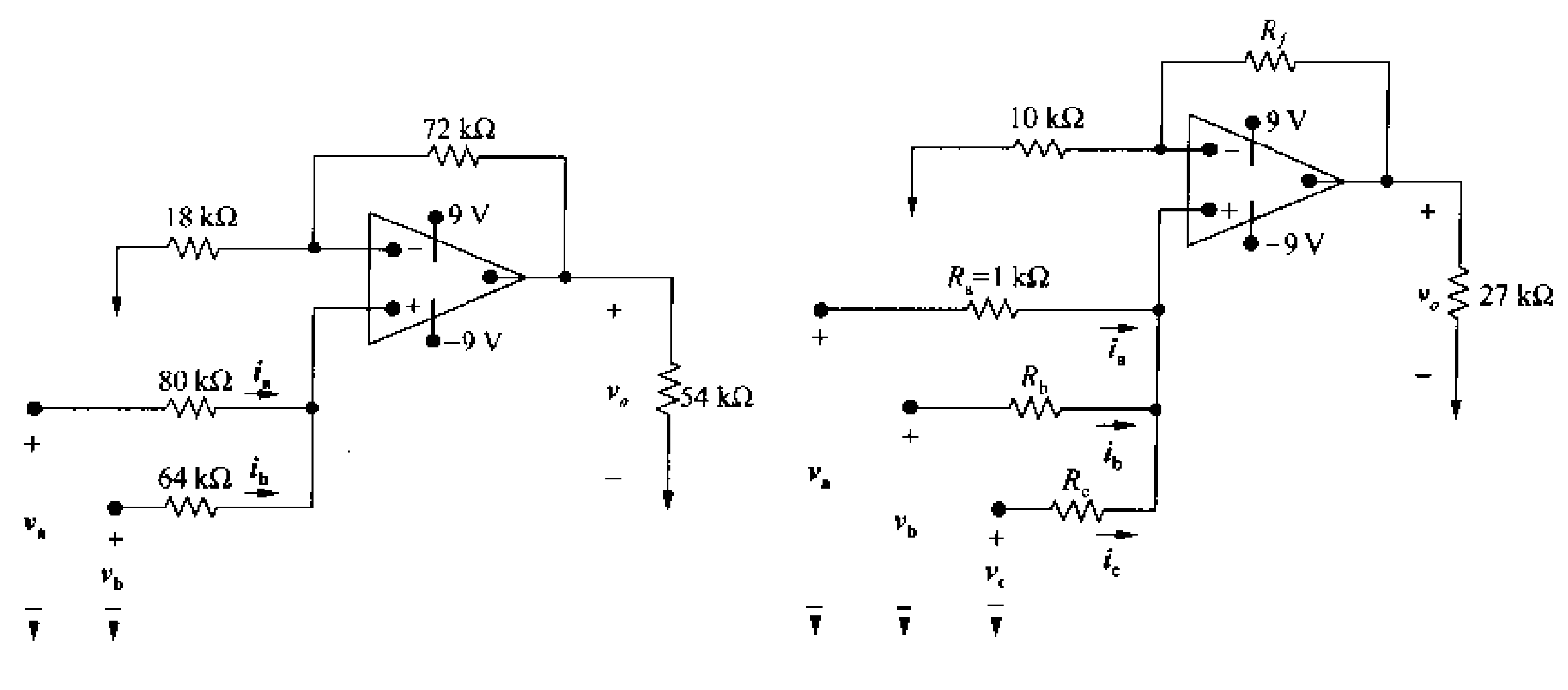


图 P5.24　　　　图 P5.25

P5.26 图 5.13 所示的差分放大器中的电阻器 $R_a = 20\ \text{k}\Omega$, $R_b = 80\ \text{k}\Omega$, $R_c = 47\ \text{k}\Omega$, $R_d = 33\ \text{k}\Omega$,信号电压 v_a 和 v_b 分别是 0.45 V 和 0.9 V, $V_{CC} = \pm\ 9$ V。

(a) 计算 v_o。

(b) 从信号源 v_a 看进去的电阻是多少?

(c) 从信号源 v_b 看进去的电阻是多少?

P5.27 图 P5.27 所示加减电路中的运放是理想的。

(a) 如果 $v_a = 0.5$ V, $v_b = 0.3$ V, $v_c = 0.6$ V, $v_d = 0.8$ V,求 v_o。

(b) 如果 v_a, v_b, v_d 保持不变, v_c 是什么值能使运放不饱和?

5.28 图 P5.28 所示电路中的运放是理想的。

(a) 若 $R_f = 4\ R_1$, $v_g = 2$ V,绘制相对 α 的 v_o 特性。采用增量为 0.1,假设 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1.0$。

(b) 写出在(a)中绘制的直线方程式。有关 v_g 和比 R_f/R_1 的倾斜角和截距为多少?

(c) 使用(b)的结果,选择 v_g 和比 R_f/R_1 的值,使 $v_o = -6\alpha + 4$。

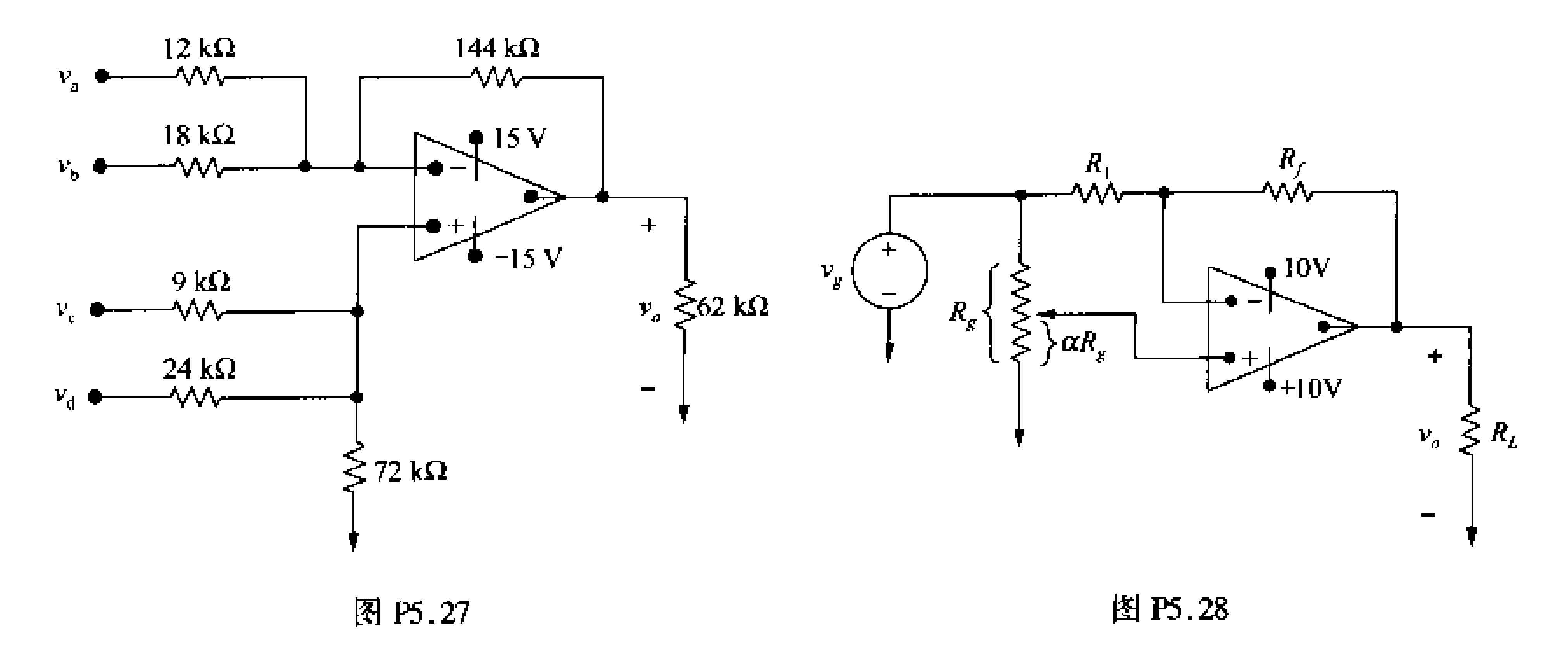


图 P5.27　　　　图 P5.28

P◇5.29　选择图 P5.29 所示电路中 R_b 和 R_f 的值，使得：

$$v_o = 2000(i_b - i_a)$$

运放是理想的。

P◇5.30　设计图 P5.30 所示差分放大器电路，使得 $v_o = 10(v_b - v_a)$，而且从电压源 v_b 看到的输入电阻是 220 kΩ。指定 R_a，R_b 和 R_f 的值。使用运放的理想模型。

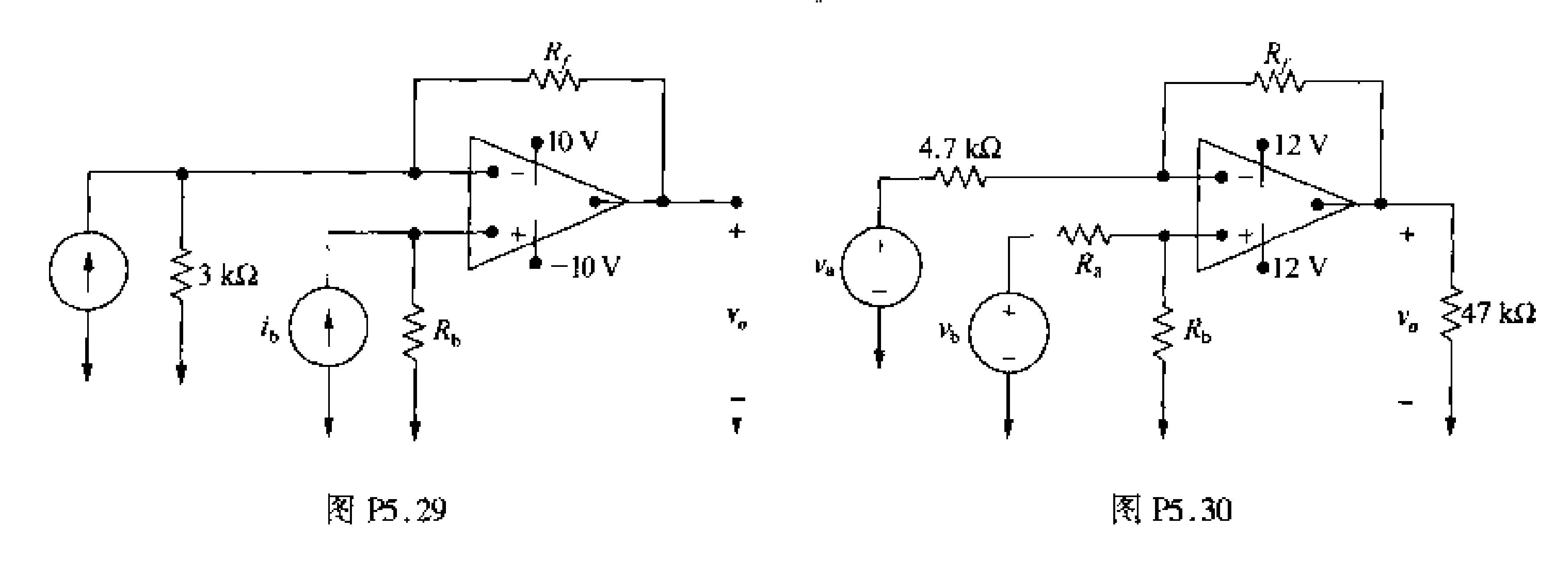


图 P5.29　　　　图 P5.30

P◇5.31　设计一个差分放大器(图 5.13)，且能满足下列标准：$v_o = 2v_b - 5v_a$。当输出电压 v_o 为零时，从信号源 v_b 看进去的电阻是 600 kΩ，从信号源 v_a 看进去的电阻是 18 kΩ。指定 R_a，R_b，R_c 和 R_d 的值。

P5.32　图 P5.32 所示电路中的运放是理想的。求 v_x，i_a 和 i_o。

P5.33　图 P5.33 所示电路中的运放是理想的。计算 v_{o1} 和 v_{o2}。

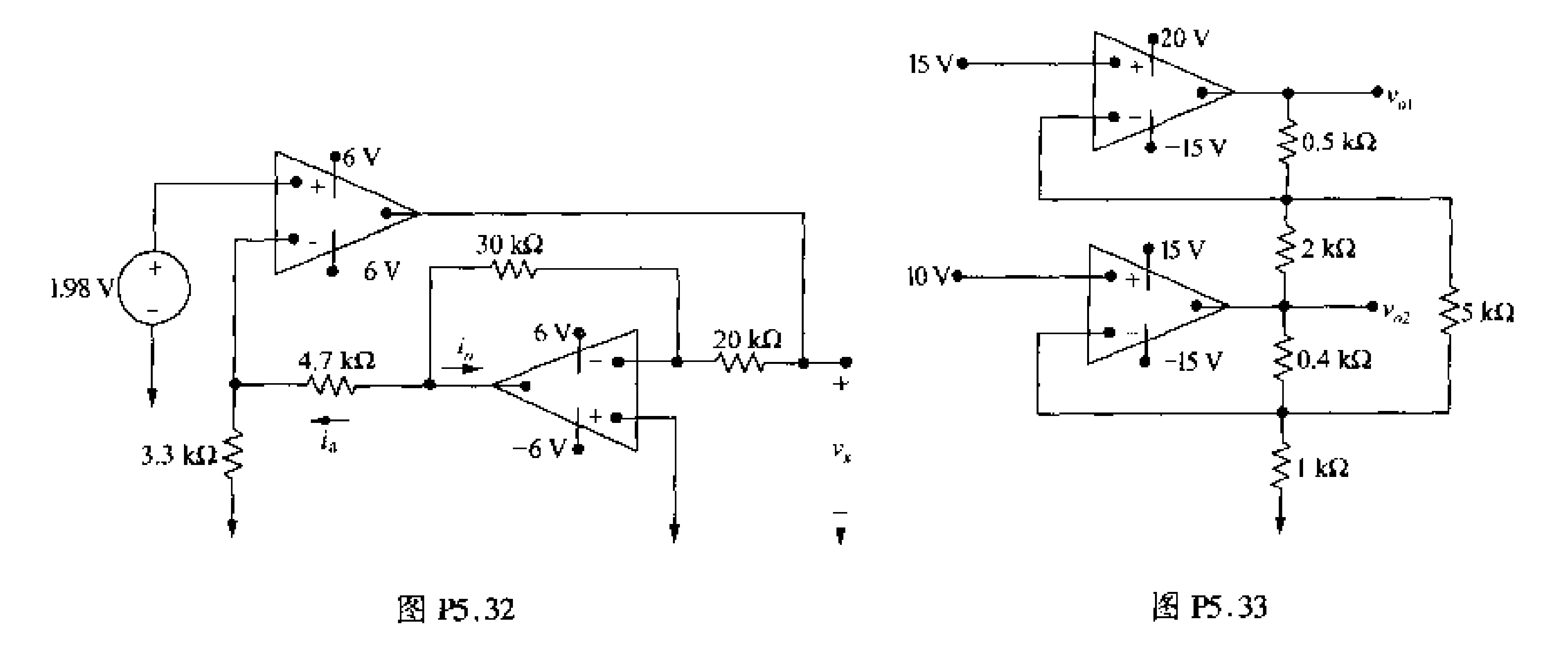


图 P5.32　　　　图 P5.33

P5.34　求图 P5.34 所示电路中的 v_o 和 i_o，假定运放是理想的。

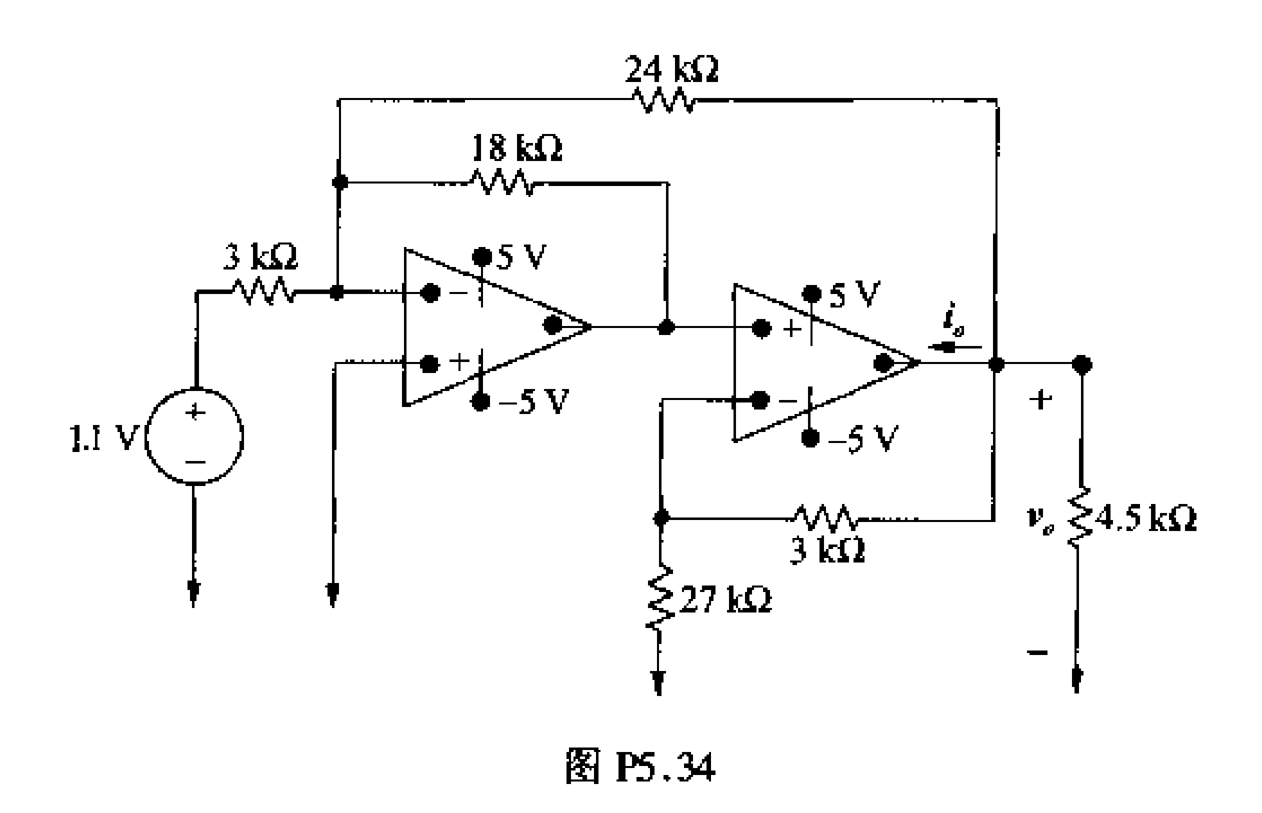


图 P5.34

5.35 图 P5.35 所示电路中的运放是理想的。

(a) 如果运放工作在线性区,求作为 α, σ, v_{g1} 和 v_{g2} 函数的 v_o。

(b) 当 $\alpha = \sigma = 1.0$ 时,求电路 v_o 的表达式。

(c) 当 $\alpha = \sigma = 0$ 时,求电路 v_o 的表达式。

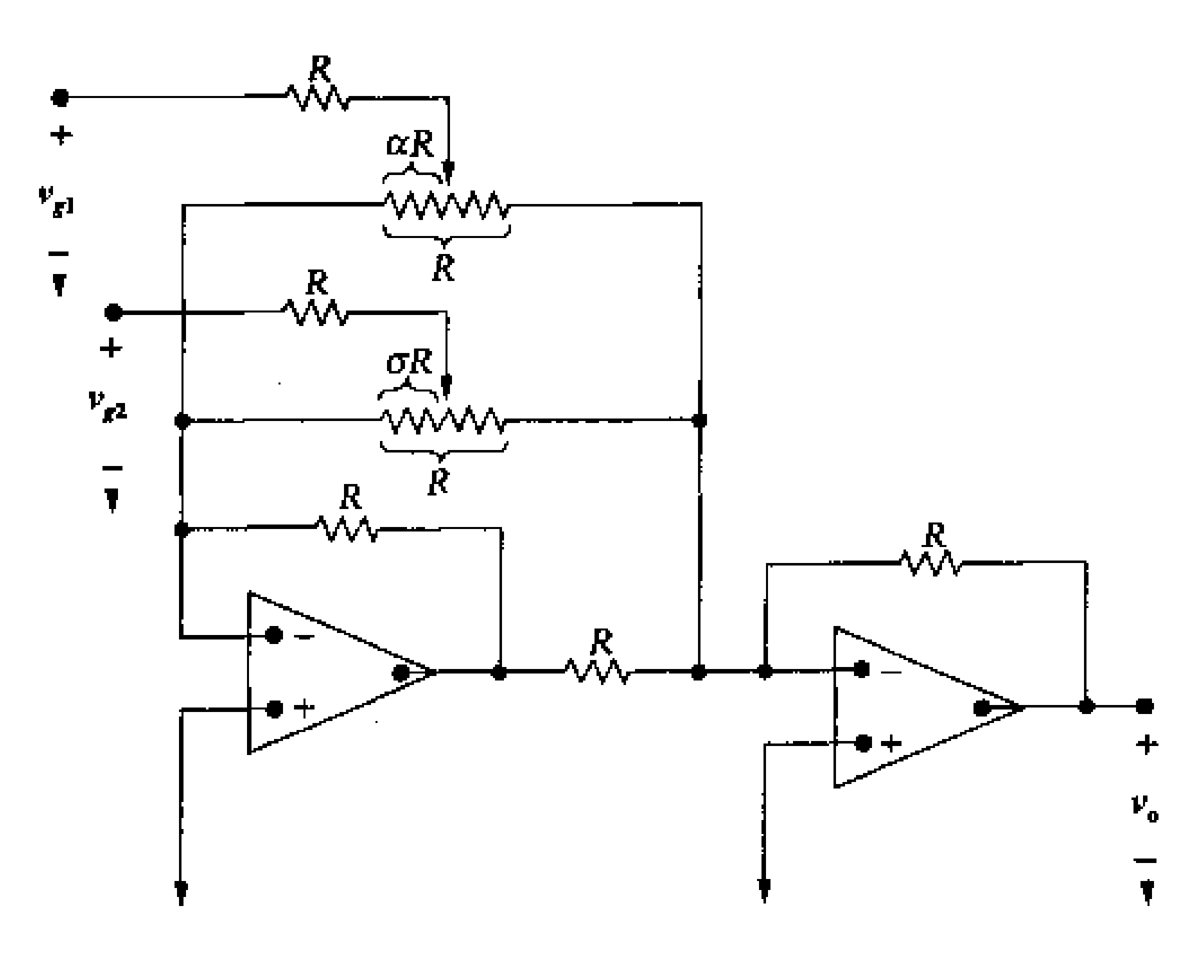


图 P5.35

P M5.36 图 P5.36 所示电路中的信号电压 v_g 由下列方程式描述:

$v_g = 0, \quad t \leq 0$

$v_g = 10\sin(\pi/3)t$ V, $\quad 0 \leq t \leq \infty$。

假定运放是理想的,相对于 t 绘制 v_o 的特性。

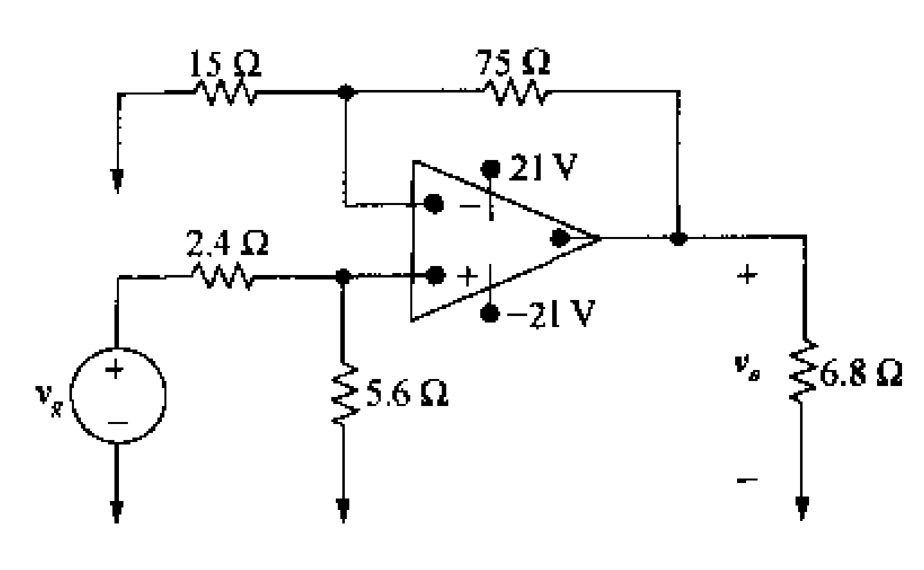


图 P5.36

P5.37 图 P5.37(a)所示的 v_g 作为图 P5.37(b)所示反相放大器的输入。假定运放是理想的,相对于 t 绘制 v_o 的特性。

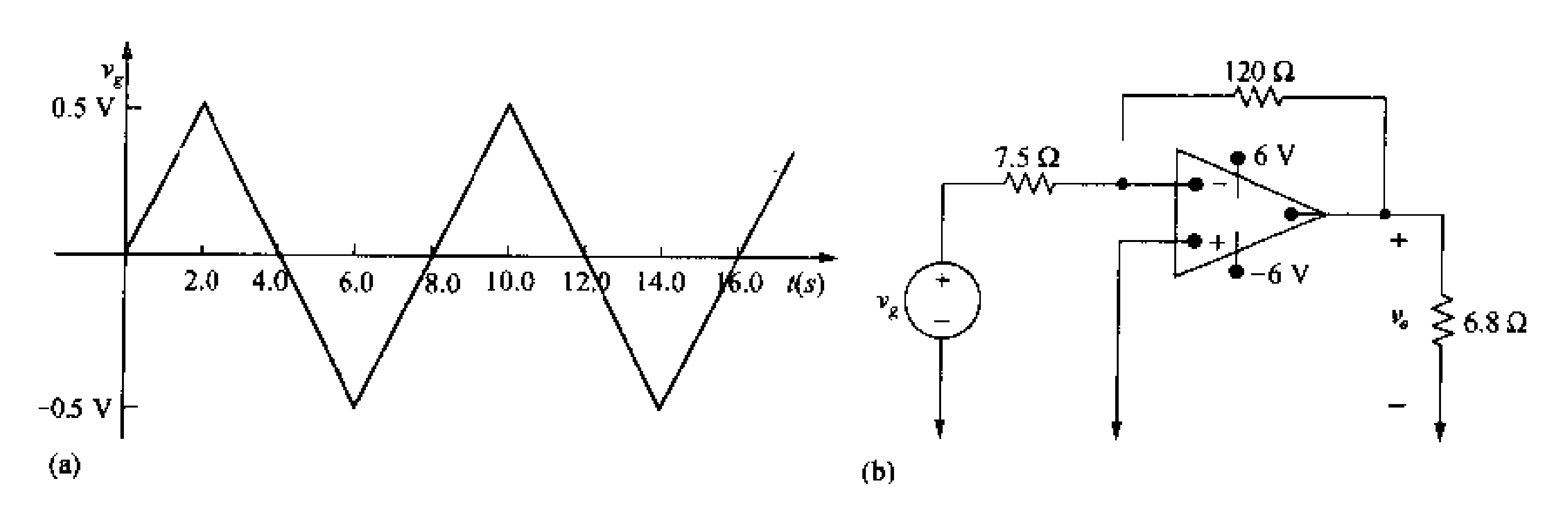


图 P5.37

P5.38 假定图 P5.38 所示运放中的输入电阻是无穷大,输出电阻是零。

(a) 如果开环增益是 A,求作为 v_g 函数的 v_o。

(b) 如果 $v_g = 0.4$ V, $A = 90$, v_o 值是多少?

(c) 如果 $v_g = 0.4$ V, $A = \infty$, v_o 值是多少?

(d) A 为多大能使 v_o 达到它在(c)中的 95%。

P5.39 图 P5.39 所示同相放大器中的运放,输入电阻是 460 kΩ,输出电阻是 5 kΩ,运放开环增益是 100 000。假定运放工作在线性区。

(a) 计算电压增益(v_o/v_g)。

(b) 如果 $v_g = 1$ V,求反相和同相输入电压 v_n 和 v_p(单位为毫伏)。

(c) 当 $v_g = 1$ V 时,计算差($v_p - v_n$),单位为微伏。

(d) 当 $v_g = 1$ V 时,求信号源的电流,单位为皮安。

(e) 假定是理想运放,重复(a) ~ (d)。

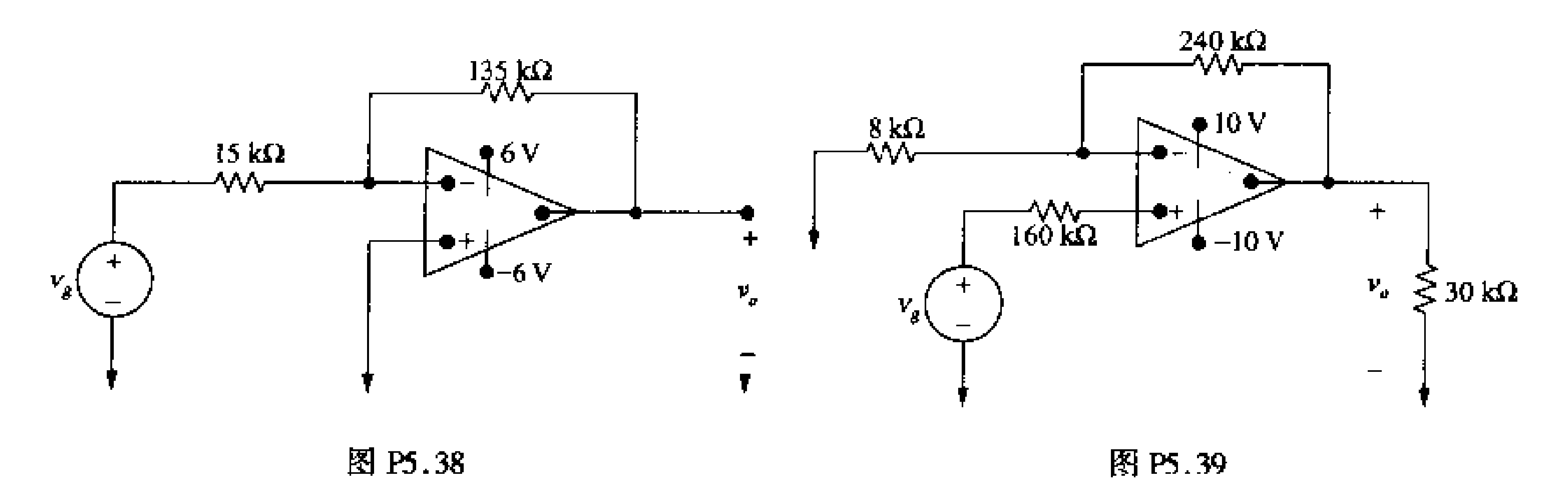


图 P5.38　　　　图 P5.39

P5.40 图 P5.40 所示反相放大器中的输入电阻是 400 kΩ,输出电阻是 2 kΩ,运放开环增益是 500 000。假定运放工作在线性区。

(a) 计算放大器的电压增益(v_o/v_g)。

(b) 如果 $v_g = 50$ mV,计算 v_n(单位为微伏)。

(c) 计算从信号源(v_g)看进去的电阻。

(d) 使用运放理想模型,重复(a)~(c)。

P5.41 如果给反相放大器加上 500 Ω 电阻负载,重复习题 5.40。

P5.42 图 P5.42 电路中的电阻器 R_f 调节到使理想运放饱和。指定 R_f(单位为千欧)。

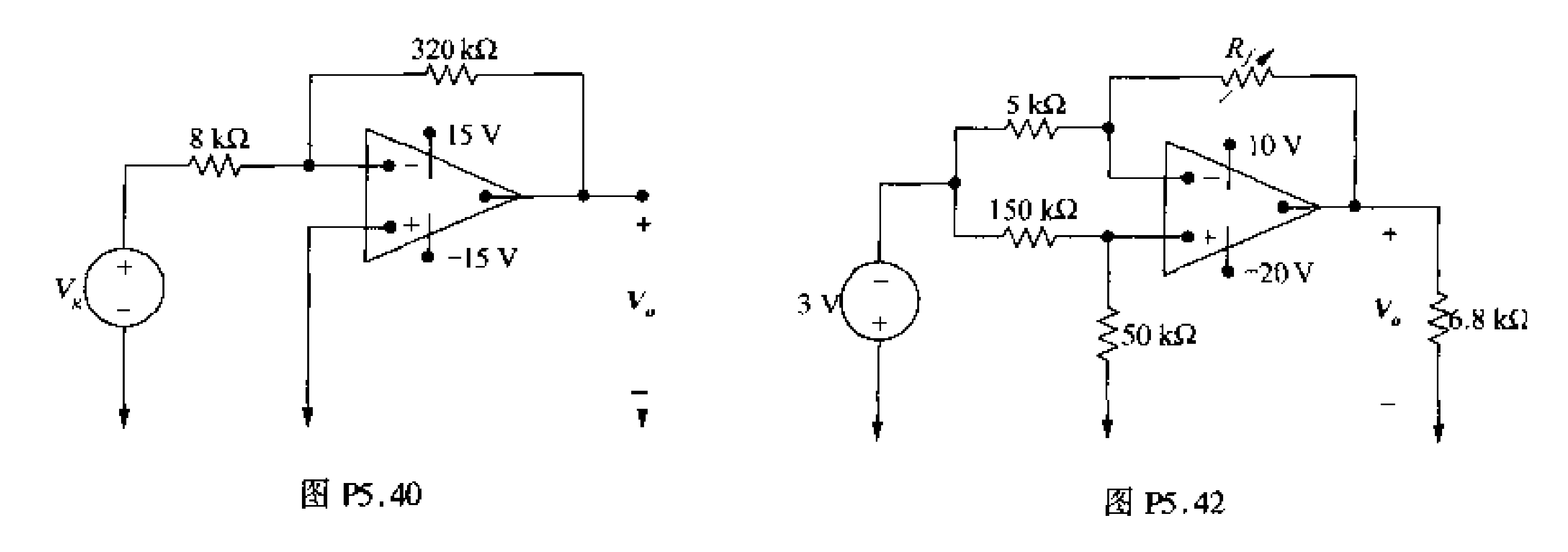


图 P5.40　　　　图 P5.42

P5.43 (a) 求图 P5.43 所示反相放大器输出端 a,b 的戴维南等效电路。直流信号源为 150 mV,运放的输入电阻是 500 kΩ,输出电阻是 750 Ω,开环增益是 50 000。

(b) 反相放大器的输出电阻是多少?

(c) 如果 a,b 端的负载是 150 Ω,从信号源(v_s)看进去的电阻是多少?

P5.44 假定是理想运放,重复习题 5.43。

5.45 推导式(5.60)。

P◆5.46 (a) 对于图 P5.46 所示电路,证明:如果 $\Delta R \ll R$,运放的输出电压近似为:

$$v_o \approx \frac{R_f}{R^2}\frac{(R+R_f)}{(R+2R_f)}(-\Delta R)v_{in}$$

(b) 如果 $R_f = 470\ \text{k}\Omega$, $R = 10\ \text{k}\Omega$, $\Delta R = 95\ \Omega$, $v_{in} = 15\ \text{V}$,求 v_o。

(c) 求(b)中 v_o 实际值。

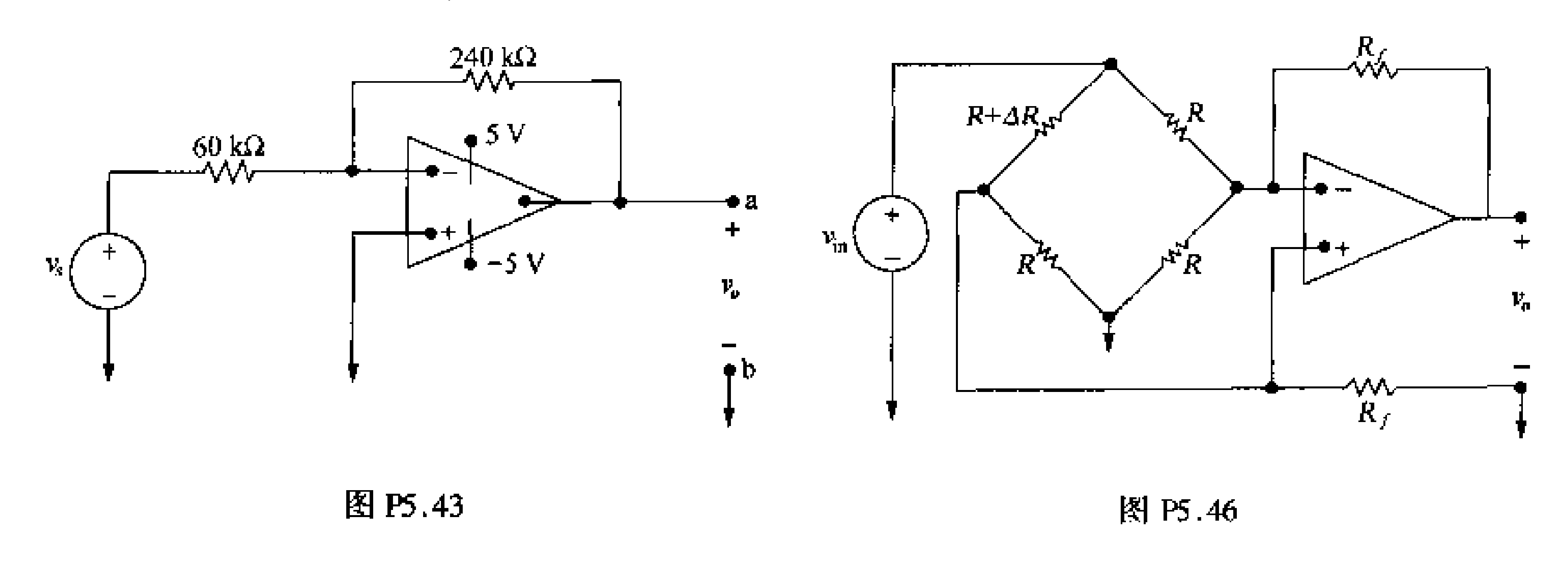


图 P5.43　　　　图 P5.46

P◆5.47 (a) 如果误差百分数定义为:

$$\text{误差百分数} = \left[\frac{\text{近似值}}{\text{实际值}} - 1\right] \times 100\%$$

证明习题 5.46 中 v_o 近似值的误差百分数是:

$$误差百分数 = \frac{\Delta R}{R}\frac{(R+R_f)}{(R+2R_f)} \times 100\%$$

(b) 计算习题 5.46 中 v_o 的误差百分数。

P◆5.48 假定习题 5.46 中 v_o 近似值的误差百分数没有超过 1%，可以接受的 R 的最大百分数变化是多少？

P◆5.49 假定图 P5.46 电桥电路中可变支路的电阻是 $R-\Delta R$。

(a) 如果 $\Delta R \ll R$，v_o 的表达式是什么？

(b) 作为 R，R_f 和 ΔR 函数的 v_o，其误差百分数表达式是什么？

(c) 假定图 P5.46 电桥电路中可变电阻是 9 810 Ω，R_f，R，ΔR 和 v_{in} 的值与习题 5.46 (b)中相同。v_o 近似值是多少？

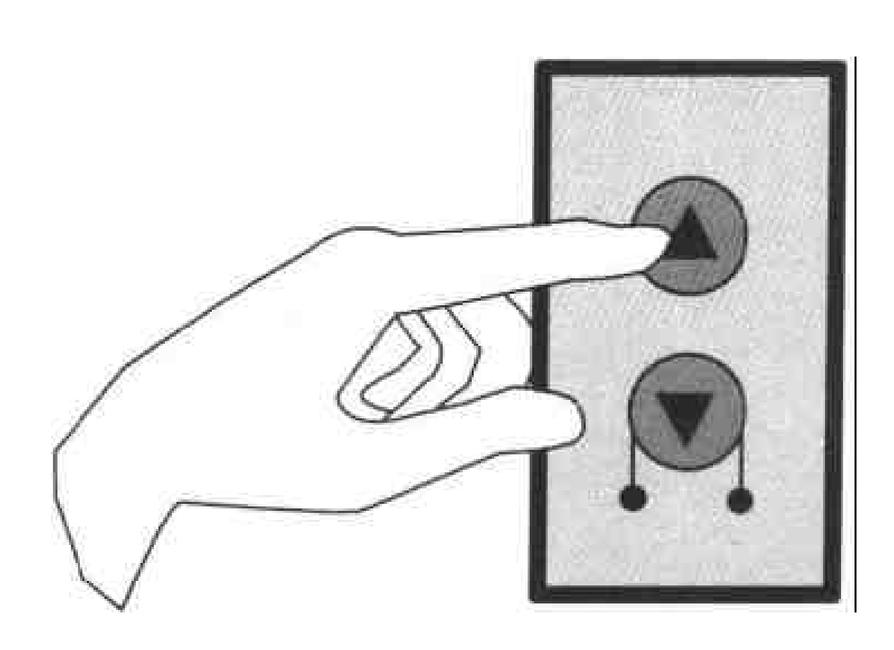
(d) 如果可变电阻是 9 810 Ω，v_o 的近似误差百分数是多少？

第 6 章　电感、电容和互感

实例

组合开关一

在日常生活中使用的电器包含许多开关。多数开关是机械的，如在第 2 章介绍的手电筒开关。机械开关通过推、拉、滑动、旋转，引起两片金属导体接触，构成短路。有时设计者更喜欢没有活动部分的开关，以增加产品的安全性和可靠性，使其方便或新颖。这样的开关被称做组合开关。组合开关应用多种传感器技术，例如，一些电梯门只要光束被阻断就始终打开。



另一个用于组合开关的传感器技术是在破坏电场时产生响应。这种组合开关用在触摸控制开和关的台灯上，还用在没有活动部分的电梯按钮上，如图所示。开关以电容为基础，电容是个电路元件，它的端子特性由电场决定。触摸电容性组合开关时，使电容的容量发生变化，从而引起电压的变化，形成开关。电容触摸传感开关的设计是实例中的话题。

本章开始介绍在第 2 章所提到的最后两个理想电路元件：电感和电容。第 3 章和第 4 章所介绍的电路分析技术，也可以应用于包含电感和电容的电路。一旦了解了这些元件用电流和电压表示的端子行为，就可以用基尔霍夫定律来描述与其他基本元件之间的互连关系。像其他的元件一样，电感和电容用电路变量比用电磁场变量更容易描述。在集中描述电路之前，最好简单回顾一下这些基本元件的概念。

电感是一种抵抗电流变化的电子元件。它由环绕在磁性或非磁性材料支柱芯上的线圈组成。电感的行为基于磁场的现象，磁场的源是运动中的电荷，即电流。如果电流是随时间变化的，则磁场也是随时间变化。任何与时变的磁场连接的导体中都会感应一个电压。电感的电

路参数建立了感应电压与电流的关系。在 6.1 节将论述这一定量关系。

电容是一种电子元件，它是由绝缘体或电介质材料隔离的两个导体组成。电容只是一种器件，不是可存储电荷的电池。电容的行为是基于电场的现象，电场的源是电荷的分离，即电压。如果电压随时间变化，则电场也随时间变化。时变的电场在该空间产生位移电流。电容的电路参数建立了位移电流与电压之间的关系。这里的位移电流等于电容两端的传导电流。将在 6.2 节讨论这一定量关系；6.3 节讨论利用电容或电感的串、并联简化电路的技术。

能量可以被存储在磁场和电场中。因此，电感和电容是能够存储能量的电子元件。例如，能量可以存储在电感中，释放能量点燃火花塞。能量可以被存储在电容中，释放能量点燃闪光灯泡。对于理想的电感和电容，存储多少能量就能释放多少能量。由于电感和电容并不能产生能量，因此均为无源元件。

在 6.4 节和 6.5 节中，将考虑由磁场连接两个电路的情况，称之为磁耦合。这种情况下，第二个电路感应的电压与第一个电路中的时变电流有关，称之为互感。当学习互感的电流、电压、功率和几个新参数之间的特性关系时，将会给出磁耦合的实际意义。本章将介绍这些关系，然后在第 9 章和第 10 章中讨论在变压器设备中的作用。

6.1 电感

电感是用来描述电感的电路参数。电感用字母 L 表示，单位为亨利(H)，图形符号用线圈表示，表明电感是一个导线连接磁场的结果。图 6.1(a)表示一个电感。指定电流的参考方向与电感两端电压降方向一致，如图 6.1(b)所示。电感上电压与电流的关系表示为：

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{6.1}$$

其中 v 单位为伏特，L 为亨利，i 为安培，t 为秒。式(6.1)反映无源符号约定，如图 6.1(b)所示，即电流的参考方向与电感上电压降方向一致。如果电流的参考方向与电压升方向一致，则在式(6.1)加上负号。

式(6.1)中，电感的端电压是与电感中电流随时间的变化率成比例。其中有两点要特别注意，第一，如果电流是常数，则理想电感上的电压为零。因此对于恒定的电流，即直流电流，电感表现为短路。第二，电感中电流不能跃变，也就是电流在零时间内不能变化一个有限量。式(6.1)表明电流跃变需要一个无穷大的电压，而无穷大的电压是不可能的。例如，在实际系统中，当某人打开感应电路开关时，电流开始通过开关连续流向空气，这个现象称做电弧。通过开关的这个电弧阻碍电流立即下降为零。由于必须控制电弧和电压涌流以防设备受损，因此开关感应电路是一个重要的工程问题。要了解这个问题的实质首先要精通本章和下面两章里介绍的内容。例 6.1 说明了式(6.1)在简单电路中的应用。



(a)电感的符号，其电感为L亨利　(b)对电感指定电压和电流参考方向

图 6.1

例 6.1 图 6.2 所示电路中的独立电流源,当 $t<0$ 时,电流为零;当 $t>0$ 时,电流为 $10te^{-5t}$ A。

(a) 画电流波形图。

(b) 时间常量为多少时电流最大?

(c) 在 100mH 电感两端的电压表示为时间的函数。

(d) 画出电压波形图。

(e) 电压和电流是在同一时间达到最大吗?

(f) 时间常量为多少时电压改变极性?

(g) 电感上的电压能跃变吗? 若能,在什么时间跃变?

解:

(a) 电流波形如图 6.3 所示。

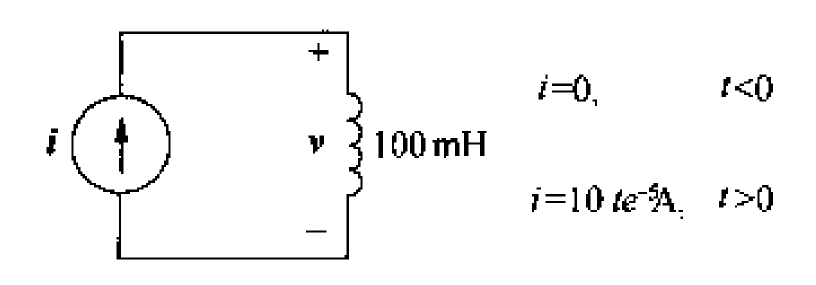


图 6.2 例 6.1 电路

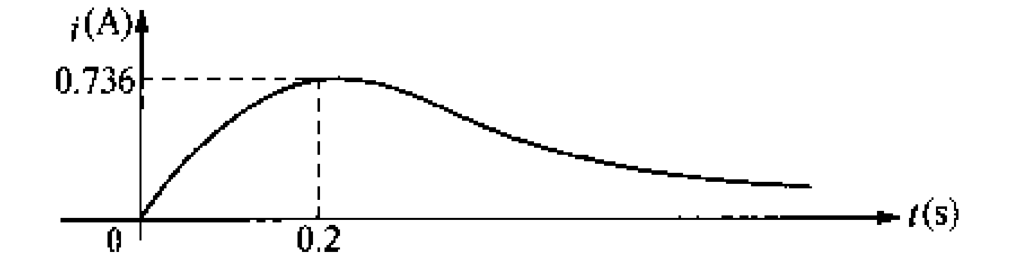


图 6.3 例 6.1 的电流波形

(b) $di/dt = 10(-5te^{-5t} + e^{-5t}) = 10e^{-5t}(1-5t)$ A/s ;$di/dt = 0$。

其中 $t = \dfrac{1}{5}$ s(参考图 6.3)。

(c) $v = Ldi/dt = (0.1)10e^{-5t}(1-5t) = e^{-5t}(1-5t)$ V, $t>0$;

$v = 0, t<0$。

(d) 电压波形图如图 6.4 所示。

(e) 不是。电压是与 di/dt 成比例,而电流不是。

(f) 在 0.2 秒时,相应瞬间 di/dt 为零,并且改变符号。

(g) 能。在 $t=0$ 时,电感两端的电压可以跃变。

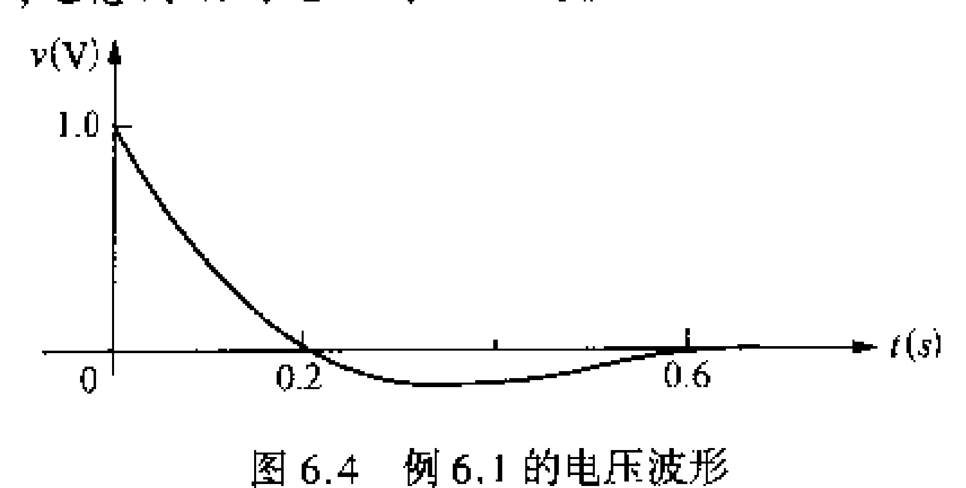


图 6.4 例 6.1 的电压波形

6.1.1 用电感上的电压表示电感中的电流

式(6.1)将电感两端的电压表示为电感中电流的函数,希望将电流表示成电压的函数。为了将 i 变成 v 的函数,在式(6.1)两端乘以时间微分 dt:

$$v\,dt = L\left(\frac{di}{dt}\right)dt \tag{6.2}$$

i 随时间 t 的变化率乘以时间微分得到一个 i 的微分,式(6.2)可以写成:

$$v\,\mathrm{d}t = L\mathrm{d}i \tag{6.3}$$

接着对式(6.3)两端求积分，为方便起见，将方程式两端交换写成：

$$L\int_{i(t_0)}^{i(t)} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}\tau \tag{6.4}$$

应当注意的是，这里用 x 和 τ 作为积分的变量，而 i 和 t 成为积分的上下限。那么，根据式(6.4)，得到：

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}\tau + i(t_0) \tag{6.5}$$

其中 $i(t)$是相对于 t 的电流，而 $i(t_0)$指的是开始积分时刻，即 t_0 时刻电感的电流值。在许多实际应用中 t_0 为零。式(6.5)变成：

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v\,\mathrm{d}\tau + i(0) \tag{6.6}$$

式(6.1)和(6.5)给出了电感两端电压和电流之间的关系。式(6.1)表示电压作为电流的函数，而式(6.5)表示电流作为电压的函数。在这两个方程式中，电流的参考方向与电压降的方向一致，$i(t_0)$带有自身的代数符号。如果初始电流方向与 i 的参考方向相同，则它是正数。如果初始电流是反方向的，则它是负数。例 6.2 是式(6.5)的一个应用举例。

例 6.2　图 6.5 表示电压脉冲作用于 100 mH 的电感。当 $t<0$ 时，$v=0$；当 $t>0$ 时，表达式如下：

$$v(t) = 20te^{-10t}\ \mathrm{V}$$

假设 $t \leqslant 0$ 时，$i=0$。

(a) 绘出以时间为变量的电压曲线。

(b) 求出作为时间函数的电感电流。

(c) 绘出以时间为变量的电流曲线。

解：

(a) 作为时间函数的电压如图 6.6 所示。

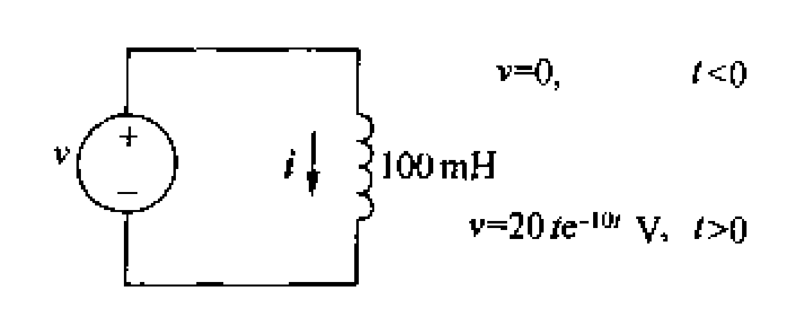


图 6.5　例 6.2 电路

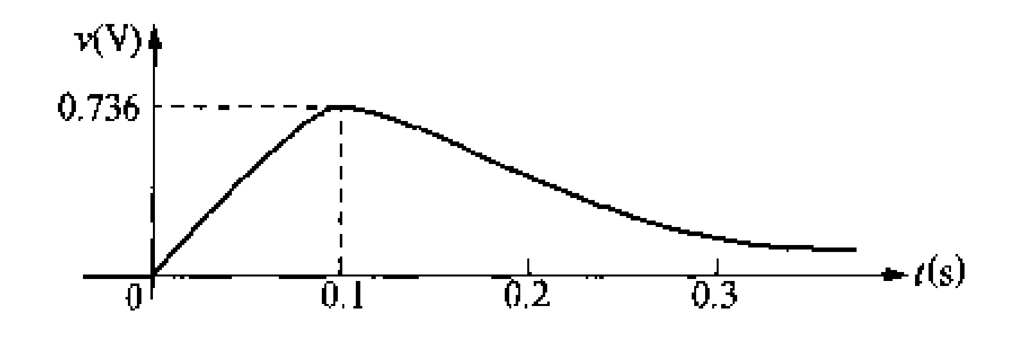


图 6.6　例 6.2 的电压波形

(b) 当 $t=0$ 时，电感中的电流为 0。因此，当 $t>0$ 时：

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{0.1}\int_0^t 20\ \tau e^{-10\tau}\mathrm{d}\tau + 0 \\ &= 200\left[\frac{-e^{-10\tau}}{100}(10\tau + 1)\right]\Big|_0^t \\ &= 2(1 - 10\ te^{-10t} - e^{-10t})\ \mathrm{A}, \quad t > 0 \end{aligned}$$

(c) 作为时间函数的电流如图 6.7 所示。

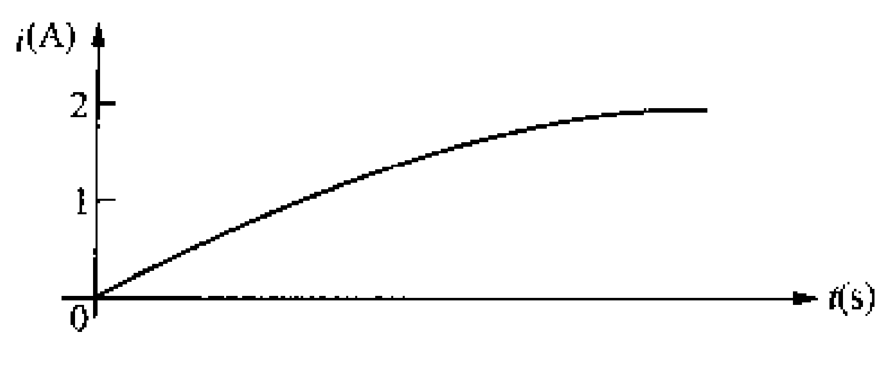


图 6.7 例 6.2 的电流波形

需要注意的是,在例 6.2 中,当 t 增加时,i 接近于常量 2 A。有关这个结果的更多讨论,在讨论了电感中的能量存储之后再详细介绍。

6.1.2 电感中的功率和能量

电感中功率和能量的关系可以直接由电流和电压的关系推导而来。如果电流的参考方向与电感两端电压降的方向一致,则功率表示为:

$$p = vi \tag{6.7}$$

记住:功率单位是瓦特,电压单位是伏特,电流单位是安培。如果将电感电压表示为电感电流的函数,则式(6.7)变成:

$$p = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{6.8}$$

也可以用电压表示电流:

$$p = v\left[\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\ \mathrm{d}\tau + i(t_0)\right] \tag{6.9}$$

式(6.8)在表示存储在电感中的能量时是很有用的。功率是消耗能量对时间的导数,可以表示为:

$$p = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{6.10}$$

式(6.10)两边乘以时间微分得到下面的微分关系:

$$\mathrm{d}w = Li\mathrm{d}i \tag{6.11}$$

对式(6.11)两边进行积分,可以理解为,电感中电流为零时,对应其能量也为零。因此:

$$\int_0^w \mathrm{d}x = L\int_0^i y\mathrm{d}y$$

$$w = \frac{1}{2}Li^2 \tag{6.12}$$

如前所述,对积分的上下限使用不同的符号以避免混淆。在式(6.12)中,功率单位为焦耳,电感单位为亨利,电流单位为安培。通过例 6.3 对例 6.1 和例 6.2 的讨论,说明了式(6.7)和式(6.12)的应用。

例 6.3 (a) 对于例 6.1,画出相对于时间的 i, v, p, w 曲线。垂直排列图形,这样比较容易看出每个变量的特性。

(b) 在什么时间间隔,电感存储能量?

(c) 在什么时间间隔,电感释放能量?

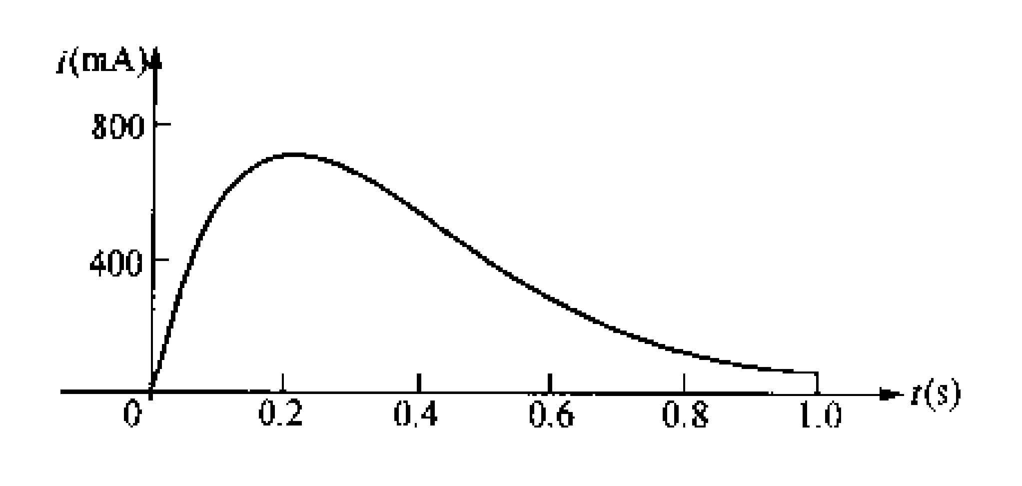
(d) 存储在电感中的最大能量是多少?

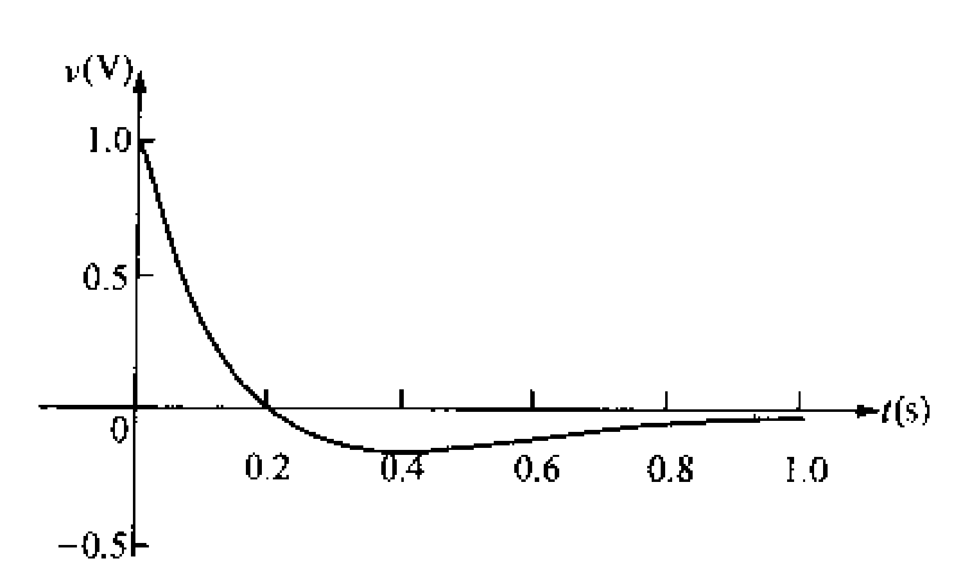
(e) 求积分并解释它们的含义。

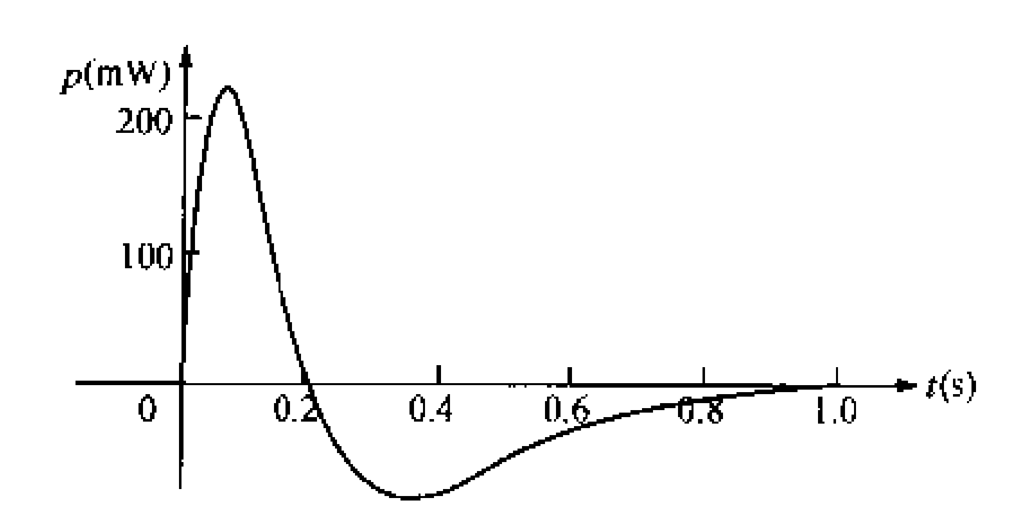
$$\int_0^{0.2} p\,\mathrm{d}t \text{ 和 } \int_{0.2}^{\infty} p\,\mathrm{d}t$$

(f) 对于例 6.2,重复(a),(c)。

(g) 在例 6.2 中,当电压接近零时,为什么在电感中有持续不变的电流?







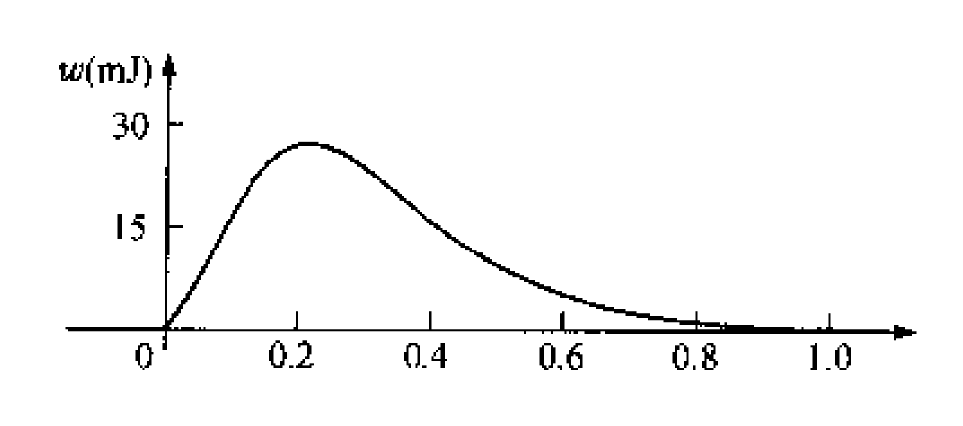


图 6.8　例 6.1 中相对于时间 t 的 i,v,p 和 w 曲线

解:

(a) 根据例 6.1 给出的 i 和 v 的表达式,直接得到 i,v,p,w 曲线,如图 6.8 所示。特别要注意的是,$p=vi$, $w=\left(\frac{1}{2}\right)Li^2$。

(b) 上升的能量曲线表示能量被存储。在 0~0.2s 期间能量被存储。这对应于 $p>0$ 的时间段。

(c) 下降的能量曲线表示能量被释放。在 0.2~∞ 期间能量被释放。对应于 $p<0$ 的时间段。

(d) 从式(6.12)中能够看出,当电流最大时,能量最大,从图中也可确定这一点。例 6.1 的最大电流为 0.736 A,因此,最大能量为 27.07 mJ。

(e) 从例 6.1 中可以得出:

$$i=10te^{-5t}\text{A 以及 } v=e^{-5t}(1-5t)\text{ V}$$

所以:

$$p=vi=10te^{-10t}-50t^2e^{-10t}\text{ W}$$

因此:

$$\int_0^{0.2} p\mathrm{d}t = 10\left[\frac{\mathrm{e}^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]_0^{0.2}$$
$$-50\left\{\frac{t^2\mathrm{e}^{-10t}}{-10}+\frac{2}{10}\left[\frac{\mathrm{e}^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]\right\}_0^{0.2}$$
$$=0.2\mathrm{e}^{-2}=27.02\ \mathrm{mJ}$$
$$\int_{0.2}^{\infty} p\ \mathrm{d}t = 10\left[\frac{\mathrm{e}^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]_{0.2}^{\infty}$$
$$-50\left\{\frac{t^2\mathrm{e}^{-10t}}{-10}+\frac{2}{10}\left[\frac{\mathrm{e}^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]\right\}_{0.2}^{\infty}$$
$$=0.2\mathrm{e}^{-2}=-27.02\ \mathrm{mJ}$$

根据 p 的定义,相对于时间 t,p 曲线之下的区域表示积分期间能量的消耗。因此,在 0~0.2s 期间,功率的积分表示该期间能量已存储在电感中。在 0.2s~∞期间,p 的积分表示能量被释放。注意:在这个期间,所有原始存储的能量被释放;即电流峰值已过,电感中已无能量存储。

(f) 根据例 6.2 给出的 i 和 v 的表达式,直接得到 i,v,p,w 曲线,如图 6.9 所示。这种情况下功率总是正的,因此,在这个电压脉冲期间能量总是被存储的。

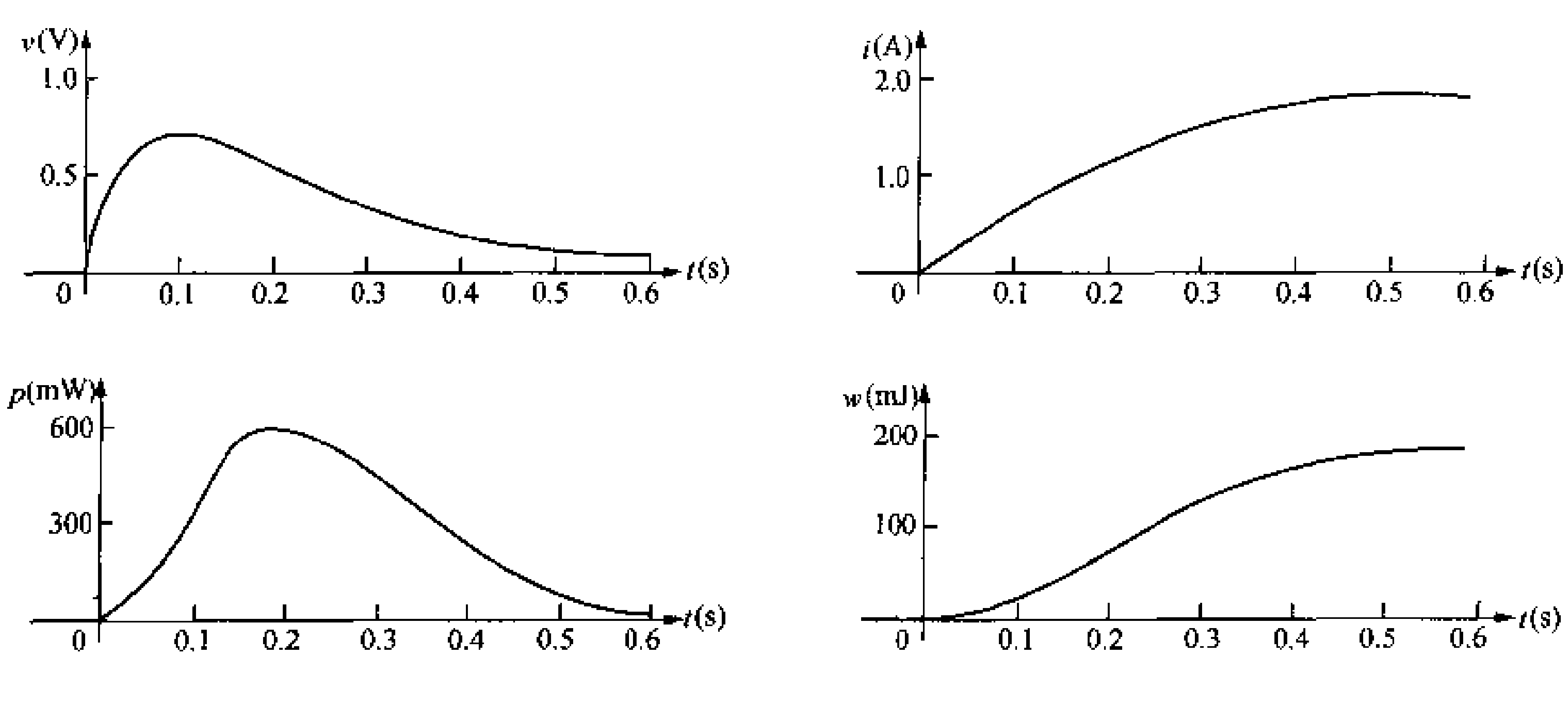


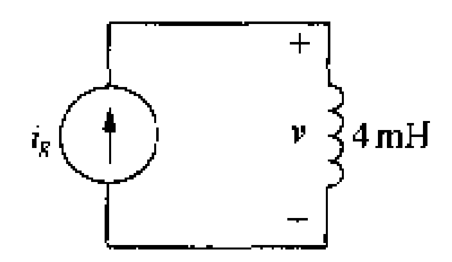
图 6.9 例 6.2 中相对于 t 变量的 v,i,p 和 w 曲线

(g) 在电压脉冲的作用下,将能量存储在电感中。由于电感是理想的,当电压降至零以后,能量并不能耗尽。因此,一个持续不断的电流在电路中环流。无损耗的电感显然是理想的电路元件。实际的电感需要在电路模型中加一个电阻。(更详细的内容在后面将会进一步介绍。)

练习题

6.1 图示电路中,电流源产生电流脉冲。

$$i_g(t)=0,\ t<0$$
$$i_g(t)=8\mathrm{e}^{-300t}-8\mathrm{e}^{-1200t}\ \mathrm{A},\ t\geqslant 0$$



求：(a) $v(0)$，(b) 如时间大于零，什么时刻电压 v 为零？(c) 释放到电感的功率表达式，(d) 什么时刻释放到电感的功率最大？(e) 最大功率，(f) 存储在电感中的最大能量，(g) 什么时刻存储的能量最大？

答：(a) 28.8 V，(b) 1.54 ms，(c) $384e^{-1500t}-76.8e^{-600t}-307.2e^{-2400t}$ W，(d) 411.05 μs，(e) 32.72 W，(f) 28.57 mJ，(g) 1.54 ms。

6.2 电容

电容的电路参数是用字母 C 来表示，单位是法拉(F)，图形符号为两个简化的并行金属板，如图 6.10(a)所示。由于法拉这个单位过大，实际中的电容值通常在皮法拉(pF)到微法拉(μF)范围。

(a) 电容电路符号　　(b) 对电容指定电压和电流的参考方向

图 6.10

电容图形符号表明，只要电导体由电解质或绝缘材料分开就可以产生电容。这个条件意味着电荷并不穿过电容。电容两端的电压不能将一个电荷穿过这个绝缘体，但可以在绝缘体中位移一个电荷。由于电压随时间而变化，电荷的位移也随时间而变，因此将产生位移电流。

在电容两端，位移电流不同于传导电流。电流与电容电压随时间的变化率成比例。方程式为：

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6.13}$$

其中 i 单位为安培，C 单位为法拉，v 单位为伏特，t 单位为秒。

式(6.13)表示的无源通用符号如图 6.10(b)所示，即电流参考方向与电容上电压降的方向一致。如果电流参考方向与电压升方向一致，则式(6.13)加一个负号。

从式(6.13)中得到以下两个要点：第一，电容两端的电压不能跃变。式(6.13)表明，这样的变化将产生无穷大的电流，实际上是不可能的。第二，如果电压为常量，电容的电流为零。其原因是传导电流不能在电容的绝缘材料中建立。只有随时间变化的电压才能产生位移电流。因此电容对于常量电压表现为开路。

式(6.13)给出的是电容电流作为电容电压的函数，而将电压表示成电流的函数也是很有用的。只要将式(6.13)两边乘以微分时间 dt，然后再求积分，得到：

$$i\,\mathrm{d}t = C\,\mathrm{d}v \text{ 或 } \int_{v(t_0)}^{v(t)}\mathrm{d}x = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\tau$$

求第二个方程式左边的积分,得到:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i \, d\tau + v(t_0) \tag{6.14}$$

式(6.14)在许多实际应用中,初始时间为零,即 $t_0 = 0$,则式(6.14)变成:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i d\tau + v(0) \tag{6.15}$$

可以很容易地得到电容的功率和能量的关系。根据功率的定义,得到:

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt} \tag{6.16}$$

或:

$$p = i\left[\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i \, d\tau + v(t_0)\right] \tag{6.17}$$

将能量的定义与式(6.16)结合得到:

$$dw = Cv \, dv$$

根据它有:

$$\int_0^w dx = C\int_0^v y dy$$

或:

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 \tag{6.18}$$

在推导式(6.18)时,零能量对应零电压。

例 6.4 和 6.15 给出了电容的电流、电压、功率和能量关系的应用举例。

例 6.4 由下面方程式描述的电压脉冲加在 0.5 μF 电容两端:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ 4t \text{ V} & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 4e^{-(t-1)}\text{V} & 1 \leqslant t \leqslant \infty \end{cases}$$

(a) 推导电容电流、功率、能量的表达式。

(b) 画出作为时间函数的电压、电流、功率和能量曲线。纵向排列各曲线。

(c) 指出电容存储能量的时间段。

(d) 指出电容释放能量的时间段。

(e) 求积分值:

$$\int_0^1 p \, dt \text{ 和 } \int_1^\infty p \, dt$$

并解释其含意。

解:

(a) 根据式(6.13)有:

$$i = \begin{cases} (0.5\times10^{-6})(0) = 0 & t < 0 \\ (0.5\times10^{-6})(4) = 2 \mu A & 1 < t < 1 \\ (0.5\times10^{-6})(-4e^{-(t-1)}) = -2e^{t-1} \mu\text{A} & 1 < t < \infty \end{cases}$$

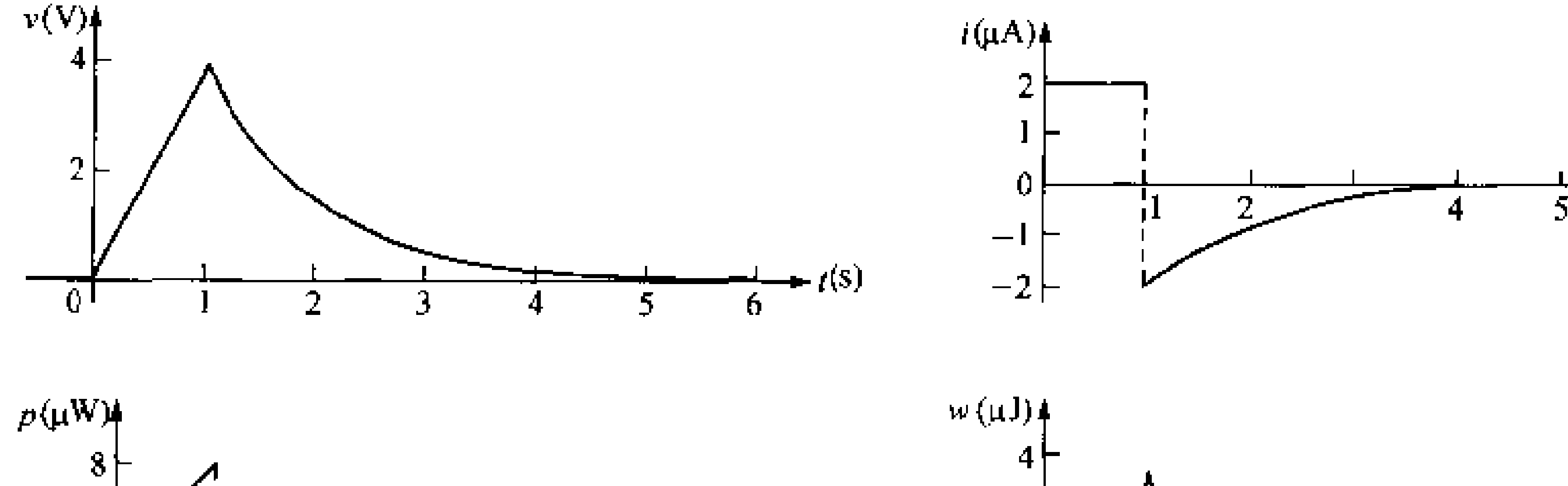
由式(6.16)得到功率的表达式:

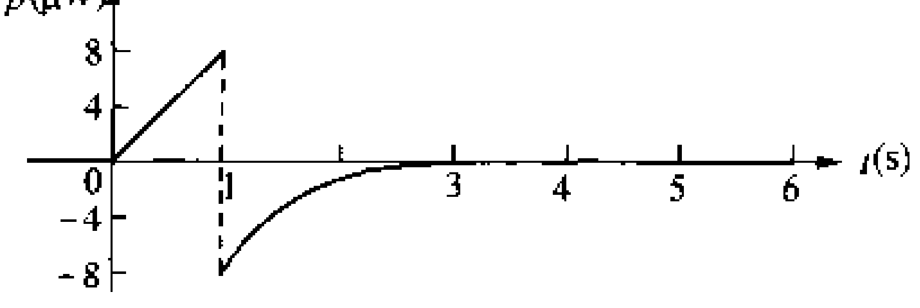
$$p=\begin{cases}0 & 1<0\\ (4t)(2)=8t\ \mu\text{W} & 0\leqslant t<1\\ (4\mathrm{e}^{-(t-1)})(-2\mathrm{e}^{-(t-1)})=-8\mathrm{e}^{-2(t-1)}\ \mu\text{W} & 1<t\leqslant\infty\end{cases}$$

由式(6.18)得到能量表达式：

$$w=\begin{cases}0 & 1<0\\ \dfrac{1}{2}(0.5)16t^2=4t^2\ \mu\text{J} & 0\leqslant t<1\\ \dfrac{1}{2}(0.5)16\mathrm{e}^{-2(t-1)}=4\mathrm{e}^{-2(t-1)}\ \mu\text{J} & 1<t\leqslant\infty\end{cases}$$

(b) 图 6.11 给出作为时间函数的电压、电流、功率和能量曲线。





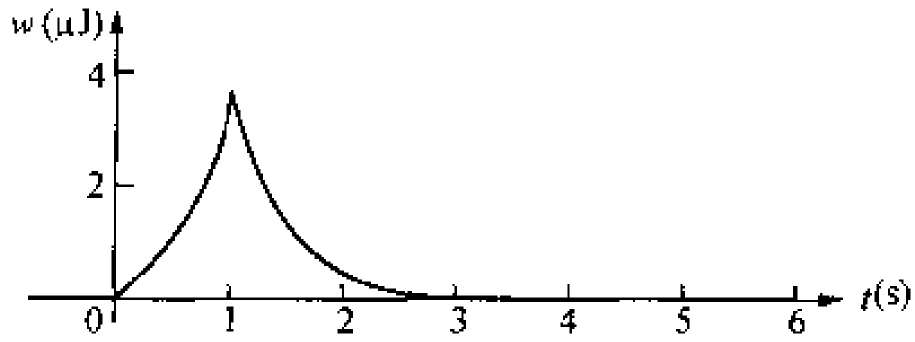


图 6.11　例 6.4 中对应 t 变量的 v,i,p 和 w 曲线

(c) 当功率为正值时，电容存储能量。因此在 0 到 1 秒期间内能量被存储。

(d) 当功率为负值时，电容释放能量，因此在 t 大于 1 秒的所有时间段能量被释放。

(e) $p\,\mathrm{d}t$ 的积分是一定时间间隔的能量，时间间隔对应积分的上下限。第一个积分表示在 0 到 1 秒之间，能量存储在电容中。而第二个积分表示在 1 秒到 ∞ 期间，电容释放能量：

$$\int_0^1 p\mathrm{d}t=\int_0^1 8t\ \mathrm{d}t=4t^2\big|_0^1=4\ \mu\text{J}$$

$$\int_1^\infty p\ \mathrm{d}t=\int_1^\infty(-8\mathrm{e}^{-2(t-1)})\mathrm{d}t=(-8)\frac{\mathrm{e}^{-2(t-1)}}{-2}\Big|_1^\infty=-4\ \mu\text{J}$$

当时间无限制地增加时，电容的电压返回到零值，理想电容释放的能量一定等于所存储的能量。

例 6.5　由一个三角形电流脉冲驱动一个未充电的 0.2 μF 电容。电流脉冲描述如下：

$$i(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 5000t\ \text{A} & 0\leqslant t\leqslant 20\ \mu\text{s}\\ 0.2-5000t\ \text{A} & 20\leqslant t\leqslant 40\ \mu\text{s}\\ 0 & t\geqslant\mu\text{s}\end{cases}$$

(a) 推导上边四个时间间隔中电容的电压、功率和能量的表达式。

(b) 画出对应于 t 的 i,v,p,w 曲线,并排列这些曲线。

(c) 电流为零后为什么电容上的电压仍然能保持?

解:

(a) $t\leqslant 0$ 时,v,p 和 w 都为零。

$0\leqslant t\leqslant 20\ \mu s$ 时:

$$v = 5\times 10^6\int_0^t 5000\tau\ d\tau + 0 = 12.5\times 10^9 t^2\ V$$

$$p = vi = 62.5\times 10^{12} t^3\ W$$

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = 15.625\times 10^{12} t^4\ J$$

$20\ \mu s\leqslant t\leqslant 40\ \mu s$ 时:

$$v = 5\times 10^6\int_{20\ \mu s}^t (0.2 - 5000\tau)d\tau + 5$$

(应当注意的是,在前面时间间隔结束时,电容上的电压是 5 V)

$$v = (10^6 t - 12.5\times 10^9 t^2 - 10)\ V$$

$$p = vi = (62.5\times 10^{12} t^3 - 7.5\times 10^9 t^2 + 2.5\times 10^5 t - 2)\ W$$

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = (15.625\times 10^{12} t^4 - 2.5\times 10^9 t^3 + 0.125\times 10^6 t^2 - 2t + 10^{-5})\ J$$

$t\geqslant 40\ \mu s$ 时:

$$v = 10\ V$$

$$p = vi = 0$$

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = 10\ \mu J$$

(b) 激励电流和所产生的电压、功率和能量画出如图 6.12 所示。

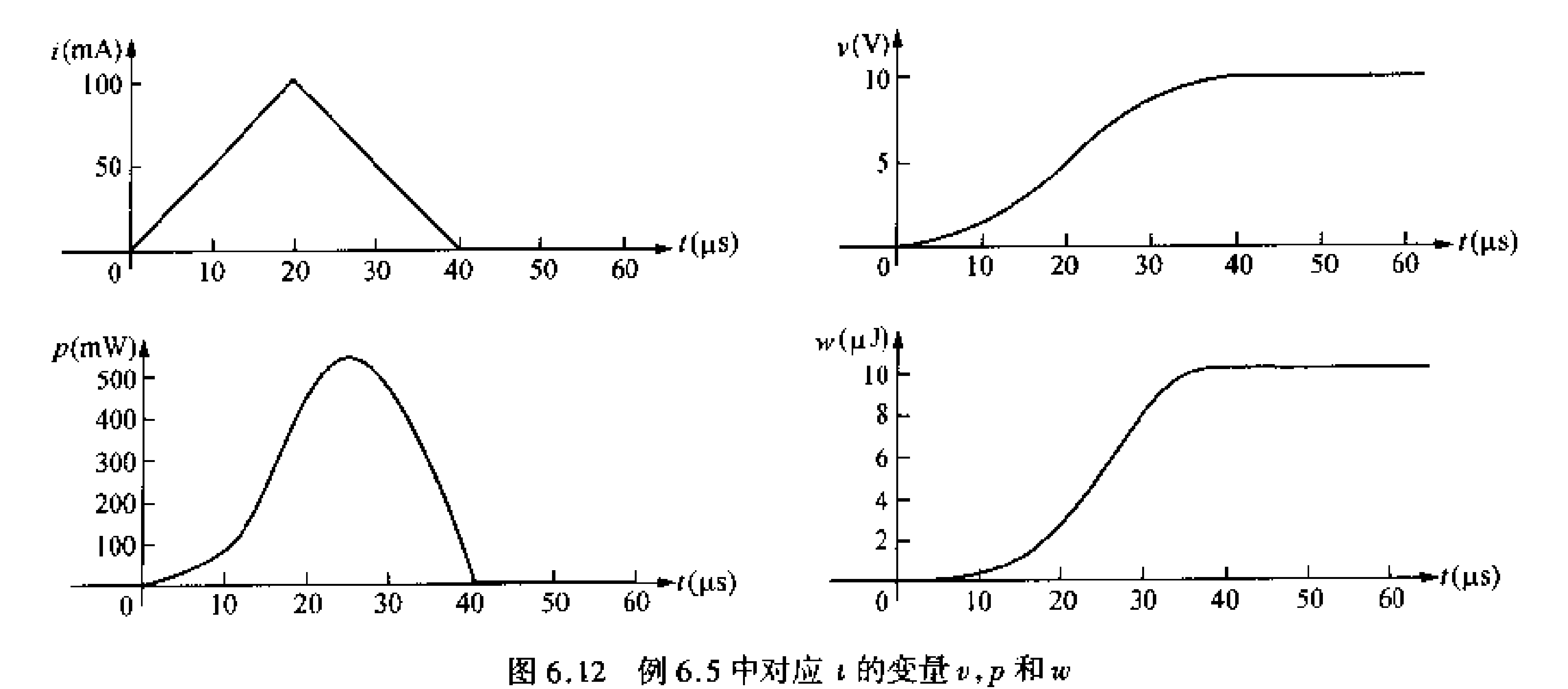


图 6.12 例 6.5 中对应 t 的变量 v,p 和 w

(c) 值得注意的是，功率在电流脉冲持续期间总是正的，表明能量被连续地存储在电容中。当电流为零时，由于理想电容没有能量损耗，因此，所储存的能量封存；这样在电流为零后，电容上的电压仍然保持。

练习题

6.2 如图所示，0.6 μF 电容两端的电压是：

0.6μF

+ v −
i

当 $t<0$ 时，$v=0$；当 $t\geqslant 0$ 时，$v=40e^{-15000t}\sin 30000t$ V 。

求：(a) $i(0)$，(b) $t=\pi/80$ ms 时，释放到电容的功率，(c) $t=\pi/80$ ms 时，存储在电容中的能量。

答：(a) 0.72 A，(b) −649.2 mW，(c) 126.13 mJ。

6.3 练习 6.2 电容中的电流，当 $t<0$ 时，$i=0$；当 $t\geqslant 0$ 时，$i=3\cos 50000t$ A。

求：(a) $v(t)$，(b) 释放到电容中的最大功率，(c) 存储在电容中的最大能量。

答：(a) $100\sin 50000t$ V，(b) 150 W，(c) 3 mJ。

6.3　电感和电容的串并联

电阻的串并联可以简化为单个等效电阻，电感或电容的串并联也可以简化为单个电感或电容。图 6.13 表示串联的电感，电感中的电流都是一样的，因此定义一个电流。

L_1　L_2　L_3
+ v_1 −　+ v_2 −　+ v_3 −
+ v −
i

图 6.13

每个电感的电压是：

$$v_1=L_1\frac{di}{dt},\quad v_2=L_2\frac{di}{dt}\quad 和\ v_3=L_3\frac{di}{dt}$$

串联连接的电压是：

$$v=v_1+v_2+v_3=(L_1+L_2+L_3)\frac{di}{dt}$$

显然串联连接的电感的等效电感是每个电感值的总和。对于 n 个电感的串联，有：

$$L_{eq}=L_1+L_2+L_3+\cdots+L_n \tag{6.19}$$

如果原始电感所携带的初始电流为 $i(t_o)$，则等效电感携带同样的初始电流。图 6.14 显示携带初始电流的串联电感的等效电路。

并联电感具有相同的端电压。在等效电路中，每个电感的电流是电感端电压和初始电流的函数。图 6.15 所示三个电感并联。

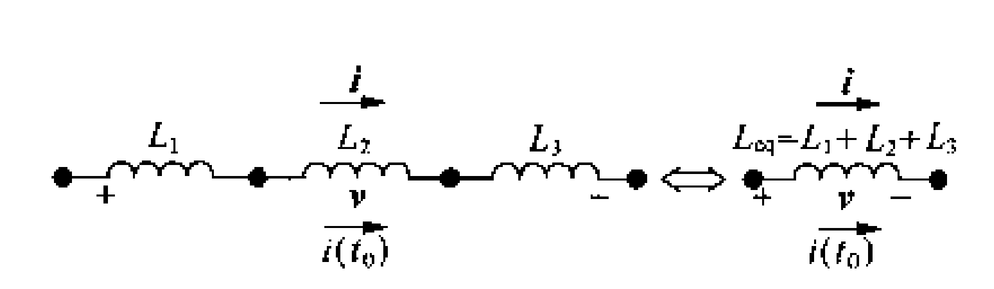


图 6.14 携带初始电流的串联电感的等效电路

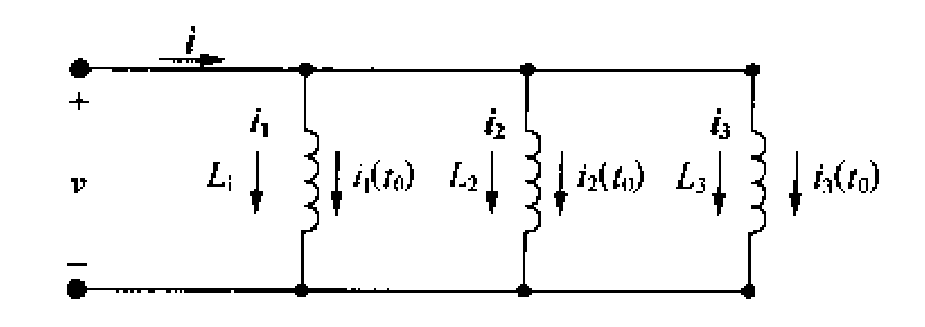


图 6.15 三个电感并联

其每个电感的电流是：

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v\ \mathrm{d}\tau + i_1(t_0)$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v\ \mathrm{d}\tau + i_2(t_0)$$

$$i_3 = \frac{1}{L_3}\int_{t_0}^{t} v\ \mathrm{d}\tau + i_3(t_0) \tag{6.20}$$

三个并联电感的端电流为每个电感电流之和：

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \tag{6.21}$$

将式(6.20)代入式(6.21)中，得到：

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)\int_{t_0}^{t} v\ \mathrm{d}\tau + i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0) \tag{6.22}$$

可以用单个电感说明式(6.22)，即：

$$i = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\mathrm{d}\tau + i(t_0) \tag{6.23}$$

比较式(6.23)和式(6.22)，得出：

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \tag{6.24}$$

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0) \tag{6.25}$$

图 6.16 表示了图 6.15 中三个并联电感的等效电路。

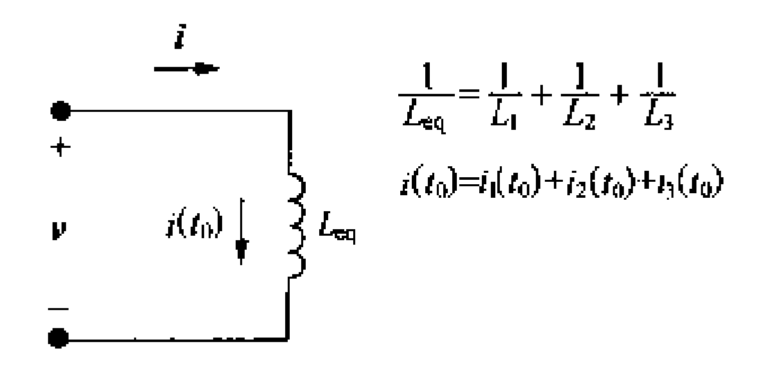


图 6.16 三个并联电感的等效电路

式(6.24)和(6.25)所表示的结果，可以扩展至 n 个电感并联：

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} \tag{6.26}$$

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_n(t_0) \tag{6.27}$$

串联连接的电容可以简化为单个等效电容。等效电容的倒数等于每个电容倒数的总和，如果每个电容带有自己的初始电压，则等效电容的初始电压是每个电容初始电压的代数和。

图 6.17 和下面的方程总结了上述内容：

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n} \tag{6.28}$$

$$v(t_0)=v_1(t_0)+v_2(t_0)+\cdots+v_n(t_0) \tag{6.29}$$

串联电容的等效电路留一道习题。(参见习题 6.22。)

并联连接的电容的等效电容是每个电容的容量之和，如图 6.18 和下面方程所示：

$$C_{eq}=C_1+C_2+\cdots+C_n \tag{6.30}$$

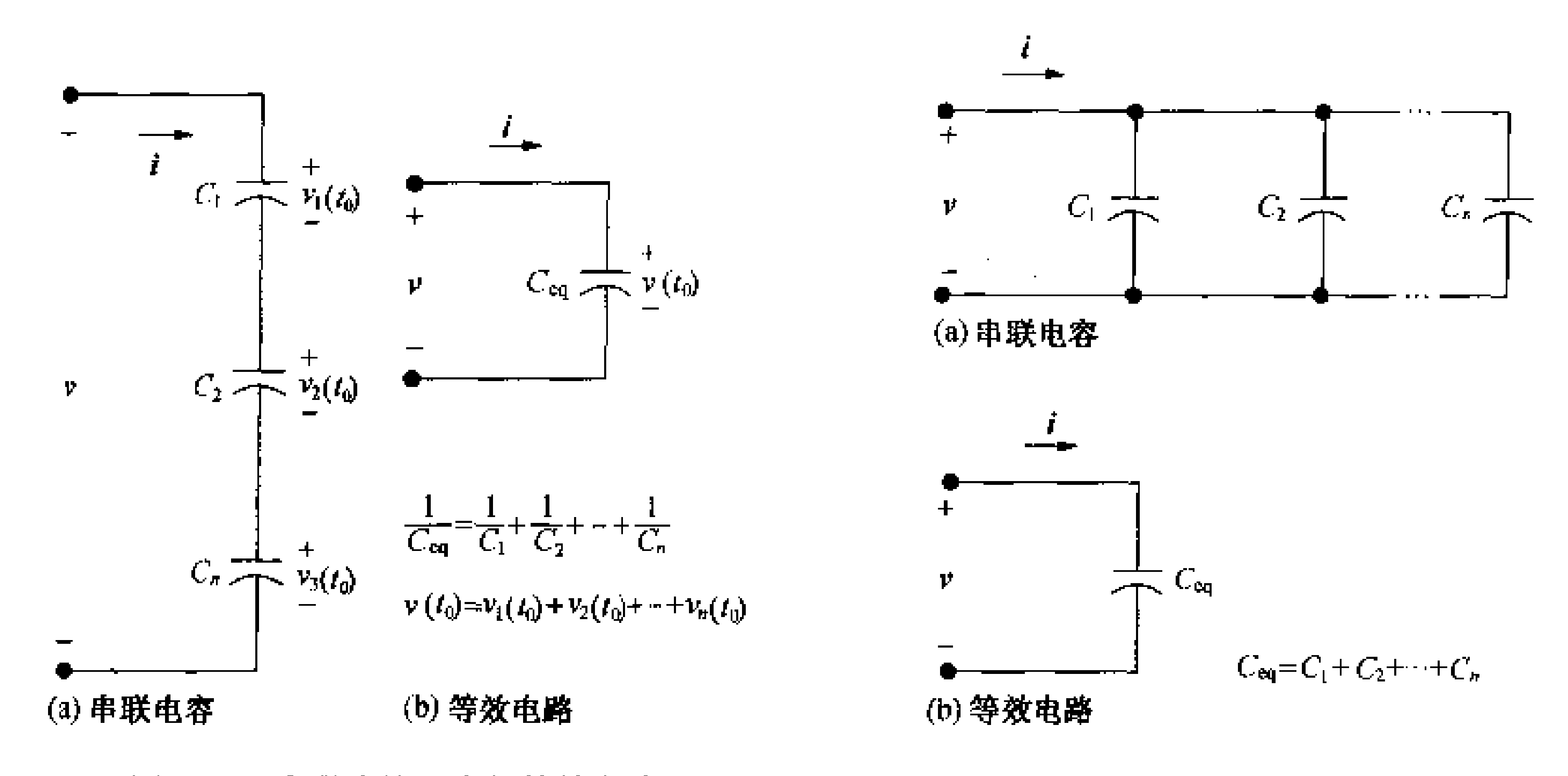


图 6.17　串联连接电容的等效电路　　图 6.18　并联连接电容的等效电路

并联连接的电容必须携带的电压相同，如果原并联电容有初始电压，则等效电容 C_{eq} 也是这个初始电压。对于并联电容的等效电路留一道习题。(参见习题 6.23。)

第 7 章将更多地介绍电感和电容的串并联等效电路，并解释其应用。

练习题

6.4　图示电路，i_1 和 i_2 的初始值分别是 +3 A 和 −5 A。$t\geq0$ 时，并联电感的端电压是 $-30e^{-5t}$ mV。

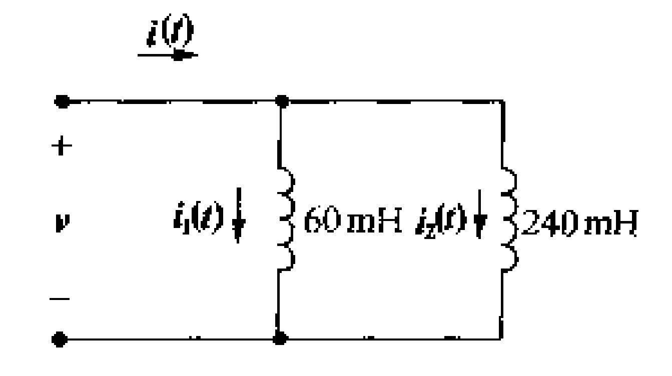
(a) 如果并联电感由单个电感代替，它的电感是多少?

(b) 在等效电感中初始电流是多少? 参考方向是什么?

(c) 用这个等效电感求 $i(t)$。

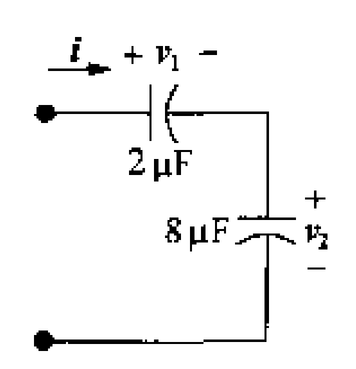
(d) 求 $i_1(t)$和 $i_2(t)$。检验 $i_1(t)$, $i_2(t)$和 $i(t)$的答案是否满足基尔霍夫电流定律。

答：(a) 48 mH，(b) 2 A，向上，(c) $0.125e^{-5t}-2.125$ A，(d) $i_1(t)=0.1e^{-5t}+2.9$ A，$i_2(t)=0.025e^{-5t}-5.025$ A。



6.5 如图所示两个电容的端电流，$t \geq 0$ 时，为 $240e^{-10t}$ μA。v_1 和 v_2 的初始值分别是 -10 V和 -5 V。计算 $t \to \infty$ 时，电容中的总能量。(提示：不要形成电容的串联，求各自的能量，然后再相加。)

答：20 μJ。



6.4 互感

6.1 节所讨论的电感的磁场限制在单一电路上，电感是在同一电路中使电压与时变电流建立联系的参数，因此电感更精确地说是自感。

现在讨论由磁场连接两个电路的情况。在这种情况下，在第二电路所感应的电压与第一电路中的时变电流有关，称之为互感。图 6.19 所示的电路表示两个磁性耦合线圈。这两个线圈的自感为 L_1 和 L_2，互感为 M。邻近 M 的双箭头表示它们是有互感值的一对线圈。在含有大于一对磁耦合线圈的电路中需要这个符号。

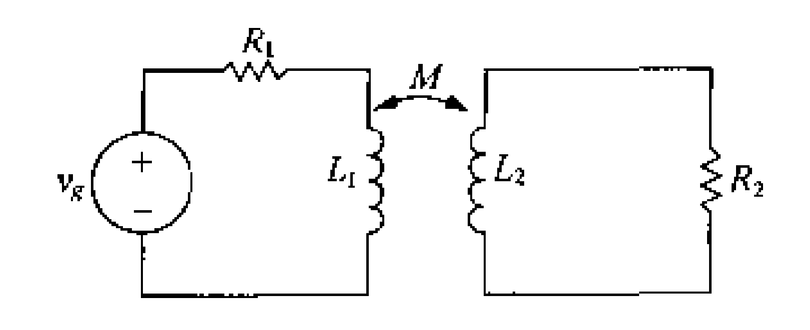


图 6.19 磁性耦合线圈

分析互感电路最容易的方法是用网孔电流，根据线圈电流列写电路方程，描述该电路。首先选择每个线圈电流的参考方向，图 6.20 标出所选择的参考电流。选择 i_1 和 i_2 的参考方向后，对每个闭合路径的电压求和。由于互感 M，每个线圈有两个电压，即自感电压和互感电压。自感电压由线圈自感应产生，来源于该线圈中的电流。互感电压由线圈互感产生，来源于其他线圈中的电流。对于图 6.20 左边的线圈，它的自感值为 L_1，这个线圈的自感电压是 $L_1\, di_1/dt$，互感应电压是 $M\, di_2/dt$，这两个电压的极性如何？

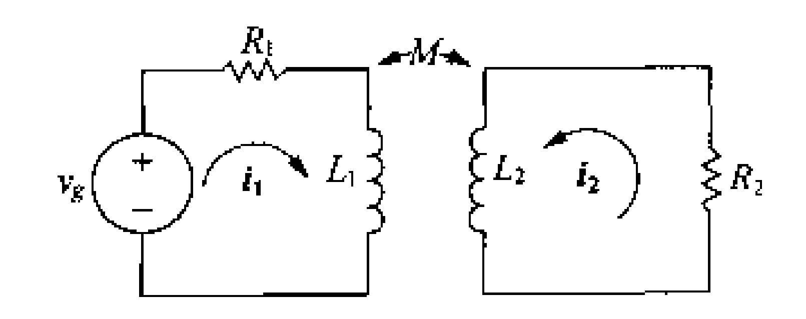


图 6.20 用线圈电流 i_1 和 i_2 描述图 6.19 电路

使用无源符号约定，自感电压是电压降，与产生电压的电流方向一致。但是互感应电压的

极性取决于线圈缠绕的方式,它与线圈电流的参考方向有关。一般来讲,说明互感耦合线圈的细节是很麻烦的。然而,可以通过一种称之为点约定的方法来跟踪极性。如图6.21所示,将点放在每个线圈的一端。这些点携带符号信息,并允许以图解的方式画出线圈,而不是表明如何在磁芯周围缠绕。

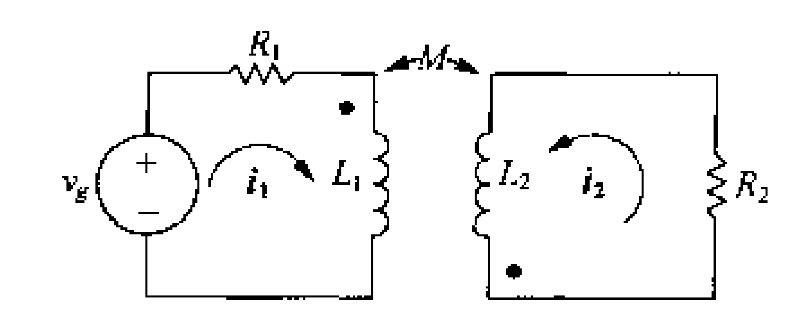


图6.21 在图6.20电路的线圈上加点表示感应电压的极性

用点约定来决定互感电压极性,其规则归纳如下:

当电流的参考方向是进入线圈打点端时,则另一线圈感应的电压其参考极性在打点端为正。

或叙述成:

当电流的参考方向是离开一个线圈打点端时,则另一线圈感应的电压其参考极性在打点端为负。

本书的大部分内容,都将在电路图中使用点标记。重要的是通过对互感和点约定的理解,能够写出正确的电路方程式。如果点没有给出,可能的话,通过检查一个实际电路的物理结构或在实验室测试,画出极性点的位置。在讨论点标志的用法之后,将进一步讨论电路。

如图6.21所示电路,点约定规则表明,电流 i_2 在线圈1中感应出的电压,其参考极性在线圈1打点端为负。这个电压($M\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t$)相对于 i_1 为电压升。电流 i_1 在线圈2中感应的电压是 $M\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$,它的参考极性是在线圈2打点端为正。该电压是电压升且与 i_2 的方向一致。图6.22给出了线圈1和线圈2的自感电压和互感电压以及它们的极性。

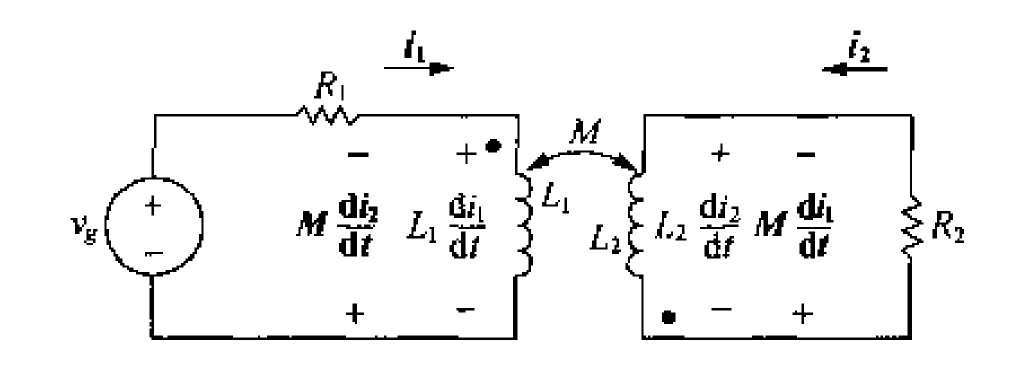


图6.22 图6.21线圈上的自感电压和互感电压

接着,来看看环绕每个闭环的电压之和。在式(6.31)和(6.32)中,与电流参考方向一致的电压升是负的:

$$-v_g+i_1R_1+L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=0 \tag{6.31}$$

$$i_2R_2+L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=0 \tag{6.32}$$

6.4.1 确定点标记的过程

有两个方法确定点标记。首先假设知道两个线圈的物理排列和在一个磁性耦合电路中的

缠绕方式。如图 6.23 所示，下面六个步骤来确定点标记。

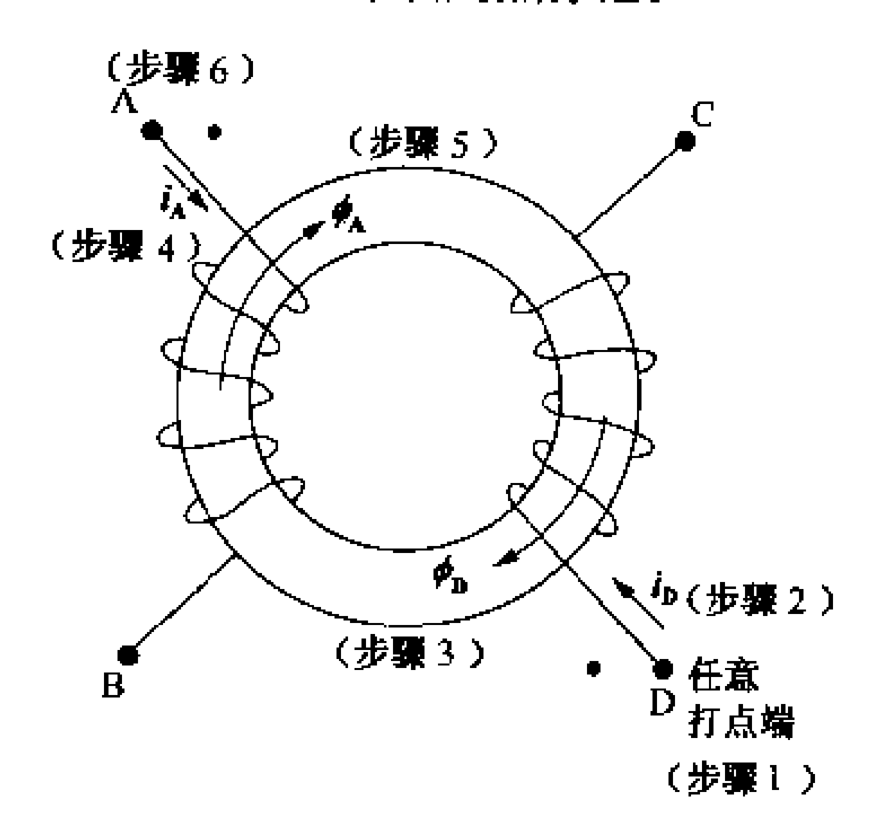


图 6.23　一组线圈说明确定一组点标记的方法

1. 任选一个线圈的一端，比如说 D 端，并用一个点标记。
2. 指定一个电流进入打点端，并设它为 i_D。
3. 用右手规则确定由耦合线圈内部 i_D 建立的磁通方向，并设这个磁通为 ϕ_D。
4. 任选第二个线圈的一端，比如说 A 端，指定一个电流进入这端，并设它为 i_A。
5. 用右手规则决定由耦合线圈内部 i_A 建立的磁通方向，并设这个磁通为 ϕ_A。
6. 比较这两个磁通 ϕ_D 和 ϕ_A 的方向。如果它们的参考方向相同，将点放在第二线圈测试电流(i_A)进入端。(图 6.23 由于磁通 ϕ_D 和 ϕ_A 的参考方向相同，因此点在 A 端。)如果磁通有不同的参考方向，则将点放在第二线圈测试电流离开端。

磁耦合线圈的相对极性也可以通过实验确定。有些情况，判断线圈是如何缠绕在磁芯上是不可能的。因此只有通过实验来确定。实验方法之一是将一个直流电压源、一个电阻、一个开关和一个直流电压表连到一对线圈上，如图 6.24 所示。覆盖线圈的阴影部分表示线圈的实际检查是不可能的。电阻 R 用来限制直流电压源提供的电流。

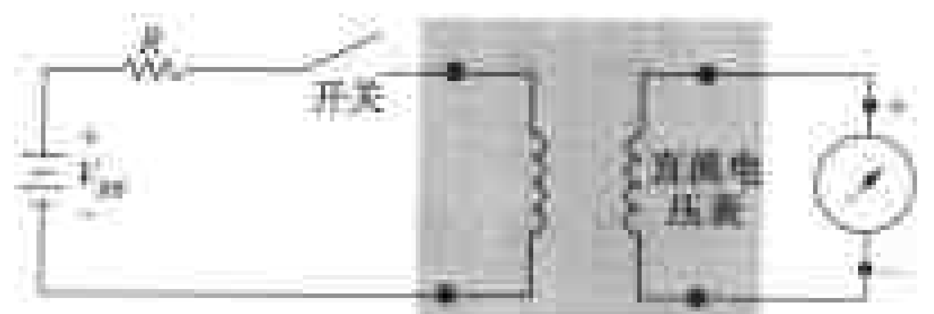


图 6.24　实验确定极性标记

如图 6.24 所示，通过开关和限流电阻，连到直流电源正端的线圈端有一个极性标记。当关闭开关时，电压表可以看到有偏转。如果瞬间偏转为正刻度，则连到电压表正端的线圈端为极性标记；如果瞬间偏转为负刻度，则连到电压表负端的线圈端为极性标记。

例 6.6 表示了在一个含有磁耦合线圈电路中，如何用点标记来表达电路的方程。

例 6.6　(a) 根据图 6.25 所示电路中的电流 i_1 和 i_2，列写一组网孔电流方程式。

(b)检验 $t=0$ 时，电路中是否无能量存储；如果 $i_g = 16 - 16e^{-5t}$ A，i_1 和 i_2 的解为：

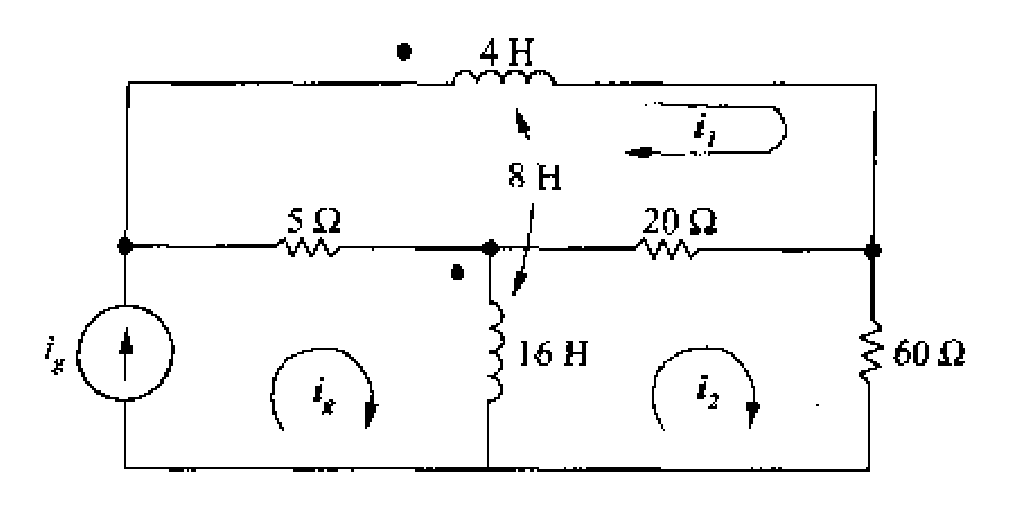


图 6.25　例 6.6 电路

$$i_1 = 4 + 64e^{-5t} - 68e^{-4t}\ \text{A}$$
$$i_2 = 1 - 52e^{-5t} + 51e^{-4t}\ \text{A}$$

解：

(a) 沿第一个网孔对电压求和，产生：

$$4\frac{di_1}{dt} + 8\frac{d}{dt}(i_g - i_2) + 20(i_1 - i_2) + 5(i_1 - i_g) = 0$$

第二个网孔方程式是：

$$20(i_2 - i_1) + 60i_2 + 16\frac{d}{dt}(i_2 - i_g) - 8\frac{di_1}{dt} = 0$$

通过 4 H 线圈的电流为$(i_g - i_2)$，则线圈电压为 $8d(i_g - i_2)/dt$，该电压降与 i_1 方向一致。电流 i_1 在 16 H 线圈感应的电压是 $8di_1/dt$，其电压升与 i_2 方向一致。

(b) 检验 i_1 和 i_2 正确性，从检验 i_1 和 i_2 的初始值和终值开始。假设 $i_1(0) = i_2(0) = 0$。从给出的解可以得到：

$$i_1(0) = 4 + 64 - 68 = 0$$
$$i_2(0) = 1 - 52 + 51 = 0$$

当 t 趋于无限大时，源电流(i_g)趋于一个常数 16 A，而磁耦合线圈表现为短路。因此在 $t = \infty$ 时，电路简化为如图 6.26 所示的形式。从图 6.26 中可以看到，当 $t = \infty$ 时，三个电阻与 16 A 电流源是并联的。等效电阻为 3.75 Ω，16 A 电流源的电压是 60 V。i_1，i_2 的终值表示为：

$$i_1(\infty) = \frac{60}{20} + \frac{60}{60} = 4\ \text{A}$$
$$i_2(\infty) = \frac{60}{60} = 1\ \text{A}$$

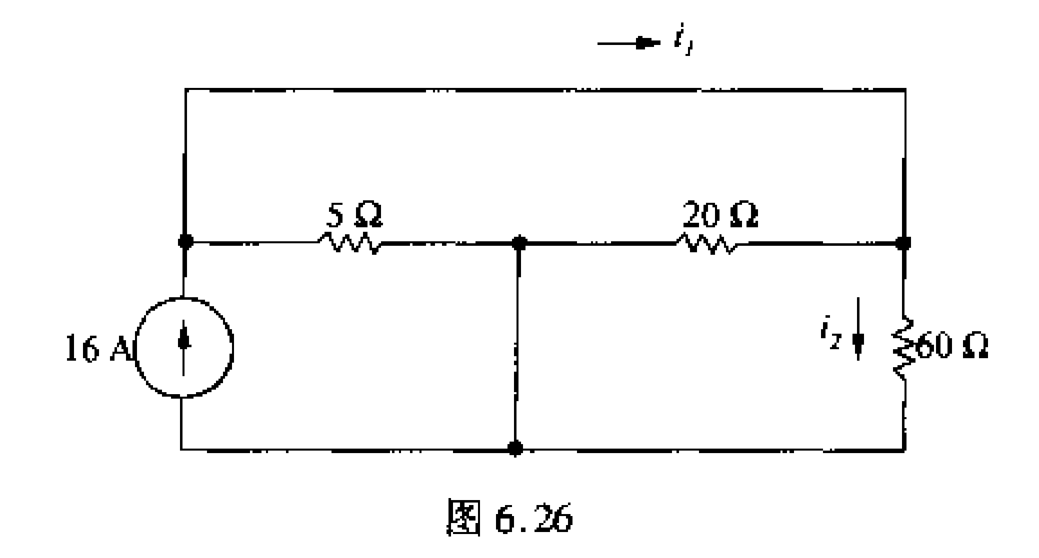


图 6.26

这些值与由 i_1 和 i_2 的解所预测的终值相等。

最后,检查这些解是否满足(a)所导出的微分方程式,读者自己来做出检查,做练习题 6.6。

练习题

6.6 (a) 证明由例 6.6(a)导出的微分方程式可以重新整理成如下的形式:

$$4\frac{di_1}{dt}+25i_1-8\frac{di_2}{dt}-20i_2=5i_g-8\frac{di_g}{dt}$$

$$-8\frac{di_1}{dt}-20i_1+16\frac{di_2}{dt}+80i_2=16\frac{di_g}{dt}$$

(b) 证明例 6.6(a)给出的解满足练习题(a)所给出的微分方程式。

答:(a) 证明后确认,(b) 证明后确认。

6.7 (a) 在例 6.6 电路中,如果点在 4 H 电感右端,i_g 的参考方向反向,60 Ω 的电阻用 780 Ω 代替,写出一组网孔电流方程式。

(b) 检验在 $t=0$ 时,电路中是否无能量存储,和如果 $i_g=1.96-1.96e^{-4t}$ A,练习题(a)所推出的微分方程的解是:

$$i_1=-0.4-11.6e^{-4t}+12e^{-5t}\ \text{A}$$

$$i_2=-0.01-0.99e^{-4t}+e^{-5t}\ \text{A}$$

答:(a) $4(di_1/dt)+25i_1+8(di_2/dt)-20i_2=-5i_g-8(di_g/dt)$ 以及 $8(di_1/dt)-20i_1+16(di_2/dt)+800\ i_2=-16(di_g/dt)$,(b) 检验后确认。

6.5 更详细地讨论互感

为了完全解释电路参数互感并检查 6.4 节所做的定性限制和假设,将用更大篇幅讨论自感。

6.5.1 复习自感

自感的概念来源于法拉第(Michael Faraday),他是 19 世纪初期该领域的先驱。法拉第假设,磁场是由围绕通有电流的导线的磁力线构成。可将磁力线想像为相互接近的、储能的弹性带。当电流增加或减少时,导线周围的弹性带(即磁力线)随之伸展或压缩。感应在导线中的电压与切割导线的磁力线数成比例。这个感应电压可以由法拉第定律来表示,即:

$$v=\frac{d\lambda}{dt} \tag{6.33}$$

其中 λ 称之为磁链,单位为韦伯。

如何从法拉第定律得到 6.1 节所介绍的电感定义呢?用图 6.27 作为参考加以说明。

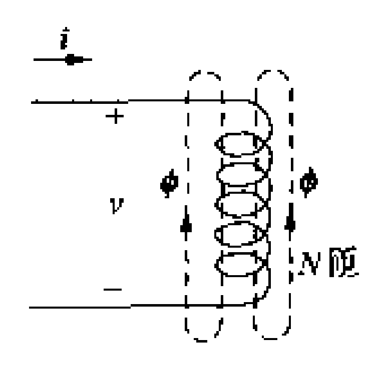


图 6.27 表示与 N 匝线圈交链的磁场

穿过 N 匝并标有 ϕ 的线代表构成磁场的磁力线。磁场强度取决于电流强度，磁场的空间方向取决于电流方向。右手规则表明磁场的方向与电流方向有关：当右手的手指握住线圈，手指指向电流的方向，则拇指所指的方向就是线圈内磁场的方向。磁链是磁场(ϕ)的产物，单位为韦伯(Wb)，与磁场交链的线圈匝数记为 N：

$$\lambda = N\phi \tag{6.34}$$

磁通 ϕ 的大小与线圈电流大小有关，其相互关系为：

$$\phi = \rho N i \tag{6.35}$$

这里的 N 为线圈的匝数，ρ 为该磁通所占据空间的磁导。磁导是一个描述这个空间磁特性的量。关于磁导更为详细的讨论已超出本教材的范围。读者只需要了解，当磁性材料(像铁、镍、钴)构成含有磁通的空间时，磁导是随磁通而变化，ϕ 和 i 之间是非线性关系。但是，如果含有磁通的空间是由非磁性材料构成的，则磁导是常量，ϕ 和 i 之间是线性关系。注意式(6.35)，磁通也是与线圈上的匝数成比例。

假设用来构成含有磁通空间的磁芯材料是非磁性的。那么，将式(6.34)和式(6.35)代入式(6.33)，得到：

$$\begin{aligned} v &= \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(N\phi)}{dt} \\ &= N\frac{d\phi}{dt} = N\frac{d}{dt}(\rho N i) \\ &= N^2\rho\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt} \end{aligned} \tag{6.36}$$

上式表明自感是与线圈上的匝数平方成比例，以后会用到这个结果。

图 6.27 所示电路中，感应电压的极性反映了磁场对建立磁场的电流的作用。例如：当 i 增加时，di/dt 是正的，v 是正的。这样需要有能量来建立磁场。乘积 vi 给出能量存储在该磁场中的比率。当磁场减弱时，di/dt 是负的，感应电压也以相反方向随之改变。随着线圈磁场的减弱，能量返回电路。

现在已对自感的概念做了进一步的了解，下面开始讨论互感的概念。

6.5.2　互感的概念

图 6.28 显示两个磁耦合线圈。你要检验一下两个线圈的点标记适合线圈绕向和电流的方向。每个线圈的匝数分别是 N_1 和 N_2。线圈 1 由一个时变电流源供给能量，此电流源在 N_1 匝线圈中建立电流 i_1。线圈 2 没有能量提供，是开路。线圈是绕在一个非磁性磁芯上。由电流 i_1 产生的磁通可以分为两部分，标为 ϕ_{11} 和 ϕ_{21}。磁通 ϕ_{11} 是由电流 i_1 产生的磁通，它仅仅与 N_1 匝线圈相交链；ϕ_{21} 是由电流 i_1 产生的磁通，它与 N_1 匝和 N_2 匝线圈相交链。磁通下标第一个数字为线圈号，第二个数字表示线圈电流。这样，ϕ_{11} 为与线圈 1 相交链，并是由线圈 1 中的电流 i_1 产生的磁通；而 ϕ_{21} 为与线圈 2 相交链，并是由线圈 1 中的电流 i_1 产生的磁通。

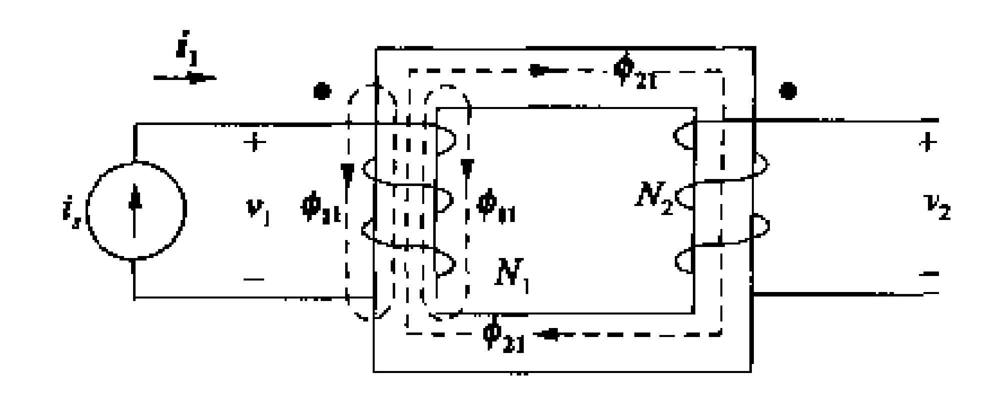


图 6.28 两个磁耦合线圈

线圈 1 的总磁通为 ϕ_1,是 ϕ_{11}和 ϕ_{21}之和:

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{21} \tag{6.37}$$

磁通 ϕ_1 和它的组成部分 ϕ_{11}和 ϕ_{21}与线圈电流 i_1 有关:

$$\phi_1 = \rho_1 N_1 i_1 \tag{6.38}$$

$$\phi_{11} = \rho_{11} N_1 i_1 \tag{6.39}$$

$$\phi_{21} = \rho_{21} N_1 i_1 \tag{6.40}$$

ρ_1 是由磁通 ϕ_1 占据空间的磁导,ρ_{11}是由磁通 ϕ_{11}占据空间的磁导,ρ_{21}是由磁通 ϕ_{21}占据空间的磁导。将式(6.38),(6.39),(6.40)代入式(6.37)得到由总磁通 ϕ_1 占据空间的磁导和 ϕ_{11}和 ϕ_{21}占据空间的磁导之间的关系:

$$\rho_1 = \rho_{11} + \rho_{21} \tag{6.41}$$

根据法拉第定律得到 v_1 和 v_2 表达式:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(N_1\phi_1)}{\mathrm{d}t} = N_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi_{11}+\phi_{21}) \\ &= N_1^2(\rho_{11}+\rho_{21})\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = N_1^2\rho_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{6.42}$$

和

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(N_2\phi_{21})}{\mathrm{d}t} = N_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_{21}N_1 i_1) \\ &= N_2 N_1 \rho_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{6.43}$$

式(6.42)中,$\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$ 系数是线圈 1 的自感。式(6.43)中,$\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$ 系数是线圈 1 和线圈 2 之间的互感。因而得到:

$$M_{21} = N_2 N_1 \rho_{21} \tag{6.44}$$

M 的下标表示该感应使线圈 1 中的电流与线圈 2 中感应的电压有关。

由此得到:

$$v_2 = M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{6.45}$$

注意:图 6.28 中点约定指定了 v_2 的参考极性。

对于图 6.28 的耦合线圈,一个时变的电流源(i_2)激励线圈 2 而使线圈 1 开路,得到如图 6.29 的电路。v_1 的极性参考基于点约定。

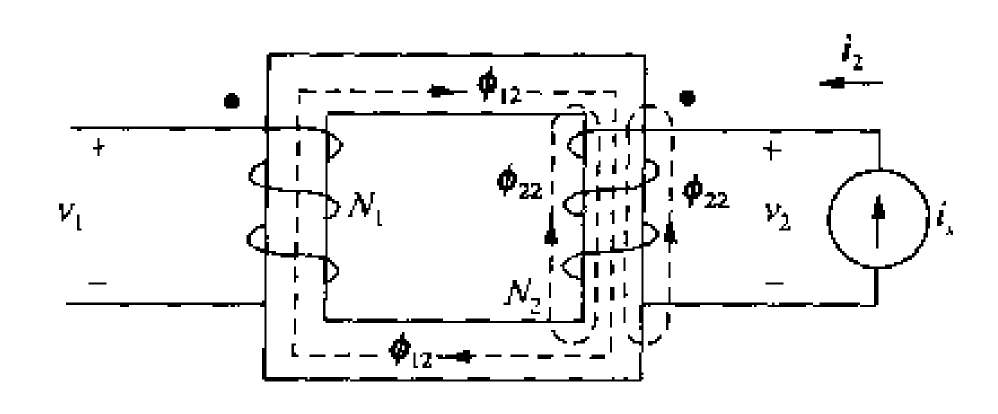


图 6.29　图 6.28 磁耦合线圈，线圈 2 被激励、线圈 1 开路

与线圈 2 相交链的总磁通为：

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{12} \tag{6.46}$$

磁通 ϕ_2 和它的组成部分 ϕ_{12} 和 ϕ_{22} 与线圈电流 i_2 有关：

$$\phi_2 = \rho_2 N_2 i_2 \tag{6.47}$$

$$\phi_{22} = \rho_{22} N_2 i_2 \tag{6.48}$$

$$\phi_{12} = \rho_{12} N_2 i_2 \tag{6.49}$$

电压 v_1 和 v_2 为：

$$v_2 = \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}t} = N_2^2\rho_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{6.50}$$

$$v_1 = \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N_1\phi_{12}) = N_1N_2\rho_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{6.51}$$

式(6.51)中 $\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t$ 的系数，是线圈 1 中感应的电压与线圈 2 时变电流建立关系的互感系数：

$$M_{12} = N_1N_2\rho_{12} \tag{6.52}$$

对于非磁性材料，磁导 ρ_{12} 和 ρ_{21} 是相等的。则有：

$$M_{12} = M_{21} = M \tag{6.53}$$

对于两个磁耦合线圈的线性电路，没必要加互感系数的下标。

6.5.3　用自感表示互感

互感的值是自感的函数。根据式(6.42)和式(6.50)可以得到下列关系：

$$L_1 = N_1^2\rho_1 \tag{6.54}$$

$$L_2 = N_2^2\rho_2 \tag{6.55}$$

根据式(6.54)和式(6.55)，可得：

$$L_1L_2 = N_1^2N_2^2\rho_1\rho_2 \tag{6.56}$$

用式(6.41)和 ρ_2 表达式，可以得到：

$$L_1L_2 = N_1^2N_2^2(\rho_{11}+\rho_{21})(\rho_{22}+\rho_{12}) \tag{6.57}$$

对于线性系统，$\rho_{21} = \rho_{12}$，因此式(6.57)变成：

$$L_1L_2 = (N_1N_2\rho_{12})^2\left(1+\frac{\rho_{11}}{\rho_{12}}\right)\left(1+\frac{\rho_{22}}{\rho_{12}}\right)$$

$$= M^2\left(1+\frac{\rho_{11}}{\rho_{12}}\right)\left(1+\frac{\rho_{22}}{\rho_{12}}\right) \tag{6.58}$$

用单个常量代替式(6.58)中含有磁导的两项得到一个有意义的方程：

$$\frac{1}{k^2}=\left(1+\frac{\rho_{11}}{\rho_{12}}\right)\left(1+\frac{\rho_{22}}{\rho_{12}}\right) \tag{6.59}$$

将式(6.59)代入式(6.58)中得到：

$$M^2 = k^2 L_1 L_2$$

或：

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \tag{6.60}$$

其中 k 称为耦合系数。根据式(6.59)可知，$1/k_2$ 一定大于 1，也就是说 k 一定小于 1。实际上，耦合系数一定在 0 和 1 之间，即：

$$0 \leqslant k \leqslant 1 \tag{6.61}$$

当两个线圈无公共磁通，即 $\phi_{12}=\phi_{22}=0$ 时，耦合系数为零，意味着 $\rho_{12}=0$，并且式(6.59)表明 $1/k_2=\infty$ 或 $k=0$。如果线圈间无磁通交链，则 $M=0$。

当 ϕ_{11} 和 ϕ_{22} 为 0 时，耦合系数等于 1，意味着所有的磁通既与线圈 1 相交链也与线圈 2 相交链。根据式(6.59)，$\rho_{11}=\rho_{22}=0$，表示的是一种理想状态。实际上，绕两个线圈，使其共享相同的磁通，按自然法则这是不可能的。磁性材料(像铁合金、钴、镍)可以建立具有高磁导的空间并用来建立接近一致的耦合系数(将在第九章详细介绍磁性材料的重要特性)。

练习题

6.8 两个磁性耦合线圈绕在一个非磁芯体上。线圈 1 的自感是 288 mH，互感是 90 mH，感应系数是 0.75，线圈的物理结构为 $\rho_{11}=\rho_{22}$。

(a) 求 L_2 和匝数比 N_1/N_2。

(b) 如果 $N_1=1\,200$，求 ρ_1 和 ρ_2。

答：(a) 50 mH，2.4，(b) 0.2×10^{-6} Wb/A。

6.9 两个磁耦合线圈的自感是 $L_1=180\ \mu\text{H}$ 和 $L_2=500\ \mu\text{H}$，耦合介质是非磁性的。如果线圈 1 有 300 匝，线圈 2 有 500 匝，当耦合系数为 0.6 时，求 ρ_{11} 和 ρ_{21}。

答：0.8×10^{-9} Wb/A，1.2×10^{-9} Wb/A。

6.5.4 能量计算

结束对互感的讨论之后，下面开始讨论存储在磁耦合线圈的总能量问题。先重复前面得出的两个结论：对于线性磁耦合，(1) $M_{12}=M_{21}=M$，(2) $M=k\sqrt{L_1L_2}$，其中 $0\leqslant k\leqslant 1$。

用图 6.30 所示的电路推导存储在一对线性耦合线圈磁场中的总能量表达式。先假设电流 i_1 和 i_2 都为零，在线圈中零电流状态对应零能量存储。使 i_1 从 0 增加到某一值 I_1 并计算当 $i_1=I_1$ 时所存储的能量。

由于 $i_2=0$，进入到一对线圈中的总功率为 $v_1 i_1$，所存储的能量为：

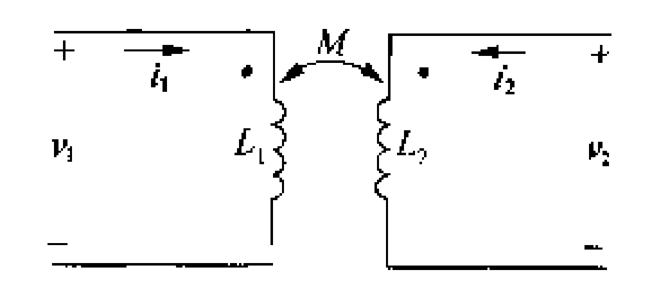


图 6.30　用来推导基本能量关系的电路

$$\int_0^{W_1} \mathrm{d}w = L_1\int_0^{I_1} i_1 \mathrm{d}i_1$$

$$W_1 = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 \tag{6.62}$$

将 i_1 保持为常量 I_1，将 i_2 从零增加到某一值 I_2。在这个时间间隔，由于 I_1 是常量，i_1 在线圈 2 中感应的电压为零。i_2 在线圈 1 中感应的电压为 $M_{12}\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t$。因此，进入到一对线圈的功率为：

$$p = I_1 M_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_2 v_2$$

当 $i_2 = I_2$ 时，存储在一对线圈中的总能量为：

$$\int_{W_1}^{W} \mathrm{d}w = \int_0^{I_2} I_1 M_{12}\mathrm{d}i_2 + \int_0^{I_2} L_2 i_2 \mathrm{d}i_2$$

或：

$$W = W_1 + I_1 I_2 M_{12} + \frac{1}{2}L_2 I_2^2$$

$$= \frac{1}{2}L_2 I_1^2 + \frac{1}{2}L_1 I_2^2 + I_1 I_2 M_{12} \tag{6.63}$$

如果将上述过程反过来，即先将 i_2 从零增至到 I_2，然后将 i_1 从零增至到 I_1，则所存储的总能量为：

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + I_1 I_2 M_{21} \tag{6.64}$$

式(6.63)和式(6.64)表明：存储在一对线性耦合线圈中的总能量是线圈电流、自感和互感的函数。这些方程式之间的惟一区别是 I_1与 I_2 电流乘积的系数。如果先建立 i_1，则用式(6.63)；若先建立 i_2，则用式(6.64)。

当耦合媒介是线性的，不管所建立的 I_1 和 I_2 的顺序如何，所存储的总能量都是相同的。理由是在线性耦合中，无论电流是如何达到最终值，产生的磁通仅取决于 i_1 和 i_2 的最终值。如果所产生的磁通是相同的，则所存储的能量也是相同的。因此，对于线性耦合，$M_{12} = M_{21}$。由于 I_1 和 I_2 分别是 i_1 和 i_2 的随机值，用 i_1 和 i_2 的瞬时值来表示线圈电流。这样在任意时间，存储在线圈中的总能量是：

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + Mi_1 i_2 \tag{6.65}$$

假设两个线圈电流流入极性标记端得到式(6.65)。读者可以验证：如果一个电流进入一个极性标记端，而另一电流离开这一端，则乘积 $Mi_1 i_2$ 的代数符号相反。通常：

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm Mi_1 i_2 \tag{6.66}$$

式(6.66)表明 M 不能超过$\sqrt{L_1 L_2}$。由于磁耦合线圈是无源元件，所以存储的总能量从来

不可能是负的。如果 $w(t)$不可能为负,则式(6.66)给出下面的值:

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - Mi_1 i_2$$

在 i_1 和 i_2 都为正或都为负时,一定大于或等于零。M 的限定值符合等于零的设定值:

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - Mi_1 i_2 = 0 \tag{6.67}$$

为了求 M 的限定值,在式(6.67)左侧加上和减去$\sqrt{L_1 L_2}$,则产生一个完全平方项:

$$\left(\sqrt{\frac{L_1}{2}}i_1 - \sqrt{\frac{L_2}{2}}i_2\right) + i_1 i_2(\sqrt{L_1 L_2} - M) = 0 \tag{6.68}$$

式(6.68)中平方项从来不可能为负,但可以为零。因此,$w(t)\geqslant 0$ 成立的条件是:

$$\sqrt{L_1 L_2} \geqslant M \tag{6.69}$$

换一种说法,即:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad (0 \leqslant k \leqslant 1)$$

假设 i_1 和 i_2 都是正或都是负,则得到式(6.69)。如果 i_1 和 i_2 符号相反,可以得到同样的结果,不过在式(6.66)中 M 的限定值选择正号。

练习题

6.10 图 6.30 中线圈的自感分别为 $L_1 = 18$ mH 和 $L_2 = 32$ mH。如果耦合系数是 0.85,当(a)$i_1 = 6$ A, $i_2 = 9$ A,(b) $i_1 = -6$ A, $i_2 = -9$ A,(c) $i_1 = -6$ A, $i_2 = 9$ A,(d) $i_1 = 6$ A, $i_2 = -9$ A 时计算系统中所存储的能量,以毫焦耳为单位。

答:(a) 2721.60 mJ,(B)2721.60 mJ,(c) 518.40 mJ,(d) 518.40 mJ。

6.11 练习题 6.10 中耦合系数增加到 1.0。

(a) 如果 i_1 等于 6 A, i_2 值为多少时存储的能量为零?

(b) 有没有什么 i_2 的值可以使存储的能量为负?

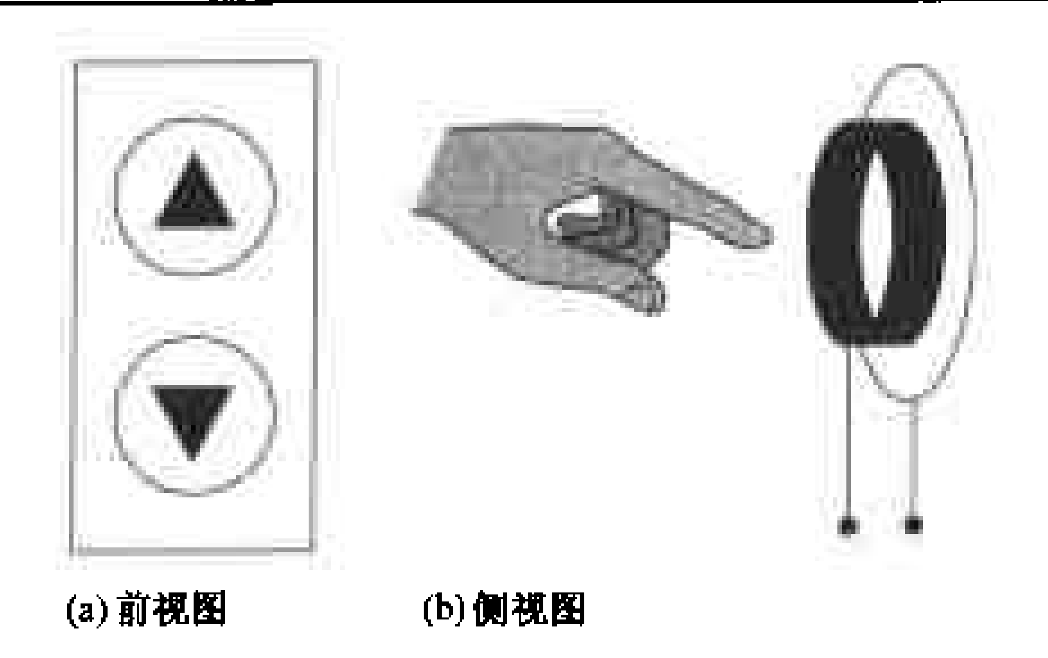
答:(a) −4.5 A,(b) 没有。

实例

组合开关二

在前面介绍了电容性组合开关,开关有两种形式。用于台灯的是单极性开关。在习题 6.45 中留给读者去研究。在下面的例子中,将讨论用于电梯按钮的双极性开关。

例: 电梯按钮是一个可用手指按动的凹环,如图 6.31 所示。这个凹环是由一个金属环电极和一个圆盘电极构成,它们之间是互相绝缘的。有时可以用两个同心环嵌入在绝缘塑料来代替。两个电极用绝缘层覆盖,防止直接与金属接触。可以将其模拟为一个电容,如图 6.32 所示。不像大多数电容,电容性组合开关允许你在电极之间插入一个物体,如一个手指触点。由于手指触点比电极周围的绝缘层更易传导,电路好像增加了一个连到地的另一个电极,如图 6.33 所示。



(a) 前视图 (b) 侧视图

图 6.31 电梯按钮

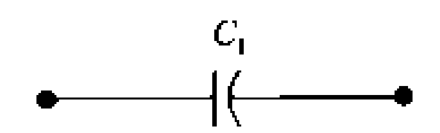


图 6.32 用于电梯按钮的组合开关的电容模型

在图 6.32 和图 6.33 中，电容的实际值范围是在 10 μF 到 50 μF，它取决于开关的精确形状、手指如何触碰、人是否带手套等等。在下面的问题中，假设所有电容的值都是 25 μF，也假设电梯按钮位于等效电容分压电路中，如图 6.34 所示。

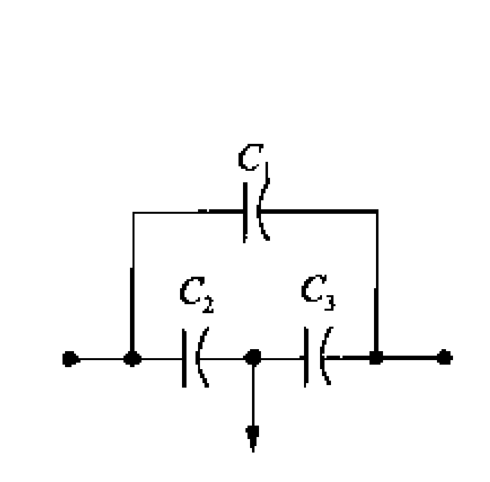


图 6.33 手指触点激励电容性组合开关的电路模型

按钮
$v_s(t)$
固定电容器
25 pF
$v(t)$

图 6.34 电梯按钮电路

(a) 计算手指没有触碰按钮的输出电压。

(b) 计算当手指接触按钮时的输出电压。

解：

(a) 重新画图 6.34 的电路，用图 6.32 电容模型代替按钮，得到图 6.35 所示的电路。写出在单节点的电流方程式：

$$C_1 \frac{\mathrm{d}(v - v_s)}{\mathrm{d}t} + C_2 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.70}$$

整理这个方程式，得到输出电压 $v(t)$ 的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} \tag{6.71}$$

最后求式(6.71)的积分得到输出电压：

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_s(t) + v(0) \tag{6.72}$$

式(6.72)的结果表明,在图 6.35 中的串联电容电路中,与第 3 章中的串联电阻电路相同,构成了一个分压电路。在这两个分压电路中,输出电压不取决于元件值,而仅取决于它们的比。这里 $C_1 = C_2 = 25$ pF,电容的比是 $C_1/C_2 = 1$。

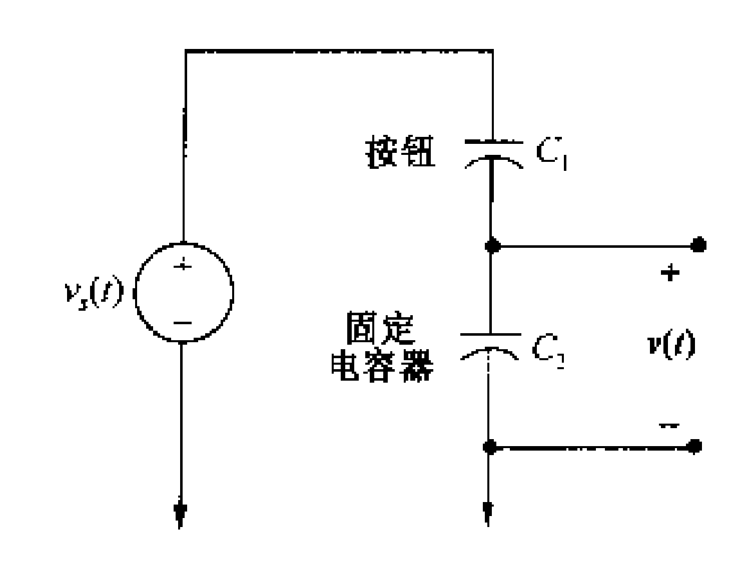


图 6.35 手指没有触碰按钮的电梯按钮模型

输出电压是:

$$v(t) = 0.5v_s(t) + v(0) \tag{6.73}$$

式(6.73)中的常量是电容的初始电荷。由于检测输出电压的电路消除了初始电容的电荷效应,可以假设 $v(0) = 0$ V。因此,检测到的输出电压是:

$$v(t) = 0.5v_s(t) \tag{6.74}$$

(b) 用图 6.33 中被激励的开关模型代替图 6.34 的按钮,如图 6.36 所示。

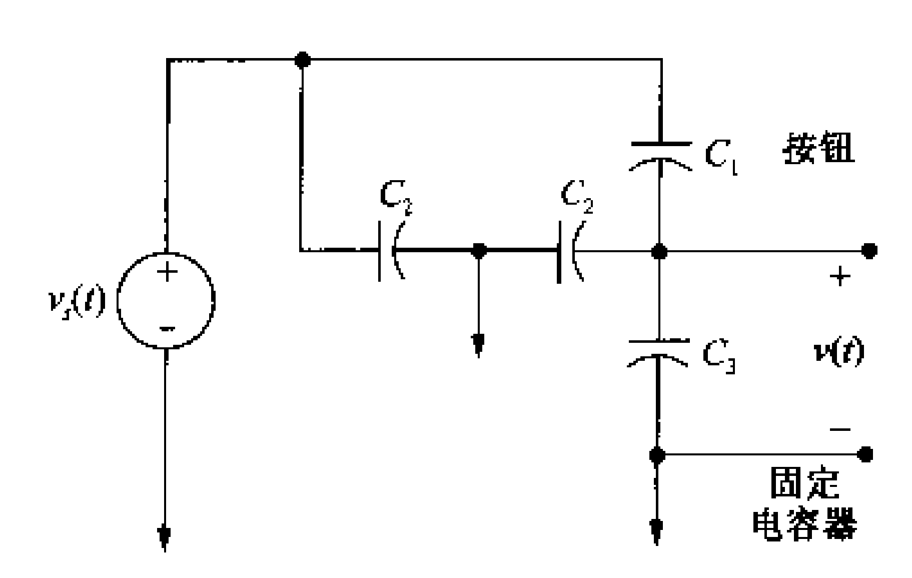


图 6.36 手指触碰按钮的电梯按钮模型

再计算离开输出节点的电流:

$$C_1 \frac{\mathrm{d}(v - v_s)}{\mathrm{d}t} + C_2 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + C_3 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.75}$$

整理得到一个 $v(t)$的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} \tag{6.76}$$

最后,解式(6.76)的微分方程:

$$v(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} v_s(t) + v(0) \tag{6.77}$$

如果 $C_1 = C_2 = C_3 = 25$ pF,则有:

$$v(t) = 0.333v_s(t) + v(0) \tag{6.78}$$

与前面一样,检测电路去除了 $v(0)$,则检测到的输出电压是:

$$v(t)=0.333v_s(t) \tag{6.79}$$

比较式(6.74)和式(6.79),可以看到当按钮被按下时,输出电压是输入电压的三分之一。当按钮未按时,输出电压是输入电压的一半。一旦电梯的控制计算机检测到输出电压的下降,将会导致电梯到达相应楼层。电容性组合开关更进一步的讨论留在习题 6.44~6.46。

小结

- 自感是线性电路参数,它使时变磁场感应的电压与产生磁场的电流建立联系。
- 电容是线性电路参数,它使时变电场感应的电流与产生电场的电压建立联系。
- 电感和电容是无源元件。它们能存储和释放能量,但不能产生或消耗能量。
- 电感或电容两端的瞬间功率可以是正的也可以负的,取决于元件是释放还是存储能量。
- 电感:
  - 它的端电流不允许跃变。
  - 它的端电压允许跃变。
  - 端电流为常量时,相当于短路。
- 电容:
  - 它的端电压不允许跃变。
  - 它的端电流允许跃变。
  - 端电压为常量时,相当于开路。
- 表 6.1 给出理想电感和电容的电压、电流、功率和能量方程式。
- 串联或并联的电感可以用一个等效电感代替。串联或并联电容可以用一个等效电容代替。表 6.2 归纳了这些方程式。对于含有电感和电容的串联和并联等效电路,应该如何处理初始条件请参见 6.3 节。

表 6.1　理想电感和电容的方程式

电　感	$v=L\dfrac{di}{dt}$	(V)
	$i=\dfrac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v\,d\tau+i(t_0)$	(A)
	$p=vi=Li\dfrac{di}{dt}$	(W)
	$w=\dfrac{1}{2}Li^2$	(J)
电　容	$v=\dfrac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i\,d\tau+v(t_0)$	(V)
	$i=C\dfrac{dv}{dt}$	(A)
	$p=vi=Cv\dfrac{dv}{dt}$	(W)
	$w=\dfrac{1}{2}Cv^2$	(J)

表 6.2　串联和并联的电感和电容的方程式

串　联	$L_{eq}=L_1+L_2+\cdots+L_n$ $\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$
并　联	$\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_n}$ $C_{eq}=C_1+C_2+\cdots+C_n$

- 互感 M 是一个电路参数，它使一个电路中所感应的电压与另一电路中的时变电流建立联系：

$$v_1=L_1\frac{di_1}{dt}+M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2=M_{21}\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt}$$

其中 v_1 和 i_1 是电路 1 中的电压和电流，v_2 和 i_2 是电路 2 中的电压和电流。如果线圈绕在非磁芯体上，则 $M_{12}=M_{21}=M$。

- 点约定建立了互感电压的极性，当一个电流的参考方向进入线圈打点端，则感应在另一线圈上的电压参考极性在打点端为正。

或者换一种说法，当一个电流的参考方向是离开线圈打点端，则感应在另一线圈上的电压参考极性在打点端为负。

- 耦合系数 k 是磁耦合程度的度量。由定义，$0\leqslant k\leqslant 1$。
- 每个线圈自感之间和互感之间的关系是：

$$M=k\sqrt{L_1L_2}$$

- 在线性介质中，磁耦合线圈存储的能量与下列关系式中的线圈电流和感应有关：

$$w=\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2\pm Mi_1i_2$$

习题：

6.1　对于例 6.2，求下列积分，并注释结果的意义。

$$\int_0^{\infty}p\,dt$$

P6.2　已知图 P6.2 中 4 mH 电感中的电流在 $t\leqslant 0$ 时为 2.5 A。由表达式给出 $t\geqslant 0$ 时的电感电压。

$$v_L(t)=30e^{-3t}\ \text{mV}\qquad 0^+\leqslant t<\infty$$

画出在 $0\leqslant t\leqslant\infty$ 时的 $v_L(t)$ 和 $i_L(t)$。

P6.3　已知在 2 mH 电感中的电流为：

$$i_L=50te^{-10t}\ \text{A}\quad t\geqslant 0$$

(a) 求 $t>0$ 时电感的电压(使用无源符号约定)。

(b) 求当 $t=200$ ms 时电感端的功率(单位用毫瓦)。

(c) 在 200 ms 时电感是吸收还是释放功率？

(d) 求当 $t=200$ ms 时存储在电感中的能量(单位用毫焦耳)。

(e) 求存储在电感中的最大能量(单位用毫焦耳)和所发生的时刻(单位用毫秒)。

P M6.4 图 P6.4(a)中 300 μH 电感的端电压如图 P6.4(b) 所示。已知 $t \leqslant 0$ 时,电感的电流 i 为零。

(a) $t \geqslant 0$ 时,推导 i 的表达式。

(b) 在 $0 \leqslant t \leqslant \infty$ 时,画出对应 t 的 i 曲线。

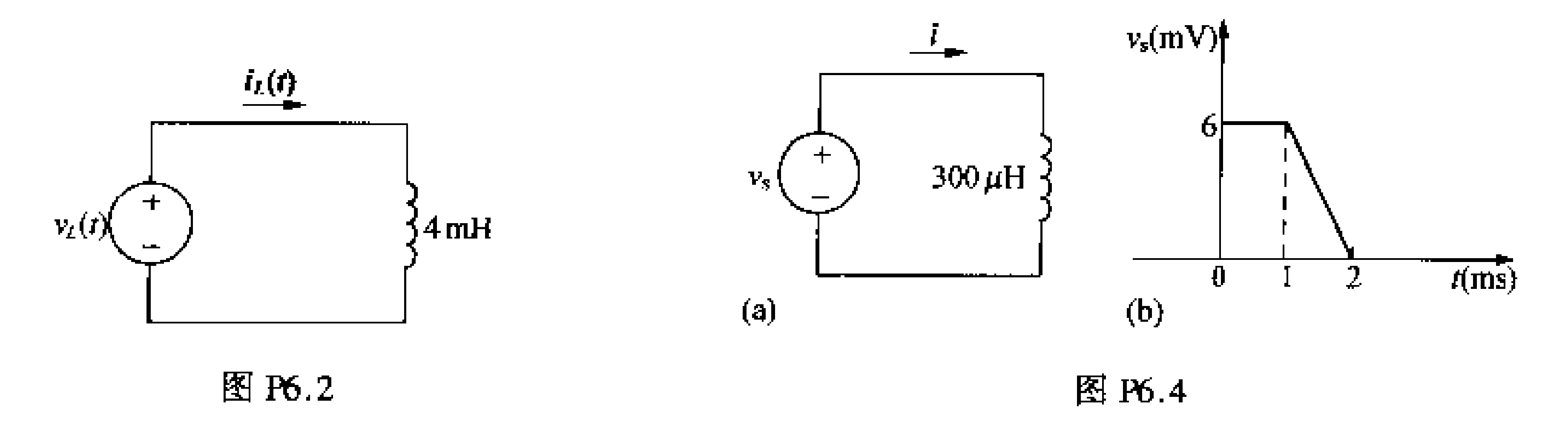


图 P6.2　　　图 P6.4

P M6.5 如图 P6.5 所示的三角电流脉冲应用于 375 mH 电感。

(a) 写出在下面四个时间段的 $i(t)$ 表达式, $t<0$, $0 \leqslant t \leqslant 25$ ms, 25 ms $\leqslant t \leqslant 50$ ms, $t>50$ ms。

(b) 推导电感电压、功率、能量表达式。使用无源符号约定。

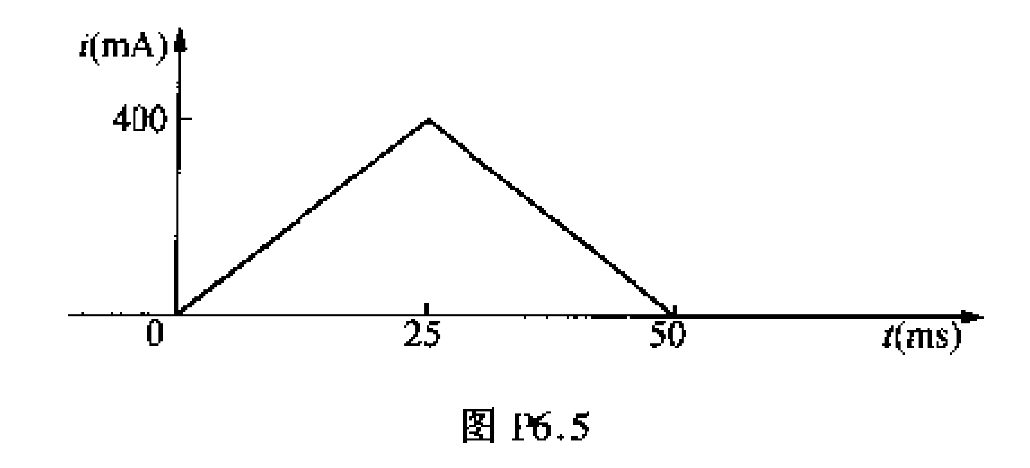


图 P6.5

P6.6 5 H 电感的端电流和电压在 $t \leqslant 0$ 时为 0。图 P6.6 给出在 $t \geqslant 0$ 时电感的电压波形。

(a) 根据下面时间间隔,推导作为时间函数的电流表达式。

$0 \leqslant t \leqslant 1$ s, 1 s $\leqslant t \leqslant 3$ s, 3 s $\leqslant t \leqslant 5$ s, 5 s $\leqslant t \leqslant 6$ s, 6 s $\leqslant t \leqslant \infty$。

(b) 在 $t>0$ 条件下,当电压为零时,电感中的电流是多少?

(c) 画出 $0 \leqslant t \leqslant \infty$ 时, i 对应于 t 的图形。

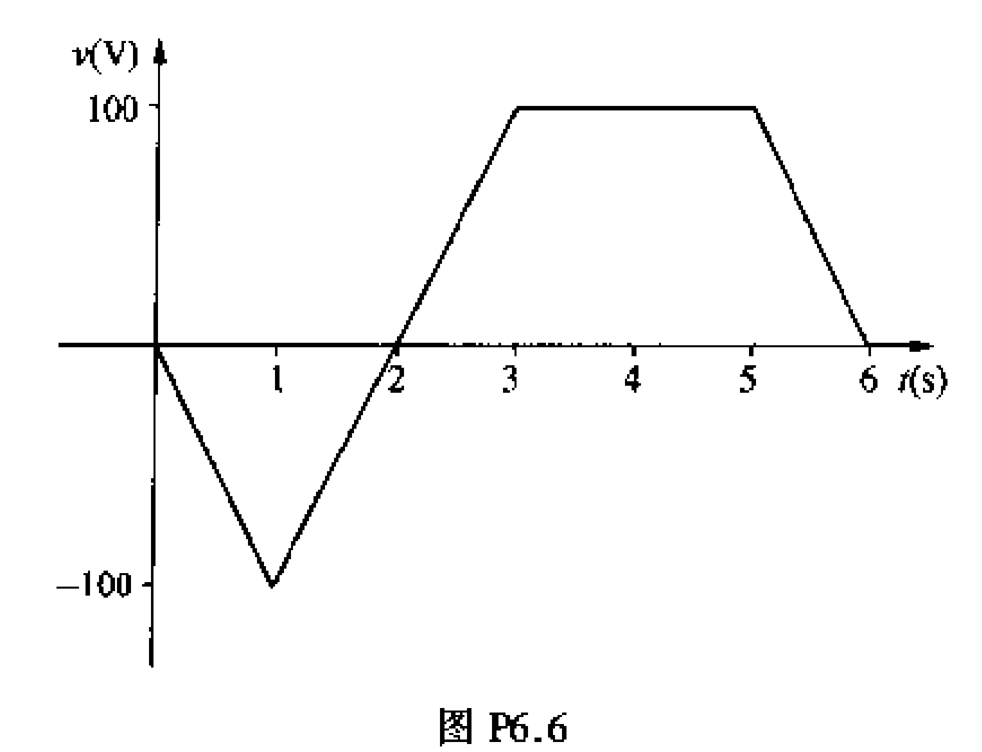


图 P6.6

6.7 在 20 mH 电感中的电流是:

$$i = 50\ \text{mA}, t \leqslant 0$$
$$i = A_1 e^{-2500t} + A_2 e^{-7500t}\ \text{A} \qquad t \geqslant 0$$

在 $t=0$ 时,电感上的电压是 10 V。

(a) 求 t>0 时,电感上的电压表达式。

(b) 当电感端的功率为零时,求时间(大于零)。

M6.8 假设习题 6.7 中,在 $t=0$ 时,电感上的电压值由 - 100 V 代替 10 V。

(a) 求 $t \geqslant 0$ 时 i 和 v 的表达式。

(b) 说明什么时间电感存储能量,以及什么时间电感释放能量。

(c) 说明从电感吸收的总能量等于所存储的总能量。

P6.9 已知 25 mH 电感中的电流在 $t \leqslant 0$ 时是 - 10 A,在 $t \geqslant 0$ 时是 $-[10\cos 400t + 5\sin 400t]e^{-200t}$ A。假设符合无源符号约定。

(a) 电感上的电压在什么时刻最大?

(b) 最大电压是多少?

P M6.10 (a) 在图 P6.10 所示电路中,如果 $v = 250\sin 1000t$ V, $L = 50$ mH, $i(0) = -5$ A,求电感电流。

(b) 画出 v, i, p, w 对应 t 的波形图。用图 6.8 的形式画这些图。画超过一个完整周期的电压波形。

(c) 描述在 0 到 2π ms 期间内,电感吸收功率和释放功率的区间。

6.11 图 P6.11 所示电路中,25 H 电感两端放置一电压表,且电感初始无能量。在 $t=0$ 时,电感在瞬间被转换到 b 的位置,停留 1 秒后在瞬间返回到 a 的位置。d'Arsonval 电压表满刻度 50 V,灵敏度 1000 Ω/V。在开关返回到 a 位置的时刻,如果忽略 d'Arsonval机构的运动惯性,电压表的读数是多少?

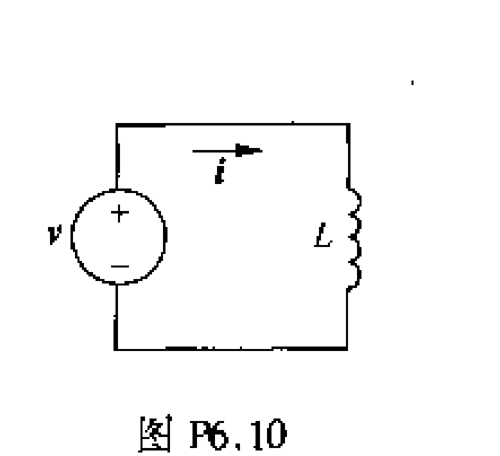


图 P6.10

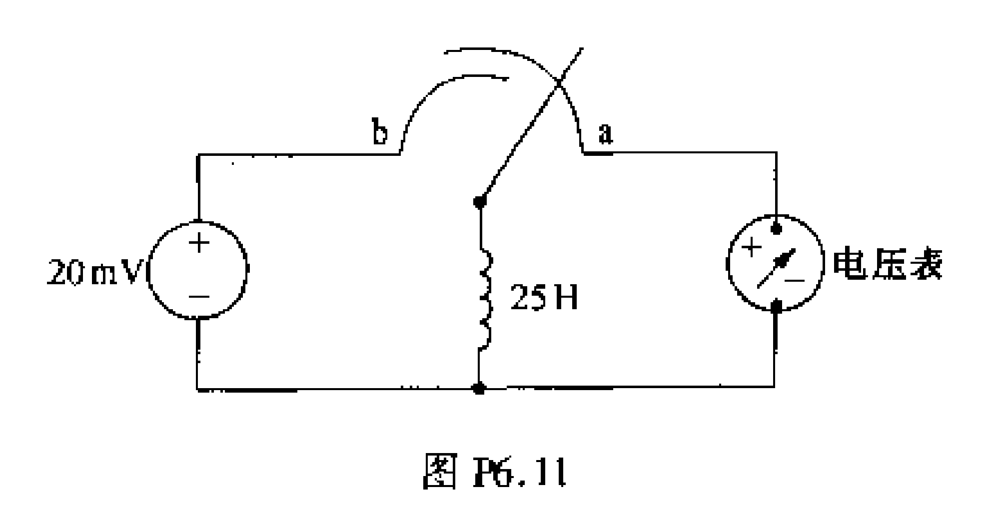


图 P6.11

P6.12 2 H 电感中的电流是:

$$i = 25\ \text{A}, t \leqslant 0$$
$$i = (B_1\cos 5t + B_2\sin 5t)e^{-t}\ \text{A}\ , t \geqslant 0$$

在 $t=0$ 时,电感的电压是 100 V(无源符号约定)。计算在 $t=0.5$ s 时电感端的功率。说明电感是吸收还是释放功率。

6.13 例 6.5 得到的电压、功率和能量表达式,涉及到代数的综合和处理。作为工程师,不能完全相信这些结果,要养成问自己问题的习惯,“用已知的电路行为表示的这些结果有意义吗?”,好好思考一下,通过完成下列检查来校验例 6.5 的表达式。

(a) 检查表达式,看看从一个时间区间到另一个时间区间的电压是否连续?

(b) 在每个时间区间中选择一个时刻,代入功率表达式检查,看看是否与相应的 i 和 v 乘积有相同的结果? 例如选择在 10 μs 和 30 μs 时测试。

(c) 在每个时间区间中选择一个时刻,代入能量表达式检查,看看能量方程式是否与$\frac{1}{2}Cv^2$ 有相同的结果? 使用 10 μs 和 30 μs 作为测试点。

P6.14 图 P6.14 所示的矩形电流脉冲被应用于 0.5 μF 的电容。电容的初始电压是 20 V,电压降与电流的参考方向一致。假设使用无源符号约定,推导在(a)~(c) 期间,电容电压的表达式。

(a) $0 \leq t \leq 50$ μs

(b) 50 μs $\leq t \leq$ 200 μs

(c) 200 μs $\leq t \leq \infty$

(d) 画出在 −50 μs $\leq t \leq$ 300 μs 期间外的 $v(t)$ 波形。

M6.15 一个电压脉冲在 3 秒期间作用于 0.8 μF 的电容。这个脉冲由下列方程式描述:

$$v_c(t) = \begin{cases} 20t^3\ \text{V} & ,0 \leq t \leq 1\ \text{s} \\ 2.5(3-t)^3\ \text{V} & ,1\ \text{s} \leq t \leq 3\ \text{s} \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

画出在 3 秒期间电容中的电流脉冲波形。

P6.16 图 P6.16 (a)所示的 0.2 μF 电容的初始电压是 −60.6 V。电容电流波形如图 P6.16(b) 所示。

(a) 在 t = 250 μs 时,存储在电容中的能量有多少(单位用毫焦耳)?

(b) 在 $t = \infty$ 时,存储在电容中的能量有多少(单位用毫焦耳)?

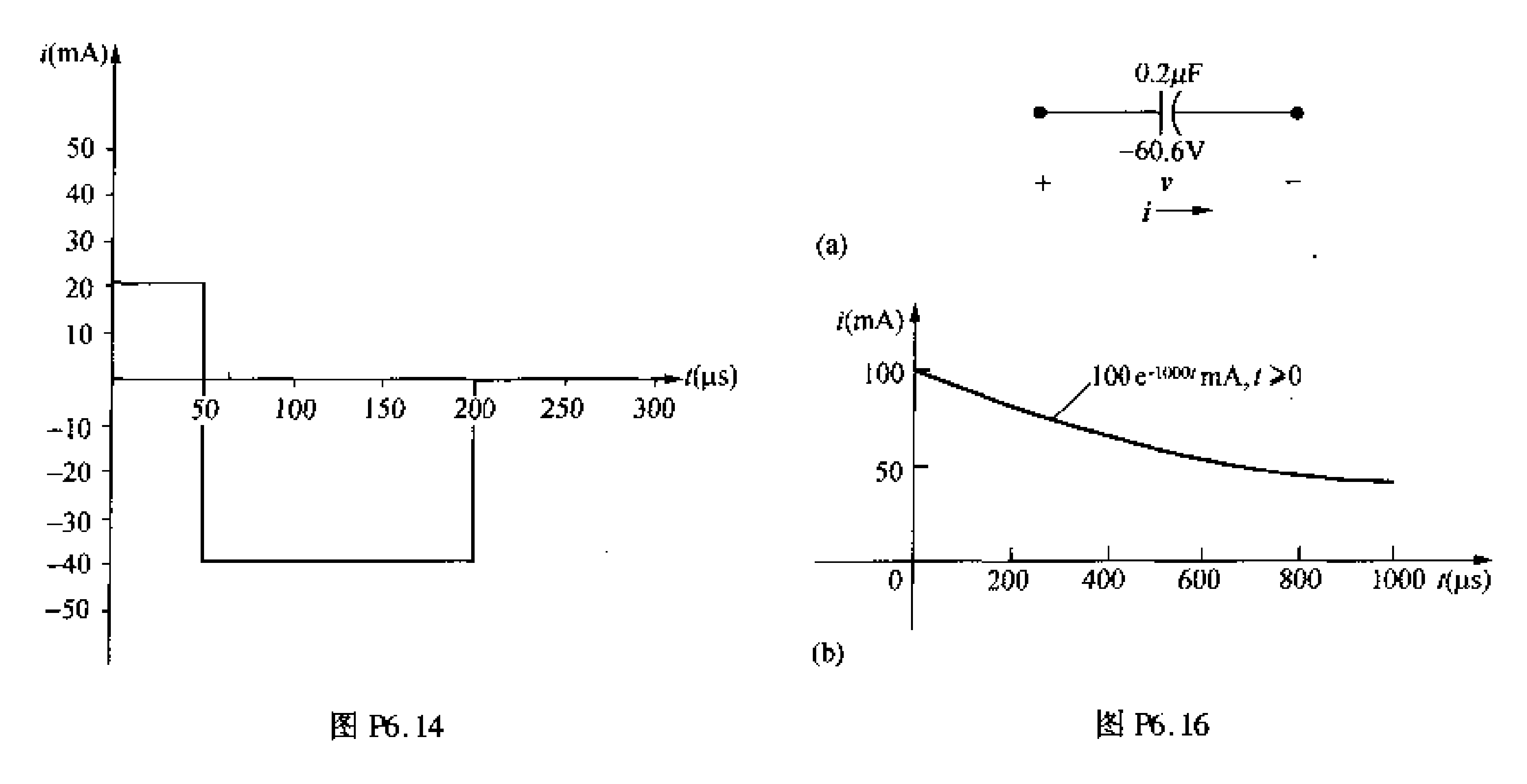


图 P6.14　　图 P6.16

P6.17 0.40 μF 电容端的电压是:

$$v = \begin{cases} 25\ \text{V} & ,t \leq 0 \\ A_1 te^{-1500t} + A_2 e^{-1500t}\ \text{V} & ,t \geq 0 \end{cases}$$

电容中的初始电流是 90 mA。假设使用无源符号约定。

(a) 存储在电容中的初始电流是多少?

(b) 求系数 A_1 和 A_2 的值。

(c) 写出电容电流表达式。

P6.18 如图 P6.18 所示电流脉冲作用在 0.2 μF 电容上。电容的初始电压为零。

(a) 求在 $t = 30\ \mu s$ 时电容上的电荷。

(b) 求在 $t = 50\ \mu s$ 时电容上的电压。

(c) 存储在电容中的能量有多少?

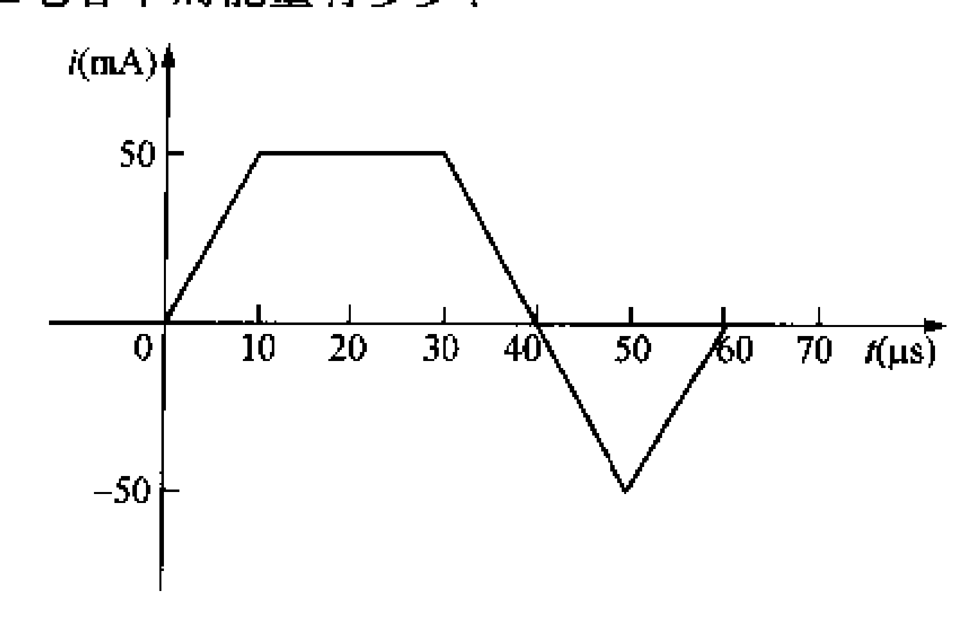


图 P6.18

P M6.19 图 6.10 中电容端的电压是:

$$v = \begin{cases} -60\ \text{V}, & ,t \leqslant 0 \\ 15 - 15e^{-500t}(5\cos 2000t + \sin 2000t)\ \text{V} & ,t \geqslant 0 \end{cases}$$

假设 $C = 0.4\ \mu F$。

(a) 求 $t<0$ 时电容中的电流。

(b) 求 $t>0$ 时电容中的电流。

(c) 在 $t=0$ 时电容端的电压有跃变吗?

(d) 在 $t=0$ 时电容中的电流有跃变吗?

(e) 在 $t=\infty$ 时存储在电容中的能量有多少(单位用毫焦耳)?

6.20 假设图 P6.20 所示电感中存储的初始能量为零。求 a,b 端等效电感。

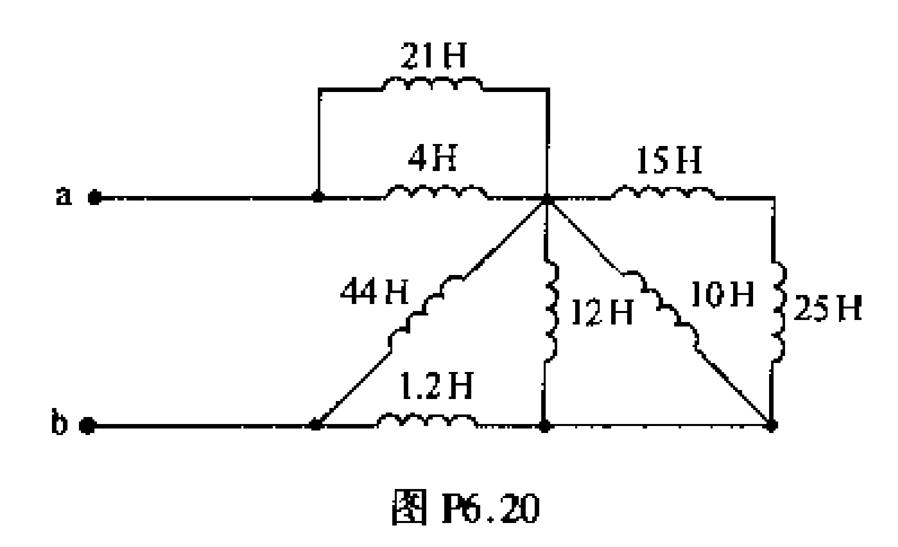


图 P6.20

6.21 假设图 P6.21 所示电感中存储的初始能量为零。求 a,b 端等效电感。

6.22 推导理想电容的串联连接等效电路。假设每个电容有它自己的初始电压。这些初始电压表示为 $v_1(t_o)$,$v_2(t_o)$,等等。(提示:求这些电容的电压之和,认定串联连接使每个电容中的电流相同。)

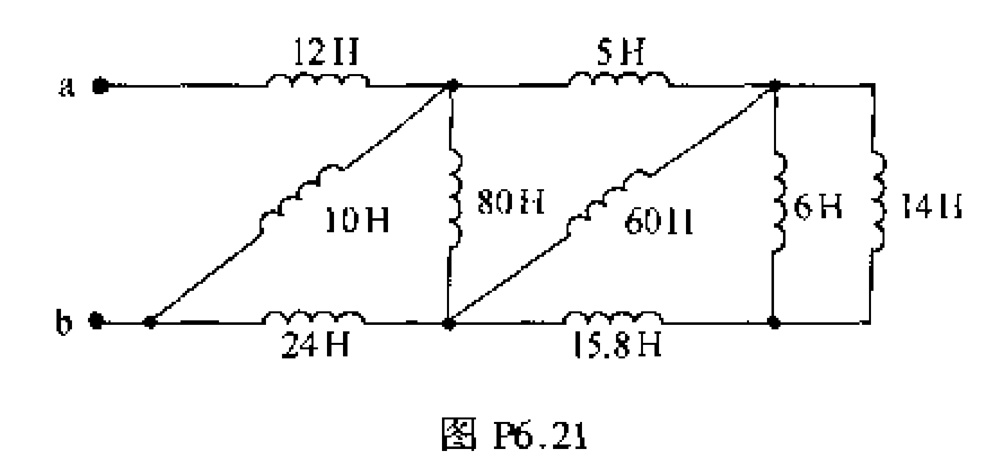


图 P6.21

6.23 推导理想电容的并联连接等效电路。假设并联电容的初始电压为 $v(t_0)$。(提示：求这些电容的电流之和，设并联连接使每个电容上的电压相同。)。

6.24 求图 P6.24 所示电路中 a，b 端的等效电容。

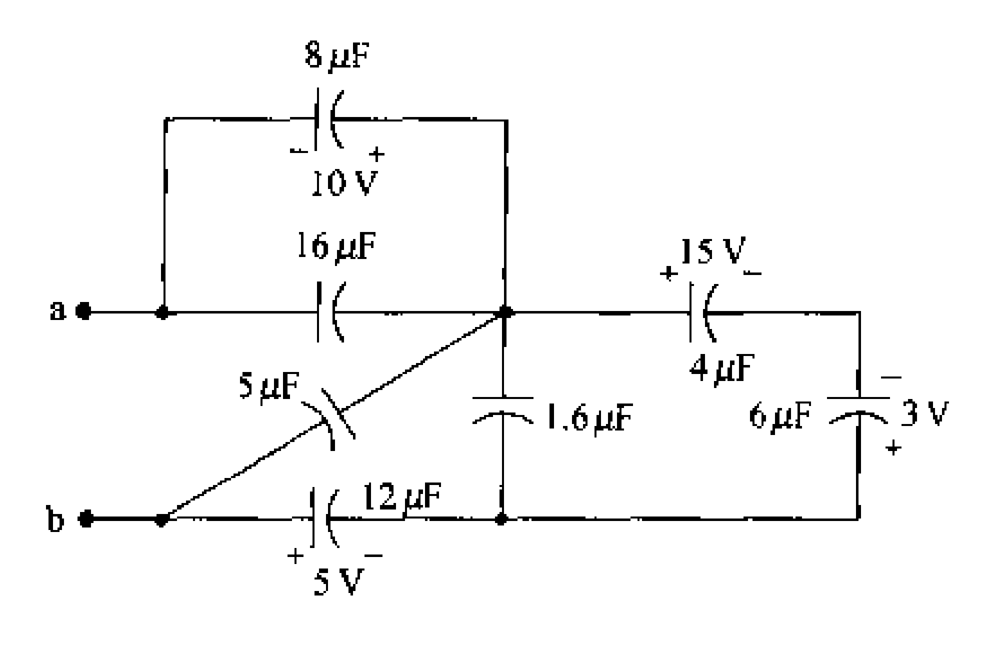


图 P6.24

6.25 求图 P6.25 所示电路中 a，b 端的等效电容。

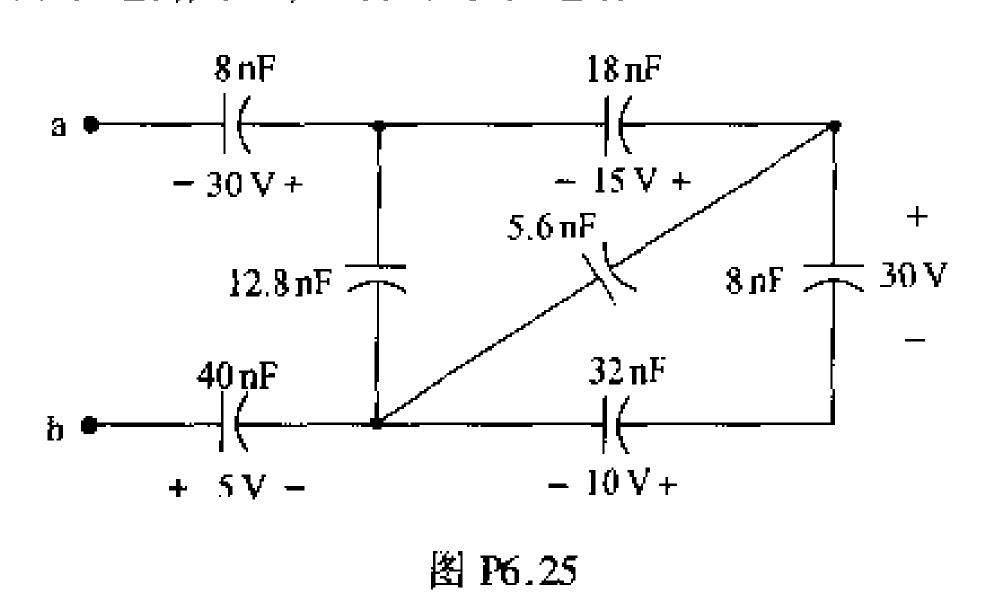


图 P6.25

6.26 图 P6.26 所示电路中，三个电感在 $t=0$ 时连接在一个黑盒子两端。已知 $t\geqslant 0$ 时的电压为：

$$v_b = 1250e^{-25t}\ \mathrm{V}$$

如果 $i_1(0)=10\ \mathrm{A}$，$i_2(0)=-5\ \mathrm{A}$，求：

(a) $i_0(0)$。

(b) $i_0(t)$，$t\geqslant 0$。

(c) $i_1(t)$，$t\geqslant 0$。

(d) $i_2(t)$，$t\geqslant 0$。

(e) 存储在三个电感中的初始能量。

(f) 释放到黑盒子的总能量。

(g) 理想电感吸收的能量。

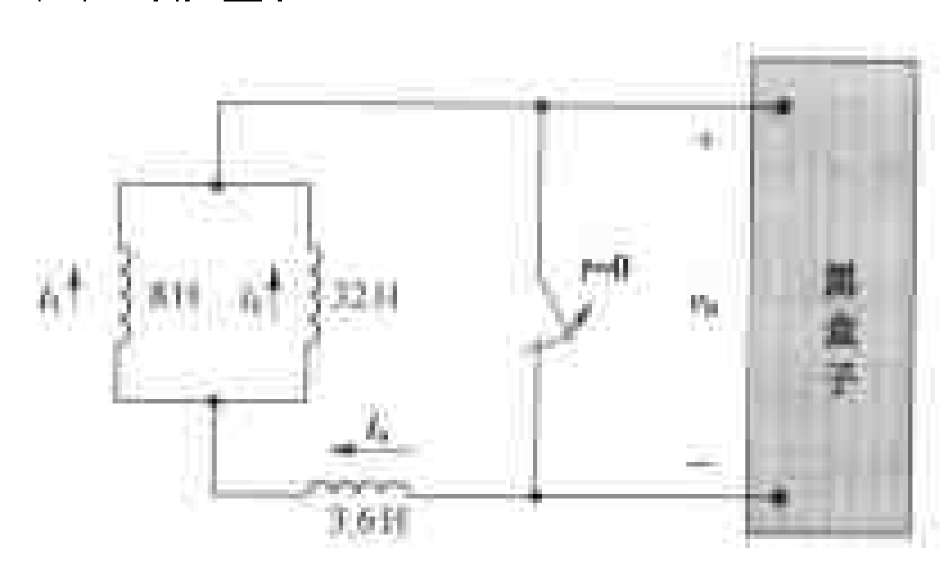


图 P6.26

6.27 对于图 P6.26 所示电路,开关拨到开的位置后,经过多少毫秒,释放到黑盒子的能量为总释放能量的 80%?

6.28 图 P6.28 中,两个并联电感在 $t=0$ 时连接到一个黑盒子两端。已知 $t\geq0$ 时的电压 v 为 $-1800e^{-20t}$ V,并且已知 $i_1(0)=4$ A,$i_2(0)=-16$ A。

(a) 用一个等效电感代替原来的电感并求 $t\geq0$ 时的 $i(t)$。

(b) 求 $t\geq0$ 时的 $i_1(t)$。

(c) 求 $t\geq0$ 时的 $i_2(t)$。

(d) 在 $0\leq t\leq\infty$ 期间,释放到黑盒子的能量是多少?

(e) 存储在并联电感中的初始能量是多少?

(f) 理想电感吸收的能量是多少?

(g) i_1 和 i_2 的解符合(f)中所得的答案吗?

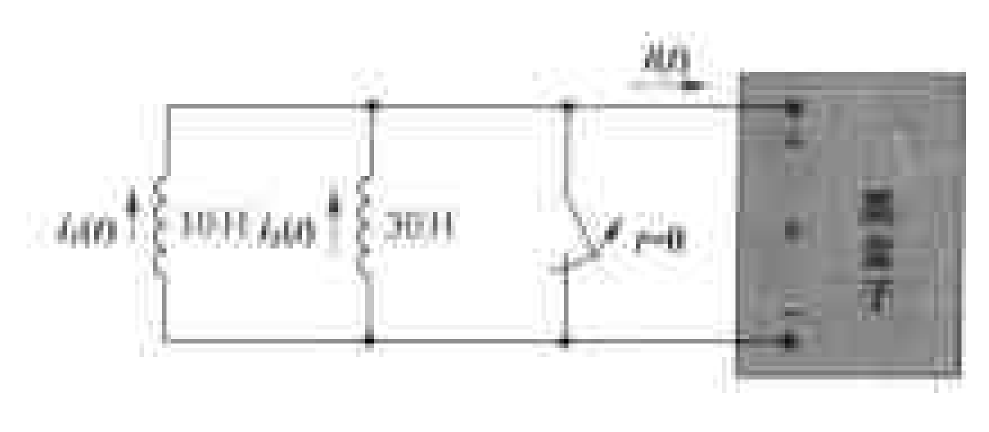


图 P6.28

6.29 图 P6.29 中,两个串联连接的电容在 $t=0$ 时,连接到一个黑盒子两端。已知 $t\geq0$ 时的电流 $i(t)$为 $900e^{-2500t}$ μA。

(a) 用一个等效电容代替原来的电容,并求 $t\geq0$ 时的 $v_0(t)$。

(b) 求 $t\geq0$ 时的 $v_1(t)$。

(c) 求 $t\geq0$ 时的 $v_2(t)$。

(d) 在 $0\leq t\leq\infty$ 期间,释放到黑盒子的能量是多少?

(e) 存储在串联电容中的初始能量是多少?

(f) 理想电容吸收的能量是多少?

(g) v_1 和 v_2 的解符合(f) 中所得的答案吗?

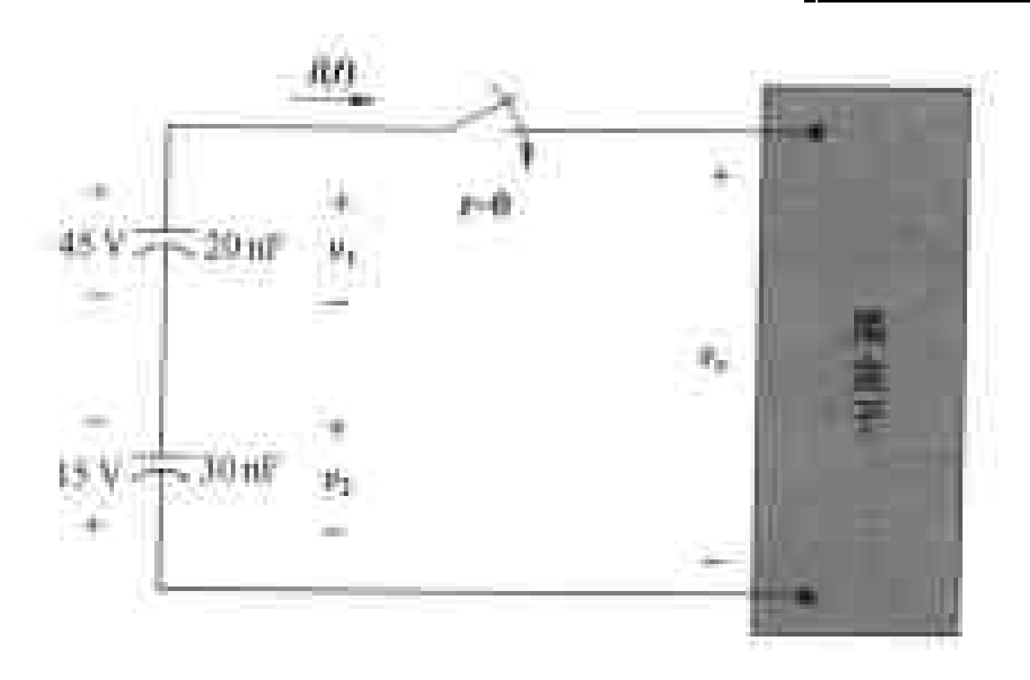


图 P6.29

6.30 图 P6.30 所示电路中，四个电容在 $t=0$ 时连接到一个黑盒子两端。已知 $t\geqslant 0$ 时的电流 i_b 为：

$$i_b = 50e^{-250t}\ \mu A。$$

如果 $v_a(0)=15$ V，$v_c(0)=-45$ V，$v_d(0)=40$ V，在 $t\geqslant 0$ 时，求：(a) $v_b(t)$，(b) $v_a(t)$，(c) $v_c(t)$，(d) $v_d(t)$，(e) $i_1(t)$，(f) $i_2(t)$。

6.31 对于图 P6.30 所示电路，计算：

(a) 存储在电容中的初始能量。

(b) 存储在电容中的最终能量。

(c) 释放到黑盒子中的总能量。

(d) 释放到黑盒子中的能量占所存储的初始能量的百分比。

(e) 释放到黑盒子的能量为 5 μJ 时所花的时间(单位用毫秒)。

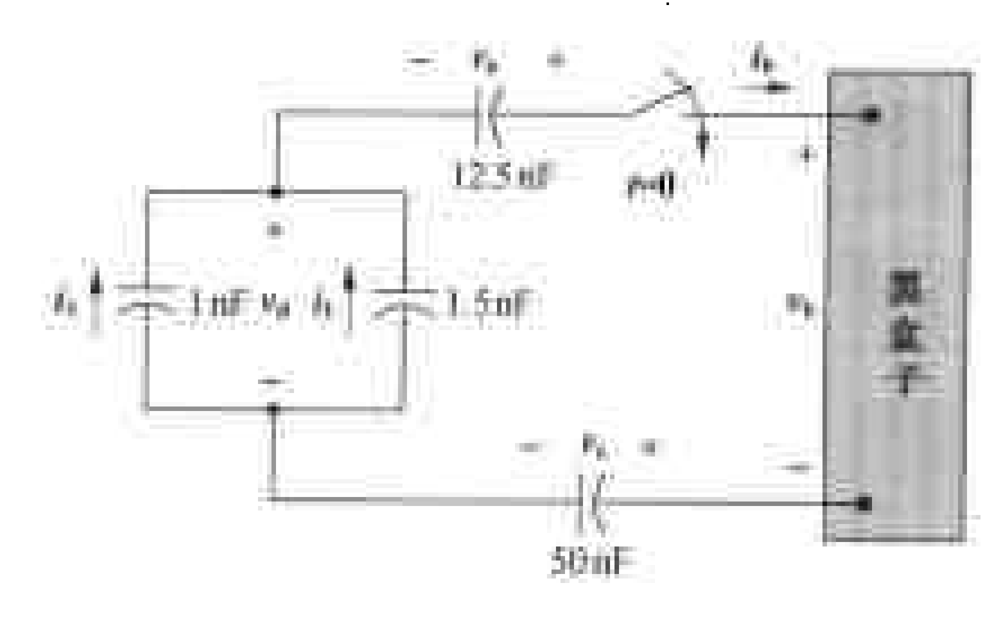


图 P6.30

M6.32 电路如图 P6.32 所示，已知 $t\geqslant 0^+$ 时：

$$i_o = 50e^{-8000t}(\cos 6000t + 2\sin 6000t)\ \text{mA}。$$

求 $v_1(0^+)$ 和 $v_2(0^+)$。

6.33 如图 P6.33 所示，串联连接的电容和电感在 $t=0$ 时，连接到一个黑盒子两端。已知 $t\geqslant 0$ 时：

$$i_o = e^{-80t}\sin 60t\ \text{A}。$$

如果 $v_c(0)=-300$ V，求 $t\geqslant 0$ 时的 v_o。

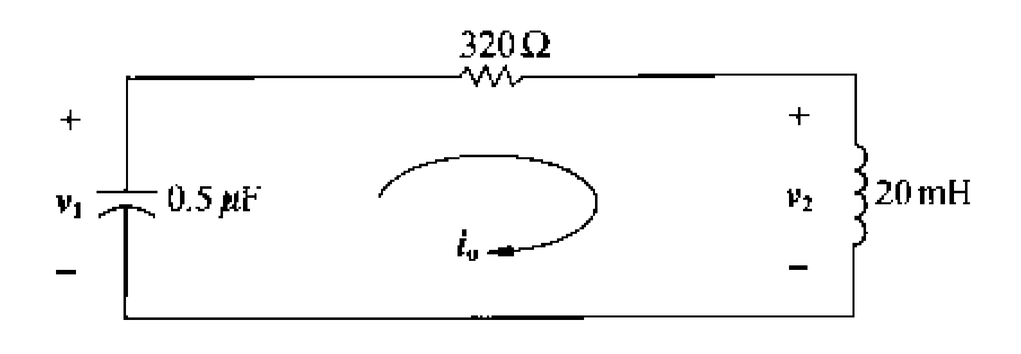


图 P6.32

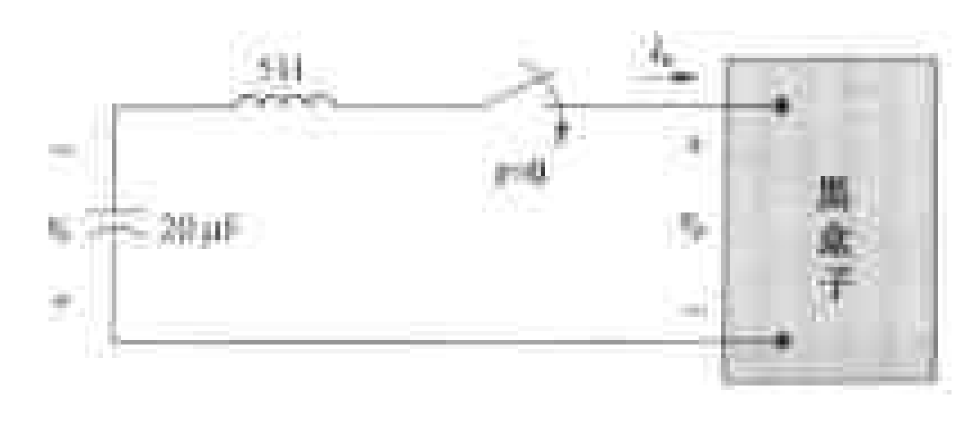


图 P6.33

6.34 v_o 为图 6.25 所示电路中 16 H 电感上的电压。假设 v_o 在打点端为正。如同例 6.6, $i_g = 16 - 16e^{-5t}$ A。

(a) 不求电流表达式的微分,能够求出 v_o 吗? 请解释。

(b) 推导 v_o 表达式。

(c) 用相应的电流导数和电感检验一下(b) 中的答案。

6.35 v_g 为图 6.25 所示电路中电流源上的电压。v_g 参考方向在电流源上端为正。

(a) 当 $i_g = 16 - 16e^{-5t}$ A 时,求作为时间的函数的 v_g。

(b) v_g 的初始值是多少?

(c) 求由电流源产生的功率表达式。

(d) 当 $t = \infty$ 时,电流源产生多大的功率?

(e) 计算当 $t = \infty$ 时,消耗在每一个电阻上的功率。

6.36 如图 P6.36 所示电路,在开关刚打开时无能量存储。

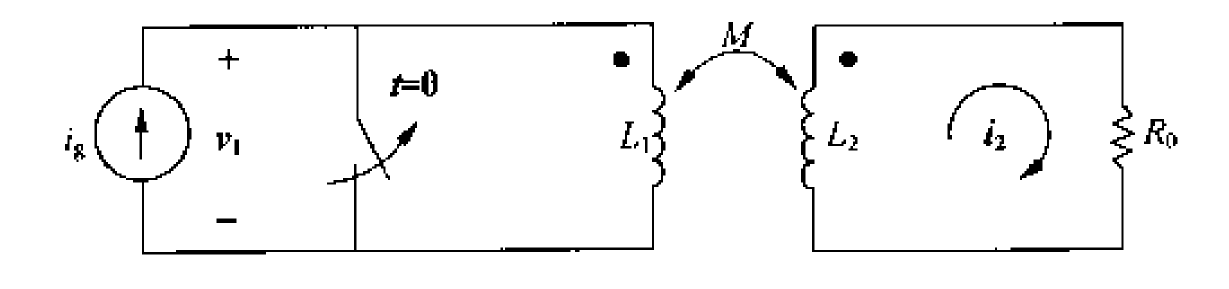


图 P6.36

(a) 如果 $L_1 = 4$ H, $L_2 = 16$ H, $M = 2$ H, $R_0 = 32$ Ω,推导 i_2 的微分方程式。

(b) 说明当 $i_g = 8 - 8e^{-t}$ A, $t \geq 0$ 时由(a)所得到的微分方程式符合 $i_2 = e^{-t} - e^{-2t}$ A, $t \geq 0$。

(c) 求电流源电压 v_1 表达式。

(d) v_1 的初始值是多少? 根据已知的电路行为说明有意义吗?

(e) 用计算机程序做出在 $0 \leq t \leq 5$ s 时间范围内 i_2 和 v_1 的波形图。

6.37 (a) 用式(6.59),证明耦合系数也可以表示为:

$$k=\sqrt{\left(\frac{\phi_{21}}{\phi_1}\right)\left(\frac{\phi_{12}}{\phi_2}\right)}$$

(b) 在分数 ϕ_{21}/ϕ_1 和 ϕ_{12}/ϕ_2 基础上，说明为什么 k 小于 1.0。

6.38 (a) 证明图 P6.38 中两个耦合线圈，可以由一个具有电感 $L_{ab}=L_1+L_2+2M$ 的线圈来代替。（提示：将 v_{ab}表示为 i_{ab}的函数。）

(b) 证明如果标有 L_2 的线圈端子反向连接，则 $L_{ab}=L_1+L_2-2M$。

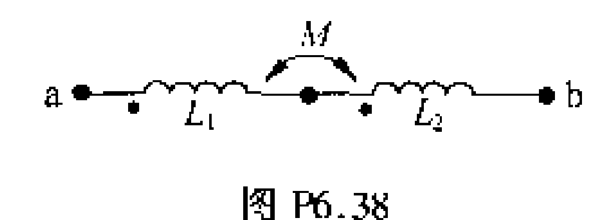


图 P6.38

6.39 两个磁耦合线圈，它们的自感分别为 196 mH 和 4 mH。线圈间互感为 23.8 mH。

(a) 耦合系数是多少？

(b) 对这两个线圈，M 可能的最大值是什么？

(c) 假设这些耦合线圈的物理结构是这样的：$\rho_1=\rho_2$。如果 196 mH 线圈的匝数是 N_1，那么匝数比 N_1/N_2 是多少？

6.40 两个磁耦合线圈自感分别为 400 mH 和 225 mH。400 mH 线圈有 2 000 匝，线圈间耦合系数是 0.4。耦合介质是非磁性的。当线圈 1 被激励，线圈 2 开路时，仅与线圈 1 相交链的磁通为 0.25Wb，大小和与线圈 2 相交链的磁通相同。

(a) 线圈 2 有多少匝？

(b) ρ_2 的值是多少（单位用每安培纳韦伯）？

(c) ρ_{11}的值是多少（单位用每安培纳韦伯）？

(d) 比率是多少（ϕ_{22}/ϕ_{12}）？

6.41 四对磁耦合线圈的物理构造如图 P6.41 所示。假设对于每个结构的磁芯材料，磁通是有限的。说明在每对线圈上点标记的两个可能位置。

6.42 在两个线圈上的极性标记由实验决定。实验装置如图 P6.42 所示。假设如图所示，连到电池正极的一端给出极性标记。当开关打开时，直流电压表指针冲向正刻度。极性标记将放在与电压表相连线圈的什么位置？

6.43 (a) 证明图 P6.43 中两个磁耦合线圈可以由一个线圈来代替。该线圈的电感是：

$$L_{ab}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

（提示：设 i_1 和 i_2 分别是图 P6.43 左、右"窗口"中顺时针方向的网孔电流。沿两个网孔，对电压求和。在网孔 1 中设 v_{ab}为未知电压。求解作为 v_{ab}函数的 di_1/dt。）

(b) 证明如果线圈 2 的磁极性是反向的，那么：

$$L_{ab}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}$$

◆**6.44** 重做实例中给出的例子，这次将按钮放在分压电路底部，如图 P6.44 所示。计算当手指按下时的输出电压 $v(t)$。

(a)

(b)

(c)

(d)

图 P6.41

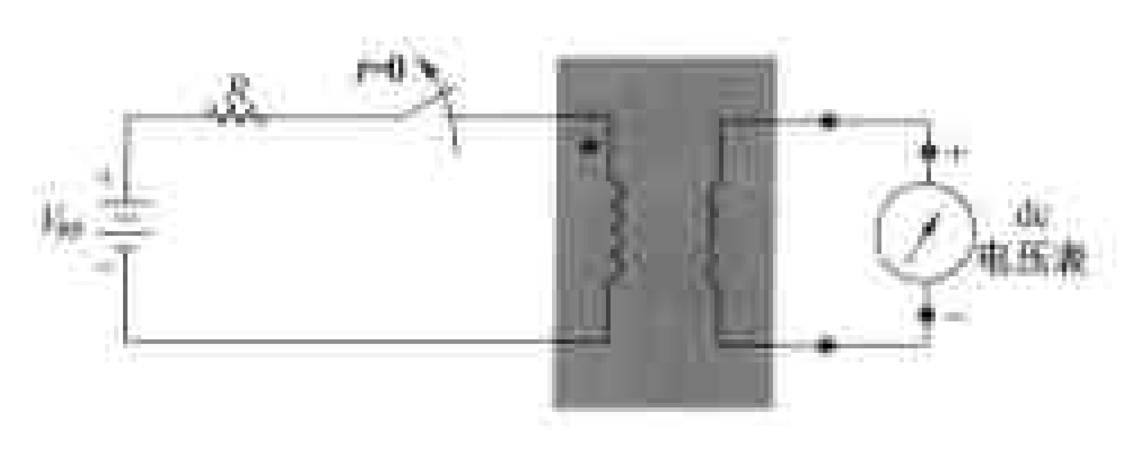


图 P6.42

◆**6.45** 当接触到底部，一些灯打开或关上。这些是实例中所讨论的电容性开关电路的应用。图 P6.45 显示了这样一个灯的电路模型。计算当一个人触摸时，电压 $v(t)$ 的变化。假设所有电容初始放电结束。

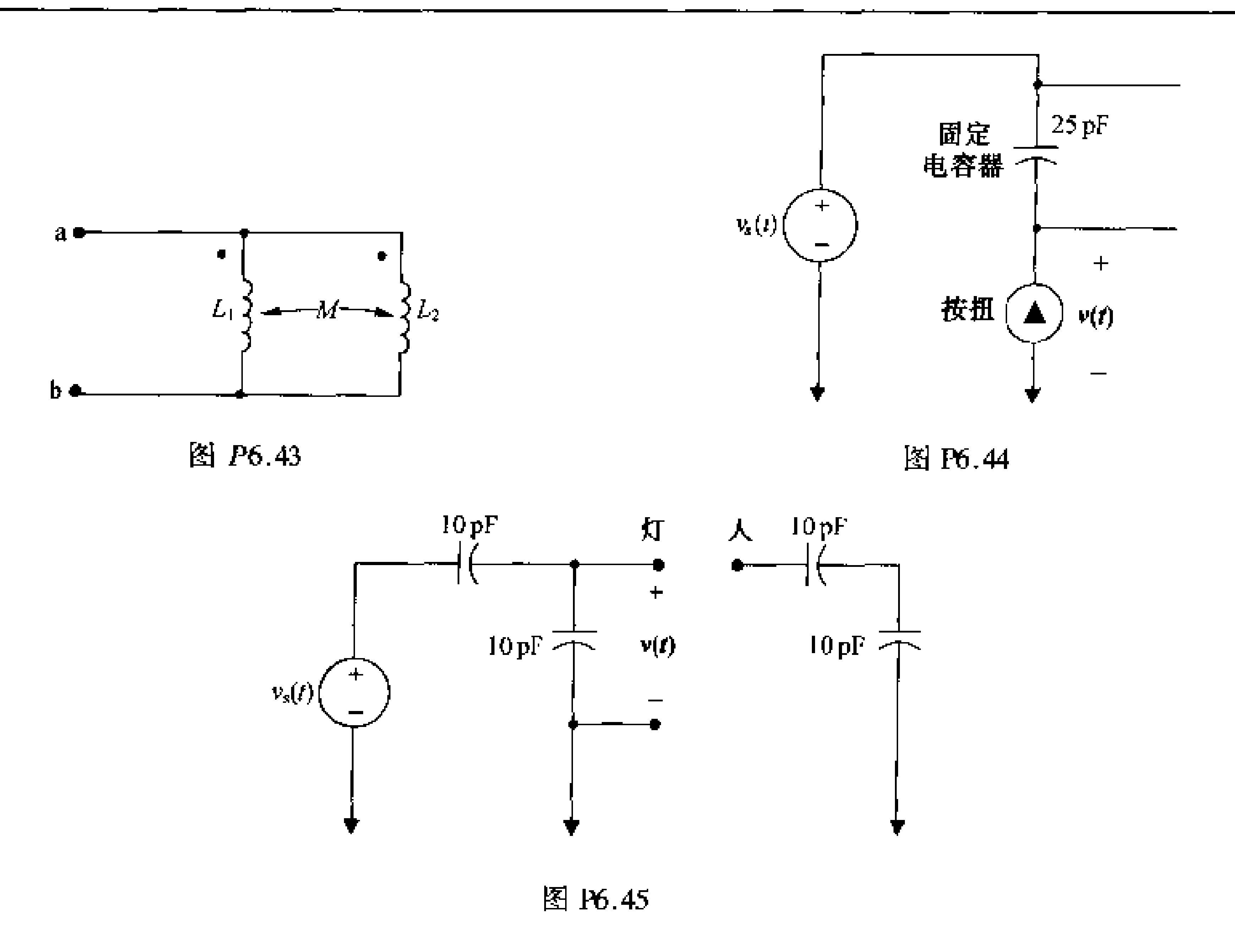


图 P6.43

图 P6.44

图 P6.45

◆**6.46**　在前面实例讨论的例子中，当电梯按钮是分压电路上面的电容时，计算了输出电压。在习题 6.44 中，计算了当电梯按钮是分压电路下面的电容时的输出电压，得到同样的结果。下面计算图 P6.46(a)和(b) 电路中的电压差(手指触摸对应无手指触摸)，电路中使用两个同样的电压源。

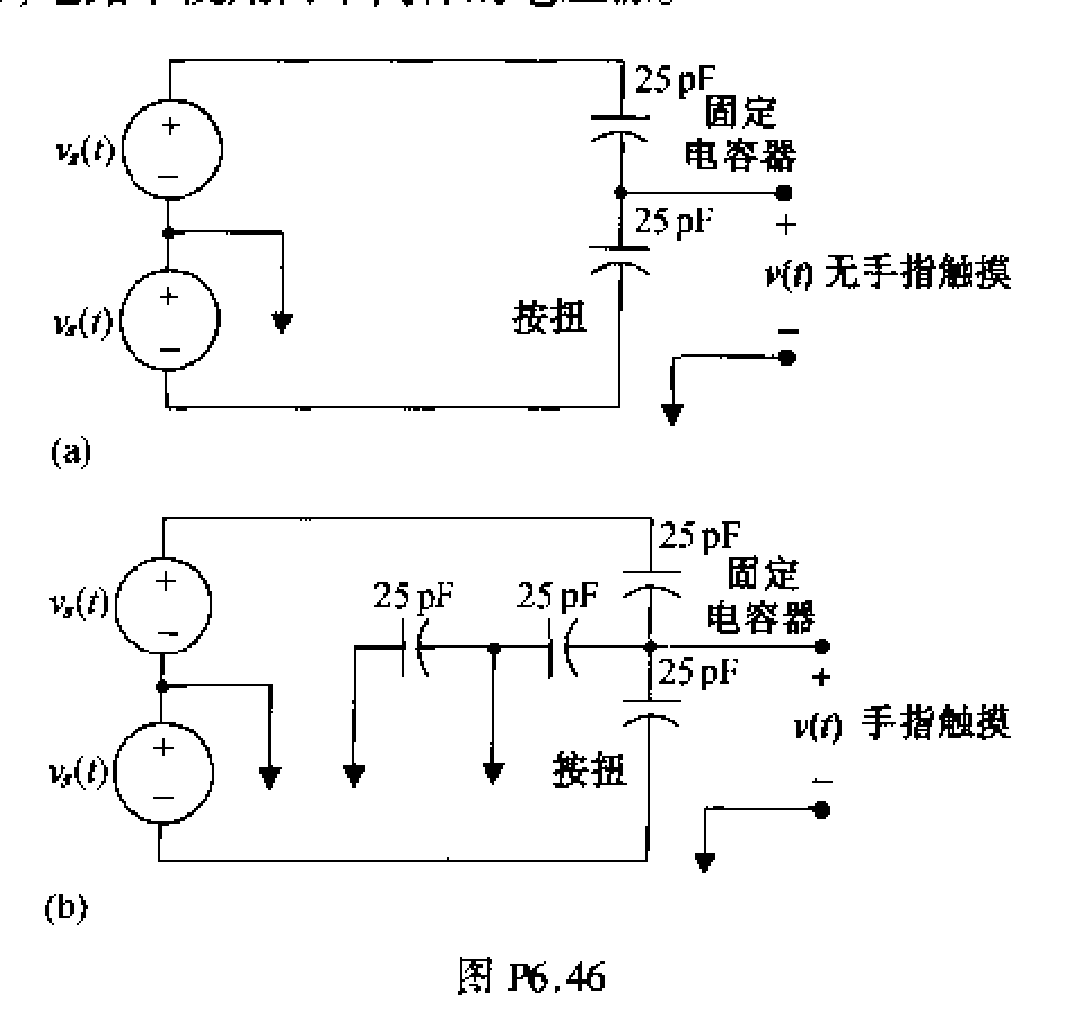


图 P6.46

第 7 章　一阶 *RL* 和 *RC* 电路的响应

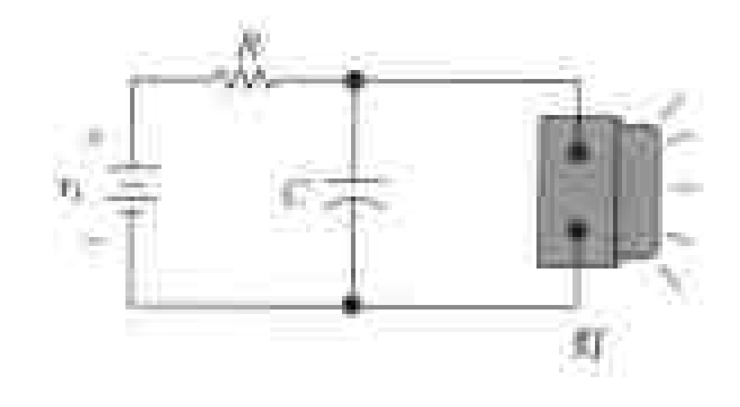
实例

闪光灯电路一

可以想像需要闪光灯的场合非常多。照相机在光线比较暗的条件下照相,要用闪光灯照亮场景一定时间,将影像记录在胶卷上。一般来说,照相机闪光灯电路需要重新充电后才能再照下一张照片。

有些场合使用闪光灯作为危险警告,例如,高的天线塔、建筑工地和安全地带等。工程师必须根据实际需要设计产生闪光的电路。例如,设计工程师要知道闪光是否通过操作开关手工控制(照相机就是这种情况),或闪光是否按照预设频率重复自拍。工程师也必须知道闪光灯是否是一个固定安装设备(如在天线上)或临时安装(如在建筑工地上)。另外要回答的问题是使用电源是否方便。

许多当今使用的控制闪光灯的电子电路已超出本教材的范围。不过可以通过思考闪光灯电路的设计过程,得到一些感性认识。闪光灯电路由直流电压源、电阻、电容和一个在临界电压下能进行放电闪光的灯所组成,电路如图所示。



通过第 6 章的学习,我们注意到电感和电容的一个重要的特性是,它们都具有存储能量的能力。可以确定一个电感或电容释放或得到能量时产生的电流和电压,它们是直流电压源或电流源发生突变的响应。第 7 章,将重点讨论由电源、电阻和电感(或电容)组成的电路。这样的结构简称为 *RL*(电阻 - 电感)电路和 *RC*(电阻 - 电容)电路。

RL 和 *RC* 电路的分析分为三个阶段。第一阶段,将考虑存储在电感或电容中的能量突然释放到电阻网络时所产生的电流和电压。这种情况发生在电感或电容突然与直流电源断开时。可以将电路简化成如图 7.1 所示的两种等效形式中的一个。在这种结构中产生的电流和

电压称之为电路的固有响应,它强调电路本身的自然状态,而不是由外部电源的激励决定。第二阶段,将考虑直流电压或电流源突然加到一个电感或电容上,使其获得能量而产生的电流和电压,这种响应称之为阶跃响应。求解固有响应和阶跃响应的过程是相同的。第三阶段,将开发一个一般的方法,用于求解直流电压源或电流源突变所产生的 RL 和 RC 电路的响应。

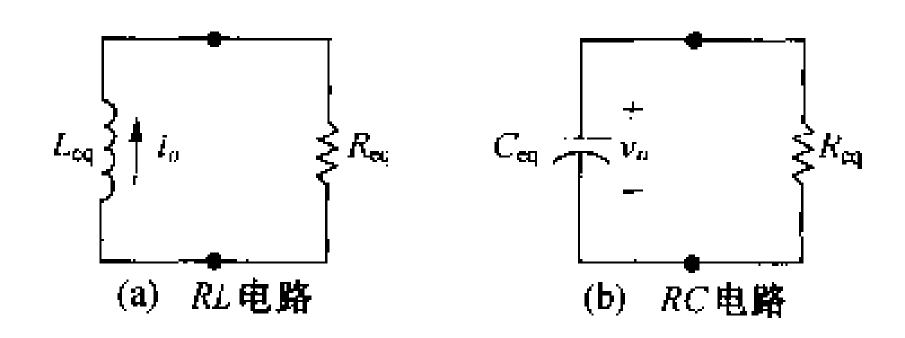


图 7.1　分析固有响应的两种电路形式

图 7.2 给出一般 RL 和 RC 电路结构的四种可能形式。注意:在电路中无独立源时,戴维南电压或诺顿电流为零,电路简化成图 7.1 所示电路中的一种形式,即有一个固有响应的问题。

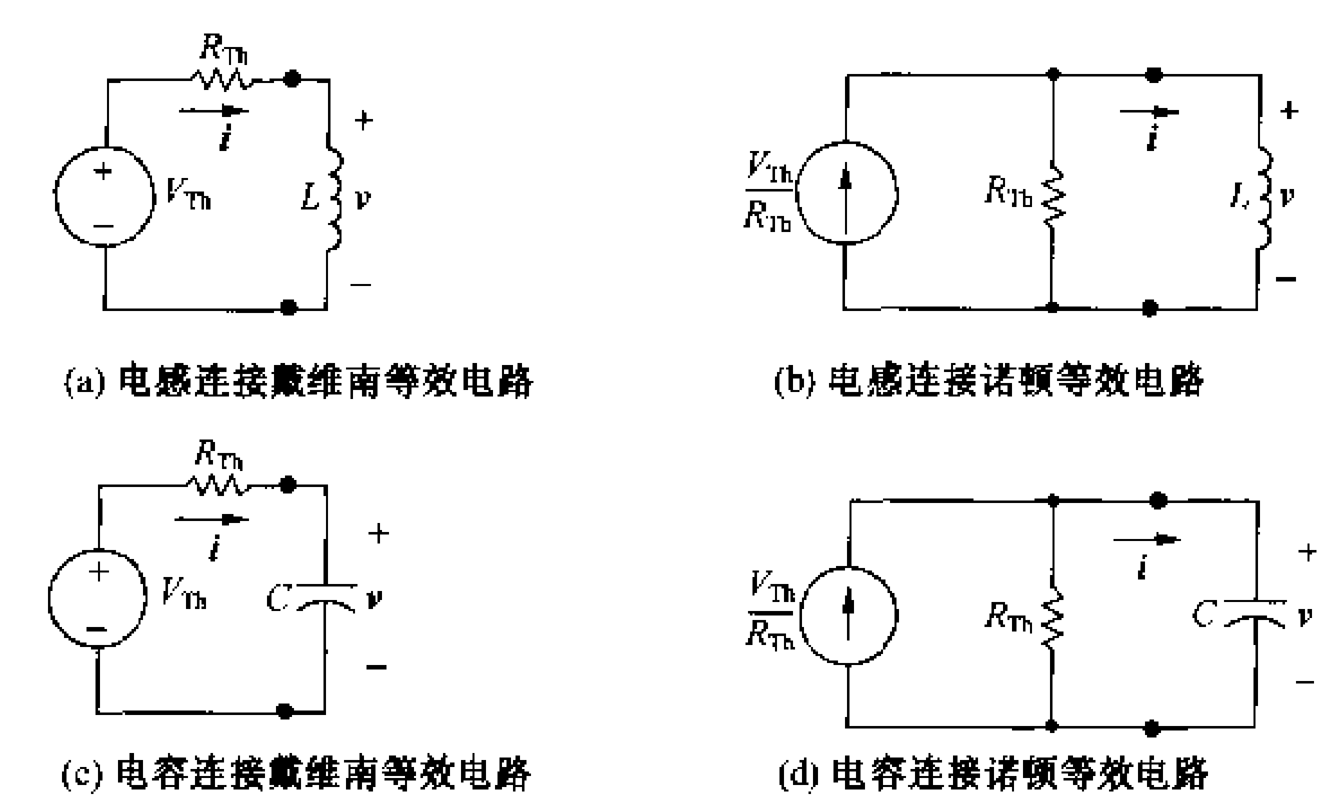


图 7.2　四种可能的一阶阶跃电路

由于它们的电压和电流由一阶微分方程式表示,故 RL 和 RC 电路也称之为一阶电路。不论出现如何复杂的电路形式,如果可将它简化成戴维南或诺顿等效电路连接到一个等效电感或电容两端,那就是一个一阶电路。(注:如果原电路有多个电感或电容,则它们必须互相连接,这样才可能由一个等效元件代替。)

在介绍了一阶电路固有响应和阶跃响应的分析方法之后,将讨论一些有意义的特殊情况。首先是按序转接,即在电路中,转接可以在两个或多个瞬间发生。接着是无限响应。最后分析一个称做积分放大器的电路。

7.1　RL 电路的固有响应

RL 电路的固有响应在图 7.3 所示电路中得到最好的描述。假设独立电流源产生的恒定电流是 I_s A,并且开关长时间在关的位置。将在这一节最后更精确地定义"长时间"一词。所有的电流和电压都已达到一恒定值。开关被打开之前,电路中有恒定(即直流)电流存在,因

此,电感在释放所存储的能量之前表现为短路($L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t=0$)。

由于电感表现为短路,电感支路的电压为零,在 R_0 或 R 中无电流。因此,电源电流 I_s 全部出现在电感支路。求解固有响应,需要在开关已经打开之后求解电阻端的电压和电流,即在电源已经被断开,且电感开始释放能量之后。如果让 $t=0$ 表示开关打开瞬间,问题就变为在 $t\geqslant 0$ 时,求 $v(t)$ 和 $i(t)$。对于 $t\geqslant 0$,如图 7.3 所示电路就简化成如图 7.4 所示电路。

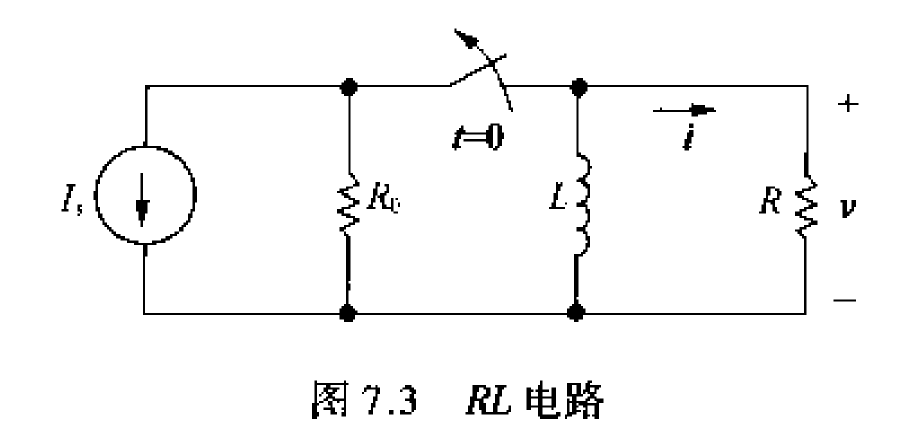


图 7.3 RL 电路

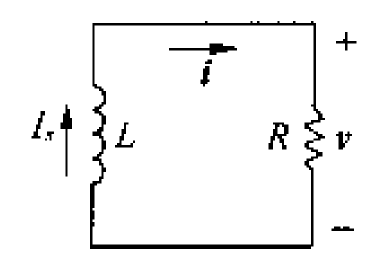


图 7.4 $t\geqslant 0$ 时的图 7.3 电路

7.1.1 推导电流表达式

为了求 $i(t)$,用基尔霍夫电压定律得到含有 i,R 和 L 的表达式。对闭合回路求电压之和,得到:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=0 \tag{7.1}$$

这里使用无源符号约定。因为式(7.1)含有未知常导数,即 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$,故称之为一阶常微分方程式。在方程中导数最高阶是 1,因此称之为一阶。

可以进一步描述这个方程式,方程式中系数 R 和 L 是常量,即:它们既不是非独立变量 i 的函数,也不是独立变量 t 的函数。因此,也可以用带有常量系数的常微分方程式描述这个方程式。

为求式(7.1)的解,除以 L,将含有 i 的项移到右边,然后两边乘以微分时间 $\mathrm{d}t$。其结果是:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=-\frac{R}{L}i\,\mathrm{d}t \tag{7.2}$$

接着,将式(7.2)左边作为电流 i 的微分变化,即 $\mathrm{d}i$。现在两边除以 i,得到:

$$\frac{\mathrm{d}i}{I}=-\frac{R}{L}\mathrm{d}t \tag{7.3}$$

通过对式(7.3)两边积分,得到作为 t 函数的 i 表达式。用 x 和 y 作为积分变量,得到:

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)}\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}y \tag{7.4}$$

式中 $i(t_0)$ 为对应于时间 t_0 的电流,$i(t)$ 为对应于时间 t 的电流,这里 $t_0=0$。计算该积分:

$$\ln\frac{i(t)}{i(0)}=-\frac{R}{L}t \tag{7.5}$$

根据自然对数的定义:

$$i(t)=i(0)\mathrm{e}^{-(R/L)t} \tag{7.6}$$

在开关打开后的第一瞬间,电感中的电流保持不变。如果用 0^- 表示开关转换前的瞬间,0^+ 为

开关转换后的瞬间，那么：

$$i(0^-)=i(0^+)=I_0$$

与图 7.1 所示相同，I_0 为电感中的初始电流。电感中的初始电流方向与 i 的参考方向一致。则式(7.6)变成：

$$i(t)=I_0e^{-(R/L)t},\quad t\geqslant 0 \tag{7.7}$$

上式表明电流从初始电流 I_0 开始，随着 t 的增加，电流按指数规律减少到趋于 0。图 7.5 表示了这个响应。

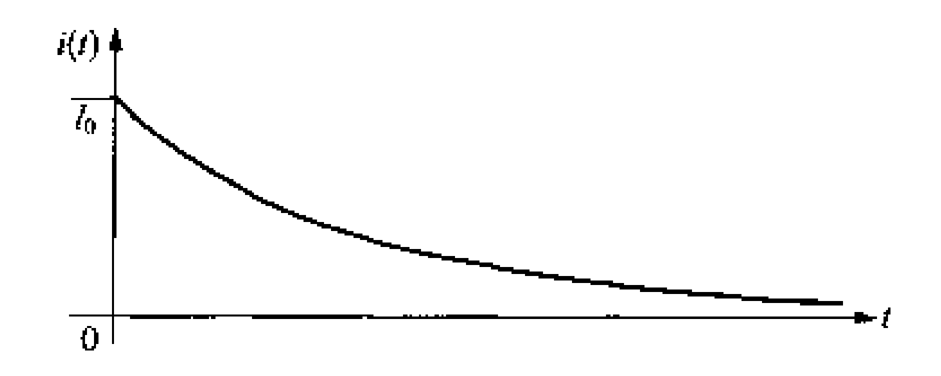


图 7.5　图 7.4 所示电路的电流响应

根据欧姆定律得出图 7.4 所示的电阻两端的电压：

$$v=iR=I_0Re^{-(R/L)t},\quad t\geqslant 0^+ \tag{7.8}$$

与式(7.7)中的电流相对照，电压仅仅定义在 $t>0$ 时，而不是在 $t=0$ 时。其原因是在零时刻，电压产生阶跃变化。对于 $t<0$，微分电流为 0，电压也为 0。(这个结果由 $v=L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t=0$ 得来。)因此有：

$$v(0^-)=0 \tag{7.9}$$

$$v(0^+)=I_0R \tag{7.10}$$

其中 $v(0^+)$①是从式(7.8)($t=0^+$)获得的。由于瞬间的阶跃变化，$t=0$ 时的电压值未知。为求出这些解，我们用 $t\geqslant 0^+$ 定义有效区域。

根据下面任意一个表达式，可以得出电阻中的功率损耗：

$$p=vi,\ p=i^2R\quad 或\quad p=\frac{v^2}{R} \tag{7.11}$$

无论用其中的哪一个，其结果表达式都可以简化为：

$$p=I_0^2Re^{-2(R/L)t},\quad t\geqslant 0^+ \tag{7.12}$$

开关打开后，任意期间内，释放到电阻的能量是：

$$\begin{aligned} w&=\int_0^t p\,\mathrm{d}x=\int_0^t I_0^2Re^{-2(R/L)x}\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{2(R/L)}I_0^2R(1-e^{-2(R/L)t}) \end{aligned}$$

① 含义 0^- 和 0^+ 的定义：$x(0^-)$表示 t 从左趋于 0 时变量 x 的极限值。$x(0^+)$表示 t 从右趋于 0 时变量 x 的极限值。

$$= \frac{1}{2}LI_0^2(1 - e^{-2(R/L)t}), \quad t \geqslant 0 \tag{7.13}$$

从式(7.13)可以看出,当 t 变成无穷大时,消耗在电阻中的能量逼近存储在电感中的初始能量。

7.1.2 时间常量的意义

$i(t)$(式(7.7))和 $v(t)$(式(7.8))的表达式含有 $e^{-(R/L)t}$ 项。t 的系数(即 R/L)决定了电流或电压趋于零的速率。这个速率的倒数是电路的时间常量,表示为:

$$\tau = 时间常量 = \frac{L}{R} \tag{7.14}$$

用时间常量这个概念,写出电流、电压、功率和能量的表达式:

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}, \quad t \geqslant 0 \tag{7.15}$$

$$v(t) = I_0 R e^{-t/\tau}, \quad t \geqslant 0^+ \tag{7.16}$$

$$p = I_0^2 R e^{-2t/\tau}, \quad t \geqslant 0^+ \tag{7.17}$$

$$w = \frac{1}{2}LI_0^2(1 - e^{-2t/\tau}), \quad t \geqslant 0 \tag{7.18}$$

时间常量对于一阶电路是一个重要的参数。在下面提到的几个特性中很有用。首先考虑用 τ 的整数倍表示换路后的时间很方便。在电感开始将所存储的能量释放到电阻后的一个时间常量,电流减到其初始值的 e^{-1}(大约 0.37)倍。

表 7.1 给出了 $e^{-t/\tau}$ 的值,其中 τ 的整数倍数为 1 到 10。当时间超过 5 个时间常量时,电流小于其初始值的 1%。因此有时说,在换路后经过 5 个时间常量后,电流和电压已经达到最终值。对于具有1%精确度的单一时间常量电路(一阶电路),长时间意味着经过 5 个或更多个时间常量。图 7.1(a)所示的 *RL* 电路中,存在的电流是一个瞬态事件,称之为电路的瞬态响应。换路发生后存在一个长时间的响应称之为稳态响应。长时间也意味着使电路达到稳态值的时间。

表 7.1 t 等于 τ 整数倍的 $e^{-t/\tau}$ 值

t	$e^{-t/\tau}$	t	$e^{-t/\tau}$
τ	3.6788×10^{-1}	6τ	2.4788×10^{-3}
2τ	1.3534×10^{-1}	7τ	9.1188×10^{-4}
3τ	4.9787×10^{-2}	8τ	3.3546×10^{-4}
4τ	1.8316×10^{-2}	9τ	1.2341×10^{-4}
5τ	6.7379×10^{-3}	10τ	4.5400×10^{-5}

任何一阶电路都具有时间常数特性。如果无法计算一个电路的时间常数(也许不知道元件的值),可以从电路的固有响应图来决定它的值。时间常数另一个重要特性是,如果电流连续以初始速率变化,时间常数则给出电流达到最终值所需的时间。为了说明这一点,求 0^+ 时

刻的 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$，并假设电流连续以以下的速率变化：

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{R}{L}I_0 = -\frac{I_0}{\tau} \tag{7.19}$$

如果 i 的初值为 I_0，以每秒 I_0/τ 安培的恒定速率减少，则 i 的表达式变成：

$$i = I_0 - \frac{I_0}{\tau}t \tag{7.20}$$

式(7.20)表明 i 将在 τ 秒达到为零的最终值。图 7.6 说明，根据固有响应图估算一个电路的时间常数是很有用的。固有响应图可以在测量输出电流的示波器上产生。画出固有响应图在 $t=0$ 处的切线，并读出与时间轴交叉处的值为 τ。

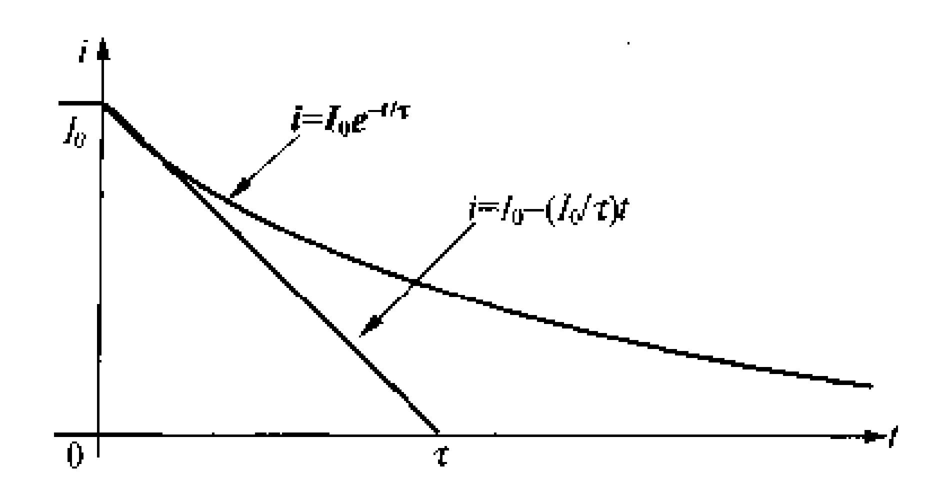


图 7.6　用图解释图 7.4 所示 RL 电路的时间常数

计算 RL 电路的固有响应可以归纳如下：

1. 求电感的初始电流 $i(0)$。
2. 求电路的时间常数。
3. 使用式(7.15)，根据 $i(0)$ 和 τ，求 $i(t)$。

所有其他重要的计算可以根据已知的 $i(t)$ 得到。例 7.1 和 7.2 说明了 RL 电路固有响应的数值计算。

例 7.1　图 7.7 所示电路中，开关在 $t=0$ 打开之前，已关闭了较长时间。求：

(a) $t\geq 0$ 时的 $i_L(t)$。

(b) $t\geq 0^+$ 时的 $i_0(t)$。

(c) $t\geq 0^+$ 时的 $v_0(t)$。

(d) 消耗在 10 Ω 电阻中的能量占存储在 2 H 电感中总能量的百分比。

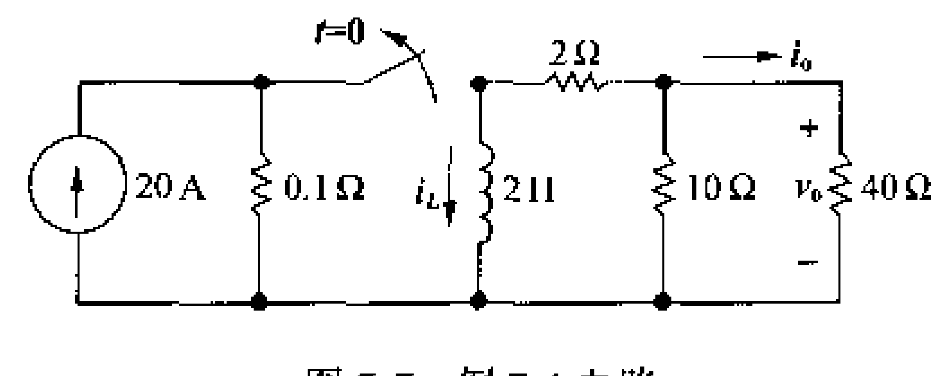


图 7.7　例 7.1 电路

解：

(a) 开关在 $t=0$ 时打开，打开之前已关闭较长时间，已知电感的电压在 $t=0^-$ 时一定是零，因此电感中的初始电流在 $t=0^-$ 时为 20 A。由于电感中的电流不能跃变，$i_L(0^+)$ 也是 20 A。用一个 10 Ω 电阻代替电阻电路连到电感两端：

$$R_{eq} = 2 + (40 \parallel 10) = 10\ \Omega$$

电路的时间常数是 L/R_{eq},即 0.2 s,电感电流表达式为:

$$i_L(t) = 20e^{-5t}\ \text{A}, \quad t \geq 0$$

(b) 用分流公式很容易求出 40 Ω 电阻中的电流:

$$i_0 = -i_L \frac{10}{10+40}$$

由于在 $t=0^-$ 时,$i_0 = 0$,这个表达式在 $t \geq 0^+$ 时有效。在开关打开前电感表现为短路,电流 i_0 产生一个跃变。因此:

$$i_0(t) = -4e^{-5t}\ \text{A}, \quad t \geq 0^+$$

(c) 直接应用欧姆定律,求电压 v_0:

$$v_0(t) = 40 i_0 = -160e^{-5t}\ \text{A}, \quad t \geq 0^+$$

(d) 消耗在 10 Ω 电阻上的功率是:

$$p_{10\Omega}(t) = \frac{v_0^2}{10} = 2560e^{-10t}\ \text{W}, \quad t \geq 0^+$$

消耗在 10 Ω 电阻的总能量是:

$$w_{10\Omega}(t) = \int_0^{\infty} 2560e^{-10t} dt = 256\ \text{J}$$

存储在 2 H 电感中的初始能量是:

$$w(0) = \frac{1}{2} Li^2(0) = \frac{1}{2}(2)(400) = 400\ \text{J}$$

所以消耗在 10 Ω 电阻中的能量百分比是:

$$\frac{256}{400}(100) = 64\%$$

例 7.2 在图 7.8 所示电路中,电感 L_1 和 L_2 的初始电流由未显示的电源建立。在 $t=0$ 时开关打开。

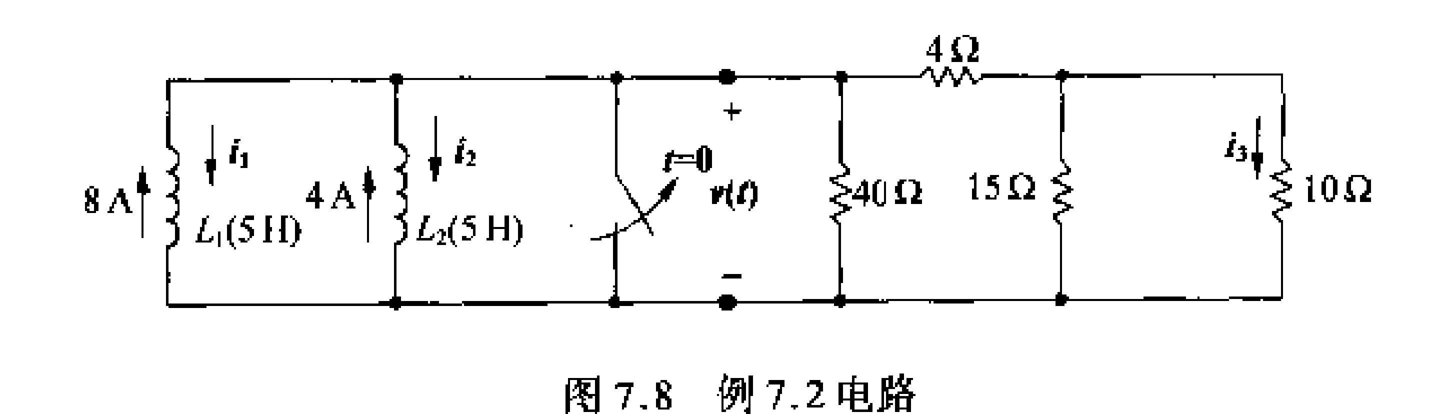


图 7.8 例 7.2 电路

(a) 求 $t \geq 0$ 时的 i_1, i_2, i_3。

(b) 计算存储在并联电感中的初始能量。

(c) 在 $t \to \infty$ 时,存储在电感中的能量是多少?

(d) 证明释放到电阻网络的总能量等于(b) 和(c) 所得结果之差。

解：

(a) 求电流 i_1, i_2, i_3 的关键是知道电压 $v(t)$。如果将图 7.8 所示电路简化成图 7.9 所示的等效形式，很容易求 $v(t)$。并联电感简化成 4 H 等效电感，携带 12 A 的初始电流。电阻网络简化成一个 8 Ω 电阻。$i(t)$的初始值是 12 A，时间常数是 4/8，即 0.5 s。则：

$$i(t) = 12e^{-2t}\ \text{A}, \quad t \geqslant 0$$

$v(t)$为 $8i$，因此：

$$v(t) = 96e^{-2t}\ \text{V}, \quad t \geqslant 0^+$$

电路表明在 $t = 0^-$ 时，$v(t) = 0$，则 $t \geqslant 0^+$ 时，$v(t)$表达式有效。获得 $v(t)$后，就可以计算 i_1, i_2, i_3：

$$i_1 = \frac{1}{5}\int_0^t 96e^{-2x}\,dx - 8$$

$$= 1.6 - 9.6e^{-2t}\ \text{A}, \quad t \geqslant 0$$

$$i_2 = \frac{1}{20}\int_0^t 96e^{-2x}\,dx - 4$$

$$= -1.6 - 2.4e^{-2t}\ \text{A}, \quad t \geqslant 0$$

$$i_3 = \frac{v(t)}{10}\frac{15}{25} = 5.76e^{-2t}\ \text{A}, \quad t \geqslant 0^+$$

注意电感电流 i_1 和 i_2 表达式在 $t \geqslant 0$ 时有效，而电阻电流 i_3 表达式在 $t \geqslant 0^+$ 时有效。

(b) 存储在电感中的初始能量是：

$$w = \frac{1}{2}(5)(64) + \frac{1}{2}(20)(16) = 320\ \text{J}$$

(c) 当 $t \to \infty$ 时，$i_1 \to 1.6$ A，$i_2 \to -1.6$ A。开关打开后已有很长时间，存储在两个电感中的能量是：

$$w = \frac{1}{2}(5)(1.6)^2 + \frac{1}{2}(20)(1.6)^2 = 32\ \text{J}$$

(d) 由积分表达式获得释放到电阻网络的总能量，瞬间功率从 $0 \to \infty$：

$$w = \int_0^\infty p\,dt = \int_0^\infty 1152e^{-4t}\,dt$$

$$= 1152\frac{e^{-4t}}{-4}\Bigg|_0^\infty = 288\ \text{J}$$

这个结果是初始存储的能量(320 J)与并联电感吸收的能量(32 J)之差。并联电感的等效电感有 288 J 的初始能量，即等效电感中存储的能量为将要释放到电阻网络的能量。

练习题

7.1 如图所示电路中的开关已关闭长时间，并在 $t = 0$ 时打开。

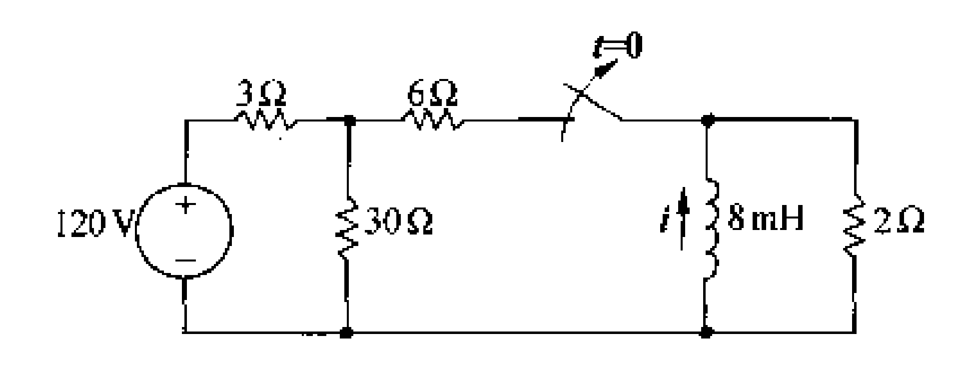
(a) 计算 i 的初值。

(b) 计算存储在电感中的初始能量。

(c) $t > 0$ 时，电路的时间常数是多少？

(d) $t \geqslant 0$ 时 $i(t)$的表达式是什么？

(e) 开关打开后 5 毫秒时，所存储的初始能量已释放到 2 Ω 电阻中的百分比是多少？

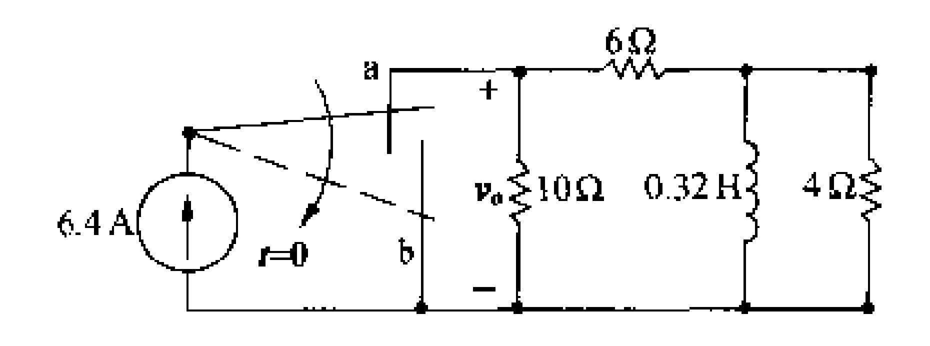


答:(a) −12.5 A ,(b) 625 mJ,(c) $t=4$ ms,(d) $-12.5e^{-250t}$ A,(e) 91.8%。

7.2 在 $t=0$ 时所示电路中的开关瞬间地从位置 a 移到位置 b。

(a) 计算 $t\geqslant0^+$ 时 v_0。

(b) 存储在电感中的初始能量最后释放到 4 Ω 电阻中的百分比是多少?



答:(a) $-8e^{-10t}$ V ,(b) 80%。

7.2 *RC* 电路的固有响应

正如 7.1 节所提到的,*RC* 电路的固有响应类似于 *RL* 电路的响应。因此,不再像在 *RL* 电路那样详细介绍 *RC* 电路。

RC 电路的固有响应是从图 7.10 所示电路发展而来。先假设开关已在 a 的位置放置了长时间,由直流电压源 V_g、电阻 R_1 和电容 C 构成的回路达到稳态。如第 6 章所述,电容相对于恒定电压表现为开路。因而电压源不能维持一个电流,电容两端呈现电源电压。在 7.3 节,将讨论电容电压是如何建立的,如何达到直流电压源稳态值。而本节的重点是,当开关在 $t=0$ 时,从位置 a 移到位置 b,电容上的电压是 V_g。由于电容两端的电压无跃变,因此,问题简化成求解图 7.11 所示电路。

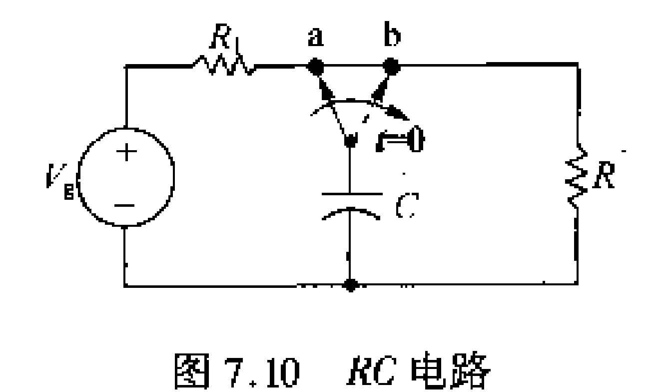


图 7.10 *RC* 电路

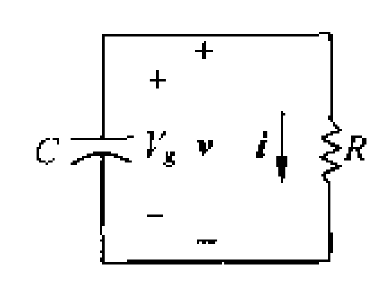


图 7.11 换路后的图 7.10 电路

7.2.1 推导电压表达式

很容易通过节点电压求电压 $v(t)$。用 R 和 C 间下面的连接点作为参考节点,并对离开 R 和 C 间上面连接点的电流求和:

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=0 \tag{7.21}$$

比较式(7.21)和式(7.1),表明同样的数学方法可以用来得到 $v(t)$的解。把这个留给读者来证明:

$$v(t)=v(0)e^{-t/RC},\quad t\geqslant 0 \tag{7.22}$$

正如已经提到的那样,电容上的初始电压等于电源电压 V_g,即:

$$\begin{aligned}v(0^-)&=v(0)=v(0^+)\\&=V_g=V_0\end{aligned} \tag{7.23}$$

其中 V_0 表示电容上的初始电压。RC 电路的时间常数等于电阻和电容的乘积,即:

$$\tau=RC \tag{7.24}$$

将式(7.23)和(7.24)代入式(7.22),得到:

$$v(t)=V_0e^{-t/\tau},\quad t\geqslant 0 \tag{7.25}$$

此式表明 RC 电路的固有响应是初始电压按指数规律衰减。时间常数 RC 为衰减率。图 7.12 给出式(7.25)的图形和时间常数的图形解释。

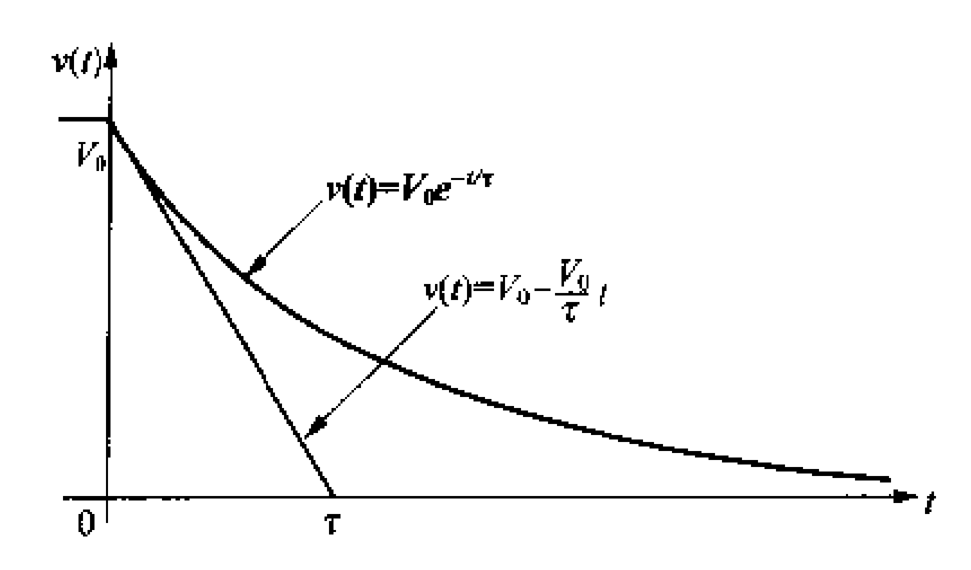


图 7.12　RC 电路的固有响应

确定 $v(t)$后,可以很容易地推导 i,p 和 w 的表达式:

$$i(t)=\frac{v(t)}{R}=\frac{V_0}{R}e^{-t/\tau},\quad t\geqslant 0^+ \tag{7.26}$$

$$p=vi=\frac{V_0^2}{R}e^{-2t/\tau},\quad t\geqslant 0^+ \tag{7.27}$$

$$\begin{aligned}w&=\int_0^T p\,dx=\int_0^t\frac{V_0^2}{R}e^{-2x/\tau}dx\\&=\frac{1}{2}CV_0^2(1-e^{-2t/\tau}),\quad t\geqslant 0\end{aligned} \tag{7.28}$$

计算 RC 电路的固有响应,可以归纳如下:

1. 求电容的初始电压 $v(0)$。
2. 求电路的时间常数。
3. 使用式(7.25),根据 $v(0)$和 τ 产生 $v(t)$。

例 7.3　图 7.13 所示电路开关已处在 x 位置长时间。在 $t=0$ 时,开关瞬间移到 y 位置。求:

(a) $t\geqslant 0$ 时的 $v_c(t)$。

(b) $t\geqslant 0^+$ 时的 $v_o(t)$。

(c) $t\geqslant 0^+$ 时的 $i_o(t)$。

(d) 消耗在 60 kΩ 电阻中的总能量。

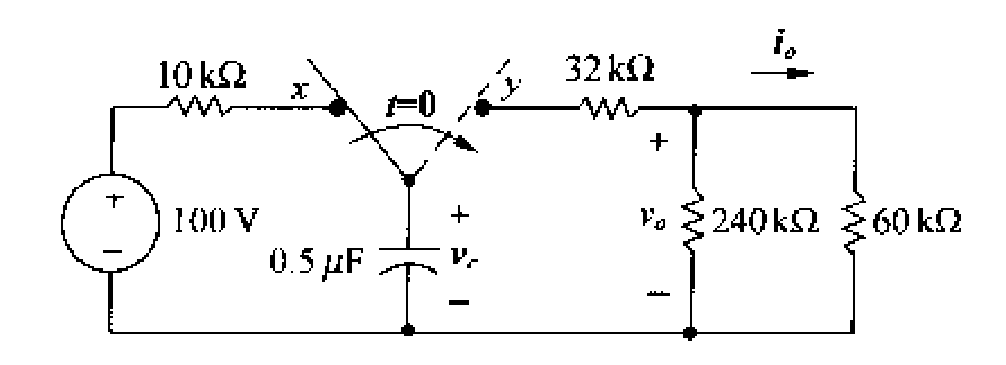


图 7.13 例 7.3 的电路

解:

(a) 由于开关已在 x 位置很长时间,0.5 μF 的电容将充电到 100 V,且上端为正。可以在 $t=0^+$用一个 80 kΩ 等效电阻代替电阻网络连到电容。电路的时间常数是 $(0.5\times10^{-6})(80\times10)$或 40 ms。

$$v_c(t)=100e^{-25t}\ \text{V},\quad t\geqslant0$$

(b) 注意到电容两端的电阻电路形成一个分压电路,求 $v_o(t)$的方法如下:

$$v_0(t)=\frac{48}{80}v_c(t)=60e^{-25t}\ \text{V}\ ,\quad t\geqslant0^+$$

由于 $v_o(0^-)$为 0,则 $v_o(t)$的表达式在 $t\geqslant0^+$ 时有效。在 240 kΩ 电阻两端的电压有一个跃变。

(c) 根据欧姆定律求电流 $i_o(t)$:

$$i_o(t)=\frac{v_o(t)}{60\times10^3}=e^{-25t}\ \text{mA},\quad t\geqslant0^+$$

(d) 消耗在 60 kΩ 电阻中的功率是:

$$p_{60\,\text{k}\Omega}(t)=i_0^2(t)(60\times10^3)=60e^{-50t}\ \text{mW},\quad t\geqslant0^+$$

消耗的总能量是:

$$w_{60\,\text{k}\Omega}=\int_0^\infty i_0^2(t)(60\times10^3)\text{d}t=1.2\ \text{mJ}$$

例 7.4 图 7.14 所示电路中,电容 C_1 和 C_2 的初始电压已由未显示的电源建立。开关在 $t=0$ 时关闭。

(a) 求 $t\geqslant0$ 时的 $v_1(t)$,$v_2(t)$和 $v(t)$,以及 $t\geqslant0^+$ 时的 $i(t)$。

(b) 计算存储在电容 C_1 和 C_2 中的初始能量。

(c) 当 $t\to\infty$ 时,存储在电容中的能量有多少?

(d) 证明释放到250 kΩ电阻的总能量等于(b) 和(c) 所得结果之差。

解:

(a) 一旦知道 $v(t)$,根据欧姆定律即可得到电流 $i(t)$。在求得 $i(t)$之后,由于电容的电压是电容电流的函数,故可计算出 $v_1(t)$,$v_2(t)$。为了求 $v(t)$,用一个等效电容代替串联连接的电容。该电容为 4 μF,且已充电到 20 V 电压。因此,图 7.14 所示电路简化成图 7.15 所示电路。$v(t)$的初始电压是 20 V,电路的时间常数是$(4)(250)\times10^{-3}$等于 1 s。$v(t)$表达式为:

$$v(t)=20e^{-t}\ \text{V},\quad t\geqslant0$$

电流 $i(t)$是：

$$i(t)=\frac{v(t)}{250000}=80e^{-t}\ \mu A,\quad t\geqslant 0^{+}$$

知道 $i(t)$，计算 $v_1(t)$和 $v_2(t)$表达式：

$$v_1(t)=-\frac{10^6}{5}\int_0^t 80\times10^{-6}e^{-x}dx-4$$

$$=(16e^{-t}-20)\ V,\quad t\geqslant 0$$

$$v_2(t)=-\frac{10^6}{20}\int_0^t 80\times10^{-6}e^{-x}dx+24$$

$$=(4e^{-t}+20)\ V,\quad t\geqslant 0$$

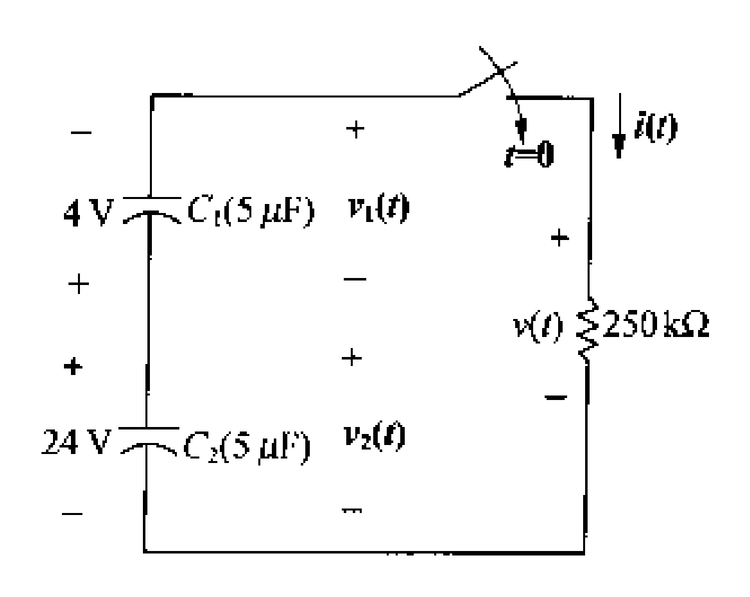


图 7.14　例 7.4 电路

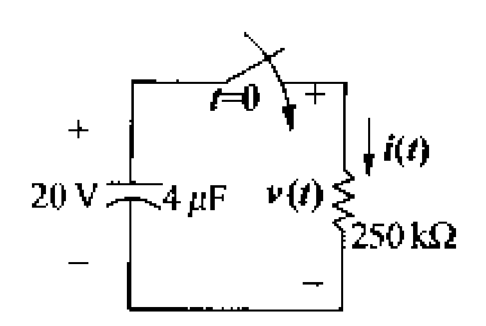


图 7.15　图 7.14 所示电路的简化形式

(b) 存储在 C_1 中的初始能量是：

$$w_1=\frac{1}{2}(20\times10^{-6})(16)=40\ \mu J$$

存储在 C_2 中的初始能量是：

$$w_2=\frac{1}{2}(5\times10^{-6})(576)=5760\ \mu J$$

存储在两个电容中的总能量是：

$$w_0=40+5760=5800\ \mu J$$

(c) 当 $t\to\infty$ 时：

$$v_1\to -20\ V,\ v_2\to +20\ V$$

存储在两个电容中的能量是：

$$w_\infty=\frac{1}{2}(5+20)\times10^{-6}(400)=5000\ \mu J$$

(d) 释放到 250 kΩ 电阻上的总能量是：

$$w=\int_0^\infty p\,dt=\int_0^\infty \frac{400e^{-2t}}{250000}dt=800\ \mu J$$

比较(b) 和(c) 的结果表明：

$$800\ \mu J=(5800-5000)\ \mu J$$

图 7.15 中存储在等效电容中的能量是$\frac{1}{2}(4\times10^{-6})(400)$,等于 800 μJ。由于这个电容可以预测最初串联连接的电容端子的行为,因此,存储在等效电容中的能量就是释放到 250 kΩ电阻的能量。

练习题

7.3 图示电路的开关已经关闭长时间,并在 $t=0$ 时打开。求:

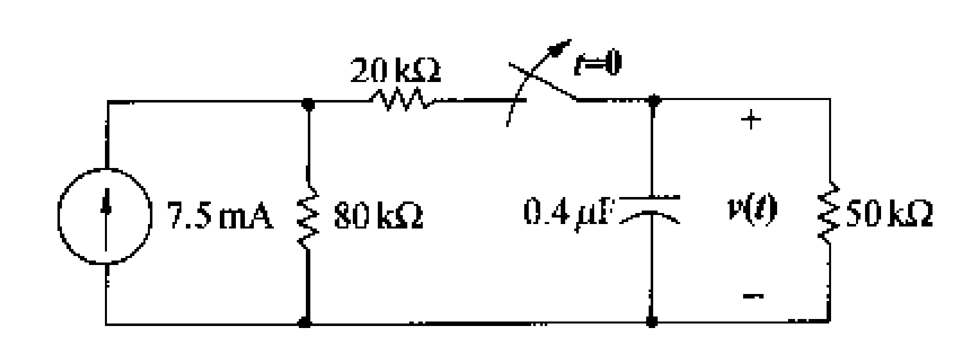
(a) $v(t)$的初始电压。

(b) $t>0$ 时的时间常数。

(c) 开关打开后 $v(t)$的表达式。

(d) 存储在电容中的初始能量。

(e) 消耗初始能量的 75%所需的时间。

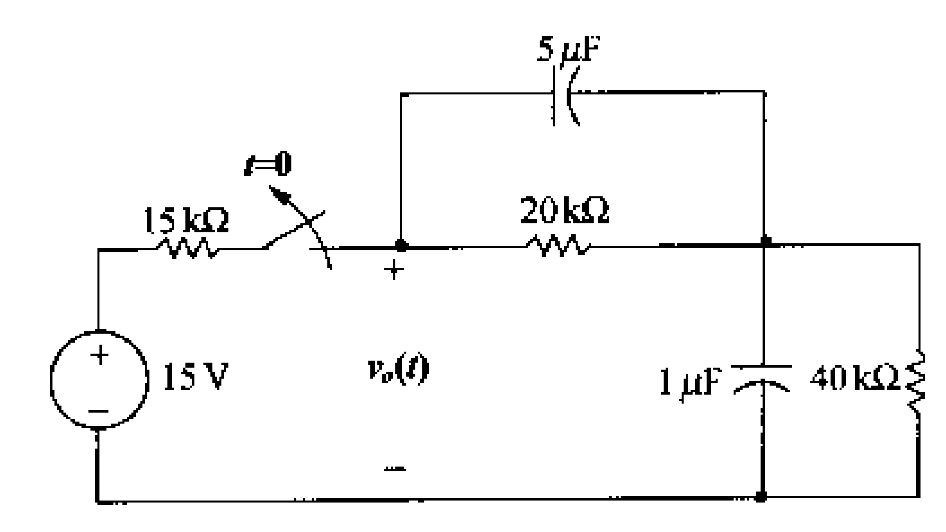


答:(a) 20 V,(b) 200 ms,(c) $200e^{-50t}$ V,(d) 8 mJ,(e) 13.86 ms。

7.4 如图示电路中的开关,在 $t=0$ 打开前已经关闭很长时间。

(a) 求 $t\geq0$ 时的 $v_0(t)$。

(b) 开关打开后 60 毫秒,电路消耗的能量占电路存储的初始能量的百分比是多少?



答:(a) $8e^{-25t}+4e^{-10t}$ V,(b) 81.05%。

7.3 *RL* 和 *RC* 电路的阶跃响应

本节将讨论当直流电压源或直流电流源突然作用时,在一阶 *RL* 或 *RC* 电路上所产生的电流和电压问题。一个恒定电压源或电流源突然作用于一个电路,其响应为电路的阶跃响应。当介绍阶跃响应时,将说明当能量存储在电感或电容时,电路是如何响应的。从一个 *RL* 电路的阶跃响应开始。

7.3.1 *RL* 电路的阶跃响应

将图 7.2(a)所示的一阶电路上增加一个开关,如图 7.16 所示,用它来说明 *RL* 电路的阶跃

响应。在开关关闭时,存储在电感中的能量用非零初始电流 $i(0)$给出。求在开关关闭之后,电路中电流表达式和电感端的电压表达式。其过程与在 7.1 节一样。用电路分析来推导描述电路的微分方程式,然后用基本微积分来解方程。

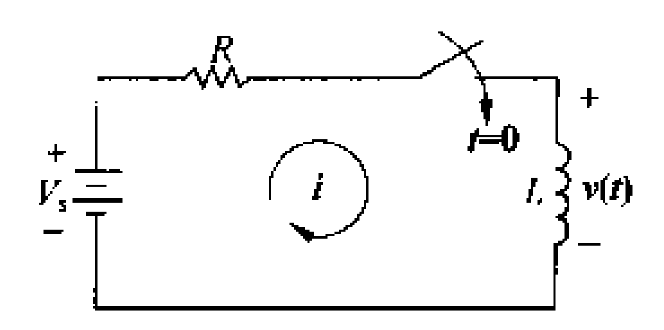


图 7.16 用来说明一阶 *RL* 电路阶跃响应的电路

当图 7.16 中的开关关闭后,根据基尔霍夫电压定律得到:

$$V_s = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{7.29}$$

将变量 i 和 t 分离然后积分,即可求得电流的解。解式(7.29)的第一步是得出 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{-Ri + V_s}{L} = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right) \tag{7.30}$$

下一步是在方程式两边乘以微分时间 $\mathrm{d}t$,将方程式左边简化成一个电流的微分变化:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right)\mathrm{d}t$$

或:

$$\mathrm{d}i = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right)\mathrm{d}t \tag{7.31}$$

将式(7.31)中的变量分离得到:

$$\frac{\mathrm{d}i}{i - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}\mathrm{d}t \tag{7.32}$$

将式(7.32)两边积分,用 x 和 y 作为积分变量,得到:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}\int_0^t \mathrm{d}y \tag{7.33}$$

这里 I_0 为 $t=0$ 时的电流,$i(t)$为在 $t>0$ 时的电流。完成积分,产生如下表达式:

$$\ln\frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}t \tag{7.34}$$

整理得到:

$$\frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = \mathrm{e}^{-(R/L)t}$$

或:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)\mathrm{e}^{-(R/L)t} \tag{7.35}$$

当电感中的初始能量为零,则 $I_0 = 0$。式(7.35)简化为:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}\mathrm{e}^{-(R/L)t} \tag{7.36}$$

式(7.36)表明在开关关闭以后,电流从零按指数规律增加到一个最终值 V_s/R。电路的时

间常数 L/R 取决于增加的速率。开关关闭后的一个时间常数时间,电流将大约达到它最终值的 63%,即:

$$i(\tau)=\frac{V_s}{R}-\frac{V_s}{R}e^{-1}\approx 0.6321\frac{V_s}{R} \tag{7.37}$$

如果电流以初始速率持续增加,则在 $t=\tau$ 时达到最终值。这是由于:

$$\frac{di}{dt}=\frac{-V_s}{R}\left(\frac{-1}{\tau}\right)e^{-t/\tau}=\frac{V_s}{L}e^{-t/\tau} \tag{7.38}$$

$i(t)$增加的初始速率是:

$$\frac{di}{dt}(0)=\frac{V_s}{L} \tag{7.39}$$

如果电流持续以这个速率增加,i 的表达式将为:

$$i=\frac{V_s}{L}t \tag{7.40}$$

根据上式,在 $t=\tau$ 时:

$$i=\frac{V_s}{L}\frac{L}{R}=\frac{V_s}{R} \tag{7.41}$$

图 7.17 画出式(7.36)和(7.40)的曲线。由式(7.37)和(7.41)给出的值也显示在该曲线中。

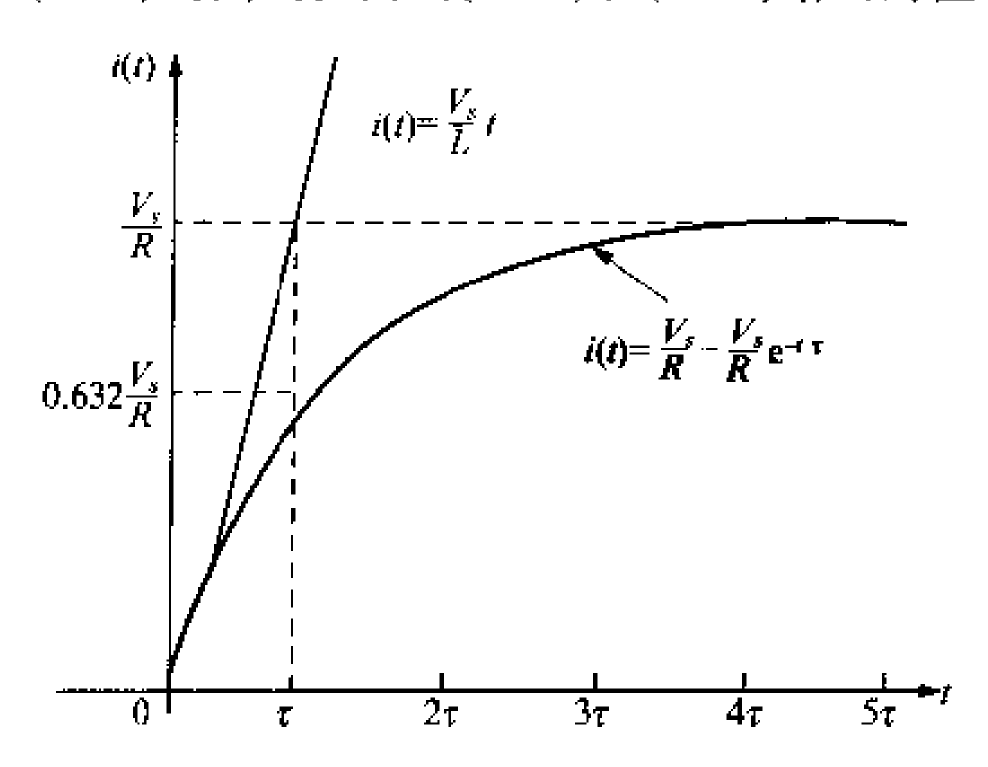


图 7.17 当 $I_0=0$ 时,图 7.16 所示的 RL 电路的阶跃响应

电感上的电压是 Ldi/dt。对于 $t\geqslant 0^+$,根据式(7.35)得到:

$$v=L\left(\frac{-R}{L}\right)\left(I_0-\frac{V_s}{R}\right)e^{-(R/L)t}=(V_s-I_0R)e^{-(R/L)t} \tag{7.42}$$

开关关闭之前,电感上的电压是零。式(7.42)表示电感上的电压在开关关闭瞬间,跳至 V_s-I_0R,然后按指数规律衰减到零。

在 $t=0^+$ 时,v 的值有意义吗?由于初始电流是 I_0,电感阻止电流跃变,因此在开关关闭后瞬间,电流为 I_0。电阻两端的电压降是 I_0R,电感上的电压等于电源电压减去电压降,即 V_s-I_0R。

当电感初始电流为零时,式(7.42)简化成:

$$v=V_se^{-(R/L)t} \tag{7.43}$$

如果初始电流为零,电感上的电压跳至 V_s。因为电路中的电流趋于恒定值 V_s/R,所以随着 t

的增加，电感上的电压也趋于零。图(7.18)显示了式(7.43)的图形，以及时间常数与电感电压下降的初始速率之间的关系。

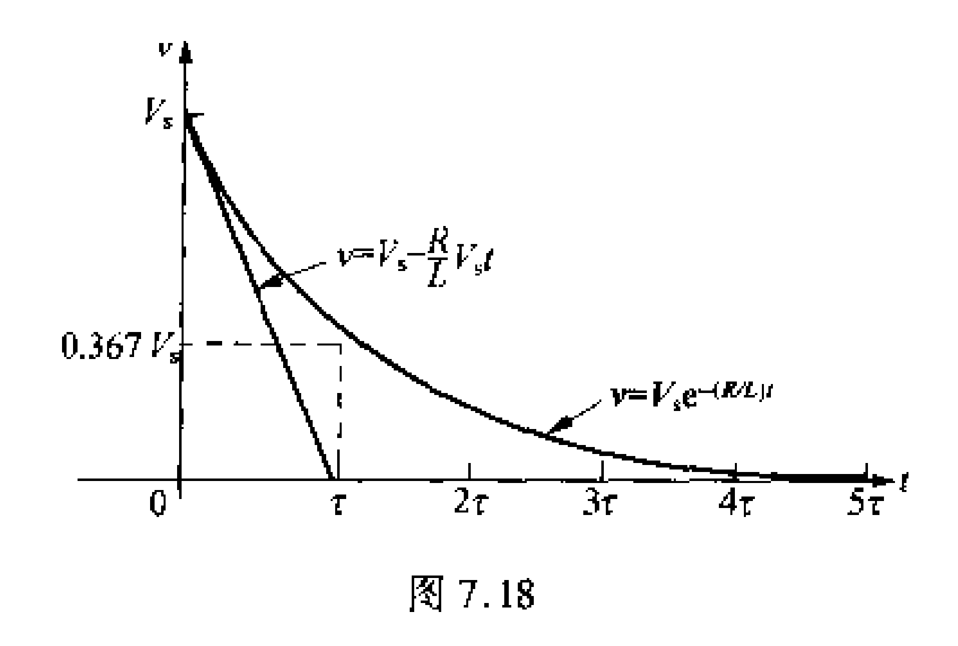


图 7.18

如果电感中有初始电流，则式(7.35)给出了它的解。如果初始电流与 i 的方向相同，I_0 的代数符号为正；否则 I_0 符号为负。例 7.5 给出了式(7.35)在指定电路中的应用。

例 7.5　图 7.19 所示电路中的开关已在 a 的位置长时间。在 $t=0$ 时，开关从位置 a 移到位置 b。开关是一个断前接通型，即位置 a 在断开连接之前，位置 b 已连接上。因此通过电感的电流没有中断。

(a) 求 $t\geqslant 0$ 时 $i(t)$ 的表达式。

(b) 正当开关移到位置 b 时，电感的初始电流是多少？

(c) 这个初始电压对电路的行为有意义吗？

(d) 开关移动之后多少毫秒，使得电感电压等于 24 V？

(e) 画出 $i(t)$ 和 $v(t)$ 波形图。

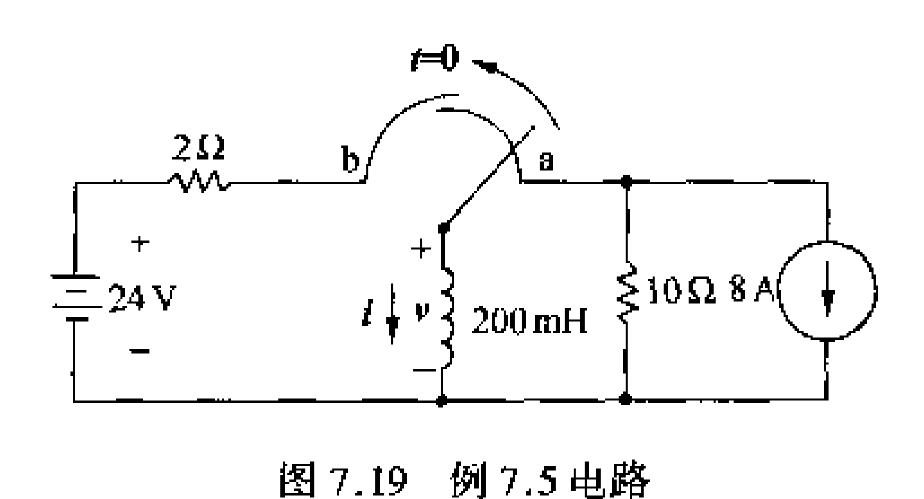


图 7.19　例 7.5 电路

解：

(a) 由于开关已在 a 的位置长时间，因此 200 mH 电感相当于对 8 A 的电流源短路。因此，电感携带 8 A 的初始电流。这个电流与 i 的参考方向相反，则 I_0 是 −8 A。当开关在位置 b 时，i 的最终值是 24/2 等于 12 A。电路的时间常数是 200/2 为 100 ms。将这些值代入式(7.35)：

$$\begin{aligned} i &= 12+(-8-12)e^{-t/0.1} \\ &= 12-20e^{-10t}\,\text{A}, \quad t\geqslant 0 \end{aligned}$$

(b) 电感上的电压是：

$$v = L\frac{di}{dt} = 0.2(20e^{-10t}) = 40e^{-10t}\ \text{V}, \quad t\geqslant 0^+$$

电感的初始电压是:

$$v(0^+) = 40\ \text{V}$$

(c) 有意义。开关移到位置 b 后瞬间,电感维持逆时针 8 A 电流重新形成闭合路径。这个电流在 2 Ω 电阻产生 16 V 压降。这个电压降加上电源的压降,产生电感端 40 V 的压降。

(d) 通过解下述表达式,求电感电压等于 24 V 时的时间:

$$24 = 40e^{-10t}$$

解出 t:

$$t = \frac{1}{10}\ln\frac{40}{24} = 51.08\times10^{-3} = 51.05\ \text{ms}$$

(e) 图 7.20 显示了 $i(t)$和 $v(t)$波形图。电流等于零的时刻与电感电压等于 24 V 电源电压的时刻相等,与基尔霍夫电压定律所预测的相同。

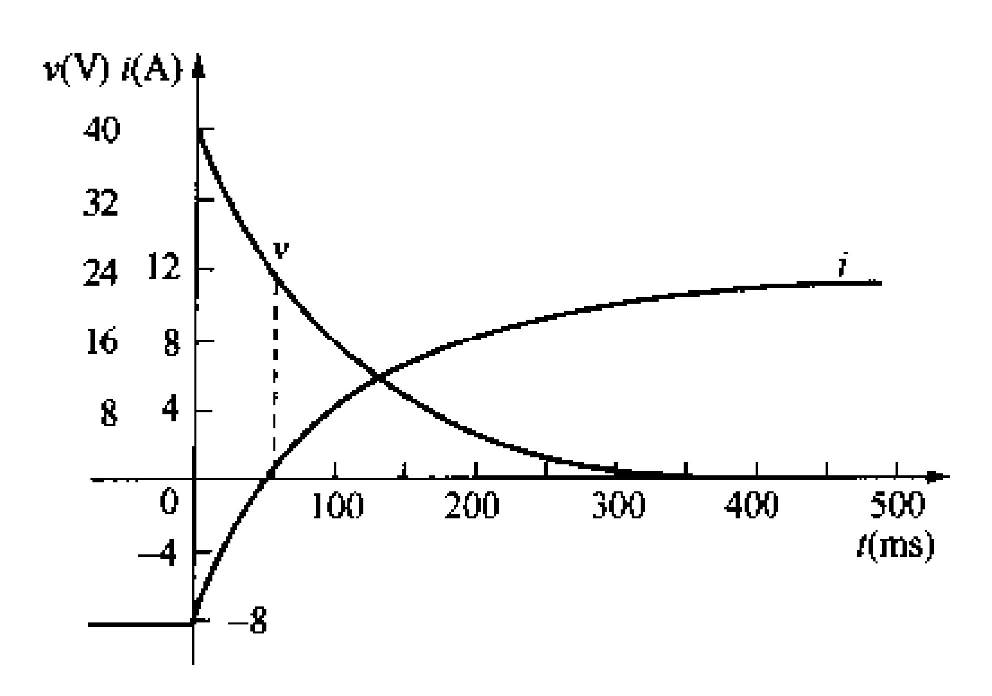


图 7.20 例 7.5 的电流和电压波形

练习题

7.5 假设图 7.19 所示电路中的开关已在位置 b 长时间,在 $t = 0$ 时移到位置 a。求:(a)$i(0^+)$,(b) $v(0^+)$,(c)τ, $t>0$,(d) $i(t)$, $t\geqslant0$,(e)$v(t)$, $t\geqslant0^+$。

答:(a) 12 A,(b) −200 V,(c) 20 ms,(d) $-8+20e^{-50t}$ A, $t\geqslant0$,(e) $-200\ e^{-50t}$ V, $t\geqslant0^+$。

也可以直接描述图 7.16 中的电感电压,而不根据电路中的电流描述。首先注意到电阻上的电压是电源电压与电感电压之差。写为:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{v(t)}{R} \tag{7.44}$$

其中 V_s 是个常量。两边对时间微分得到:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{dv}{dt} \tag{7.45}$$

然后,在式(7.45)两边乘以电感 L,在左边得到电感电压表达式:

$$v = -\frac{L}{R}\frac{dv}{dt} \tag{7.46}$$

将式(7.46)变成标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}v=0 \tag{7.47}$$

要检验一下(在练习 7.46 中):式(7.47)的解与式(7.42)的解是相同的。

当推导电感电流的微分方程式时,得到了式(7.29)。重新列写式(7.29)为:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=\frac{V_s}{L} \tag{7.48}$$

观察式(7.47)和(7.48),它们有相同的形式,均为变量的导数与常量乘以变量之积的和等于一个常量值。在式(7.47)中,右边的常量值等于零。因此,这个方程式与 7.1 节中的固有响应方程式是相同的形式。在式(7.47)和(7.48)中,乘以独立变量的那个常量是时间常数的倒数,即 $R/L=1/\tau$。在 RC 电路的阶跃响应推导中,遇到类似的情况。在 7.4 节中,将用这些观察去完善求解 RL 和 RC 电路的固有响应和阶跃响应的一般方法。

练习题

7.6 (a) 推导式(7.47)。先将图 7.16 的戴维南等效电路转换成诺顿等效电路,然后对离开上面节点的电流求和,用电感电压 v 作为变量。

(b) 用变量分离方法求式(7.47)的解。检验解是否与式(7.42)给出的解一致。

答:(a) 推导,(b) 检验。

7.3.2 RC 电路的阶跃响应

可以通过分析图 7.21 所示电路,求一阶电路的阶跃响应。为计算方便,选择网络的诺顿等效电路连到等效电容。对图 7.21 中离开顶上节点的电流求和,建立微分方程。

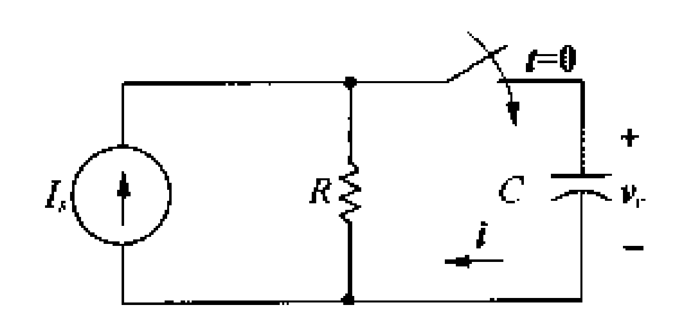


图 7.21 用来说明一阶 RC 电路阶跃响应的电路

得到:

$$C\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}+\frac{v_c}{R}=I_s \tag{7.49}$$

式(7.49)两边除以 C 得到:

$$\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}+\frac{v_c}{R}=\frac{I_s}{C} \tag{7.50}$$

比较式(7.50)和(7.48)表明:v_c 解的形式与电感电路中的电流解的形式相同,也就是与式(7.35)形式相同。因此,简单地代入适当的变量和系数,就可以直接写出 v_c 的解。转换时需要用 I_s 代替 V_s,C 代替 L,$1/R$ 代替 R,V_0 代替 I_0,得到:

$$v_c=I_sR+(V_0-I_sR)\mathrm{e}^{-t/RC},\quad t\geqslant 0 \tag{7.51}$$

对电容中的电流进行类似的推导,建立微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}i=0 \tag{7.52}$$

式(7.52)与式(7.47)的形式相同,因此与解式(7.50)类似,用相同的转换获得 i 的解:

$$i=\left(I_s-\frac{V_0}{R}\right)e^{-t/RC},\quad t\geqslant 0^+ \tag{7.53}$$

其中 V_0 是电容电压 v_c 的初始值。

用数学类推法来解电感电路的阶跃响应,获得式(7.51)和(7.53)。根据已知电路特性来判断 R_c 电路的这些解是否有意义。根据式(7.51)所示,电容的初始电压是 V_0,电容最终电压是 I_sR,电路的时间常数是 RC,v_c 的解在 $t\geqslant 0$ 时有效。这些与恒定电流源驱动时电阻和电容并联的特性一致。

式(7.53)预测电容中的电流在 $t=0^+$ 时是 I_s-V_0/R。由于电容电压不能跃变,这个预测有意义,因而电阻中的初始电流是 V_0/R。电容支路电流产生跃变,从 $t=0^-$ 时的零到 $t=0^+$ 时的 I_s-V_0/R。电容电流在 $t=\infty$ 时为零。注意:最终值是 $v=I_sR$。

例 7.6 将说明如何用式(7.51)和(7.53)求一阶 RC 电路的阶跃响应。

例 7.6 图 7.22 所示电路中的开关已在位置 1 长时间。在 $t=0$ 时,开关移到位置 2。求:

(a) $t\geqslant 0$ 时的 $v_0(t)$。

(b) $t\geqslant 0^+$ 时的 $i_0(t)$。

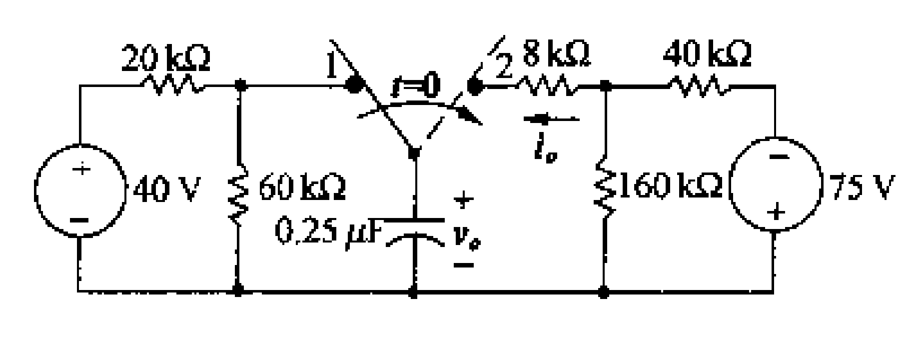


图 7.22 例 7.6 电路

解:

(a) 开关已在位置 1 长时间,因此,v_o 的初始值是 40(60/80),为 30 V。利用式(7.51)和(7.53),求 $t\geqslant 0$ 时电容两端的诺顿等效电路。为此,首先计算开路电压,开路电压是 −75 V 电源在 40 kΩ 和 160 kΩ 电阻上的分压:

$$V_{0c}=\frac{160\times10^3}{(40+160)\times10^3}(-75)=-60\text{ V}$$

下一步,计算戴维南电阻。从电容右侧看过去,将 −75 V 电源短接,电阻的串联和并联结果是:

$$R_{Th}=8000+40000\parallel160000=40\text{ k}\Omega$$

诺顿电流源的值是开路电压与戴维南电阻的比,即 $-60/(40\times10^3)=-1.5$ mA。结果诺顿等效电路如图 7.23 所示,$I_sR=-60$ V 且 $RC=10$ ms。由于 $v_o(0)=30$ V,则 v_o 的解为:

$$\begin{aligned}v_o&=-60+[30-(-60)]e^{-100t}\\&=-60+90e^{-100t}\text{ V},\quad t\geqslant 0\end{aligned}$$

(b) $I_s=-1.5$ mA,$v_o/R=(30/40)\times10^{-3}=0.75$ mA,直接从式(7.53)写出 i_o 的解:

$$i_o=-2.25e^{-100t}\text{ mA},\quad t\geqslant 0^+$$

检验 v_o 和 i_o 解的连贯性:

$$i_o = C\frac{dv_o}{dt} = (0.25\times10^{-6})(-9000e^{-100t}) = -2.25e^{-100t}\ \text{mA}$$

由于 $dv_o(0^-)/dt = 0$，显然 i_o 表达式仅在 $t \geq 0^+$ 时有效。

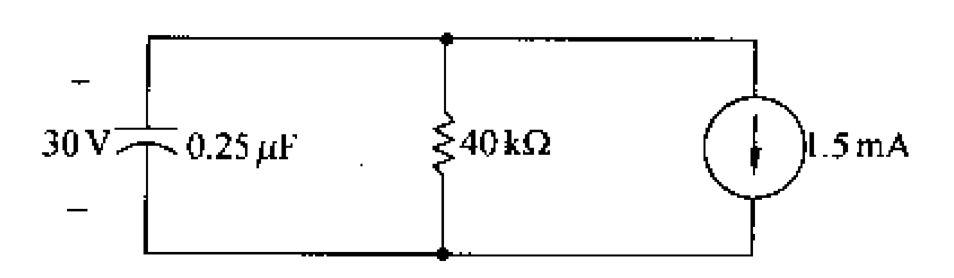


图 7.23　$t \geq 0$ 时图 7.22 所示电路的等效电路

练习题

7.7　(a) 推导式(7.52)。首先将图 7.21 所示诺顿等效电路转换成戴维南等效电路，然后将电容电流 i 作为变量，对闭合回路求电压之和。

(b) 用变量分离方法求式(7.52)的解。检验解是否符合式(7.53)。

答：(a) 推导，(b) 检验。

7.8　(a) 求图 7.22 所示电路中 160 kΩ 电阻上的电压表达式。设此电压为 v_A 并假设电压的参考极性在 160 kΩ 电阻上端为正。

(b) 指出由(a)获得的表达式在什么时间间隔有效。

答：(a) $v_A = -60 + 72e^{-100t}$ V，(b) $t \geq 0^+$。

7.4　阶跃响应和固有响应的解决方案

求图 7.24 所示的一阶 *RL* 和 *RC* 电路的固有响应或阶跃响应的一般方法，是基于它们的微分方程相同（比较式(7.48)和(7.50)）。为了归纳这四个电路的解，$x(t)$代表未知量，给出 $x(t)$的四种可能值。它可以代表电感端的电流或电压，也可以代表电容端的电流或电压。从式(7.47)、式(7.48)、式(7.50)和式(7.52)，知道描述图 7.24 所示的四个电路任意一个的微分方程式可用下面形式表示：

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = K \tag{7.54}$$

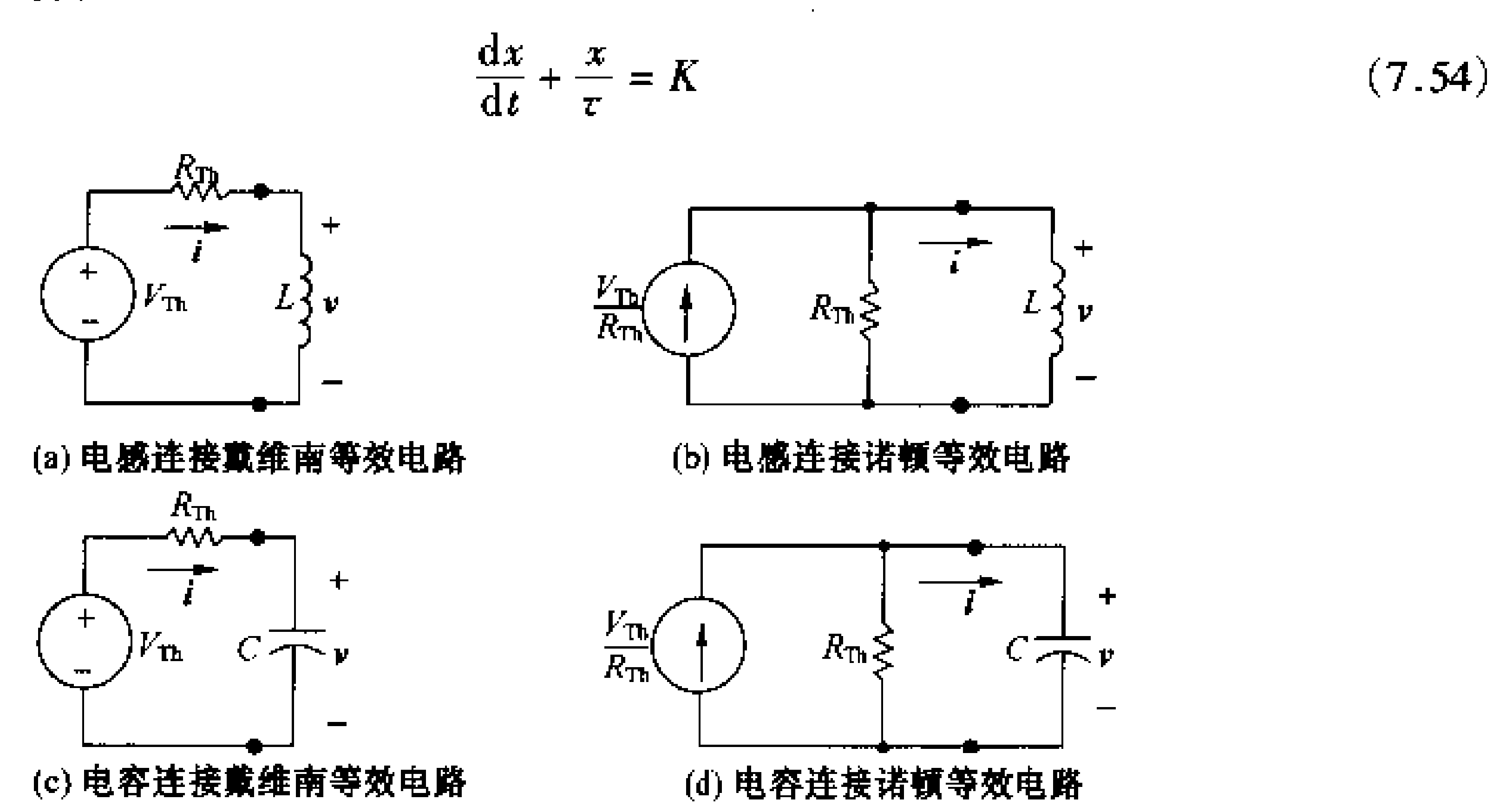


图 7.24　四种可能的一阶电路

其中 K 常量值可以为零。由于这个电路的电源是恒定电压或电流,所以 x 的终值将是常量;即终值必须满足式(7.54),且当 x 达到终值时,导数 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 必须为零。因此:

$$x_f = K\tau \tag{7.55}$$

这里的 x_f 代表变量的终值。

通过分离变量解式(7.54),从解一阶导数开始:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{-x}{\tau} + K = \frac{-(x - K\tau)}{\tau} = \frac{-(x - x_f)}{\tau} \tag{7.56}$$

在写式(7.56)时,用式(7.55)中的 x_f 代替 $K\tau$。在式(7.56)两边乘以 $\mathrm{d}t$ 并除以 $x - x_f$ 得到:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - x_f} = \frac{-1}{\tau}\mathrm{d}t \tag{7.57}$$

接着,对式(7.57)求积分。为取得尽可能一般的解,用时间 t_o 作为下限,t 作为上限。时间 t_o 对应换路或其他变化的时间。以前假设 $t_o = 0$,但是这个变化允许换路发生在任意时间。用 u 和 v 作为积分符号,得到:

$$\int_{x(t_o)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}u}{u - x_f} = -\frac{1}{\tau}\int_{t_o}^{t} \mathrm{d}v \tag{7.58}$$

完成式(7.58)的积分,得到:

$$x(t) = x_f + [x(t_o) - x_f]\mathrm{e}^{-(t-t_o)/\tau} \tag{7.59}$$

式(7.59)的重要性是很显然的,若将它用文字形式表示,则如下所示:

$$\text{作为时间函数的未知变量} = \text{变量的终值} + [\text{变量初值} - \text{变量终值}] \times \mathrm{e}^{-\frac{[t-(\text{换路时间})]}{(\text{时间常数})}} \tag{7.60}$$

在很多场合下,换路的时间(即 t_0)是零。

在计算阶跃和固有响应时,下列步骤也许会有帮助:

1. 确定电路的有关变量。对于 RC 电路,选择电容电压是最方便的;对于 RL 电路,选择电感电流是最好的。
2. 决定变量的初始值,即在 t_o 时的值。注意:如果选择电容电压或电感电流作为关心的变量,则区分 $t = t_0^-$ 和 $t = t_0^+$①是不必要的。这是因为它们都是连续变量。如果你选择另一个变量,需要记住它的初值的定义是在 $t = t_0^+$ 时。
3. 计算变量的终值,即当 $t = \infty$ 时的值。
4. 计算电路的时间常数。

有了这些量,就可以用式(7.60)产生描述有关变量的方程式。然后可以用第 3 章和第 4 章介绍的电路分析方法,或重复前面步骤求其他电路变量的方程式。

例 7.7 ~ 7.9 说明如何用式(7.60)求一个 RC 或 RL 电路的阶跃响应。

例 7.7 图 7.25 所示电路中的开关在位置 a 已有长时间。在 $t = 0$ 时开关移至位置 b。

(a) v_c 的初始值是多少?

① t_0^- 和 t_0^+ 的表示类似于 0^- 和 0^+。因此,$x(t_0^-)$表示 t 从左趋于 t_0 时 $x(t)$的极限值。$x(t_0^+)$表示 t 从右趋于 t_0 时 $x(t)$的极限值。

(b) v_c 的终值是多少？

(c) 当开关在位置 b 时，电路的时间常数是多少？

(d) 当 $t \geq 0$ 时 $v_c(t)$ 的表达式。

(e) 当 $t \geq 0^+$ 时 $i(t)$ 的表达式。

(f) 开关在位置 b 后多长时间电容电压等于零？

(g) 画出对应于 t 的 $v_c(t)$ 和 $i(t)$ 波形图。

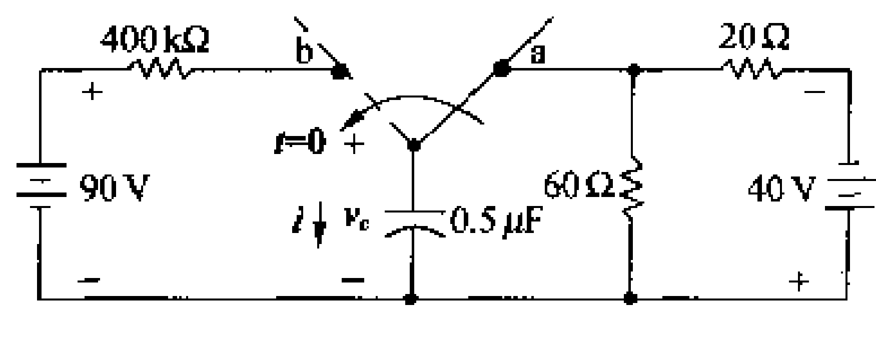


图 7.25　例 7.7 电路

解：

(a) 开关在位置 a 已有长时间，因此，电容相当于开路。电容电压也就是 60 Ω 电阻的电压。根据分压规则，60 Ω 电阻电压是 $40 \times [60/(60+20)]$，即 30 V。由于 v_c 的参考方向在电容上端为正，故 $v_c(0) = -30$ V。

(b) 开关在位置 b 已有长时间后，电容相当于对 90 V 电源开路。这样，电容的终值是 +90 V。

(c) 时间常数是：

$$\tau = RC = (400 \times 10^3)(0.5 \times 10^{-6}) = 0.2 \text{ s}$$

(d) 将相应值 v_f，$v(0)$ 和 t 代入式(7.60)产生：

$$v_c(t) = 90 + (-30-90)e^{-5t} = 90 - 120e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0$$

(e) 这里 τ 值不变。仅需要求电容电流的初值和终值。当获得初值时，必须得到 $i(0^+)$ 值，因为电容中的电流可以跃变。这个电流等于电阻中的电流，根据欧姆定律，电流为 $[90-(-30)]/(400 \times 10^3) = 300$ μA。注意：当应用欧姆定律时，认为电容电压不能跃变。$i(t)$ 的终值等于零，因此：

$$i(t) = 0 + (300-0)e^{-5t} = 300e^{-5t} \ \mu\text{A}, \quad t \geq 0^+$$

通过微分(d) 的解并乘以电容获得该方程的解。读者可以自己做。这种求 $i(t)$ 的替换方法也可以预测在 $t=0$ 时不连续。

(f) 为了求电容电压变成零之前，开关在位置 b 多长时间，可以根据(d) 推导出的方程式，求解 $v_c(t) = 0$ 时的时间：

$$120e^{-5t} = 90 \text{ 或 } e^{5t} = \frac{120}{90}$$

所以：

$$t = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = 57.54 \text{ ms}$$

当 $v_c = 0$，$i = 225$ mA，400 kΩ 电阻上的电压降是 90 V。

(g) 图 7.26 显示了 $v_c(t)$ 和 $i(t)$ 的波形图。

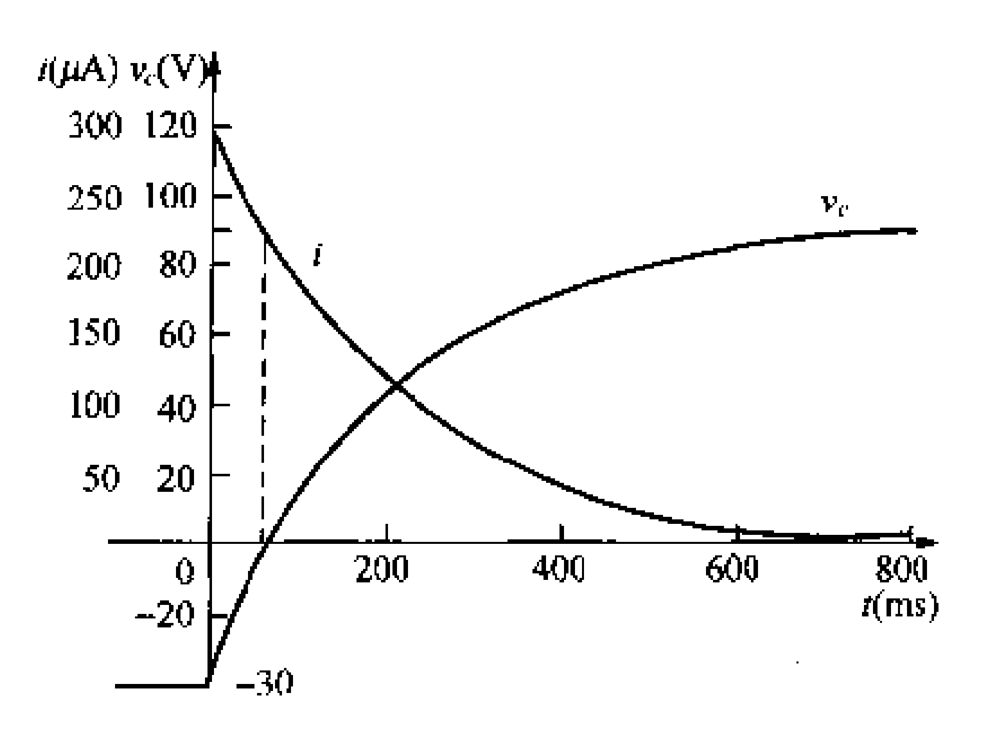


图 7.26 例 7.7 的电流和电压波形

例 7.8 图 7.27 所示电路中的开关已打开长时间。在电容上的初始电荷为零。在 $t=0$ 时，开关关闭。求下面表达式：

(a) $t \geqslant 0^+$ 时的 $i(t)$。

(b) $t \geqslant 0^+$ 时的 $v(t)$。

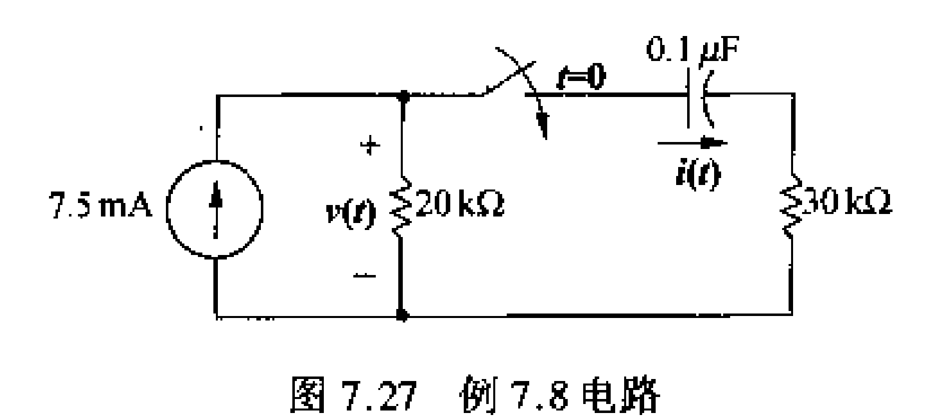


图 7.27 例 7.8 电路

解：

(a) 由于电容上的初始电压为零，在开关关闭瞬间，30 kΩ 中的电流是：

$$i(0^+) = \frac{(7.5)(20)}{50} = 3 \text{ mA}$$

由于电容最终将对直流电流开路，因而电容电流终值将为零。因此，$i_f = 0$。电路的时间常数等于戴维南电阻(从电容两端看进去)与电容容量的乘积。所以，$\tau = (20+30) \times 10^3 \times (0.1) \times 10^{-6} = 5$ ms。将这些值代入式(7.60)得到表达式：

$$i(t) = 0 + (3-0)e^{-t/(5\times10^{-3})} = 3e^{-200t} \text{ mA}, \quad t \geqslant 0^+$$

(b) 对于 $v(t)$，它等于电容电压与 30 kΩ 电阻电压之和。电容电压(电压降方向与电流方向一致)，初始值为零，终值为(7.5)(20)，即 150 V。时间常数与前面相同，为5 ms。因此，用式(7.60)得到：

$$v_c(t) = 150 + (0-150)e^{-200t}$$
$$= (150 - 150e^{-200t}) \text{ V}, \quad t \geqslant 0$$

因此，电压 $v(t)$ 表达式为：

$$v(t) = 150 - 150e^{-200t} + (30)(3)e^{-200t}$$
$$= (150 - 60e^{-200t}) \text{ V}, \quad t \geqslant 0^+$$

检查该表达式，20 Ω 电阻电压的初值为(150 − 60)，即 90 V。开关关闭瞬间，在 20 Ω 电阻中的电流是(7.5)(30/50)，即 4.5 mA。这个电流在 20 kΩ 电阻上产生一个 90 V

的压降，证实了解中预测的值。

例 7.9　图 7.28 所示电路中开关已打开长时间。在 $t=0$ 时开关关闭。求下面表达式：

(a) $t \geqslant 0^+$ 时的 $v(t)$。

(b) $t \geqslant 0$ 时的 $i(t)$。

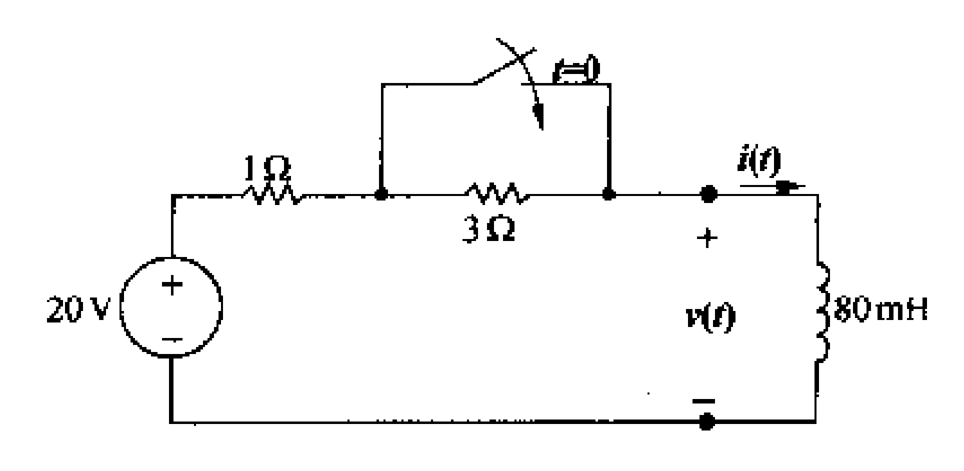


图 7.28　例 7.9 电路

解：

(a) 开关已打开长时间，则电感中的初始电流为 5 A，方向从上到下。开关瞬间关闭后，电流仍然是 5 A，因此，电感的初始电压变成 20 − 5(1)，即 15 V。电感电压终值是 0 V。由于开关关闭，时间常数为 80/1，即 80 ms。用式(7.60)写出 $v(t)$ 表达式：

$$v(t)=0+(15-0)e^{-t/(80\times10^{-3})}=15e^{-12.5t}\ \text{V},\quad t\geqslant 0^+$$

(b) 已知电感电流初始值为 5 A。开关关闭长时间后，电感电流达到 20/1，即 20 A。电路的时间常数是 80 ms，则 $i(t)$ 表达式为：

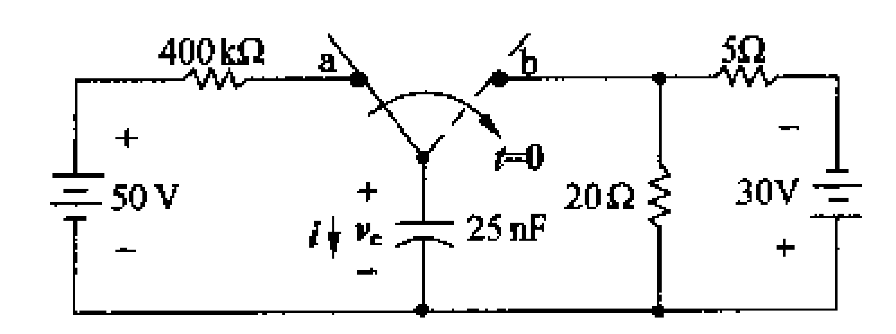
$$\begin{aligned}i(t)&=20+(5-20)e^{-12.5t}\\&=(20-15e^{-12.5t})\ \text{A},\quad t\geqslant 0\end{aligned}$$

注意下面的公式，确定 $v(t)$ 和 $i(t)$ 的解相符合：

$$\begin{aligned}v(t)&=L\frac{di}{dt}=80\times10^{-3}[15(12.5)e^{-12.5t}]\\&=15e^{-12.5t}\ \text{V},\quad t\geqslant 0^+\end{aligned}$$

练习题

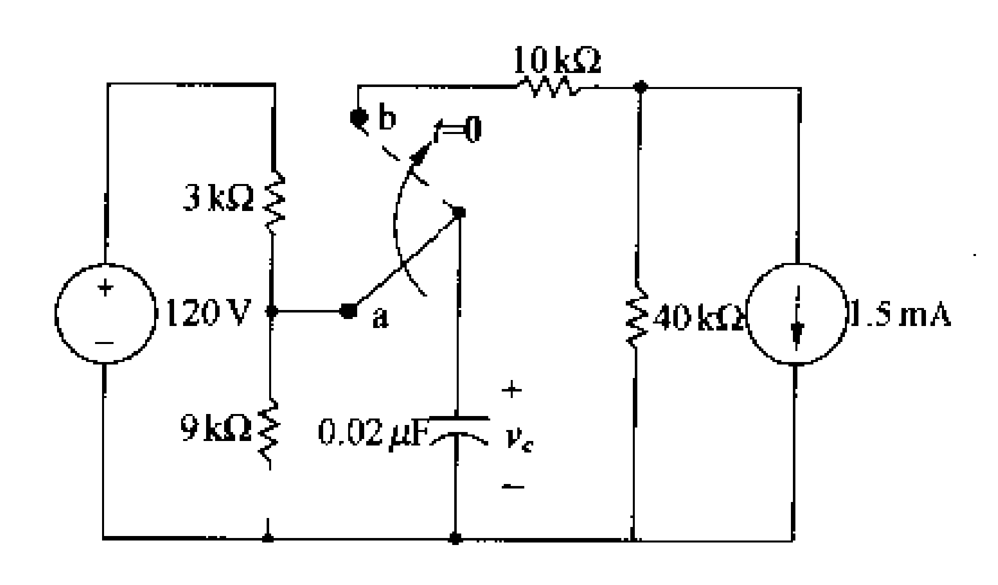
7.9　假设如图所示电路中的开关已在位置 a 长时间，在 $t=0$ 时移到位置 b。求(a) $v_c(0^+)$，(b) $v_c(\infty)$，(c) $t>0$ 时的 τ，(d) $i(0^+)$，(e) $t\geqslant 0$ 时的 v_c，(f) $t\geqslant 0^+$ 时的 i。



答：(a) 50 V，(b) −24 V，(c) 0.1 μs，(d) −18.5 A，(e) $(-24+74e^{-10^7t})$ V，　$t\geqslant 0$，(f) $-18.5e^{-10^7t}$ A，　$t\geqslant 0^+$。

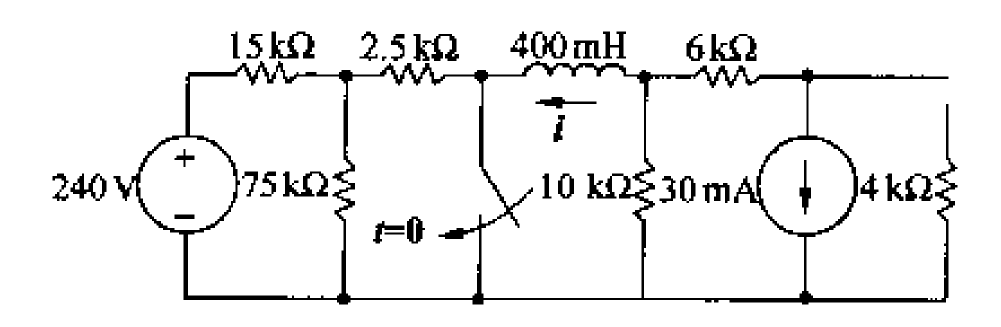
7.10　图示电路中的开关已在位置 a 长时间，在 $t=0$ 时移到位置 b。计算 (a) 电容上的

初始电压,(b) 电容上的最终电压,(c) t>0 时的时间常数(以毫秒为单位),(d) 开关移到位置 b 后多长时间(以毫秒为单位),电容电压达到零。



答:(a) 90 V,(b) −60 V,(c) 1000 μs,(d) 916.3 μs。

7.11 图示电路中的开关已打开长时间,在 $t=0$ 时开关关闭。计算 (a) i 的初始值,(b) i 的终值,(c) $t\geq 0$ 时的时间常数,(d) $t\geq 0$ 时,$i(t)$的表达式。



答:(a) −13 mA,(b) −12 mA,(c) 80 μs,(d) $i=-(12+e^{-12500t})$ mA, $t\geq 0$。

例 7.10 表明式(7.60)还可以用来求一些含有磁耦合线圈电路的阶跃响应。

例 7.10 图 7.29 电路在开关关闭时无能量存储。

(a) 求 i_o, v_o, i_1, i_2 的解。

(b) 证明在(a)中所获得的解对已知电路特性有意义。

解:

(a) 对于图 7.29 电路,磁耦合线圈可以由单个具有感应的电感代替:

$$L_{eq}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}=\frac{45-36}{18-12}=1.5\ \mathrm{H}$$

(参见习题 6.43。)图 7.29 电路可以简化成图 7.30 所示电路。

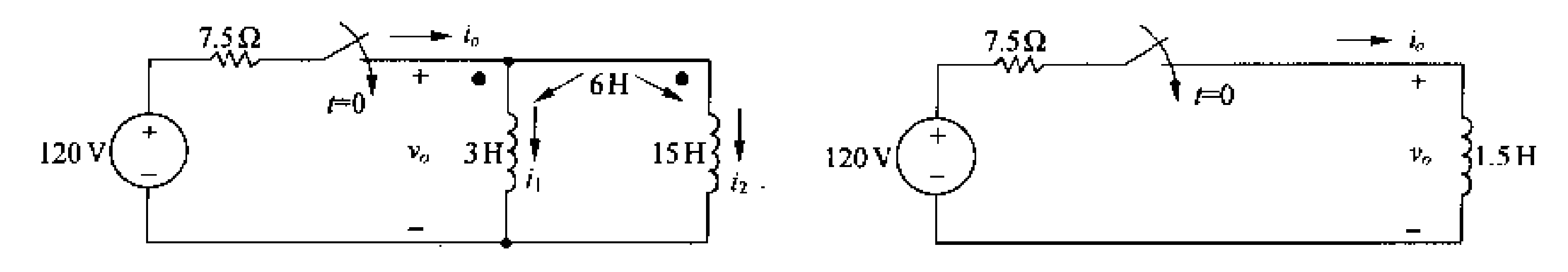


图 7.29 例 7.10 电路　　　图 7.30 图 7.29 电路的磁耦合线圈由等效线圈代替

假设 i_o 的初始值是零。从图 7.30 可以看出 i_o 的终值是 120/7.5,即 16 A。电路的时间常数是 1.5/7.5,即 0.2 s。直接从式(7.60)得到:

$$i_o = 16 - 16e^{-5t}\ \text{A},\quad t \geqslant 0$$

电压 v_o 遵循基尔霍夫电压定律。因此有：

$$\begin{aligned} v_o &= 120 - 7.5 i_o \\ &= 120e^{-5t}\ \text{V},\quad t \geqslant 0^+ \end{aligned}$$

为了求 i_1 和 i_2，根据图 7.29 所示：

$$3\frac{di_1}{dt} + 6\frac{di_2}{dt} = 6\frac{di_1}{dt} + 15\frac{di_2}{dt}$$

或：

$$\frac{di_1}{dt} = -3\frac{di_2}{dt}$$

由于 $i_o = i_1 + i_2$，则有：

$$\frac{di_o}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$

所以：

$$80e^{-5t} = -2\frac{di_2}{dt}$$

由于 $i_2(0)$ 是零，有：

$$\begin{aligned} i_2 &= \int_0^t -40e^{-5x}dx \\ &= -8 + 8e^{-5t}\ \text{A},\quad t \geqslant 0 \end{aligned}$$

利用基尔霍夫电流定律，得到：

$$i_1 = 24 - 24e^{-5t}\ \text{A},\quad t \geqslant 0$$

(b) 首先注意到 $i_o(0)$，$i_1(0)$ 和 $i_2(0)$ 都是零，这与开关关闭瞬间电路中无能量存储的叙述一致。

其次，观察到 $v_o(0^+) = 120$ V，它与 $i_o(0)$ 的实际情况相符。

现在观察 i_1，i_2 的解，注意下面的 v_o，它们与 v_o 的解一致：

$$\begin{aligned} v_o &= 3\frac{di_1}{dt} + 6\frac{di_2}{dt} = 360e^{-5t} - 240e^{-5t} \\ &= 120e^{-5t}\ \text{V},\quad t \geqslant 0^+ \end{aligned}$$

或：

$$\begin{aligned} v_o &= 6\frac{di_1}{dt} + 15\frac{di_2}{dt} = 720e^{-5t} - 600e^{-5t} \\ &= 120e^{-5t}\ \text{V},\quad t \geqslant 0^+ \end{aligned}$$

i_1 和 i_2 的终值可以用磁链检查。3 H 线圈的磁链(λ_1)必须等于 15 H 线圈的磁链(λ_2)。由于：

$$v_o = \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d\lambda_2}{dt}$$

现在：

$$\lambda_1 = 3i_1 + 6i_2\ \text{Wb}$$

以及：

$$\lambda_2 = 6i_1 + 15i_2 \text{ Wb}$$

不管用哪个表达式，都可以得到：

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 24 - 24e^{-5t} \text{ Wb}$$

注意：λ_1 或 λ_2 的解是与 v_o 的解相符。

线圈 1 或者线圈 2 的磁链终值是 24 Wb，即：

$$\lambda_1(\infty) = \lambda_2(\infty) = 24 \text{ Wb}$$

i_1 的终值是：

$$i_1(\infty) = 24 \text{ A}$$

i_2 的终值是：

$$i_2(\infty) = -8 \text{ A}$$

i_1 和 i_2 这些终值和磁链终值之间的一致性可以从下面表达式看出：

$$\lambda_1(\infty) = 3i_1(\infty) + 6i_2(\infty) = 3(24) + 6(-8) = 24 \text{ Wb}$$

$$\lambda_2(\infty) = 6i_1(\infty) + 15i_2(\infty) = 6(24) + 15(-8) = 24 \text{ Wb}$$

值得注意的是，由于在 $t = \infty$ 时，两个线圈是理想的短路，i_1 和 i_2 的终值仅可通过磁链检查。理想短路之间电流的分配从欧姆定律不能找到答案。

练习题

7.12 如图所示电路在开关关闭时无存储的能量。

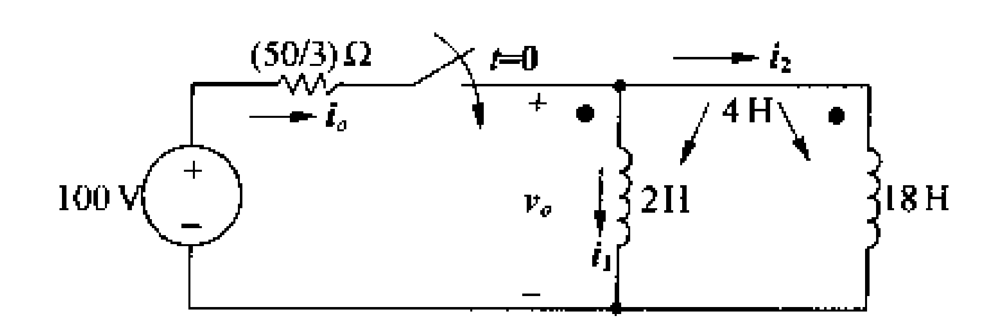
(a) 求 $i_o(t)$，$t \geq 0$。

(b) 求 $v_o(t)$，$t \geq 0$。

(c) 求 $i_1(t)$，$t \geq 0$。

(d) 求 $i_2(t)$，$t \geq 0$。

(e) 对于已知电路特性，你的答案有意义吗？



答：(a) $6 - 6e^{-10t}$ A，$t \geq 0$，(b) $100e^{-10t}$ V，$t \geq 0$，(c) $7 - 7e^{-10t}$ A，(d) $-1 + e^{-10t}$ A，(e) 有。

7.5 按序换路

电路中如果发生多次换路，则称之为按序换路。例如，一个双置开关可以来回转换或多重

开关可以按顺序开或关。对于所有换路，时间参考点不能是 $t=0$。用本章前面所描述的方法，可以确定由按序换路产生的电压和电流，推导给定开关位置的 $v(t)$ 和 $i(t)$ 表达式，然后用这些解确定下一个开关位置的初始条件。

对于按序换路问题，重要的是获得初值 $x(t_0)$，换路时电感电流和电容电压不能跃变。首先要解决的是按序换路时电感电流和电容电压问题。画出每个时间间隔对应的电路，在求解过程中很有帮助。

例 7.11 和 7.12 说明了按序换路电路的分析方法。第一个是两次换路的固有响应问题，第二个是阶跃响应问题。

例 7.11　图 7.31 所示电路中两个开关已经关闭长时间。在 $t=0$ 时，开关 1 打开。过 35 ms 后，开关 2 打开。

(a) 求 $i_L(t)$，$0 \leq t \leq 35$ ms。

(b) 求 $i_L(t)$，　$t \geq 35$ ms。

(c) 存储在 150 mH 电感中的初始能量消耗在 18 Ω 电阻上的百分比是多少？

(d) 电阻是 3 Ω，重复(c)。

(e) 电阻是 6 Ω，重复(c)。

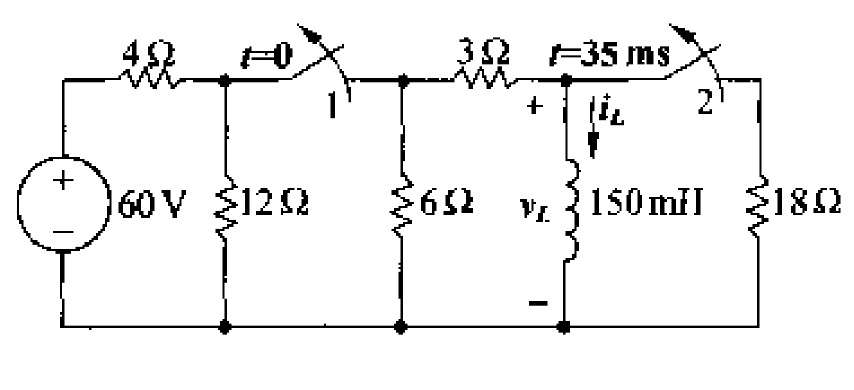


图 7.31　例 7.11 电路

解：

(a) $t<0$ 时，两个开关是闭合的，导致 150 mH 电感将 18 Ω 电阻短路。它的等效电路如图 7.32 所示。通过求解图 7.32 所示电路中的 $i_L(0^-)$ 来确定初始电流。经过电源转换之后，求出 $i_L(0^-)$ 为 6 A。在 $0 \leq t \leq 35$ ms 时，开关 1 打开(开关 2 关闭)，60 V 电压源和 4 Ω，12 Ω 电阻与电路断开。电感不再表现为短路(由于电路中无直流电源)，18 Ω 电阻也不会短接。等效电路如图 7.33 所示。电感两端的等效电阻是 9 Ω 和 18 Ω 的并联，阻值为 6 Ω。电路的时间常数是 $(150/6) \times 10^{-3}$，即 25 ms。因此，i_L 的表达式是：

$$i_L = 6e^{-40t}\ \text{A},\ 0 \leq t \leq 35\ \text{ms}$$

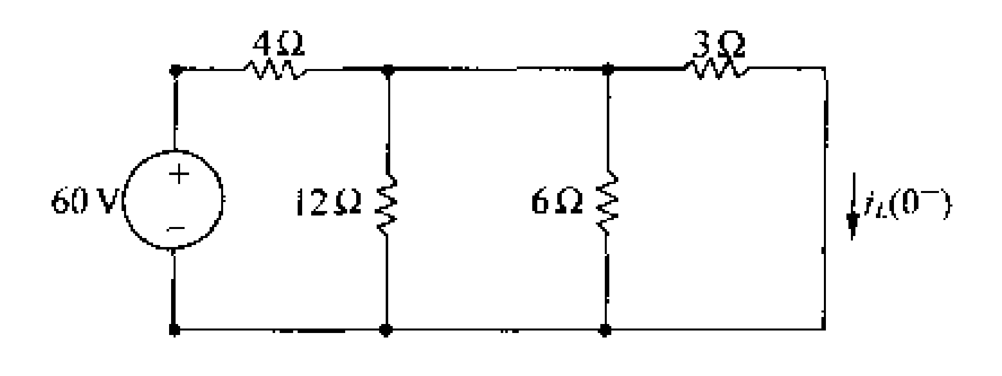


图 7.32　$t<0$ 时的图 7.31 电路

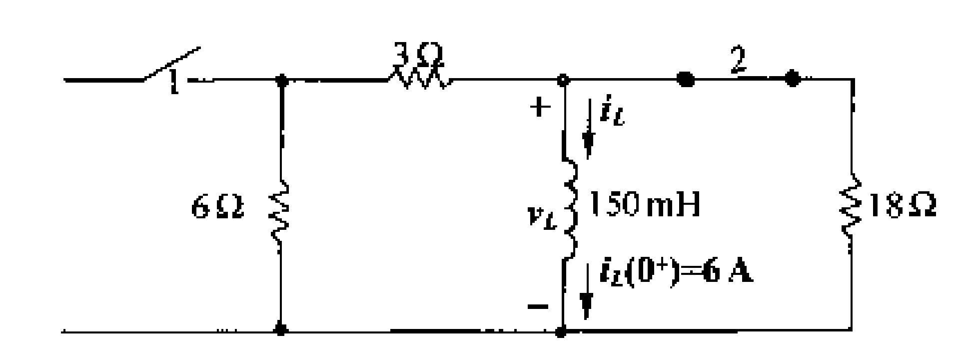


图 7.33　$0 \leq t \leq 35$ ms 时的图 7.31 电路

(b) 当 $t=35$ ms 时,电感电流值为:

$$i_L=6e^{-1.4}=1.48\ \text{A}$$

当开关 2 打开时,电路简化为图 7.34 所示的电路形式,时间常数变成 $(150/9)\times 10^{-3}$,即 16.67 ms。i_L 的表达式变成:

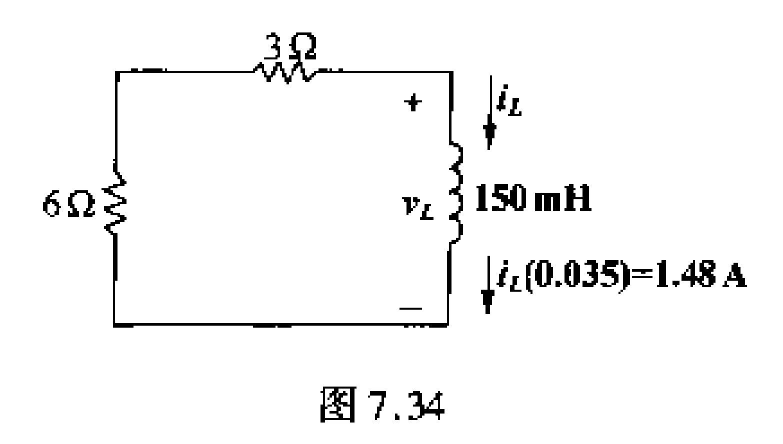


图 7.34

$$i_L=1.48e^{-60(t-0.035)}\ \text{A},\quad t\geqslant 0.035\ \text{s}$$

指数函数在 35 ms 时变化。

(c) 18 Ω 电阻仅在换路顺序的 35 ms 之前处于电路中。在这段时间里,电阻的电压是:

$$\begin{aligned} v_L &= 0.15\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(6e^{-40t}) \\ &= -36e^{-40t}\ \text{V},\ 0<t<0.035\ \text{s} \end{aligned}$$

18 Ω 电阻的功率损耗为:

$$p=\frac{v_L^2}{18}=72e^{-80t}\text{W},\ 0<t<0.035\ \text{s}$$

因此消耗的能量是:

$$\begin{aligned} w &= \int_0^{0.035}72e^{-80t}\mathrm{d}t = \frac{72}{-80}e^{-80t}\Big|_0^{0.035} \\ &= 0.9(1-e^{-2.8}) = 845.27\ \text{mJ} \end{aligned}$$

存储在 150 mH 电感中的初始能量是:

$$w_i=\frac{1}{2}(0.15)(36)=2.7\ \text{J}=2\,700\ \text{mJ}$$

因此,150 mH 电感中存储的初始能量消耗在 18 Ω 电阻上的为 $(845.27/2700)\times 100\%$,即 31.31%。

(d) 在 $0<t<0.035$ s 时,3 Ω 电阻的电压为:

$$v_{3\Omega}=\left(\frac{v_L}{9}\right)(3)=\frac{1}{3}v_L=-12e^{-40t}\ \text{V}$$

因此,在前 35 ms,3 Ω 电阻消耗的能量是:

$$\begin{aligned} w_{3\Omega} &= \int_0^{0.035}\frac{144e^{-80t}}{3}\mathrm{d}t \\ &= 0.6(1-e^{-2.8}) \\ &= 563.51\ \text{mJ} \end{aligned}$$

对于 $t>0.035$ s,3 Ω 电阻的电流为:

$$i_{3\Omega}=i_L=(6e^{-1.4})e^{-60(t-0.035)}\ \text{A}$$

因此,$t>0.035$ s 时,3 Ω 电阻消耗的能量是:

$$w_{3\,\Omega}=\int_{0.035}^{\infty}i_{3\,\Omega}^{2}\times 3\mathrm{d}t$$
$$=\int_{0.035}^{\infty}3(36)\mathrm{e}^{-2.8}\mathrm{e}^{-120(t-0.035)}\mathrm{d}t$$
$$=108\mathrm{e}^{-2.8}\times\frac{\mathrm{e}^{-120(t-0.035)}}{-120}\Bigg|_{0.035}^{\infty}$$
$$=\frac{108}{120}\mathrm{e}^{-2.8}=54.73\ \mathrm{mJ}$$

3 Ω 电阻消耗的总能量是：

$w_{3\,\Omega}$(总) = 563.51 + 54.73 = 618.24 mJ

占所存储的初始能量的百分比是：

$$\frac{618.24}{2700}\times 100\% = 22.90\%$$

(e) 由于 6 Ω 电阻与 3 Ω 电阻串联，因此，所消耗的能量和所存储的初始能量的百分比是 3 Ω 电阻的两倍：

$$w_{6\,\Omega}(\text{总}) = 1236.48\ \mathrm{mJ}$$

占所存储的初始能量的百分比是 45.80%。通过观察下面的式子检验这些计算：

$$1236.48 + 618.24 + 845.27 = 2699.99\ \mathrm{mJ}$$

和

$$31.31 + 22.90 + 45.80 = 100.01\%$$

总和的微小误差是四舍五入产生的。

例 7.12 图 7.35 所示电路中，无电荷的电容初始接在三位置开关的 a 端。在 $t=0$ 时，开关移到位置 b 并保持 15 ms。15 ms 延迟后，开关移到位置 c 并保持着。

(a) 推导电容电压表达式。

(b) 画出电容电压对应时间的波形图。

(c) 电容电压何时等于 200 V?

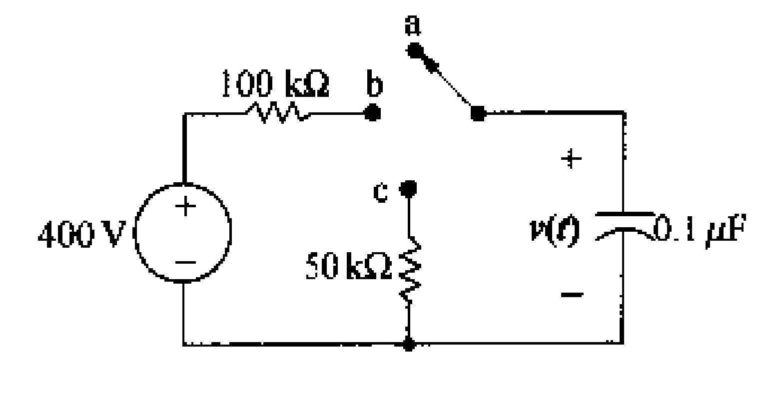


图 7.35　例 7.12 电路

解：

(a) 开关移到位置 b 的瞬间，电容的初始电压为零。如果开关保持在位置 b，电容最后充电到 400 V。开关在位置 b 时，电路的时间常数为 10 ms。可以使用式(7.59)，设 $t_0=0$，写出电容电压的表达式：

$$v = 400 + (0-400)\mathrm{e}^{-100t}$$
$$= (400 - 400\mathrm{e}^{-100t})\ \mathrm{V},\ 0\leqslant t\leqslant 15\ \mathrm{ms}$$

注意：由于开关在位置 b 仅保持 15 ms，因此，这个表达式仅在 0 到 15 ms 的时间内有效。开关在该位置 15 ms 之后，电容电压将是：

$$v(15\ \text{ms}) = 400 - 400e^{-1.5} = 310.75\ \text{V}$$

因此，当开关移到位置 c，电容的初始电压是 310.75 V。开关在位置 c，电容的终值是零，时间常数是 5 ms。再用式(7.59)，写出电容电压的表达式：

$$\begin{aligned} v &= 0 + (310.75 - 0)e^{-200(t-0.015)} \\ &= 310.75e^{-200(t-0.015)}\ \text{V}, \quad t \geq 15\ \text{ms} \end{aligned}$$

在 v 的表达式中，$t_0 = 15$ ms，该表达式只在 $t \geq 15$ ms 时才有效。

(b) 图 7.36 给出了 v 对应于 t 的波形图。

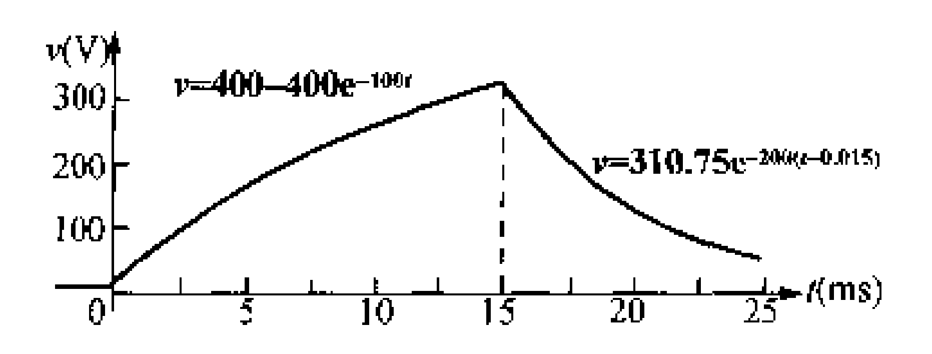


图 7.36 例 7.12 的电容电压

(c) 电容电压等于 200 V，从图 7.36 显示出这个数值将在两个不同的时间段出现，一个时间发生在0 到 15 ms之间，另一个发生在 15 ms 之后。通过求解下面的表达式求出第一个时间：

$$200 = 400 - 400e^{-100t_1}$$

得到 $t_1 = 6.93$ ms。通过解下面的表达式求出第二个时间：

$$200 = 310.75e^{-200(t_2 - 0.015)}$$

得到 $t_2 = 17.20$ ms。

练习题

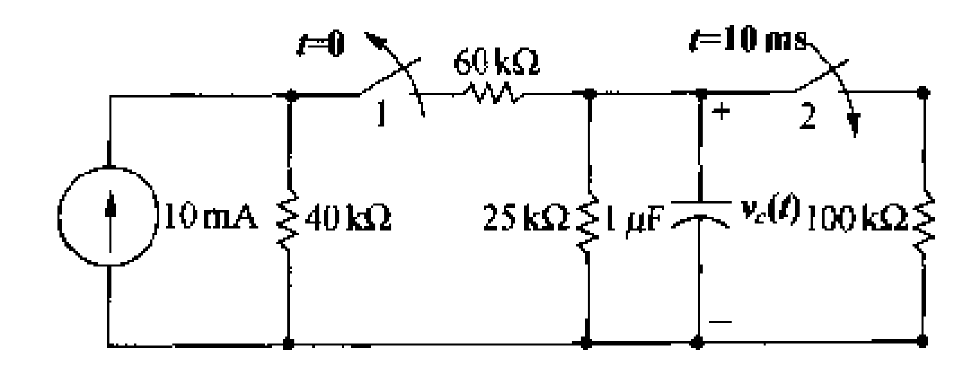
7.13 在图示电路中，开关 1 关闭且开关 2 打开已有长时间。在 $t = 0$ 时，开关 1 打开。10 ms后，开关 2 关闭。求：

(a) $v_c(t)$, $0 \leq t \leq 0.01$ s。

(b) $v_c(t)$, $t \geq 0.01$ s。

(c) 消耗在 25 Ω 电阻中的总能量。

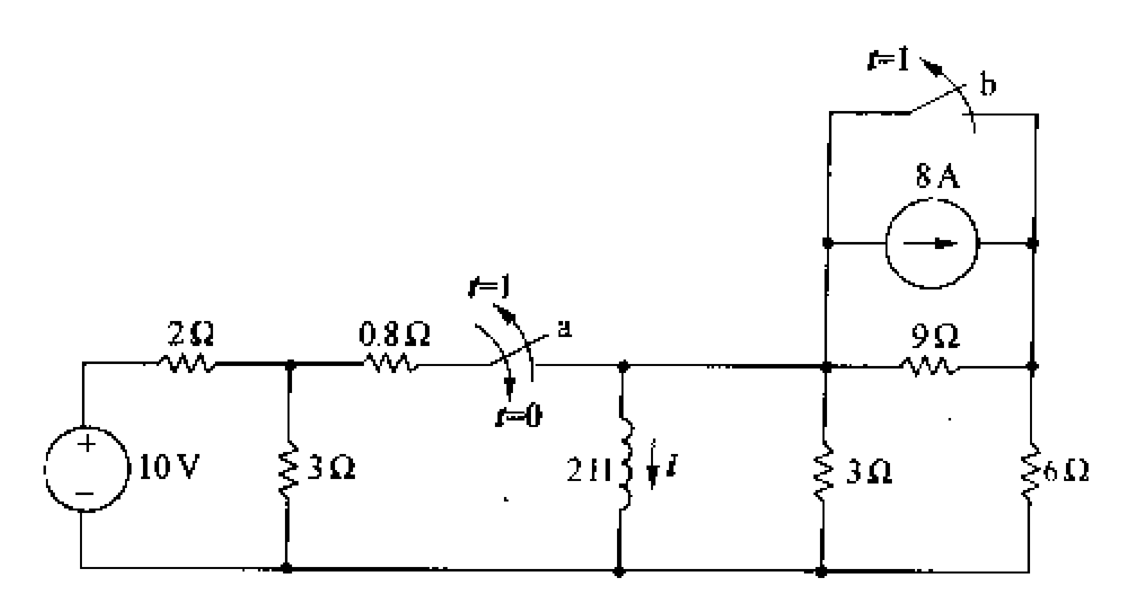
(d) 消耗在 100 Ω 电阻中的总能量。



答：(a) $80e^{-40t}$ V，(b) $53.63e^{-50(t-0.01)}$ V，(c) 2.91 mJ，(d) 0.29 mJ。

7.14 在图示电路中，开关 a 已经打开长时间，开关 b 已经关闭长时间。在 $t = 0$ 时，开关

a 关闭，在保持 1 s 后再次打开。开关 b 同时打开，两开关保持打开一定时间。确定电感电流 i 的表达式：(a) $0\leq t\leq 1$ s，(b) $t\geq 1$ s。



答：(a) $i(t)=(3-3e^{-0.5t})$A，$0\leq t\leq 1$ s，(b) $i(t)=(-4.8+5.98\,e^{-1.25(t-1)})$ A，$t\geq 1$ s。

7.6　无限响应

一个电路响应随时间按指数规律增长而不是衰减，这种类型的响应称之为无限响应，如果电路含有非独立源可能会出现无限响应。在这种情况下，电感或电容端的戴维南等效电阻可以是负的。这个负电阻产生一个负的时间常数，其结果是，电流和电压无限制增长。在实际电路中，当元件毁坏或进入到饱和状态时，响应最后达到一个限定值，阻止电压或电流的进一步增长。

考虑无限响应时，终值的概念变得有些混淆。因此，与其用式(7.59)给出的阶跃响应解，不如推导出含有负电阻电路的微分方程式，然后用变量分离方法求解。例 7.13 显示了电容电压的指数增长响应。

例 7.13　(a) 当图 7.37 所示电路中的开关关闭时，电容电压是 10 V。求 $t\geq 0$ 时的 v_o 表达式。

(b) 假设当电容的端电压达到 150 V 时，电容短路。在电容短路之前经过多少毫秒？

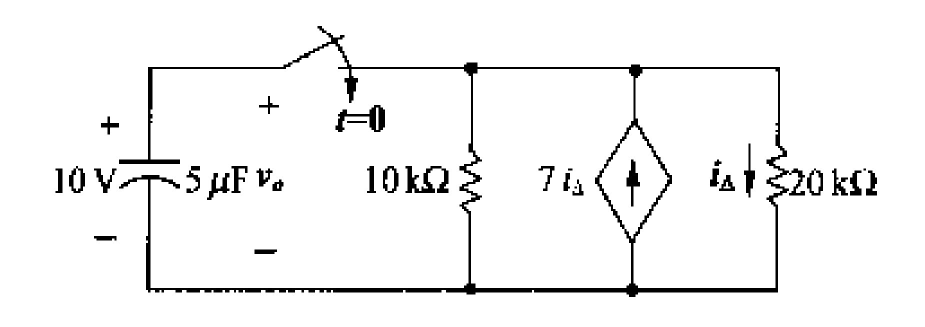


图 7.37　例 7.13 电路

解：　(a) 为求电容端的戴维南等效电阻，利用第 4 章所述的测试电源法，电路如图 7.38 所示。其中 v_T 是测试电压，i_T 为测试电流。v_T 用伏特表示。得到：

$$i_T=\frac{v_T}{10}-7\left(\frac{v_T}{20}\right)+\frac{v_T}{20}\text{ mA}$$

求出比值 v_T/i_T，得到戴维南电阻：

$$R_{\mathrm{Th}}=\frac{v_T}{i_T}=-5\text{ k}\Omega$$

有了戴维南电阻，可以将图 7.37 所示电路简化成图 7.39 所示电路。

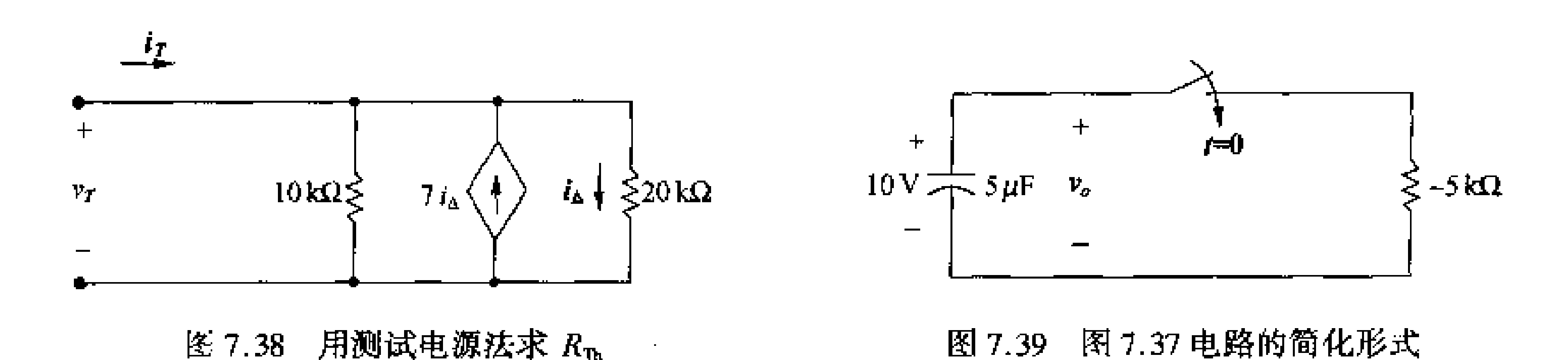


图 7.38 用测试电源法求 R_{Th}　　图 7.39 图 7.37 电路的简化形式

对于 $t \geq 0$,图 7.39 所示电路的微分方程式是:

$$(5 \times 10^{-6})\frac{dv_o}{dt} - \frac{v_o}{5} \times 10^{-3} = 0$$

除以第一项的系数得到:

$$\frac{dv_o}{dt} - 40v_o = 0$$

现在用变量分离方法求 $v_o(t)$:

$$v_o(t) = 10e^{40t}\ \text{V}, \quad t \geq 0$$

(b) 当 $e^{40t} = 15$ 时,$v_o = 150$ V。因此,$40t = \ln 15$ 并且 $t = 67.70$ ms。

互连电路元件可以导致电流和电压不断增长,这个事实对于工程师是重要的。如果这样的互连是无意识的,其结果是,电路可能产生意想不到的、具有潜在危险的故障。

7.7 积分放大器

第 5 章已经介绍过运算放大器,运算放大器可以当做积分放大器使用,使我们对运算放大器更加感兴趣。现在准备分析一个积分放大器电路,电路如图 7.40 所示。这个电路是要产生一个与输入电压积分成比例的输出电压。在图 7.40 中,添加支路电流 i_f 和 i_s,以及节点电压 v_n 和 v_p 将有助于对电路的分析。

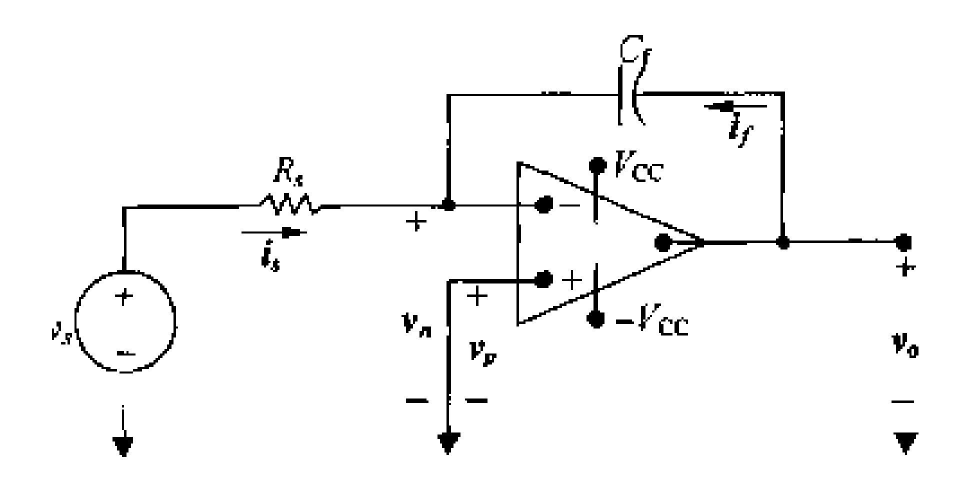


图 7.40 积分放大器

假设运算放大器是理想的。利用下面的约束:

$$i_f + i_s = 0 \tag{7.61}$$

$$v_n = v_p \tag{7.62}$$

由于 $v_p = 0$,则有:

$$i_s = \frac{v_s}{R_s} \tag{7.63}$$

$$i_f = C_f \frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} \tag{7.64}$$

根据式(7.61),(7.63)和(7.64),得到:

$$\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R_s C_f} v_s \tag{7.65}$$

式(7.65)两边乘以一个微分时间 $\mathrm{d}t$,然后从 t_0 到 t 的积分产生方程式:

$$v_o(t) = -\frac{1}{R_s C_f}\int_{t_0}^{t} v_s \mathrm{d}y + v_o(t_0) \tag{7.66}$$

在式(7.66)中,t_0 表示开始积分时的瞬间。这样 $v_o(t_0)$ 就是此时的输出电压。由于 $v_n = v_p = 0$, $v_o(t_0)$ 与反馈电容 C_f 的初始电压是相同的。

式(7.66)表明,积分放大器的输出电压等于电容的电压初值再加上反相(负号)成比例($1/R_s C_f$)的输入电压积分。如果积分开始时,无能量存储在电容中,则式(7.66)简化为:

$$v_o(t) = -\frac{1}{R_s C_f}\int_{t_0}^{t} v_s \mathrm{d}y \tag{7.67}$$

如果 v_s 是直流电平的阶跃变化,输出电压将随时间线性变化。例如,假设输入电压是个矩形电压脉冲,如图 7.41 所示,同时假设 v_s 从 0 跳跃到 V_m 的瞬间,$v_o(t)$ 的初值是零,直接应用式(7.66)产生:

$$v_o = -\frac{1}{R_s C_f} V_m t + 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{7.68}$$

当 t 在 t_1 和 $2t_1$ 之间时,

$$\begin{aligned} v_o &= -\frac{1}{R_s C_f}\int_{t_1}^{t} (-V_m)\mathrm{d}y - \frac{1}{R_s C_f} V_m t_1 \\ &= \frac{V_m}{R_s C_f} t - \frac{2V_m}{R_s C_f} t_1, \quad t_1 \leqslant t \leqslant 2t_1 \end{aligned} \tag{7.69}$$

图 7.42 显示了 $v_o(t)$ 对应于 t 的波形图。显然,输出电压是与输入电压的积分反相,且成比例。

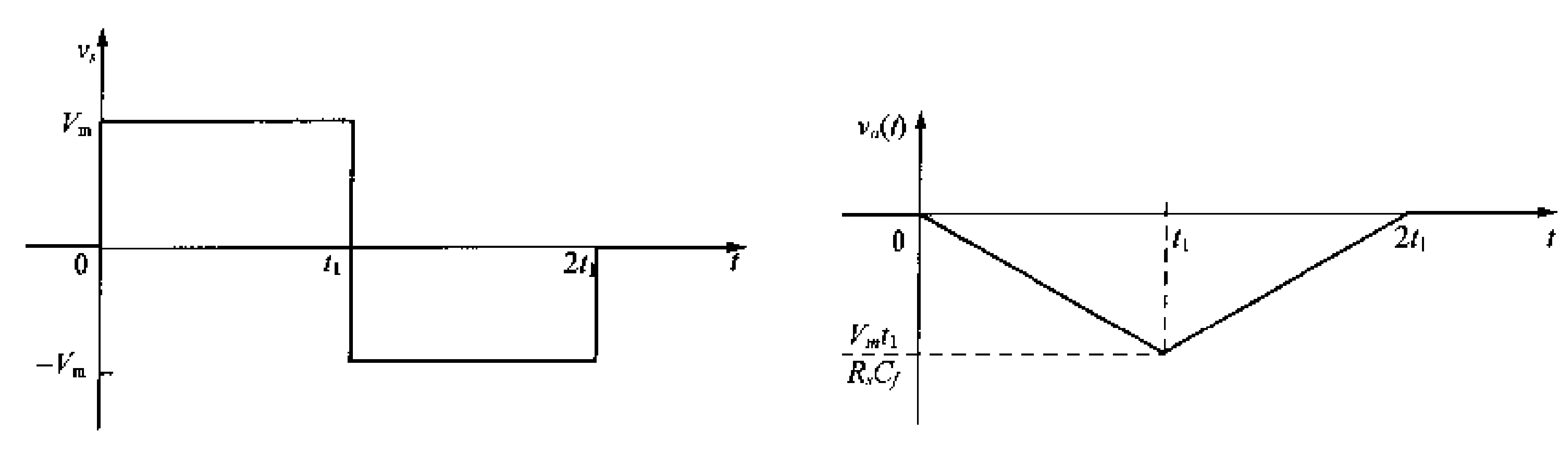


图 7.41　输入电压信号　　图 7.42　积分放大器的输出电压

只有运算放大器工作在线性区,也就是工作在不饱和状态,输出电压才与输入电压积分成比例。例 7.14 和 7.15 进一步给出积分放大器的分析。

例7.14　假设图7.41所示信号电压值是 $V_m=50$ mV 以及 $t_1=1$ s。这个信号电压应用于图7.40所示积分放大器电路。放大器的电路参数是 $R_s=100$ kΩ, $C_f=0.1$ μF, $V_{CC}=6$ V。电容的初始电压为零。

(a) 计算 $v_o(t)$。

(b) 画出 $v_o(t)$对应于 t 的波形图。

解:

(a) 对于 $0\leqslant t\leqslant 1$ s,

$$\begin{aligned} v_o &= \frac{-1}{(100\times10^3)(0.1\times10^{-6})}50\times10^{-3}t+0 \\ &= -5t \text{ V} \end{aligned}$$

对于 $1\leqslant t\leqslant 2$ s,

$$v_o=(5t-10)\text{ V}$$

(b) 图7.43显示出 $v_o(t)$对应于 t 的波形图。

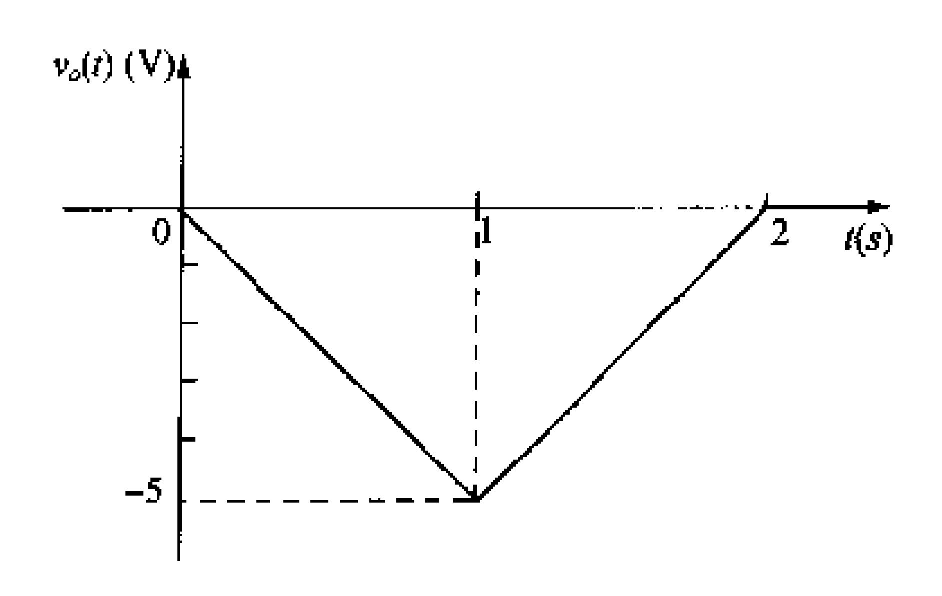


图7.43　例7.14的输出电压

例7.15　图7.44所示电路中,开关接触到a端的瞬间,在0.1 μF电容上的电压是5 V。开关在a端保持9 ms,然后瞬间移到位置b。开关接触到a端后多少毫秒运算放大器饱和?

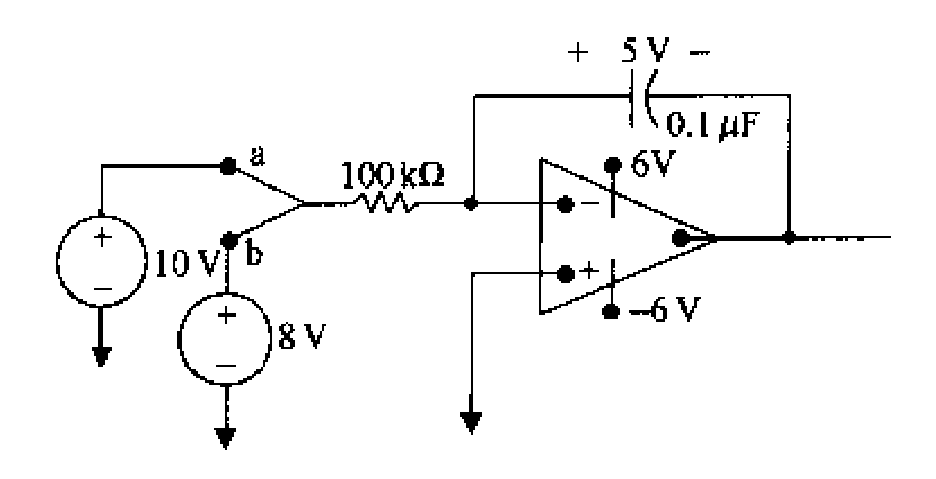


图7.44　例7.15的电路

解:

开关在a端时的输出电压表达式:

$$v_o=-5-\frac{1}{10^{-2}}\int_0^t(-10)\mathrm{d}y=(-5+1000t)\text{ V}$$

开关接触到a端后9 ms,输出电压是 $-5+9=4$ V。

开关移到位置b后输出电压表达式是:

$$v_o = 4 - \frac{1}{10^{-2}}\int_{9\times10^{-3}}^{t} 8\mathrm{d}y$$
$$= 4 - 800(t - 9\times10^{-3}) = (11.2 - 800t)\ \mathrm{V}$$

在这期间，电压减少，运算放大器最后在 -6 V 饱和。因此，设定 v_o 表达式等于 -6 V 来获得饱和时间 t_s：

$$11.2 - 800t_s = -6,\ 即\ t_s = 21.5\ \mathrm{ms}$$

因此，积分放大器接触到 a 端后 21.5 ms 饱和。

从例子中，看出积分放大器可以很好地完成积分作用，不过在指定范围内应避免运放饱和。运放饱和是由于反馈电容上的电荷积累造成的。可以加一个电阻与电容的并联防止饱和。在第 8 章将介绍该电路。

可以通过互换输入电阻 R_s 和反馈电容 C_f，将一个积分放大器转换成一个微分放大器。得到：

$$v_o = -R_sC_f\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} \tag{7.70}$$

将式(7.70)留给读者作为一个练习。微分放大器很少使用，因为在实践中，它是一个有害源或噪音信号。

最后说一句，可以用电感代替电容来设计积分和微分放大器。然而在集成电路器件中，构造电容更简单，所以电感很少用在积分放大器中。

实例

闪光灯电路二

分析前面介绍的闪光灯电路，如图 7.45 所示。电路中的灯只有在灯电压达到 V_{max} 值时开始导通。在灯导通期间，将其模拟成一个电阻，其电阻为 R_L。灯一直导通到其电压降到 V_{min} 时为止。灯不导通时，相当于开路。

在分析电路特性的表达式之前，先对电路是如何工作的有一个感性认识。首先，当灯表现为开路时，直流电压源将通过电阻 R 给电容充电，充至 V_s 伏特。然而一旦灯电压达到 V_{max}，灯开始导通并且电容开始放电，逼近戴维南电压。一旦电容电压达到灯的终止电压(V_{min})，灯将开路，电容又将开始充电。电容充放电周期如图 7.46 所示。

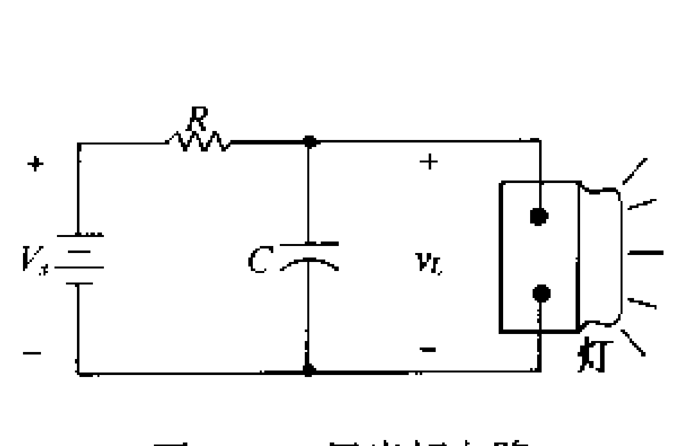


图 7.45　闪光灯电路

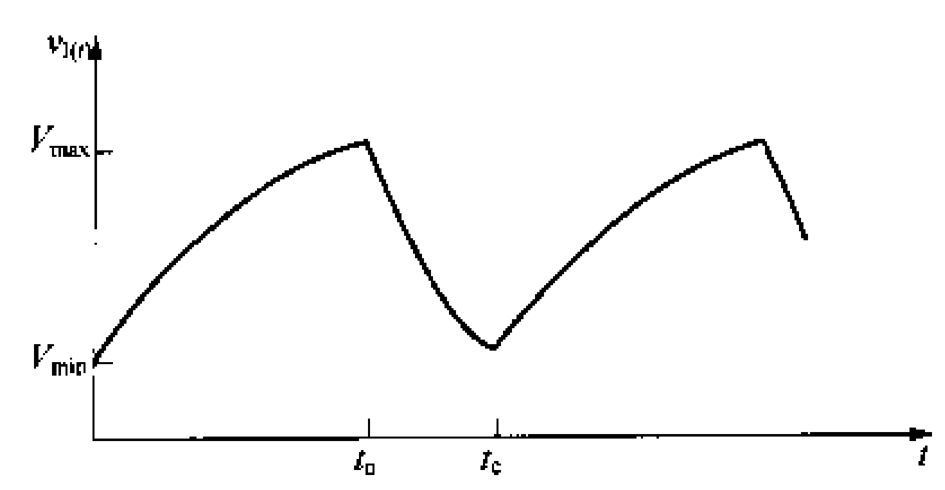


图 7.46　图 7.45 电路中灯电压的波形

在图 7.46 中,选择电容开始充电的瞬间 $t=0$。时间 t_o 代表灯开始工作的瞬间,t_c 为完成一个周期的结束时间。还要说明图 7.46 中,假设电路已经达到运行的重复阶段。闪光灯的设计需要产生以 V_{max},V_{min},V_s,R,C 和 R_L 为变量的式 $v_L(t)$,其范围在 0 到 t_o 和 t_o 到 t_c 期间。

开始分析时,假设电路已经运转长时间,当灯停止导通的瞬间 $t=0$。这样在 $t=0$ 时,灯被模拟为开路,灯的压降是 V_{min},如图 7.47 所示。

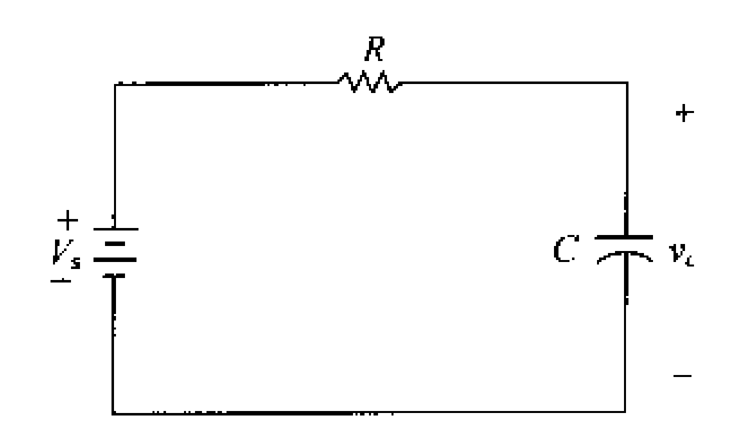


图 7.47　$t=0$ 时的闪光灯电路,灯不导通

从上述电路,得到:

$$v_L(\infty)=V_s$$
$$v_L(0)=V_{min}$$
$$\tau=RC$$

当灯不导通时:

$$v_L(t)=V_s+(V_{min}-V_s)e^{-t/RC}$$

灯开始导通之前需要多长时间?可以通过设置表达式 $v_L(t)$等于 V_{max},并且求出 t 来得出这个时间。如果称这个值为 t_o,那么

$$t_o=RC\ln\frac{V_{min}-V_s}{V_{max}-V_s}$$

当灯开始导通时,可以被模拟为电阻 R_L,如图 7.48 所示。为求这个电路电容的压降表达式,需要求电容两端的戴维南等效电路。把它作为习题 7.99,留给读者来证明,灯在导通时:

$$v_L(t)=V_{Th}+(V_{max}-V_{Th})e^{-(t-t_o)/\tau}$$

其中:

$$V_{Th}=\frac{R_L}{R+R_L}V_s$$

以及:

$$\tau=\frac{RR_LC}{R+R_L}$$

图 7.48　$t=t_o$ 时的闪光灯电路,灯导通

可以通过设定上面 $v_L(t)$的表达式为 V_{min},并解出(t_c-t_o)来确定灯导通的时间:

$$(t_c - t_o) = \frac{RR_LC}{R + R_L}\ln\frac{V_{max} - V_{Th}}{V_{min} - V_{Th}}$$

例： 假设图 7.45 中的电路为一个便携闪光灯电路。设电路的电源为 4 节 1.5 V 电池，电容的值为 10 μF。并设灯的电压达到 4 V 时它才导通，当电压降到 1 V 以下停止导通。当灯导通时，它有 20 kΩ 的电阻，当它不导通时，电阻为无穷大。

(a) 假设不期望两次闪光之间的时间大于 10 s，那么多大的电阻 R 才能满足这个时间约束？

(b) 对于(a)的电阻值，闪光灯能持续多长时间？

解：

(a) 要想让灯在不导通状态的时间不超过 10 s，为了求满足约束的 R 值，设定 t_0 表达式等于 10 s，然后解 R：

$$10 = R(10\times10^{-6})\ln\frac{1-6}{4-6}$$

这样：

$$R = 1.091\ \text{M}\Omega$$

如果选择 $R = 1\ \text{M}\Omega$，则：

$$t_o = (10^6)(10\times10^{-6})\ln\frac{1-6}{4-6} = 9.16\ \text{s}$$

(b) 当灯在导通时：

$$V_{Th} = \frac{20\times10^3}{20\times10^3 + 10^6}(6) = 0.11765\ \text{V}$$

$$R_{Th} = 19.61\ \text{k}\Omega$$

这样：

$$(t_c - t_o) = (19.61\times10^3)(10\times10^{-6})\ln\frac{4-0.11765}{1-0.11765} = 0.45\ \text{s}$$

因此，闪光持续 0.45 秒。

小结

- 一阶电路可以简化为与单个等效电感或电容相连接的戴维南(或诺顿)等效电路。
- 对于直流电流，电感表现为短路。
- 对于直流电压，电容表现为开路。
- RL 电路的时间常数等于等效电感除以等效电感两端看到的戴维南电阻。
- RC 电路的时间常数等于等效电容乘以等效电容两端看到的戴维南电阻。
- 固有响应是当存储的能量释放到一个不含独立源的电路时所产生的电流和电压。
- 阶跃响应是连到电路的直流源发生突变所产生的电流和电压。在突变发生时，存储的能量可能存在也可能不存在。
- 电容电压和电感电流是连续的，即它们在 $t = t_0^-$ 和 $t = t_0^+$ 时具有相同的值。电容电流和电感电压可以是不连续的，即它们在 $t = t_0^-$ 和 $t = t_0^+$ 时有不相同的值。

- RL 和 RC 电路的固有响应或阶跃响应的求解涉及到求解有关电流或电压的初值、终值及电路的时间常数。式(7.59)和(7.60)归纳了这一方法。
- 当戴维南电阻是负的,将发生无限响应,在含有非独立源的一阶电路中有可能发生。
- 一阶电路中的按序换路是通过划分对应于指定开关位置的时间间隔来分析。对于一个特定间隔,初值的计算,应根据前面相邻间隔的解来确定。
- 积分放大器是由理想运算放大器、在负反馈支路的电容和与信号源相串联的电阻组成。电路输出是信号源的积分,在指定范围内应避免运放饱和。

习题

P7.1 在图 P7.1 的电路中,电压和电流的表达式是:

$$v = 100e^{-80t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+$$
$$i = 4e^{-80t}\ \text{A}, \quad t \geq 0$$

求:

(a) R。

(b) τ(以毫秒为单位)。

(c) L。

(d) 存储在电感中的初始能量。

(e) 消耗初始能量 80%所需要的时间(以毫秒为单位)。

7.2 图 P7.2 中的开关在 $t=0$ 打开之前已经关闭长时间。求:

(a) $i_L(t)$, $t \geq 0$。

(b) $v_L(t)$, $t \geq 0^+$。

(c) $i_\Delta(t)$, $t \geq 0^+$。

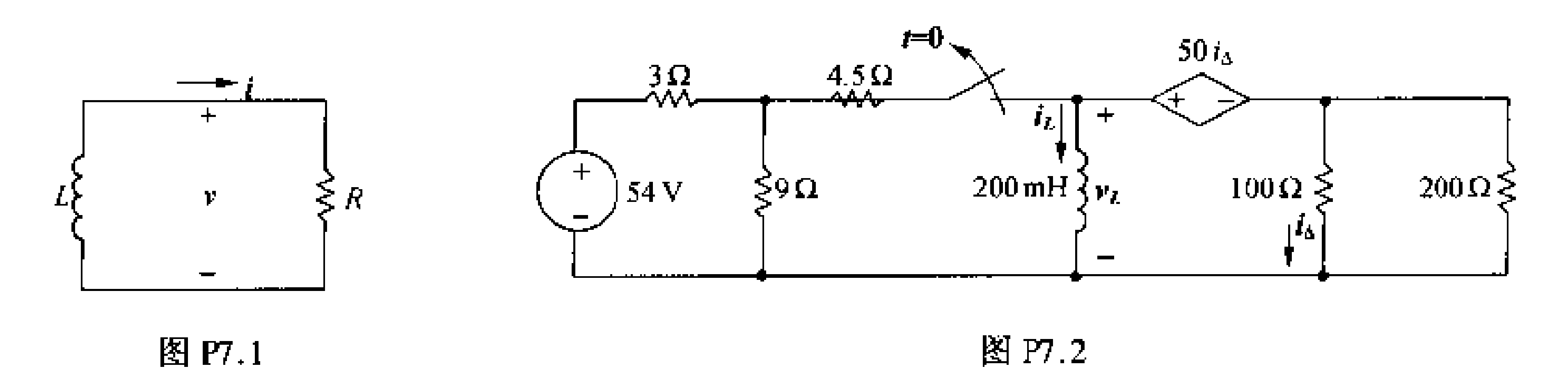


图 P7.1　　　　图 P7.2

7.3 在图 P7.2 电路中,消耗在电流控制电压源的能量是存储在电感中初始能量的百分之多少?

7.4 在图 P7.4 所示电路中,开关在断开位置 a 之前与位置 b 接通。正如已经提到的,这是熟知的断前接通型开关,开关被设计成不会中断电感电路中的电流。在"接通"和"断开"之间的时间间隔假设可以忽略不计。开关已经在位置 a 长时间。在 $t=0$ 时开关从位置 a 转向位置 b。

(a) 确定电感的初始电流。

(b) 确定 $t>0$ 时电路的时间常数。

(c) 求 $t \geq 0$ 时的 i, v_1 和 v_2。

(d) 开关从位置 a 转向位置 b 后 12 ms，消耗在 20 Ω 电阻中的能量是存储在电感中初始能量的百分之多少？

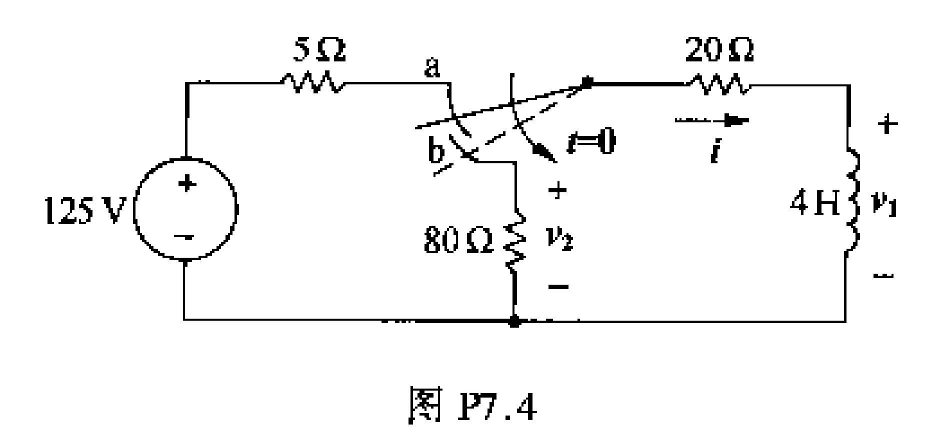


图 P7.4

P7.5　图 P7.5 电路中的开关，在 $t=0$ 打开之前已经关闭长时间。

(a) 求 $i_1(0^-)$和 $i_2(0^-)$。

(b) 求 $i_1(0^+)$和 $i_2(0^+)$。

(c) 求 $i_1(t)$，　$t\geqslant 0$。

(d) 求 $i_2(t)$，　$t\geqslant 0^+$。

(e) 请解释为什么 $i_2(0^-)\neq i_2(0^+)$。

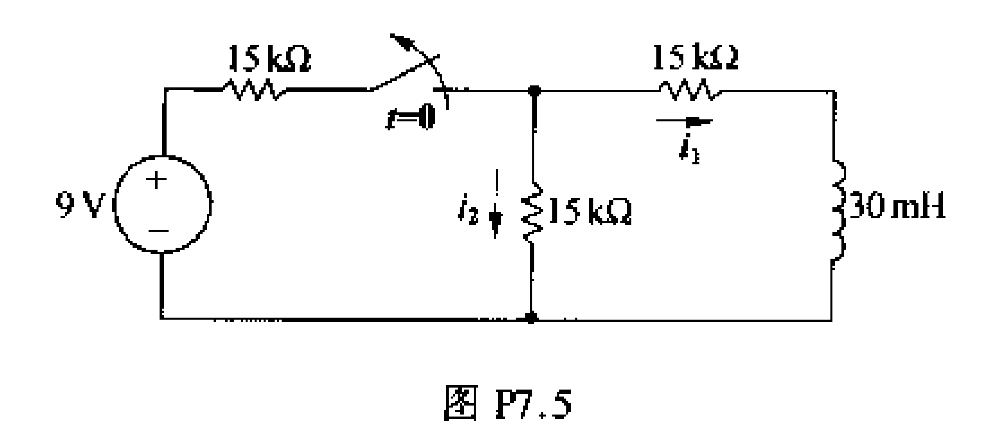


图 P7.5

P7.6　图 P7.6 电路中的开关已经关闭长时间，在 $t=0$ 时打开。求 $t\geqslant 0^+$ 时的 $v_o(t)$。

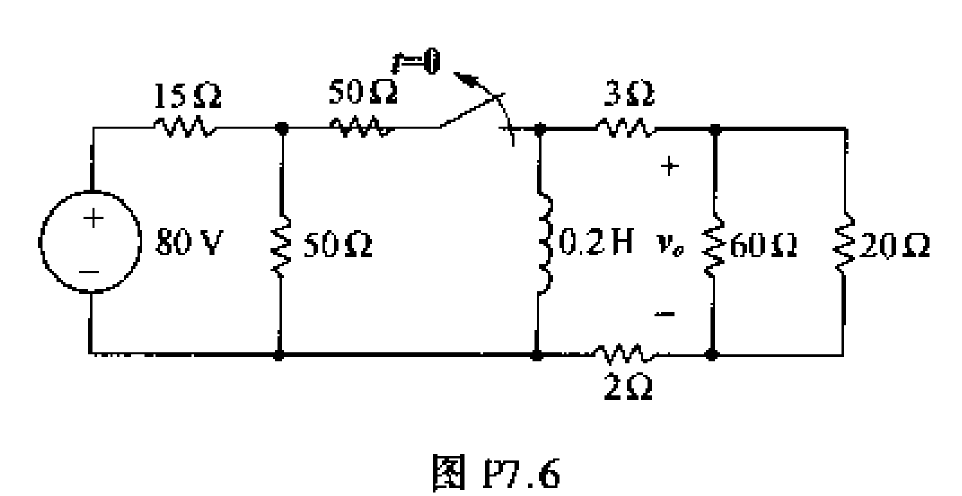


图 P7.6

7.7　假设图 P7.6 电路中的开关已经打开一个时间常数。在这个瞬间，已经消耗在 20 Ω 电阻中的能量是存储在电感中初始能量的百分之多少？

P M7.8　图 P7.8 电路中的开关，在 $t=0$ 打开之前已经关闭长时间。求 $t\geqslant 0^+$ 时的 $v_o(t)$。

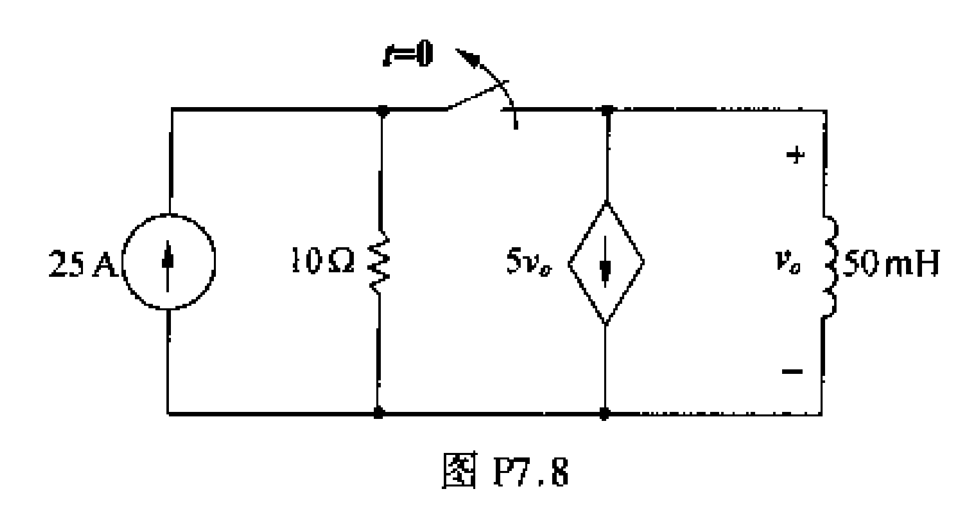


图 P7.8

P7.9 图 P7.9 电路中 220 V,1 Ω 电源无意中在 a,b 端短路。在故障发生前,电路已运行长时间。

(a) 在 a,b 端之间短路时,电流 i_{ab}的初始值是多少?

(b) 电流 i_{ab}的终值是多少?

(c) 短路发生多少毫秒时,电流等于 210 A?

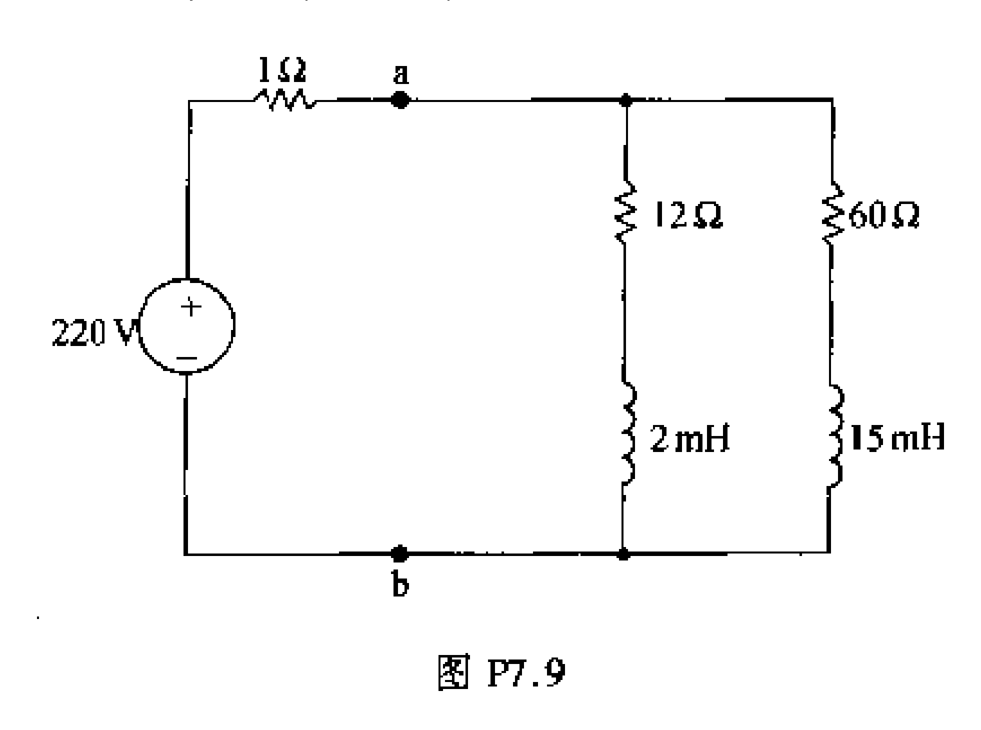


图 P7.9

7.10 在图 P7.10 电路中的开关在 $t=0$ 关闭之前已经打开长时间。

(a) 求 $i_o(0^-)$。

(b) 求 $i_L(0^-)$。

(c) 求 $i_o(0^+)$。

(d) 求 $i_L(0^+)$。

(e) 求 $i_o(\infty)$。

(f) 求 $i_L(\infty)$。

(g) 写出 $t \geq 0$ 时的 $i_L(t)$表达式。

(h) 求 $v_L(0^-)$。

(i) 求 $v_L(0^+)$。

(j) 求 $v_L(\infty)$。

(k) 写出 $t \geq 0^+$ 时的 $v_L(t)$表达式。

(l) 写出 $t \geq 0^+$ 时的 $i_o(t)$表达式。

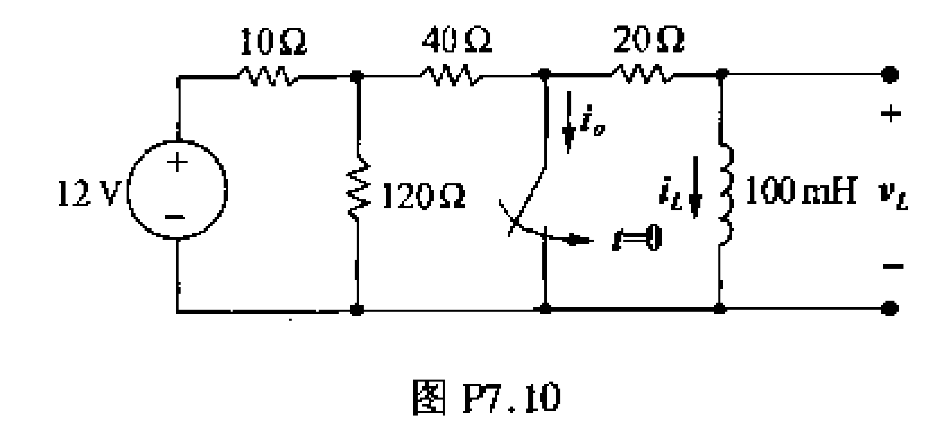


图 P7.10

P7.11 图 P7.11 电路中的两个开关同时操作。$t=0$ 前,每个开关在指定的位置已长时间。在 $t=0$ 时,两个开关同时瞬间移到新的位置。求:

(a) $v_o(t)$, $t \geq 0^+$。

(b) $i_o(t)$，　$t \geq 0$。

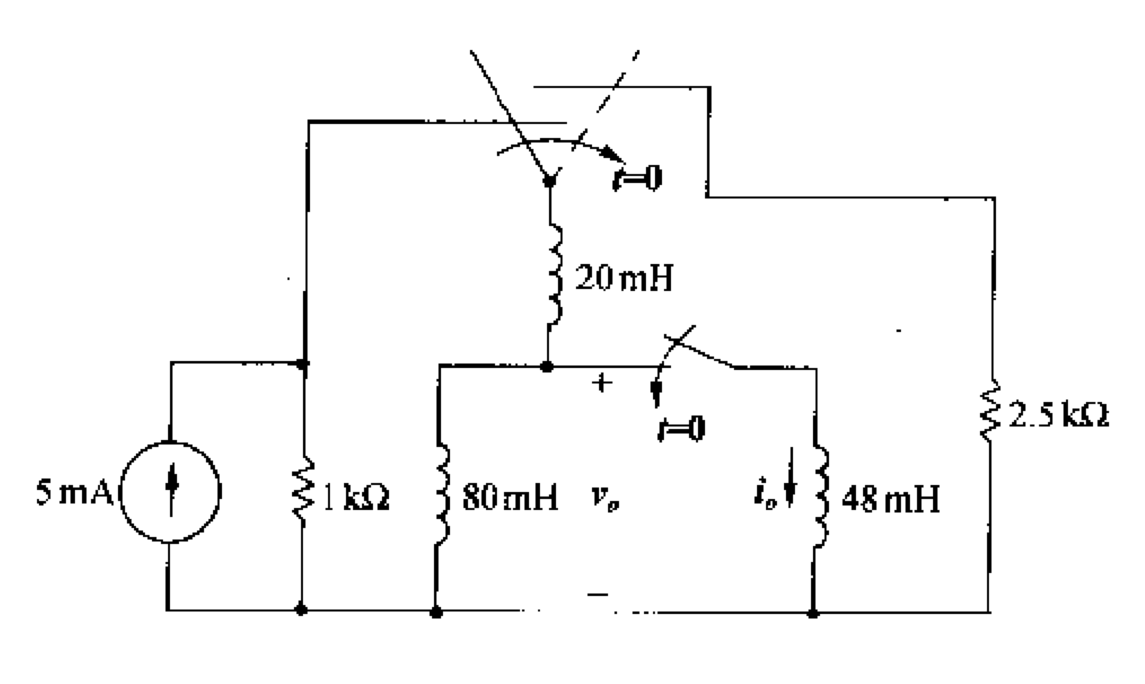


图 P7.11

7.12 图 P7.11 所示电路，求：

(a) 消耗在 2.5 kΩ 电阻中的总能量。

(b) 存储在理想电感中的能量。

P M7.13 图 P7.13 电路中的开关已经打开长时间。在 $t=0$ 时开关关闭。

(a) 确定 $i_o(0^+)$ 和 $i_o(\infty)$。

(b) 确定 $i_o(t)$，　$t \geq 0$。

(c) 开关关闭后多少毫秒，电流将等于 3.8 A?

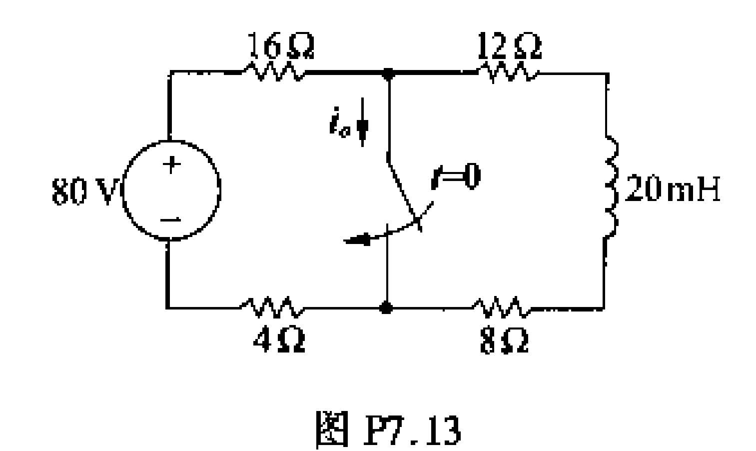


图 P7.13

P7.14 在图 P7.14 电路中，开关已经在位置 a 长时间。在 $t=0$ 时，它瞬间从 a 移到 b。

(a) 求 $v_o(t)$，　$t \geq 0^+$。

(b) 释放到 1 kΩ 电阻的总能量是多少?

(c) 释放(b) 求出的能量的 95%，需多少时间常数?

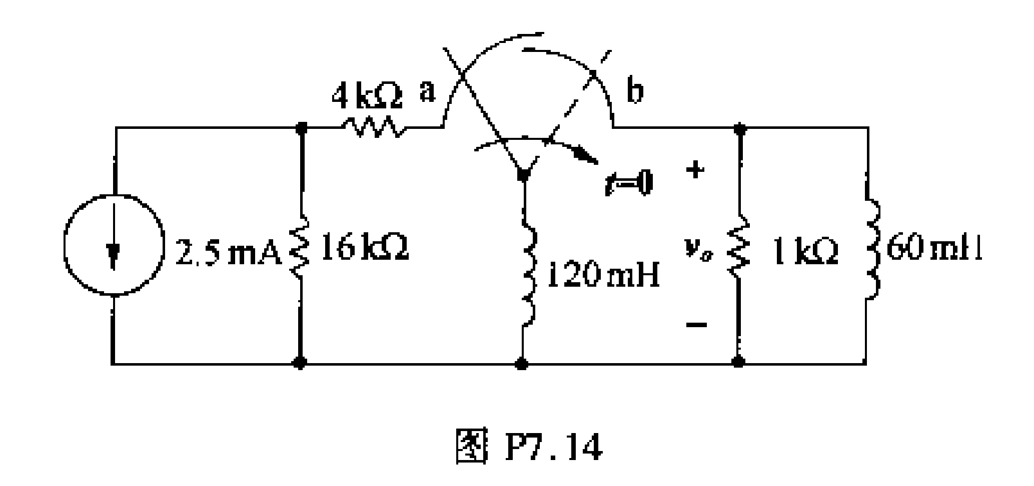


图 P7.14

P7.15 在图 P7.15 电路中，开关已经在位置 1 长时间。在 $t=0$ 时，开关瞬间移到位置 2。求 $t \geq 0^+$ 时的 $v_o(t)$。

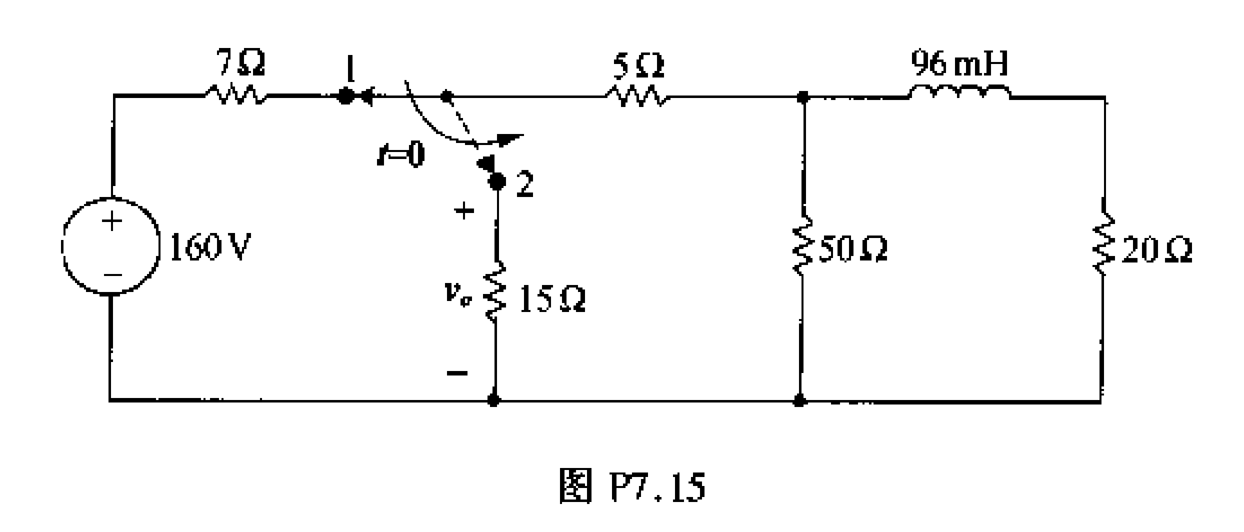


图 P7.15

7.16 对于图 P7.15 电路，存储在电感中初始能量的百分之多少最后消耗在 20 Ω 电阻中？

7.17 在图 P7.17 电路中，开关已经在位置 1 长时间。在 $t=0$ 时，开关瞬间移到位置 2。在 10 μs 的时间内，存储在 20 mH 电感中初始能量的 50% 消耗在 R 中，求 R。

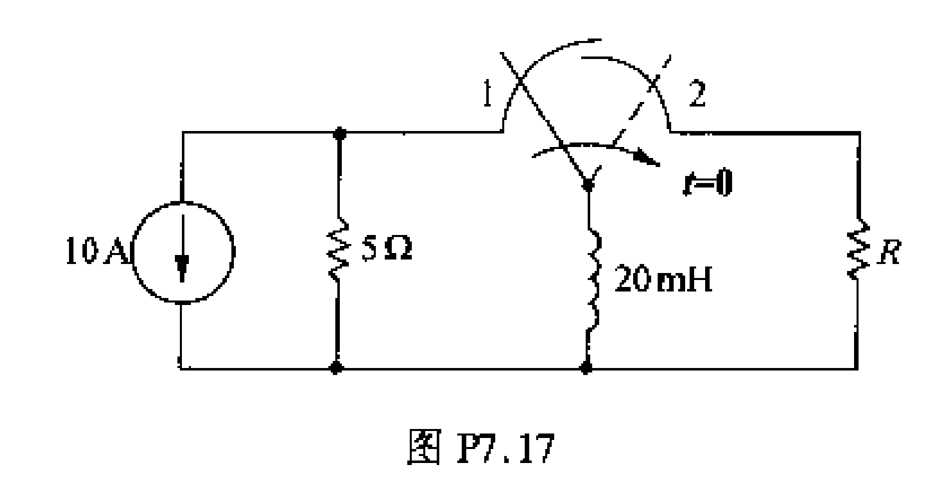


图 P7.17

7.18 在图 P7.17 电路中，I_g 代表直流电流源，σ 为电感中初始能量经过 t_o 秒所消耗的部分，L 为电感。

(a) 证明：

$$R=\frac{L\ln[1/(1-\sigma)]}{2t_o}$$

(b) 用习题 7.17 所求的 R 值检验(a) 表达式。

7.19 在图 P7.19 电路中，开关在 $t=0$ 打开之前已经关闭长时间。

(a) 在 $t=5$ ms 时，$v_o(t)$ 等于 0.25 $v_o(0^+)$，求 L 的值。

(b) 求 $t=5$ ms 时，已消耗在 50 Ω 电阻中的存储能量百分数。

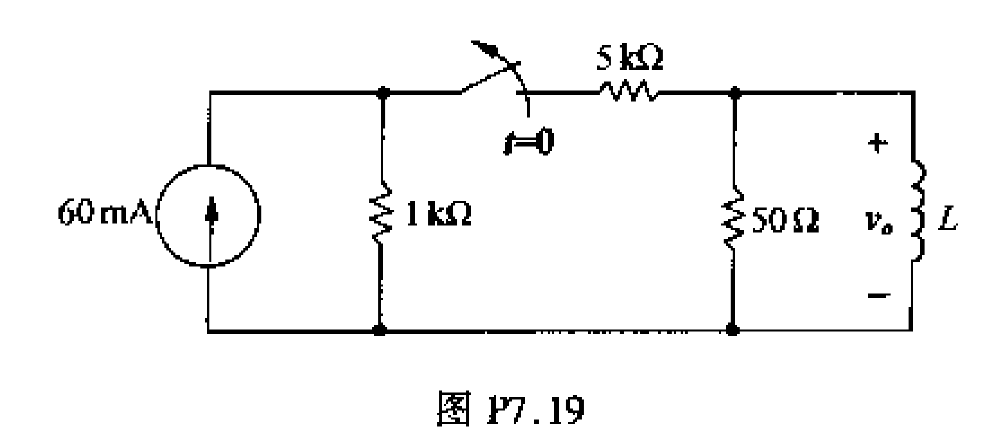


图 P7.19

7.20 图 P7.20 电路中的两个开关同步。开关在 $t=0$ 打开之前，已经关闭长时间。

(a) 开关打开后多少毫秒，消耗在 4 kΩ 电阻中的能量是存储在 6 H 电感中初始能量的 10%？

(b) 在(a) 所计算的时间中，存储在电感中的总能量已经消耗了百分之多少？

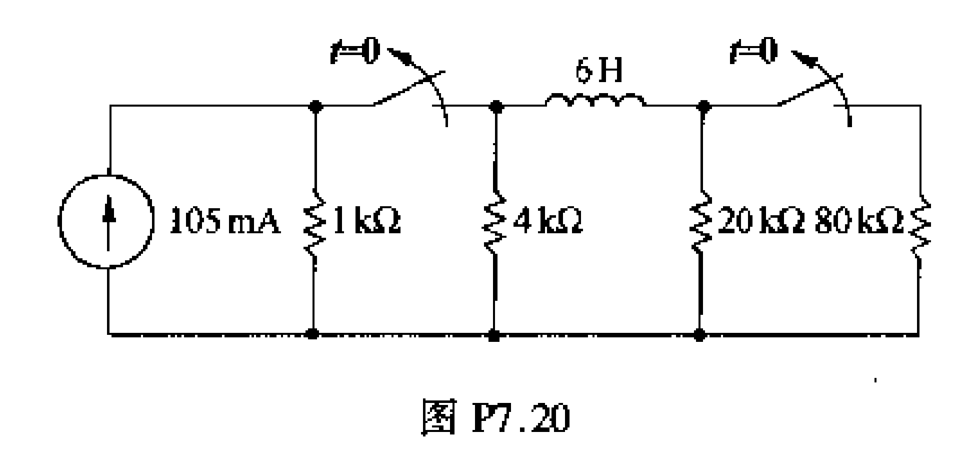


图 P7.20

7.21 在图 P7.21 电路中，电压和电流表达式是：

$$v = 100e^{-1000t}\ \text{V}, \quad t \geqslant 0。$$
$$i = 5e^{-1000t}\ \text{mA}, \quad t \geqslant 0^+ 。$$

求：

(a) R。

(b) C。

(c) τ(以毫秒为单位)。

(d) 存储在电容中的初始能量。

(e) 消耗存储在电感中初始能量的 80%，需多少毫秒？

P7.22 在图 P7.22 电路中，开关已经在位置 a 长时间，在 $t=0$ 时，开关移到位置 b。计算：

(a) $t \geqslant 0^+$ 时的 i, v_1 和 v_2。

(b) 在 $t=0$ 时，存储在电容中的能量。

(c) 如果开关在位置 b 保持一定时间，存储在电路中的能量和消耗在 5 kΩ 电阻中的总能量。

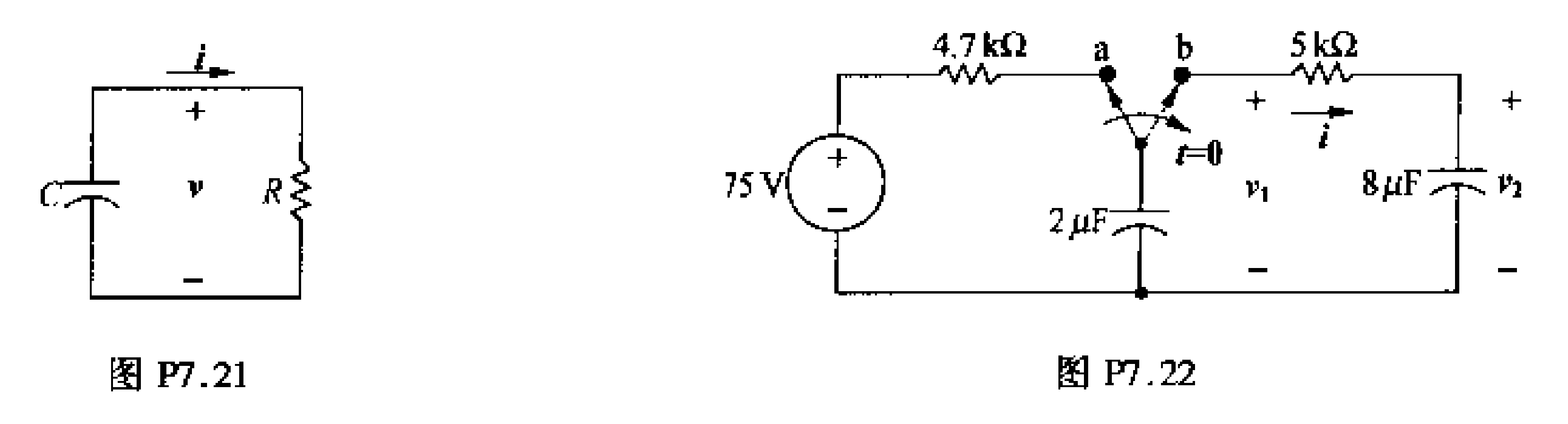


图 P7.21　　　　图 P7.22

7.23 在图 P7.23 电路中，开关关闭时，并联电容的电压是 30 V，在 200 nF 电容上的电压是 10 V。

(a) 消耗在 24 kΩ 电阻的能量是存储在三个电容中初始能量的百分之多少？

(b) 对于 625 kΩ 和 15 kΩ 电阻重复(a)。

(c) 初始能量的百分之多少被电容吸收？

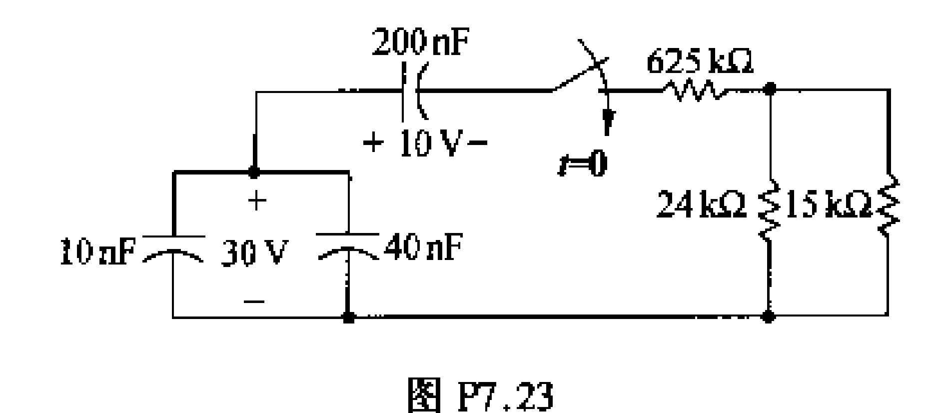


图 P7.23

7.24 在图 P7.24 电路中，开关关闭时电容被充电。

(a) 求 $t \geqslant 0^+$ 时的 $v_o(t)$。

(b) 消耗在 25 kΩ 电阻的能量是存储在三个电容中总能量的百分之多少？

(c) 求 $t \geqslant 0$ 时的 $v_1(t)$。

(d) 求 $t \geqslant 0$ 时的 $v_2(t)$。

(e) 求理想电容吸收的能量(以毫焦耳为单位)。

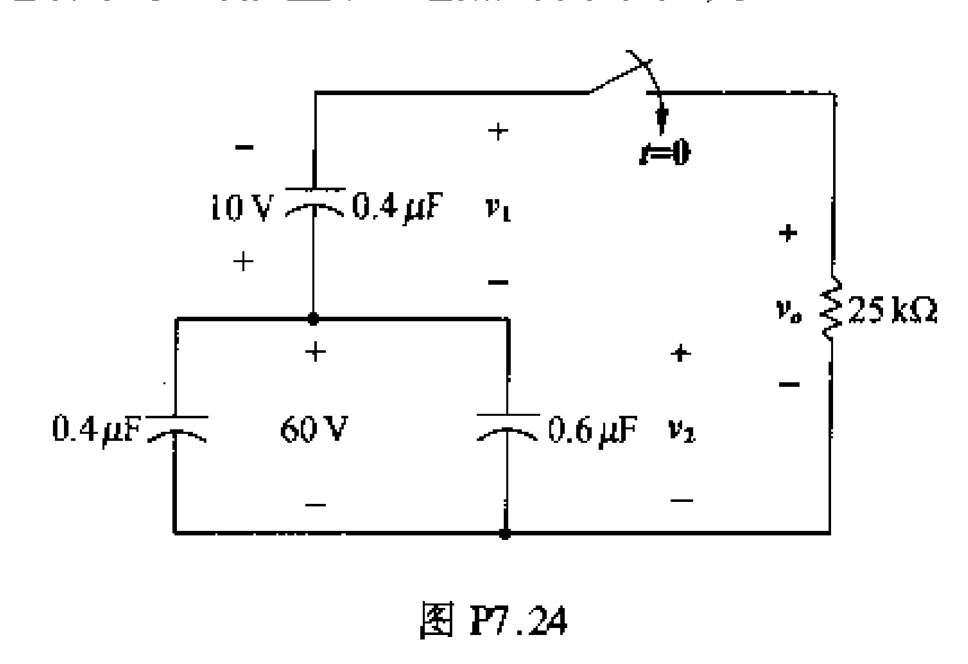


图 P7.24

7.25 在图 P7.25 电路中，开关已经在位置 x 长时间，在 $t = 0$ 开关瞬间移到位置 y。

(a) 求 $t > 0$ 时，时间常数为 1 ms 时的 α。

(b) 根据(a) 中所求的 α，求 v_Δ。

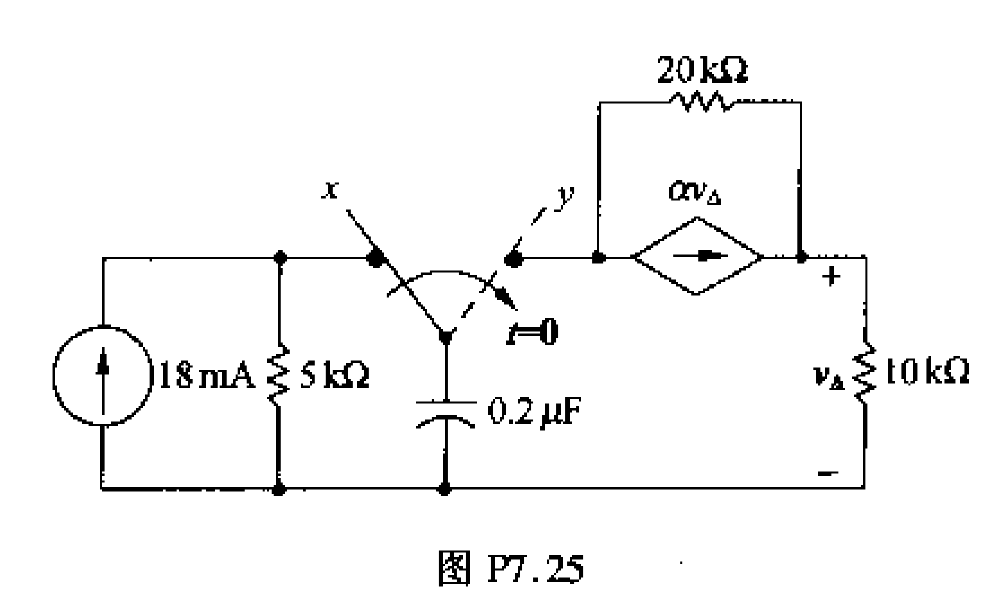


图 P7.25

7.26 (a) 在问题 7.25 中，电容放电放至 0 V 这段时间，非独立电流源产生的能量是多少微焦耳？

(b) 证明 $t \geqslant 0$ 时，电容电路存储和产生的总能量等于消耗的总能量。

7.27 在图 P7.27 电路中，两个开关同时操作，即它们同时打开或关闭。开关在 $t = 0$ 打开前，关闭了长时间。

(a) 开关打开后 2 ms，已消耗在 12 kΩ 电阻中的能量是多少微焦耳？

(b) 消耗初始存储能量的 95% 需多长时间？

P7.28 在图 P7.28 电路中两个开关已经关闭长时间。在 $t = 0$ 时，两个开关同时打开。

(a) 求 $t \geqslant 0^+$ 时的 $i_o(t)$。

(b) 求 $t \geqslant 0$ 时的 $v_o(t)$。

(c) 计算电路吸收的能量(以微焦耳为单位)。

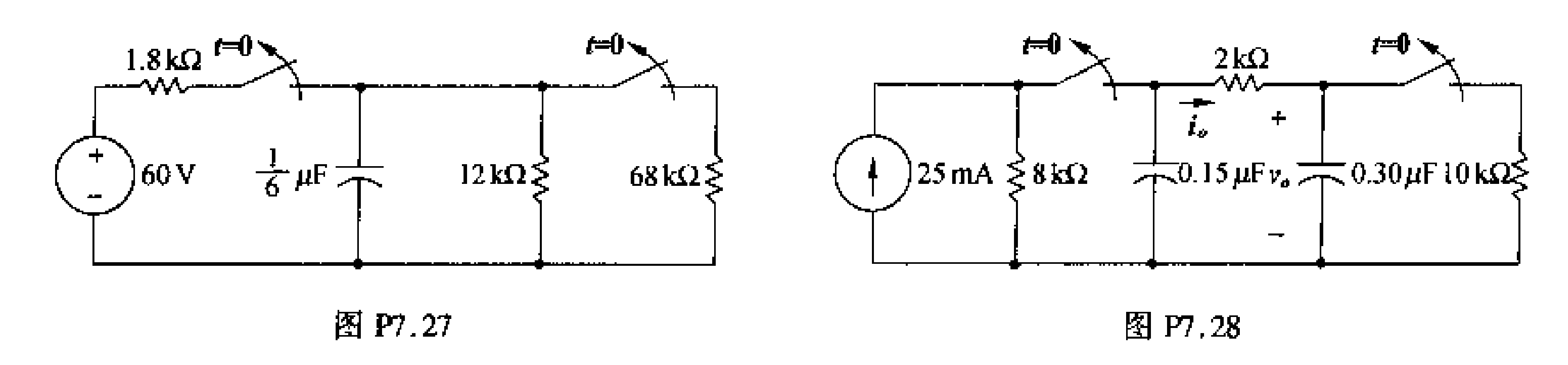


图 P7.27　　图 P7.28

7.29 在图 P7.29 电路中，开关已在位置 a 长时间。在 $t=0$ 时开关移到位置 b。

(a) 求 $t\geqslant 0^+$ 时的 $i_o(t)$。

(b) 在开关移动 250 μs 后，存储在电容中初始能量的百分之多少消耗在 4 kΩ 电阻中？

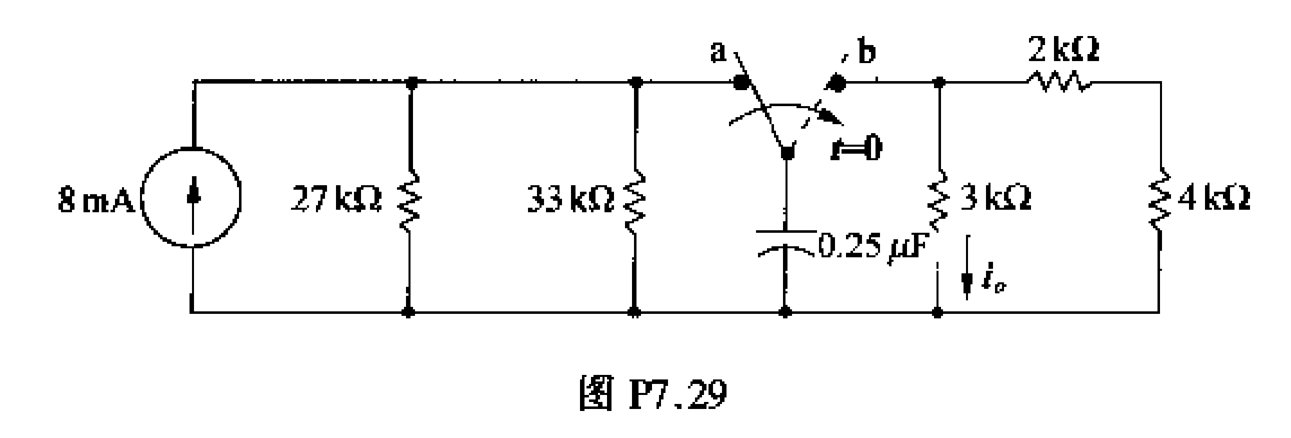


图 P7.29

P7.30 图 P7.30 电路已运行长时间，一个螺丝起子无意中连接了 a，b 端。假设螺丝起子电阻忽略不计。

(a) 求在 $t=0^+$ 和 $t=\infty$ 时，螺丝起子中的电流。

(b) 推导 $t\geqslant 0^+$ 时螺丝起子的电流表达式。

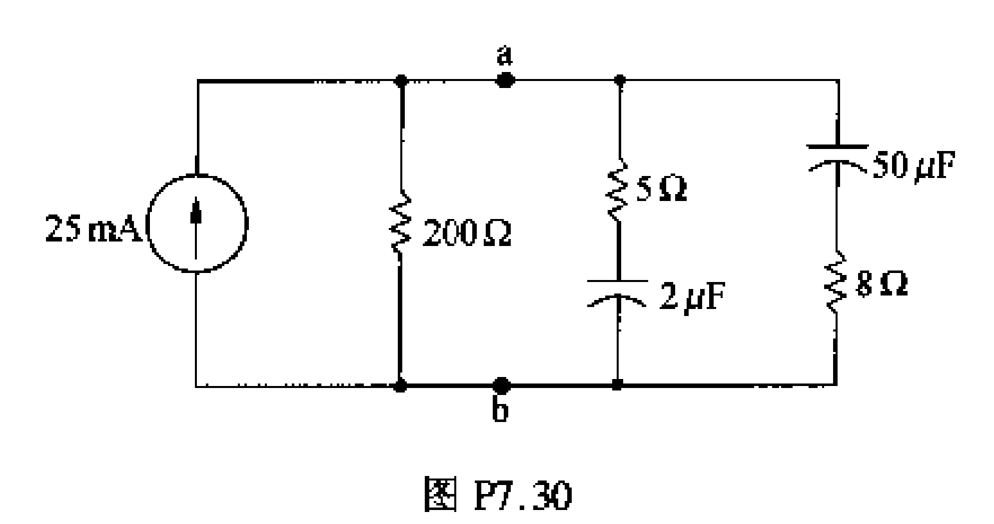


图 P7.30

P7.31 在图 P7.31 电路中，开关已在位置 1 长时间，在 $t=0$ 时移到位置 2。求 $t\geqslant 0^+$ 时的 $i_o(t)$。

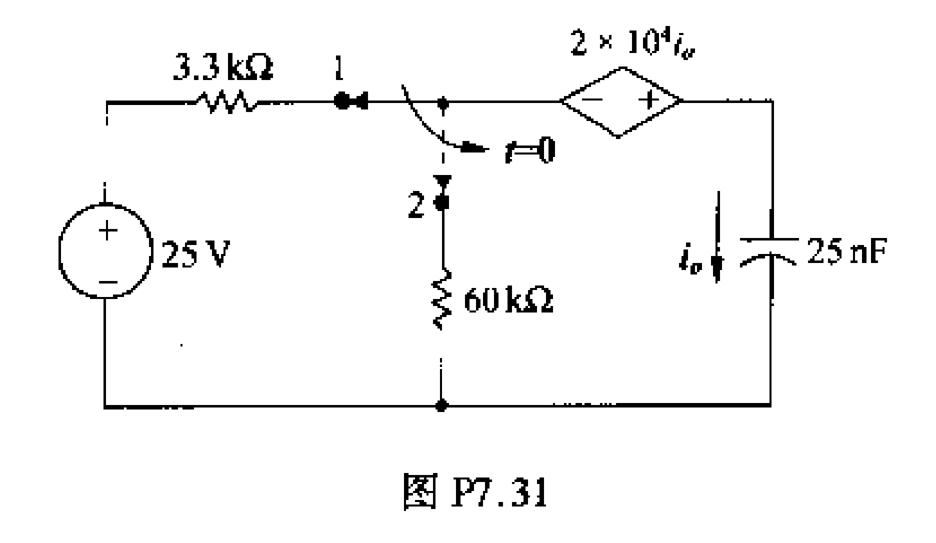


图 P7.31

P7.32 在图 P7.32 电路中，开关打开长时间，在 $t=0$ 时开关关闭。

(a) 求 $i_1(0^-)$和 $i_2(0^-)$。

(b) 求 $i_1(0^+)$和 $i_2(0^+)$。

(c) 解释为什么 $i_1(0^-)=i_1(0^+)$。

(d) 解释为什么 $i_2(0^-)\neq i_2(0^+)$。

(e) 求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_1(t)$。

(f) 求 $t\geqslant 0^+$ 时的 $i_2(t)$。

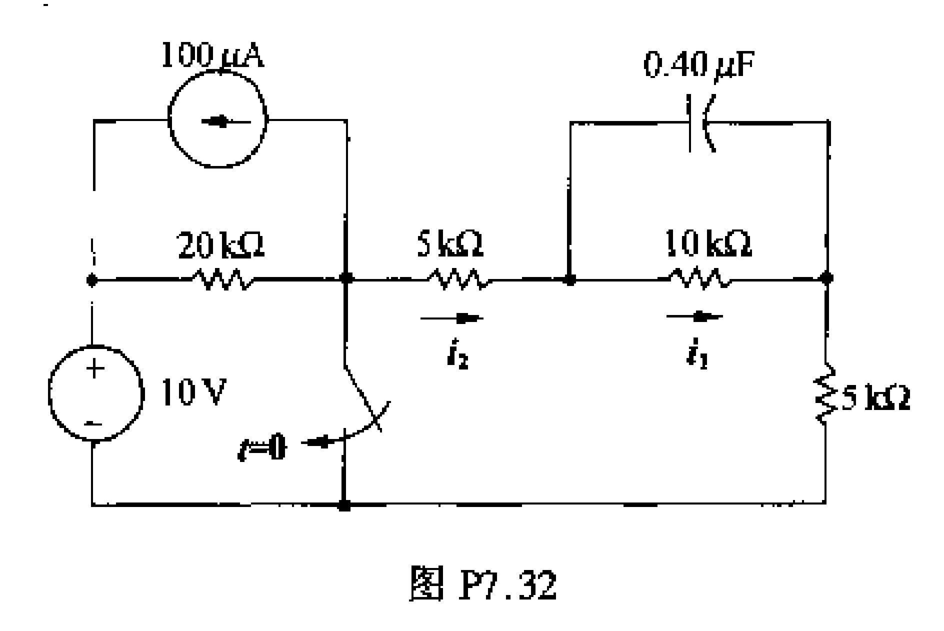


图 P7.32

P M7.33 在图 P7.33 电路中,开关已关闭长时间。在 $t=0$ 时开关打开。求 $t\geqslant 0^+$ 时的 $i_o(t)$ 和 $v_o(t)$表达式。

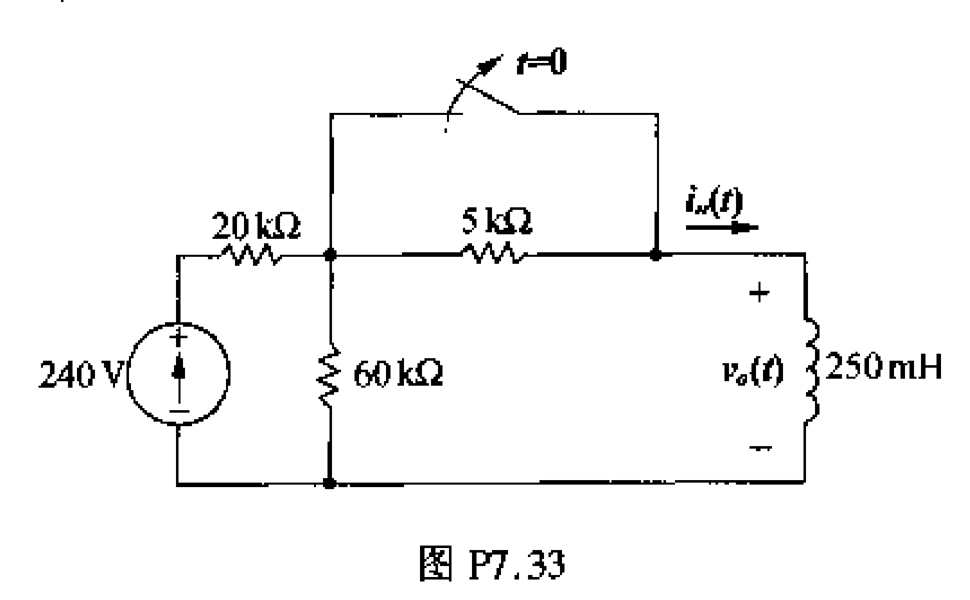


图 P7.33

7.34 在图 P7.34 电路中开关已关闭长时间。在 $t=0$ 时开关打开。对于 $t\geqslant 0^+$,

(a) 求作为 I_g, R_1, R_2 和 L 函数的 $v_o(t)$。

(b) 为了验证(a) 中所求表达式,用它求图 P7.33 电路中的 $v_o(t)$。

(c) 解释随着 R_2 越来越大,$v_o(t)$会发生什么变化?

(d) 求作为 I_g, R_1, R_2 和 L 函数的 v_{sw}。

(e) 解释随着 R_2 越来越大,v_{sw}会发生什么变化?

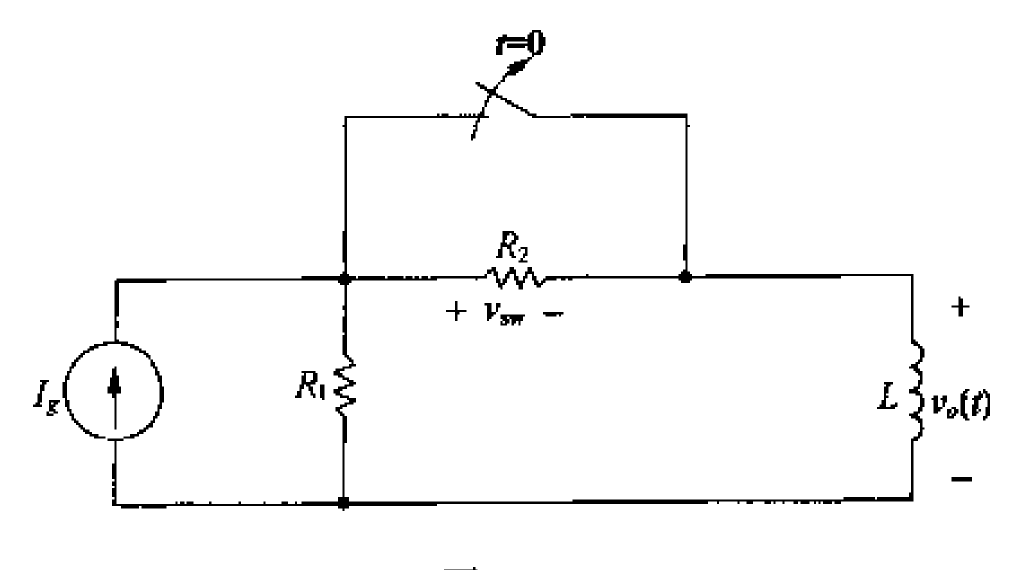


图 P7.34

7.35 在图 P7.35 电路中，开关已关闭长时间。一个学生突然打开开关并报告老师，当开关打开时，在开关端出现持续电弧，同时，与线圈并联的电压表毁坏。在习题 3.34 电路分析的基础上，请向学生解释这种现象为什么会发生？

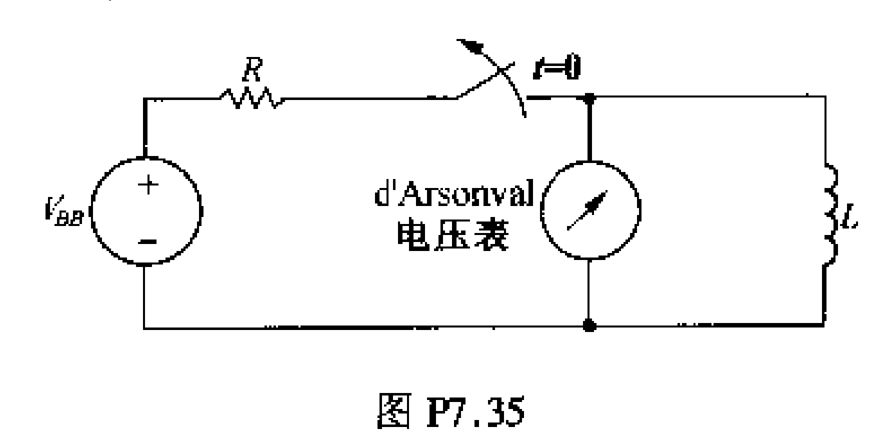


图 P7.35

P7.36 在图 P7.36 电路中，开关已在位置 1 长时间。在 $t=0$ 时，开关瞬间移到位置 2。开关动作后需多少毫秒，v_o 等于 −80 V？

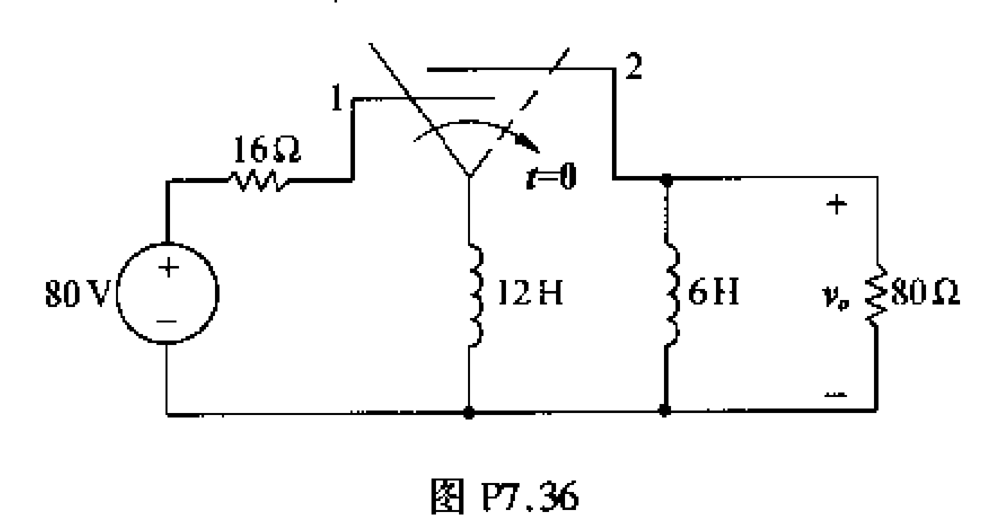


图 P7.36

7.37 对于图 P7.36 电路，求（以焦耳为单位）：

(a) 消耗在 80 Ω 电阻中的总能量。

(b) 电感吸收的能量。

(c) 存储在电感中的初始能量。

P7.38 在图 P7.38 电路中，在 $t=0$ 打开前开关已关闭长时间。对于 $t \geqslant 0^+$，求：

(a) $v_o(t)$。

(b) $i_o(t)$。

(c) $i_1(t)$。

(d) $i_2(t)$。

(e) $i_1(0^+)$。

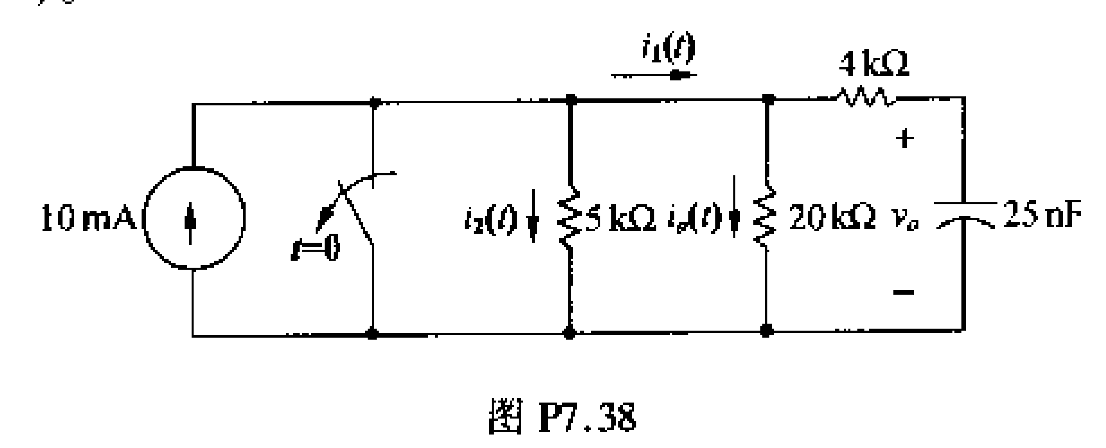


图 P7.38

7.39 在图 7.16 电路中，电感端的电流和电压是：

$$i(t) = (4 + 4e^{-40t})\ \text{A}, \quad t \geqslant 0。$$

$$v(t) = -80e^{-40t}\ \text{V}, \quad t \geqslant 0^+。$$

(a) 说明 V_s，R，I_0 和 L 的数值。

(b) 当开关关闭多少毫秒,存储在电感中的能量达到 9 J?

P7.40 在图 P7.40 电路中,开关已在位置 x 长时间。在 10 nF 电容上的初始电荷是零。在 $t=0$ 时开关瞬间移到位置 y。

(a) 求 $t \geq 0^+$ 时的 $v_o(t)$。

(b) 求 $t \geq 0$ 时的 $v_1(t)$。

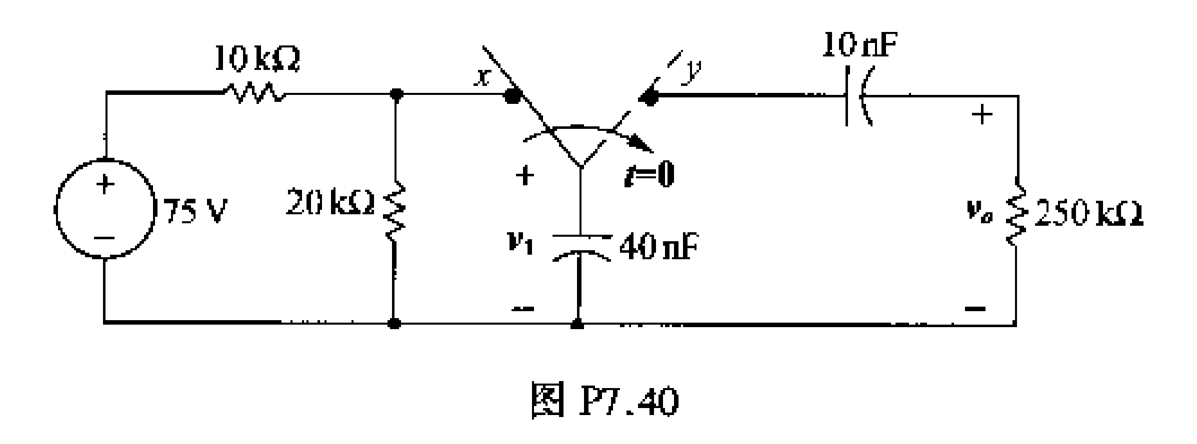


图 P7.40

7.41 对于图 P7.40 电路,求(以焦耳为单位):

(a) 释放到 250 kΩ 电阻中的能量。

(b) 电容吸收的能量。

(c) 存储在电容中的初始能量。

P7.42 图 P7.42 电路中的开关,在 $t=0$ 关闭前已打开长时间。求 $t \geq 0$ 时的 $i_o(t)$。

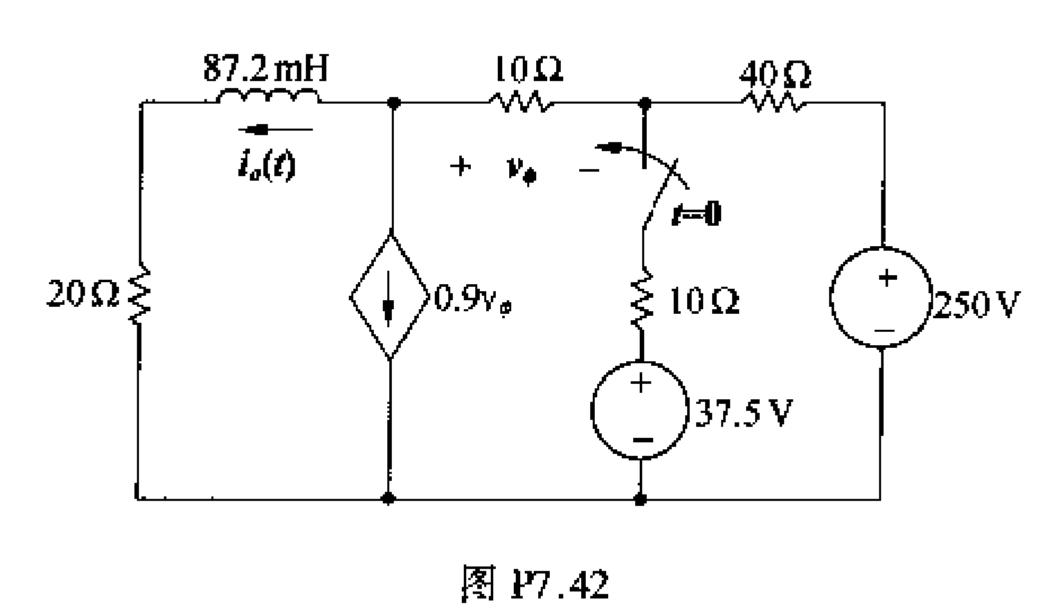


图 P7.42

P7.43 在图 P7.43 电路中,开关已在位置 a 长时间。在 $t=0$ 时开关瞬间移到位置 b。

(a) 求 $t \geq 0$ 时的 $i_o(t)$表达式。

(b) 求 $t \geq 0^+$ 时的 $v_o(t)$表达式。

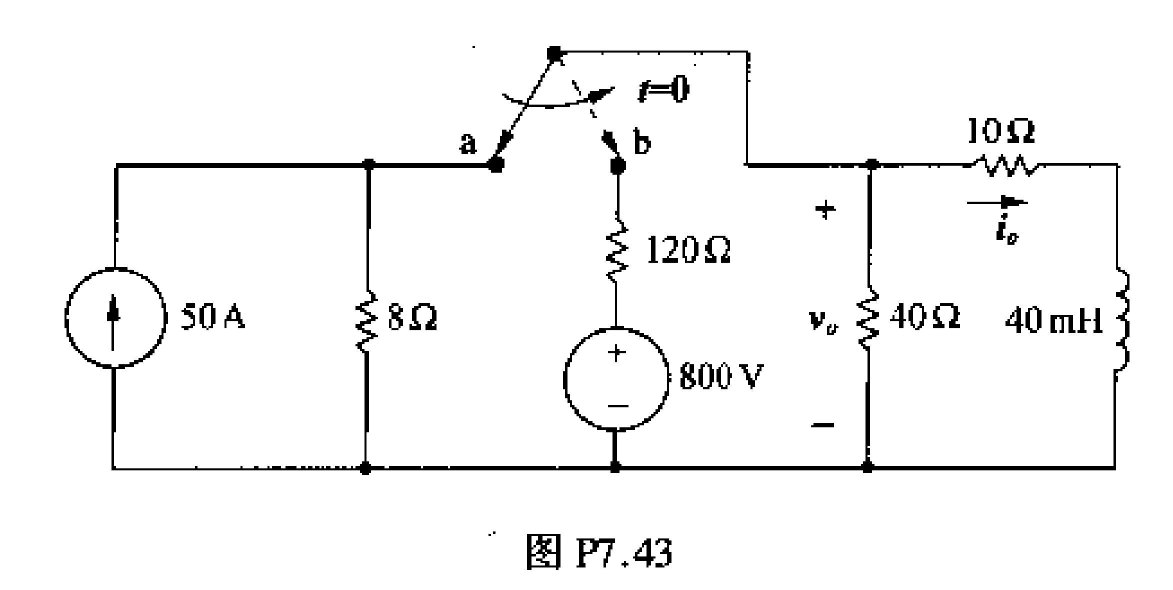


图 P7.43

P7.44 图 P7.44 电路已运行长时间。在 $t=0$ 时,电压源极性反向,电流源从 3 mA 下降到 2 mA。求 $t \geq 0$ 时的 $v_o(t)$。

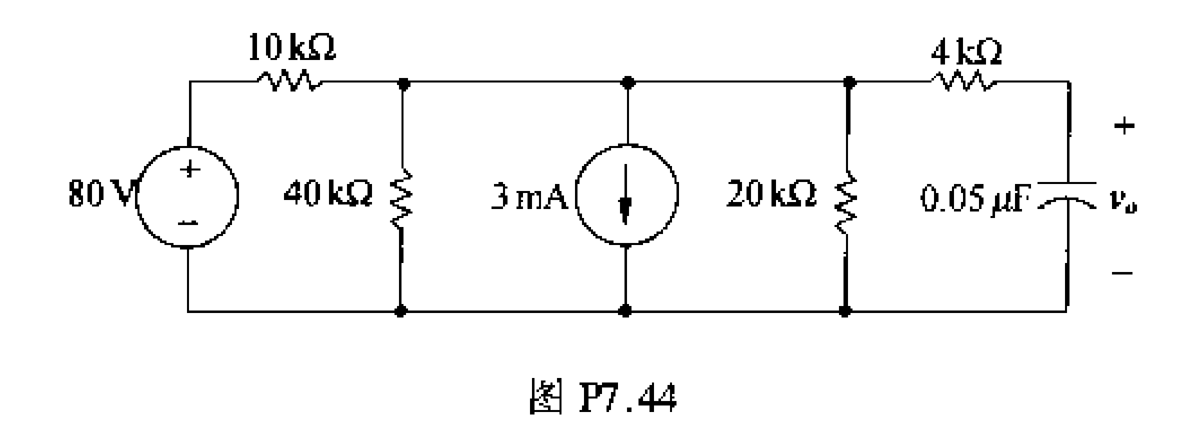


图 P7.44

P7.45　在图 P7.45 电路中，开关在 t = 0 关闭前已打开长时间。求 $t \geq 0^+$ 时的 $v_o(t)$。

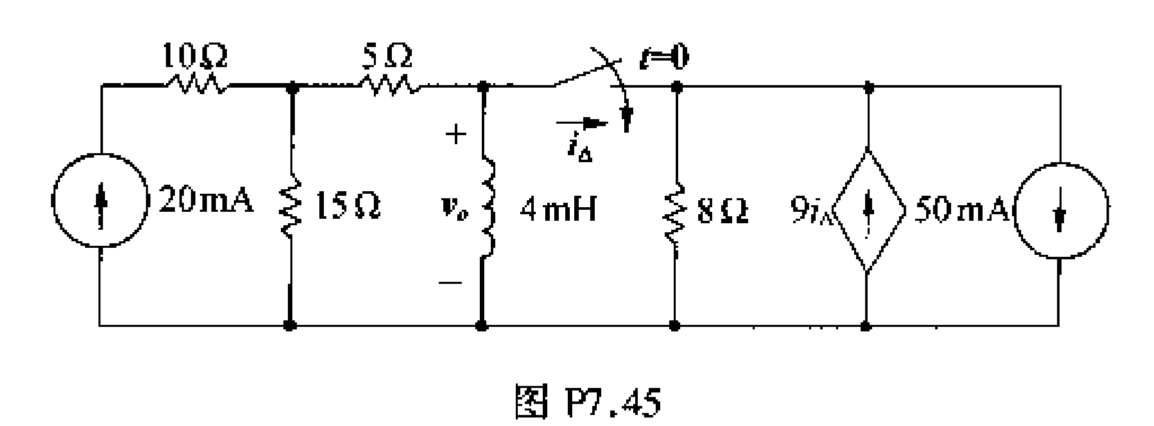


图 P7.45

P7.46　图 P7.46 电路中的开关，在 $t = 0$ 打开前已关闭长时间。

(a) 求 $t \geq 0$ 时，$i_L(t)$ 和 $v_o(t)$ 的表达式。

(b) 求 $i_L(0^+)$ 和 $v_o(0^+)$ 的数值。

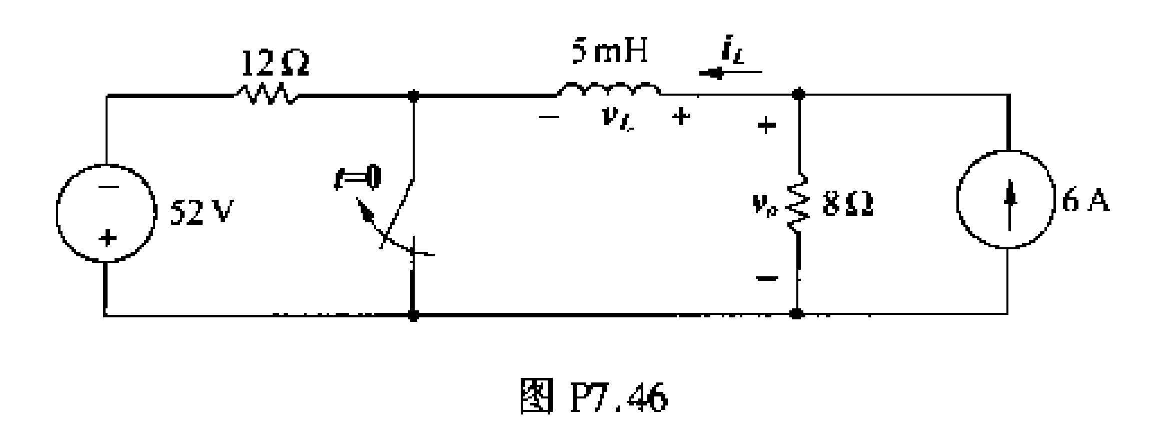


图 P7.46

P7.47　在图 P7.47 电路中，断前接通型开关已在位置 a 长时间。在 $t = 0$ 时，开关瞬间移到位置 b。求：

(a) $t \geq 0^+$ 时的 $v_o(t)$。

(b) $t \geq 0$ 时的 $i_1(t)$。

(c) $t \geq 0$ 时的 $i_2(t)$。

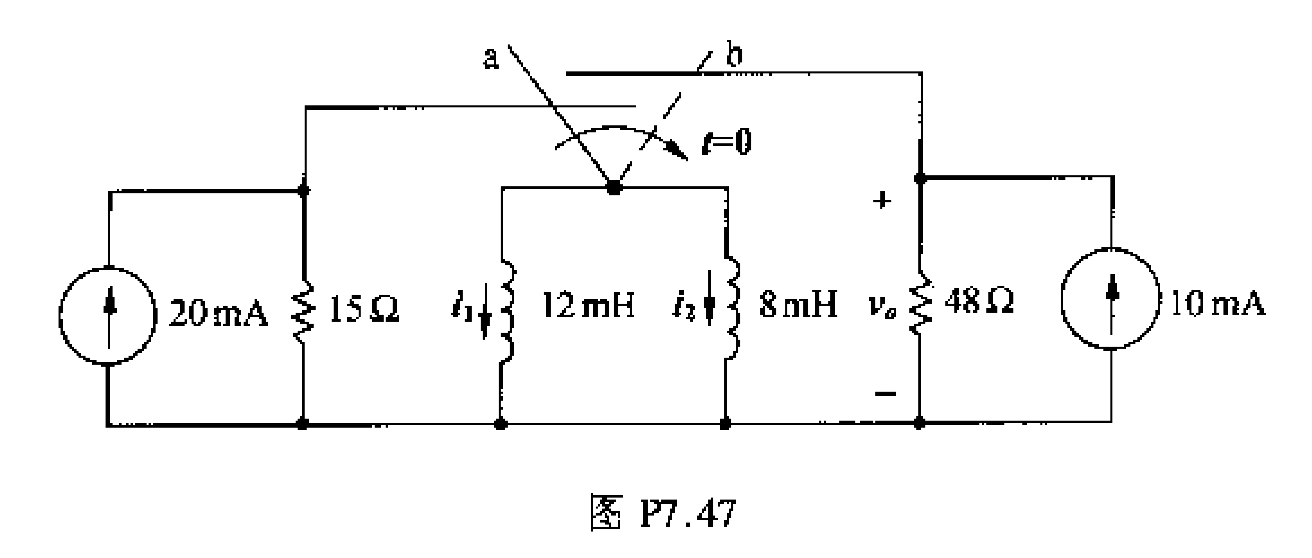


图 P7.47

7.48　在图 7.21 电路中，电容端的电流和电压是：

$$i(t) = 3e^{-2500t}\ \text{mA},\ t \geq 0^+。$$

$$v(t)=(40-24e^{-2500t})\ \text{V},\ t\geq 0。$$

(a) 指出 I_s, R, V_0, C 和 τ 的数值。

(b) 当开关关闭后多少毫秒,存储在电容中的能量达到它终值的 81%?

7.49 图 P7.49 电路中的开关在关闭时,无能量存储在电容 C_1 和 C_2 中。

(a) 对于 $t\geq 0$,推导 $v_1(t)$和 $v_2(t)$表达式。

(b) 用(a) 推导的表达式求 $v_1(\infty)$和 $v_2(\infty)$。

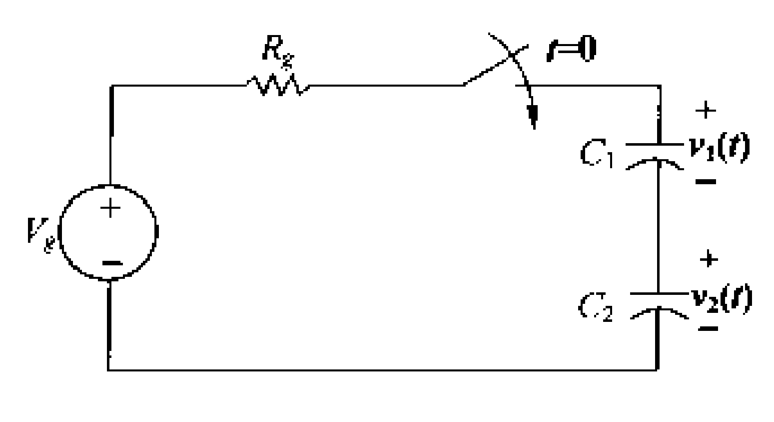


图 P7.49

7.50 图 P7.50 电路中的开关在打开时,无能量存储在电感 L_1 和 L_2 中。

(a) 对于 $t\geq 0$,推导电流 $i_1(t)$和 $i_2(t)$表达式。

(b) 用(a) 推导的表达式求 $i_1(\infty)$和 $i_2(\infty)$。

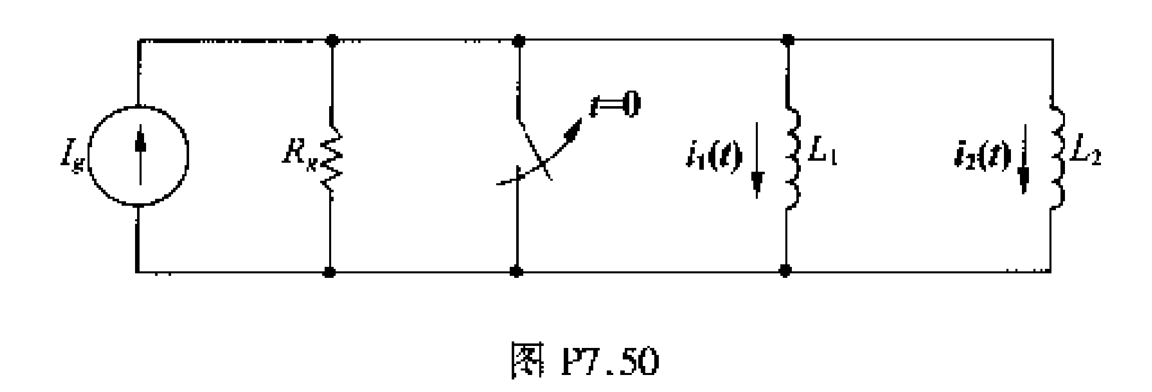


图 P7.50

P7.51 在图 P7.51 电路中,开关在 $t=0$ 关闭前已打开长时间。求 $t\geq 0^+$ 时的 $v_o(t)$。

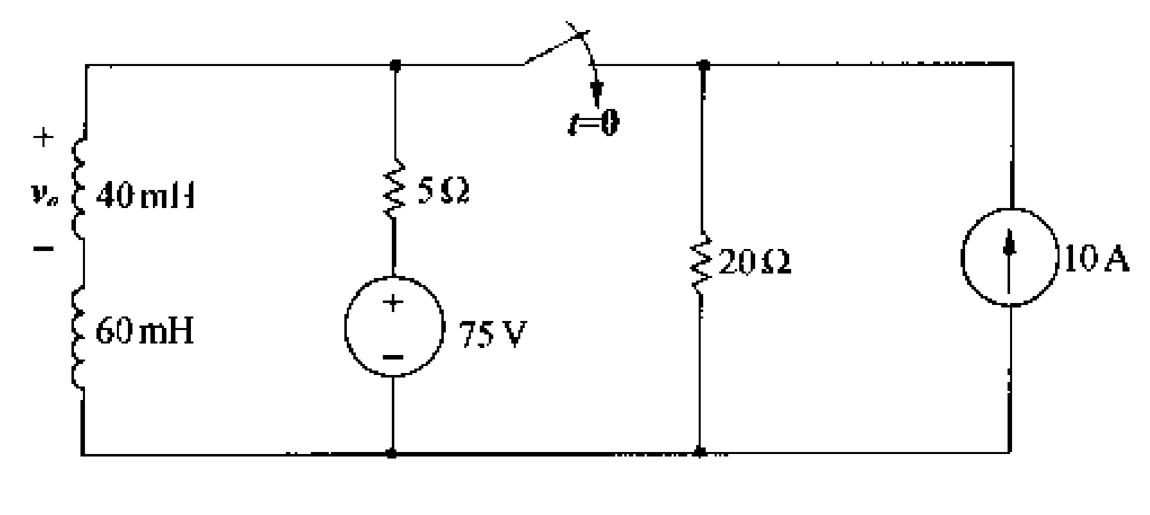


图 P7.51

P7.52 在图 P7.52 电路中开关在 $t=0$ 打开前已关闭长时间。求:

(a) $i_o(t)$的初始值是多少?

(b) $i_o(t)$的终值是多少?

(c) $t\geq 0$ 时,电路的时间常数是多少?

(d) $t\geq 0^+$ 时,$i_o(t)$的表达式。

(e) $t\geq 0^+$ 时,$v_o(t)$的表达式。

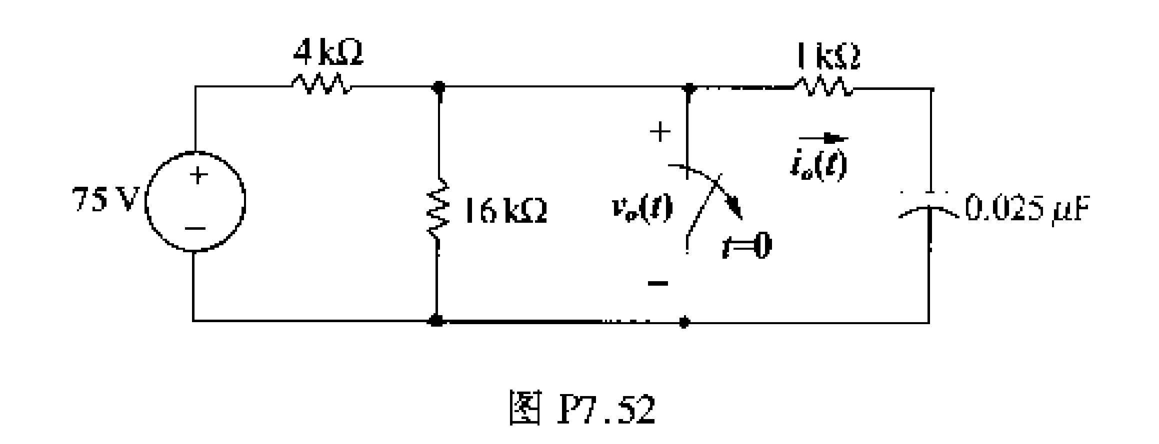


图 P7.52

P7.53 在图 P7.53 电路中，开关已在 OFF 位置长时间。在 $t=0$ 开关瞬间移到位置 ON。求 $t\geqslant 0$ 时的 $v_o(t)$。

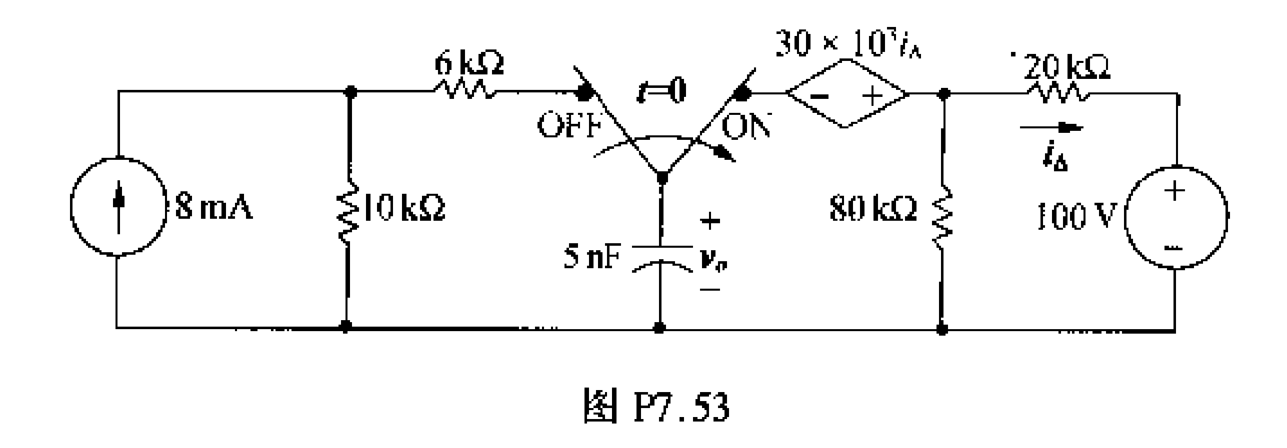


图 P7.53

P7.54 在图 P7.53 电路中，开关已在 ON 位置长时间。在 $t=0$ 时，开关瞬间移到位置 OFF。求 $t\geqslant 0$ 时的 $v_o(t)$。

P7.55 在图 P7.55 电路中，开关关闭长时间，$t=0$ 时打开。开关打开后多少毫秒，存储在电容中的能量是它终值的 90%？

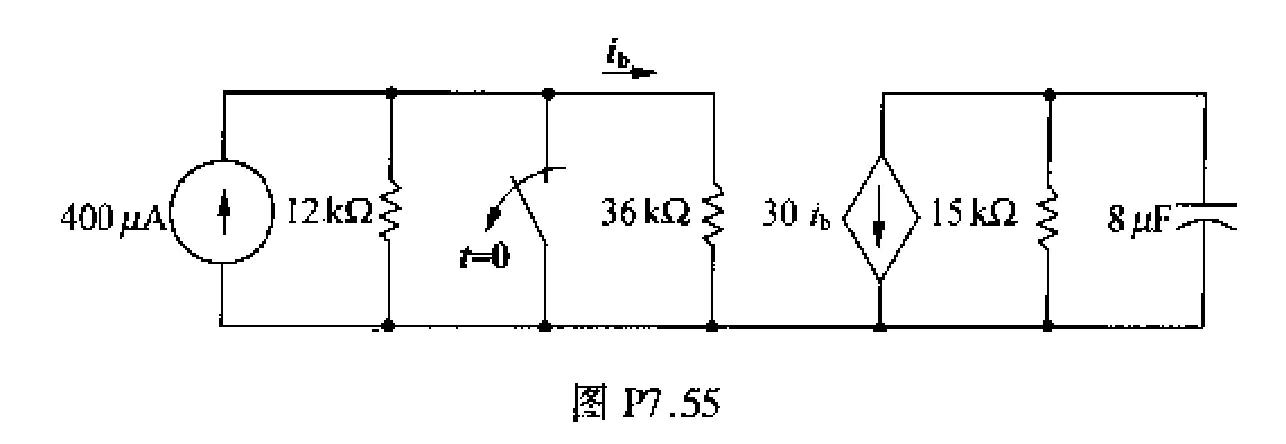


图 P7.55

P7.56 在图 P7.56 电路中，开关已在位置 a 长时间。在 $t=0$ 时，开关瞬间移到位置 b。求 $t\geqslant 0^-$ 时的 $v_o(t)$ 和 $i_o(t)$。

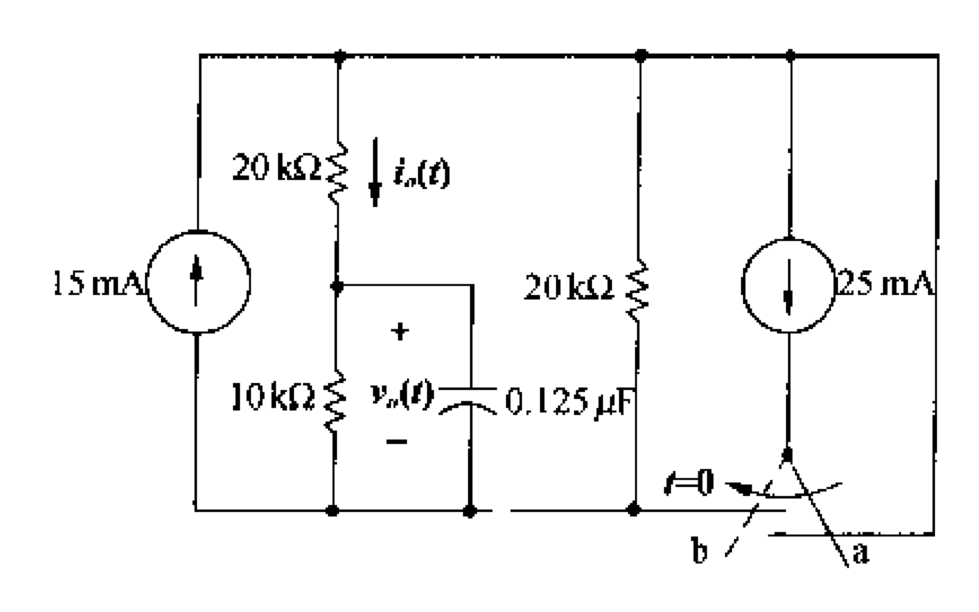


图 P7.56

P7.57 在图 P7.57 电路中，开关已在位置 a 长时间。在 $t=0$ 时，开关瞬间移到位置 b。

求 $t \geqslant 0^+$ 时,

(a) $v_o(t)$。

(b) $i_o(t)$。

(c) $v_1(t)$。

(d) $v_2(t)$。

(e) 当 $t \to \infty$ 时,电容吸收的能量。

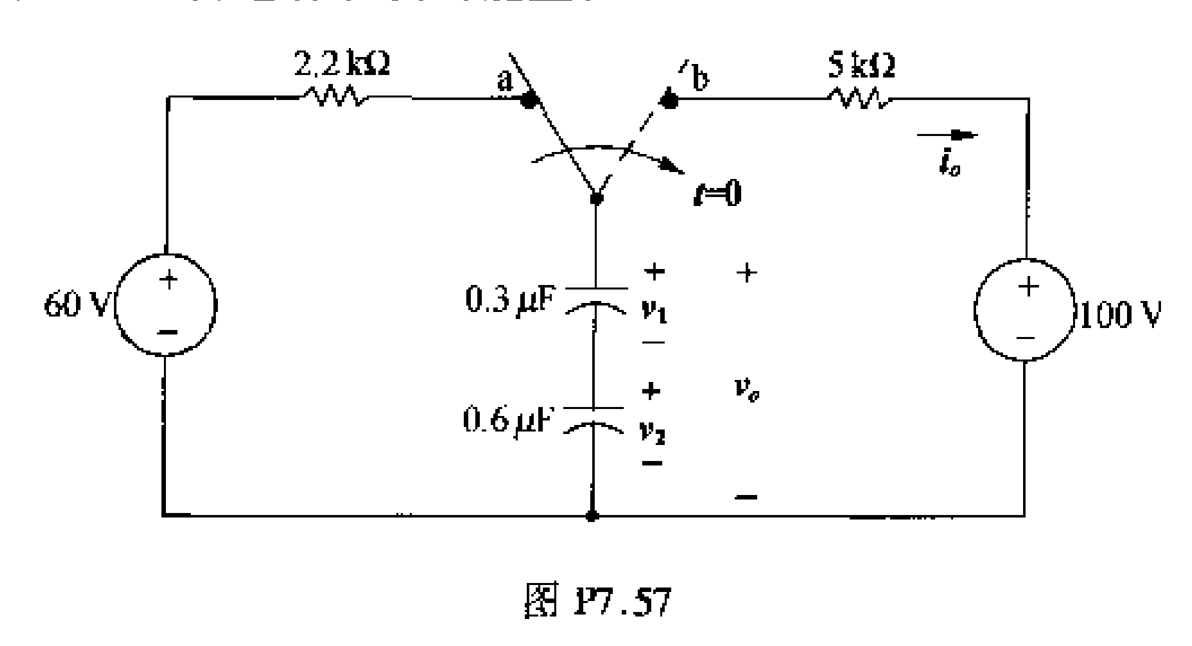


图 P7.57

P7.58 在图 P7.58 电路中,开关已在位置 a 长时间。在 $t = 0$ 开关瞬间移到位置 b。求 $t \geqslant 0^+$ 时,

(a) $v_o(t)$。

(b) $i_o(t)$。

(c) $v_g(t)$。

(d) $v_g(0^+)$。

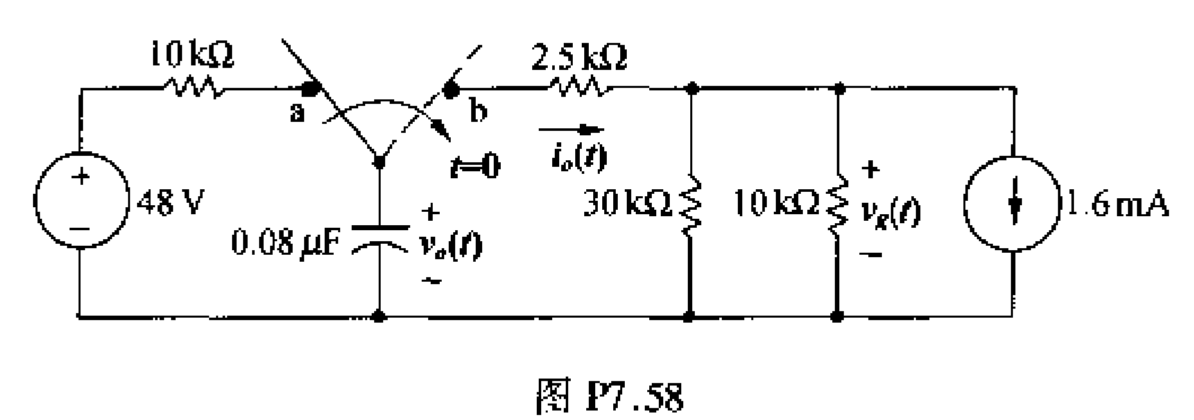


图 P7.58

7.59 如果互感减到零,重复例 7.10 中的(a) 和(b)。

P7.60 图 P7.60 电路中,开关关闭时无能量被存储。求:

(a) $t \geqslant 0$ 时的 $i_o(t)$。

(b) $t \geqslant 0$ 时的 $v_1(t)$。

(c) $t \geqslant 0$ 时的 $v_2(t)$。

(d) $t \geqslant 0$ 时的 $i_2(t)$对于已知电路特性,答案有意义吗?

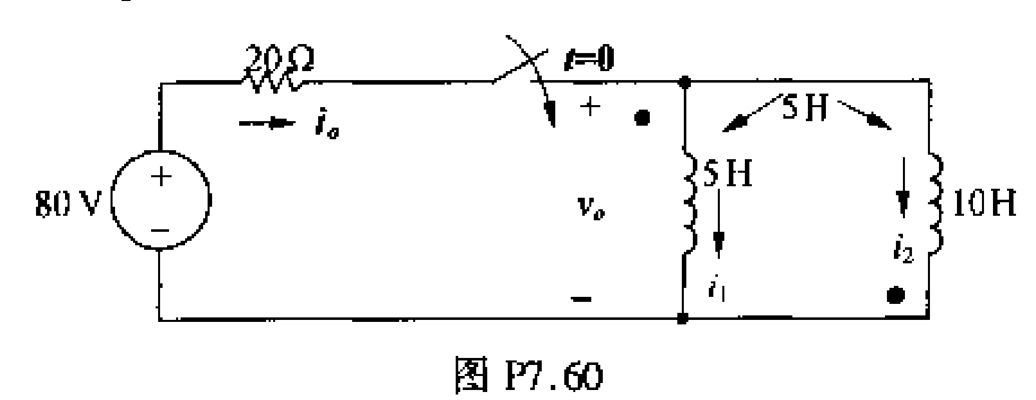


图 P7.60

P7.61 图 P7.61 电路中，开关关闭时无能量存储。求：

(a) $t\geqslant 0$ 时的 $i(t)$。

(b) $t\geqslant 0$ 时的 $v_1(t)$。

(c) $t\geqslant 0$ 时的 $v_2(t)$。

(d) 对于已知电路特性，答案有意义吗？

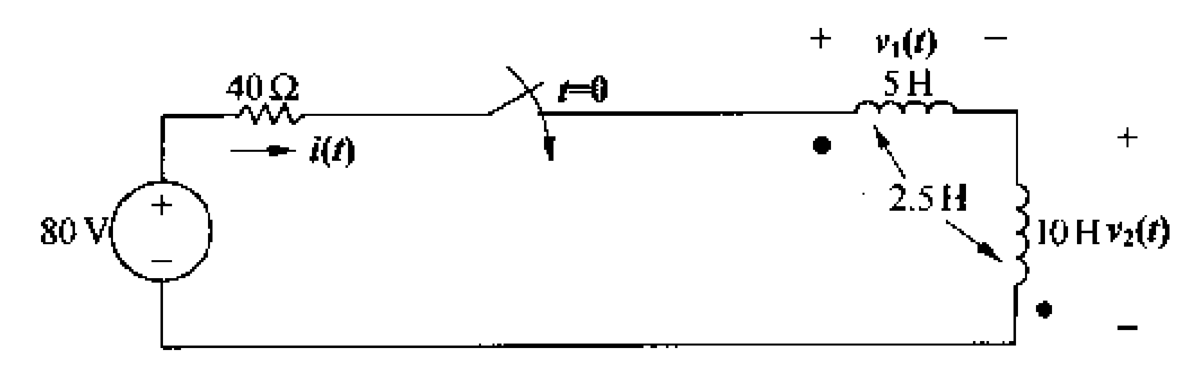


图 P7.61

P7.62 如果 10 H 线圈上的点是在线圈上部，重复习题 7.61。

P7.63 在图 P7.63 电路中，开关 1 在位置 a 并且开关 2 已关闭长时间。在 $t=0$ 时，开关 1 瞬间移到位置 b。400 毫秒后，开关 2 打开，并持续 1 ms，然后再次关闭。求开关 1 接触 b 端 1.6 ms 后的 v_o。

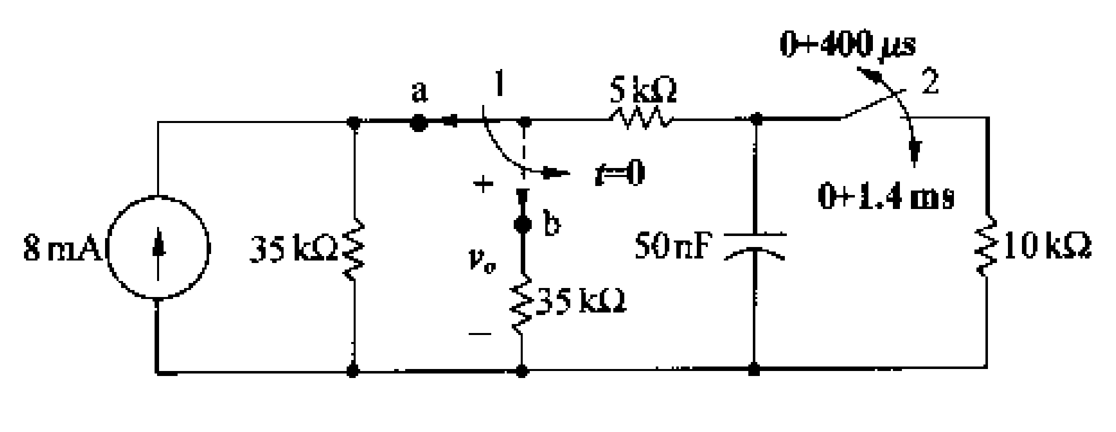


图 P7.63

7.64 在图 P7.63 电路中，存储在 50 nF 电容中初始能量的百分之多少消耗在 10 kΩ 电阻中？

P7.65 在图 P7.65 电路中，开关 1 已在位置 a 长时间。在 $t=0$ 时，开关瞬间移到位置 b。在开关 1 接触 b 端瞬间，开关 2 打开。求 $t\geqslant 0$ 时的 $v_o(t)$。

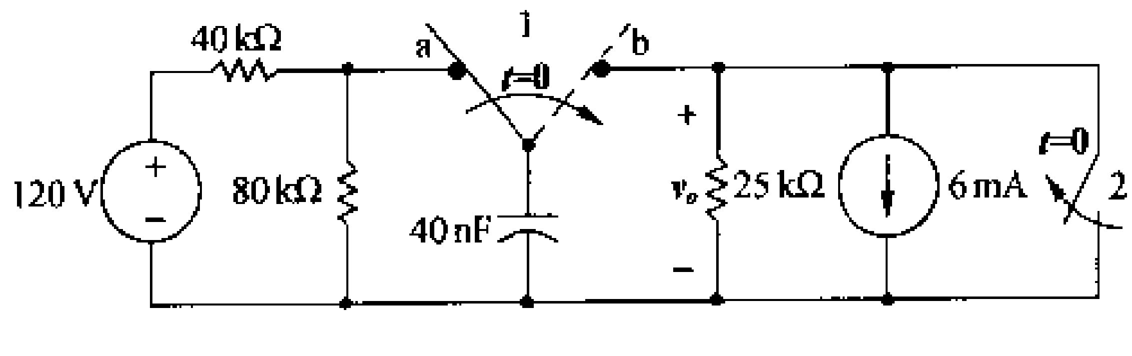


图 P7.65

P7.66 在图 P7.66 电路中，开关已在位置 a 长时间。在 $t=0$ 时，开关瞬间移到位置 b，并在此位置保持 100 μs。然后开关移到位置 c，持续时间不定。求：

(a) $i(0^+)$

(b) $i(25\ \mu s)$

(c) $i(200\ \mu s)$

(d) $v(100^-\ \mu s)$

(e) $v(100^+\ \mu s)$

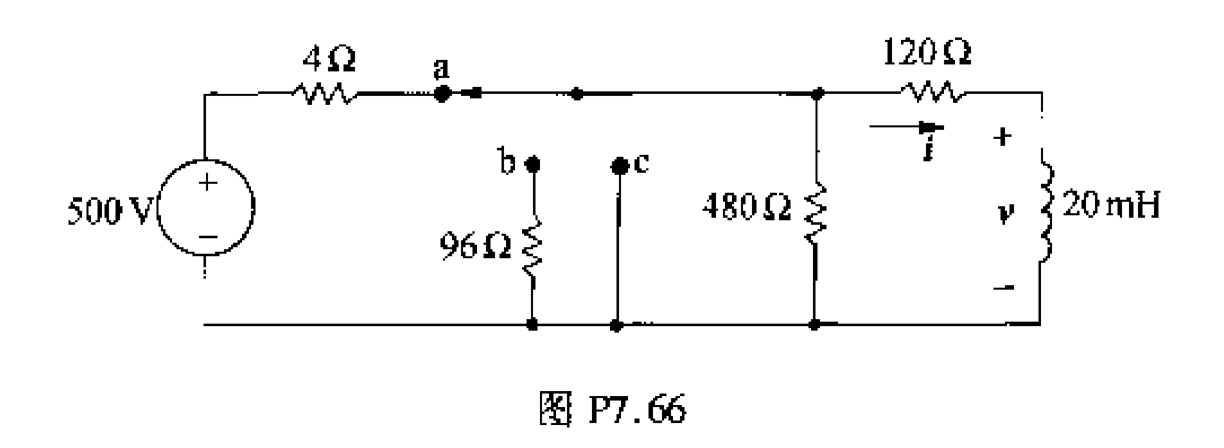


图 P7.66

P7.67 在图 P7.67 电路中,电容已充电到 494.6 mV。在 $t=0$ 时,开关 1 关闭,引起电容放电到电阻网络。开关 1 关闭后 50 μs,开关 2 关闭。求开关 1 关闭后 100 μs,开关 2 中的电流方向和大小。

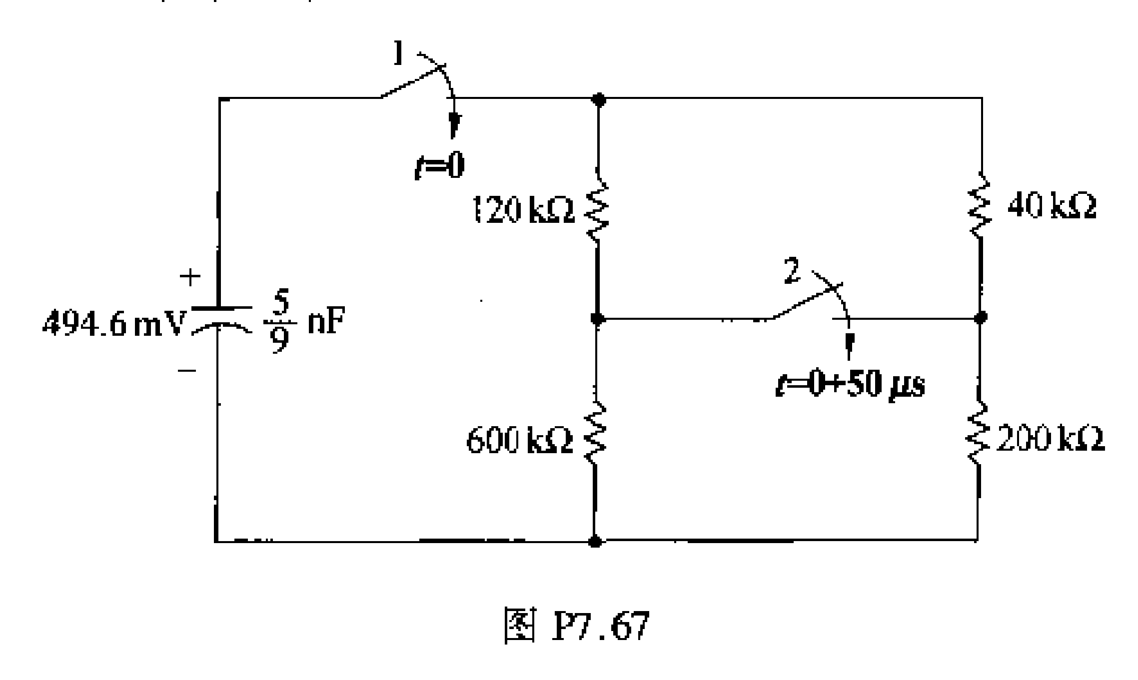


图 P7.67

P7.68 在图 P7.68 电路中,两个开关动作如下。对于 $t<0$,开关 1 在位置 a,开关 2 打开。这种状态已存在长时间。在 $t=0$ 时,开关 1 瞬间从位置 a 移到位置 b,而开关 2 保持打开。开关 1 动作后 250 μs,开关 2 关闭,保持关闭 400 μs 再次打开。求开关 1 移到位置 b 后 1 ms 的 $v_o(t)$。

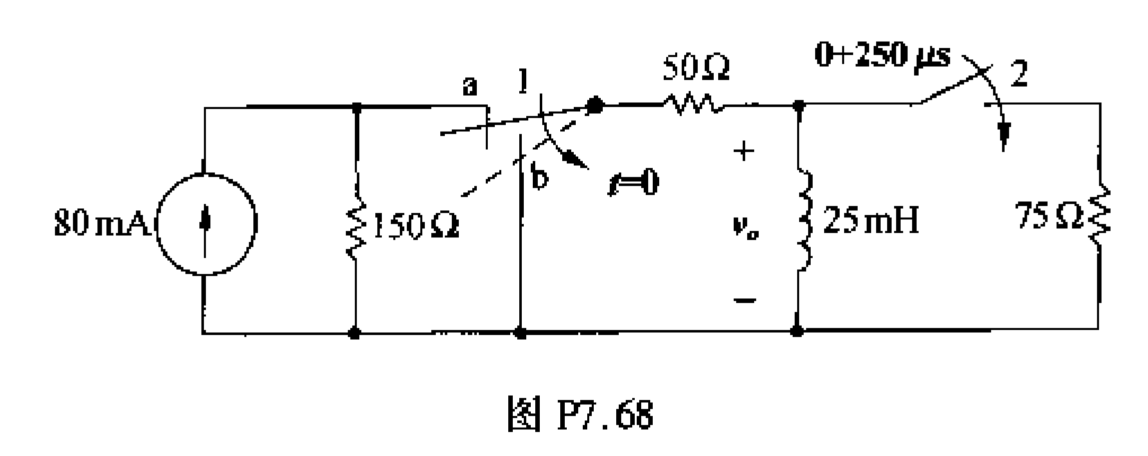


图 P7.68

7.69 在图 P7.68 电路中,开关 1 移到位置 b 后多少微秒,存储在电感中的能量是初始值的 4%?

P7.70 图 P7.70 电路中,在 $t=0$ 开关 1 关闭时,电容中无能量存储。3 微秒后,开关 2 关闭。求 $t\geqslant 0$ 时的 $v_o(t)$。

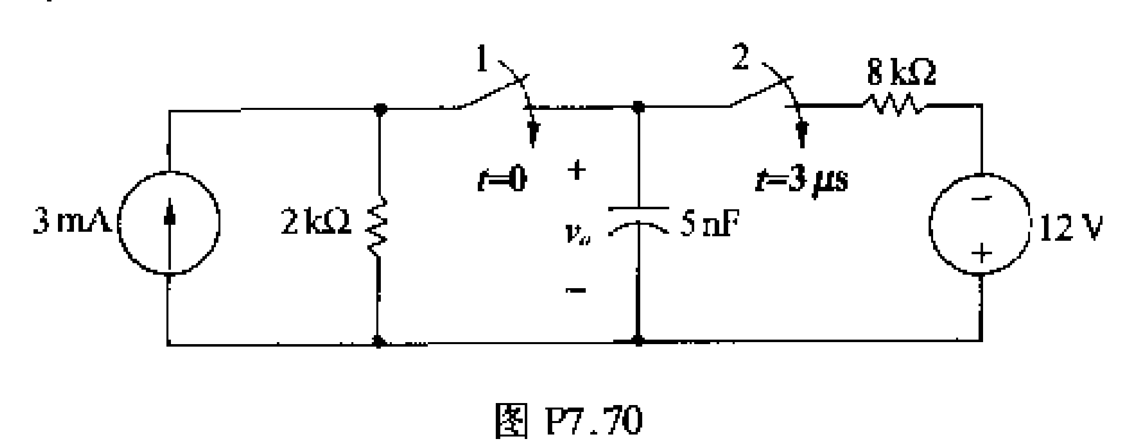


图 P7.70

P7.71 在图 P7.71 电路中，开关 A 打开且开关 B 关闭已长时间。在 $t=0$ 时，开关 A 关闭。开关 A 关闭后 1 秒钟，开关 B 打开。求 $t \geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$。

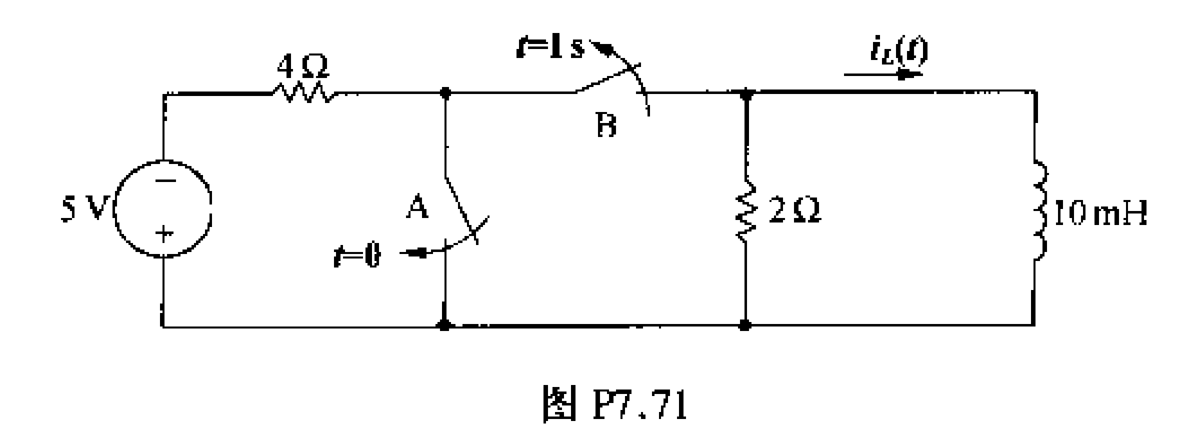


图 P7.71

P7.72 在图 P7.72 电路中开关已在位置 a 长时间。在 $t=0$ 时，开关瞬间移到位置 b。保持 250 ms 后，在瞬间移到位置 c。求 $t \geqslant 0$ 时的 v_o。

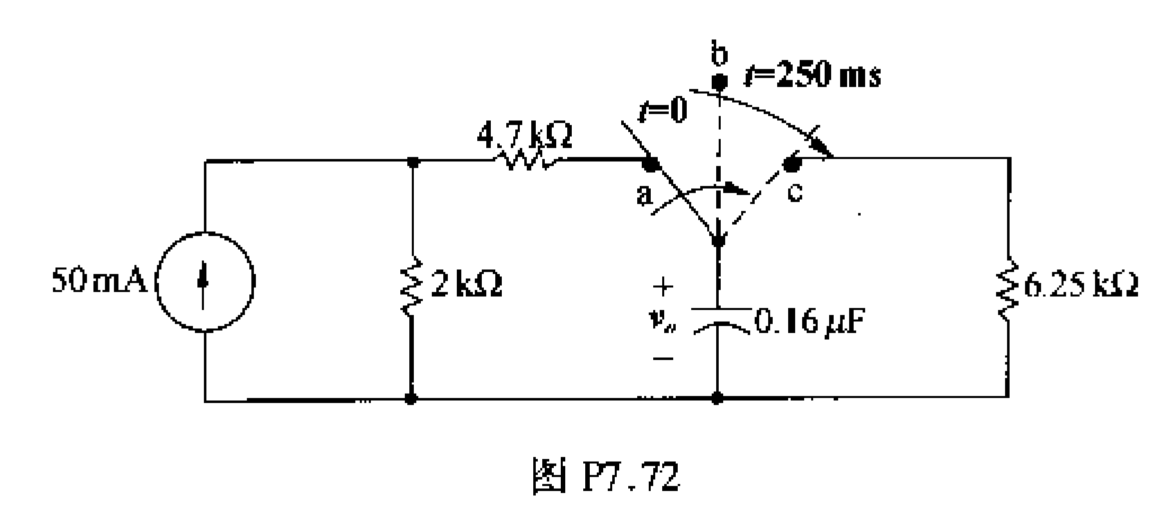


图 P7.72

P7.73 在图 P7.73(a) 电路中，电流源产生如图 P7.73(b) 所示的电流脉冲。在 $t=0$ 时，无能量存储。

(a) 推导 $t<0, 0<t<0.5$ ms 和 0.5 ms $<t<\infty$ 期间的 $i_o(t)$ 和 $v_o(t)$ 表达式。

(b) 计算 $i_o(0^-)$，$i_o(0^+)$，$i_o(0.0005^-)$ 和 $i_o(0.0005^+)$。

(c) 计算 $v_o(0^-)$，$v_o(0^+)$，$v_o(0.0005^-)$ 和 $v_o(0.0005^+)$。

(d) 画出在 -2 ms $<t<2$ ms 期间的 $i_o(t)$ 波形图。

(e) 画出在 -2 ms $<t<2$ ms 期间的 $v_o(t)$ 波形图。

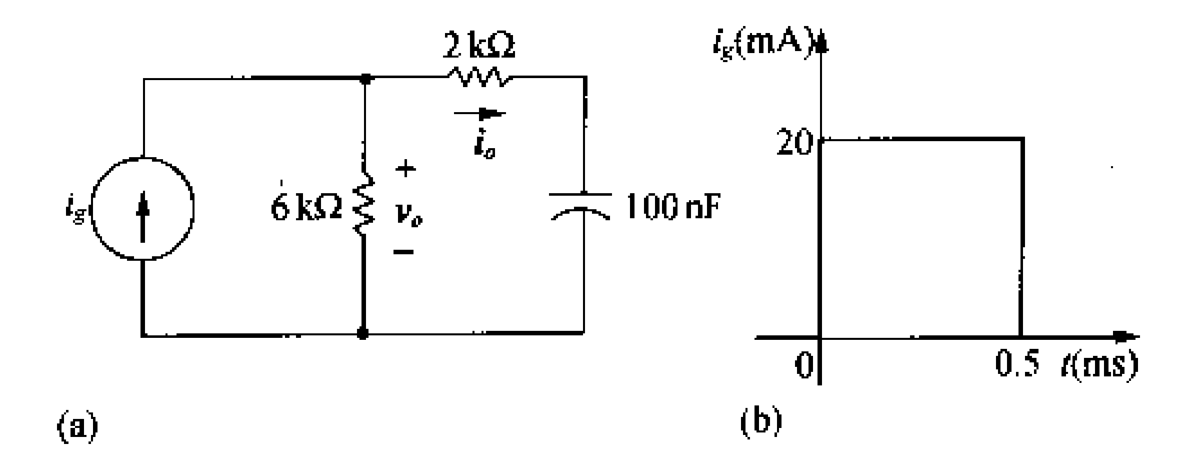


图 P7.73

P M7.74 图 P7.74 (a) 电压波形作用在图 P7.74 (b) 电路中。电容中的初始电压是零。

(a) 计算 $v_o(t)$。

(b) 画出 $v_o(t)$ 对应于 t 的波形图。

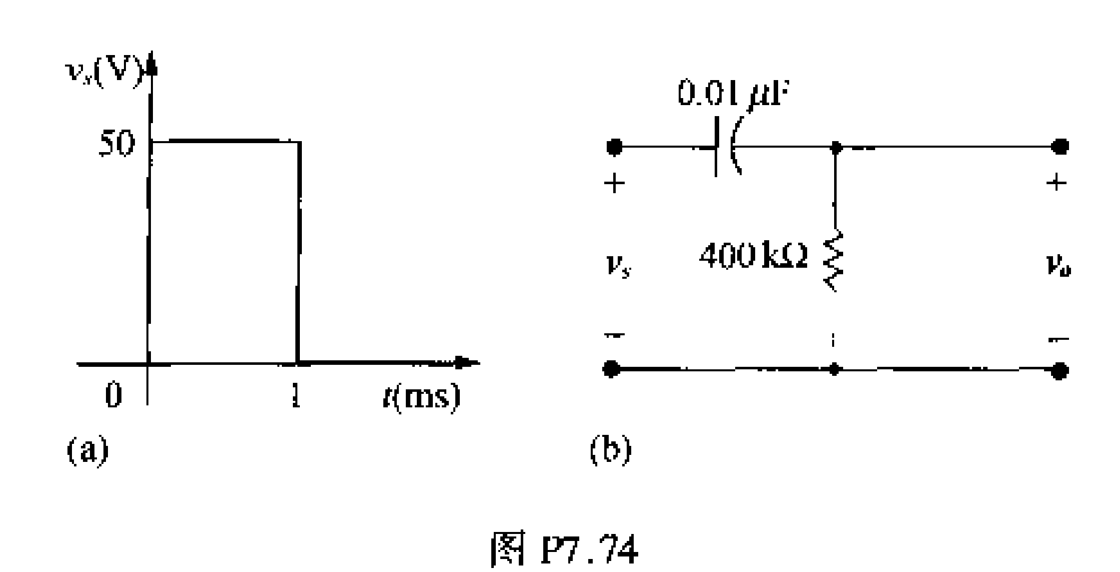


图 P7.74

P M7.75 图 P7.75 (a)电路中的电压信号源,产生图 P7.75 (b)所示的信号。在 $t=0$ 时,无能量存储。

(a) 求 $t<0, 0\leqslant t\leqslant 10$ ms, 10 ms $\leqslant t\leqslant 20$ ms, 20 ms $\leqslant t\leqslant\infty$ 期间的 $v_o(t)$ 表达式。

(b) 在同一坐标轴画出 v_o 和 v_s。

(c) R 减为 10 kΩ,重复(a) 和(b) 。

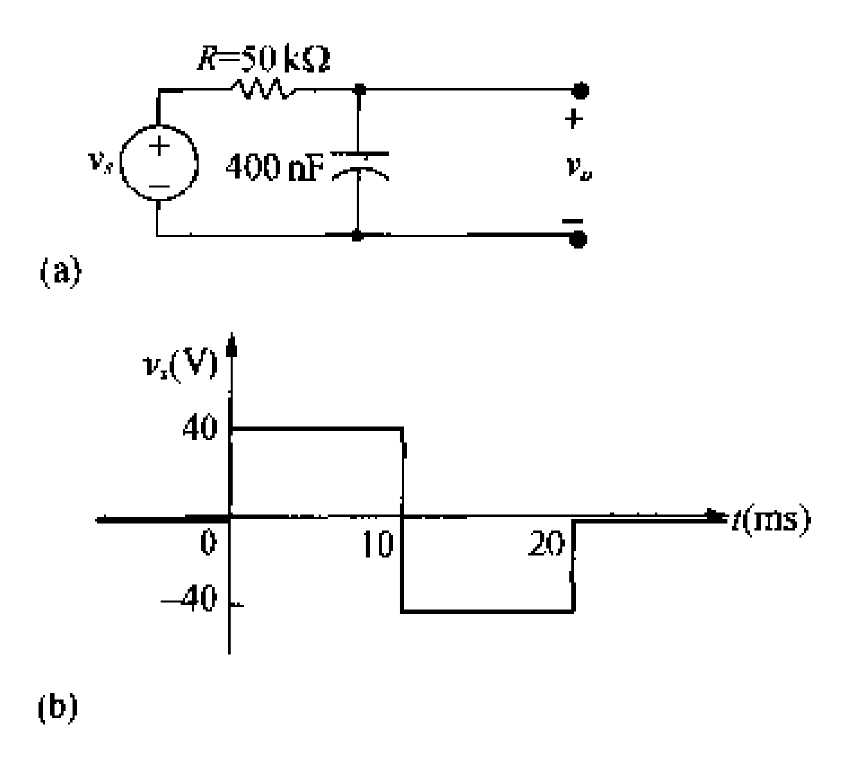


图 P7.75

P7.76 在图 P7.76 (a)电路中,电流源产生如图 P7.73 (b)所示的电流脉冲。在 $t=0$ 时,无能量存储。

(a) 推导在 $t<0, 0<t<50$ μs, 50 μs $<t<\infty$ 期间的 $v_o(t)$ 表达式。

(b) 计算 $v_o(50^-$ μs$)$, $v_o(50^+$ μs$)$。

(c) 计算 $i_o(50^-$ μs$)$, $i_o(50^+$ μs$)$。

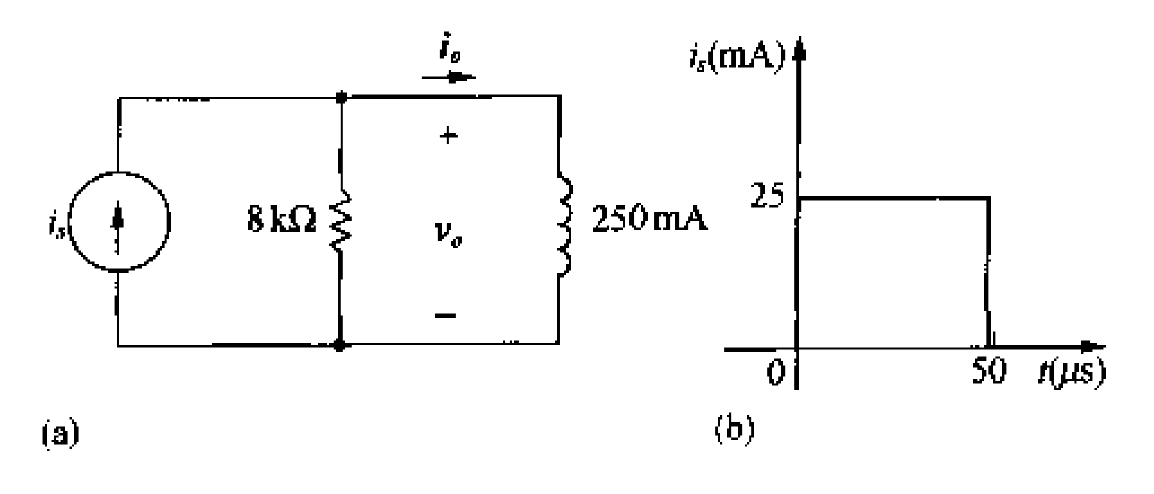


图 P7.76

P M7.77 图 P7.77 (a)电压波形作用在图 P7.74 (b)电路中。在电感中的初始电流是零。

(a) 计算 $v_o(t)$。

(b) 画出 $v_o(t)$对应于 t 的波形图。

(c) 求 $t = 5$ ms 时的 i_o。

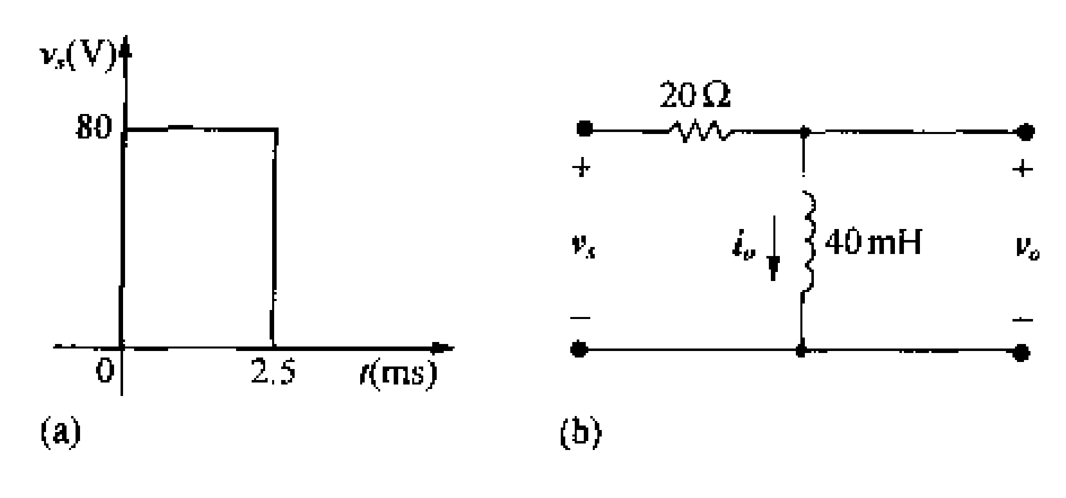


图 P7.77

P7.78 图 P7.78 所示电路中的电容,在开关关闭时充电到 25 V。如果它的端电压等于或超过 50 kV,则电容绝缘击穿。问需多长时间电容绝缘击穿?

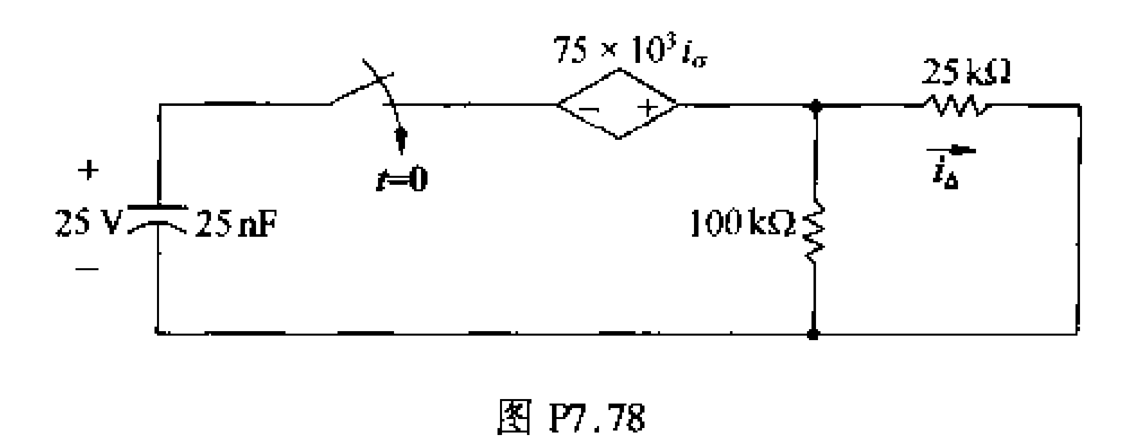


图 P7.78

P7.79 图 P7.79 电路中的开关已经关闭长时间。16 nF 电容的最大额定电压是 930 V。开关打开后多长时间,电容端的电压达到最大额定电压?

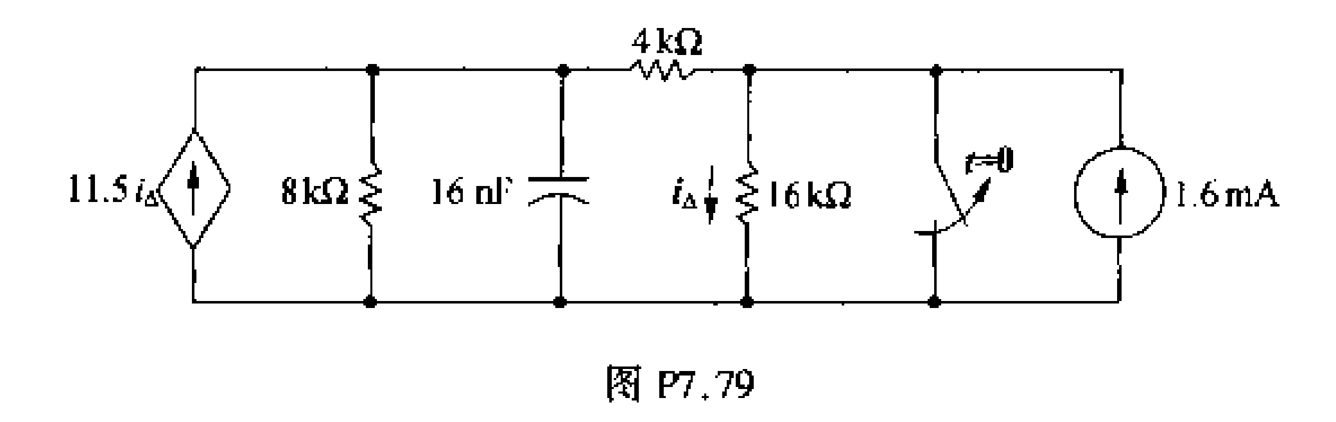


图 P7.79

P7.80 图 P7.80 电路中,电感电流在开关打开瞬间是 25 mA。电感电流值等于或超过 12 A 时,电感将出现故障。开关打开后多长时间电感出现故障?

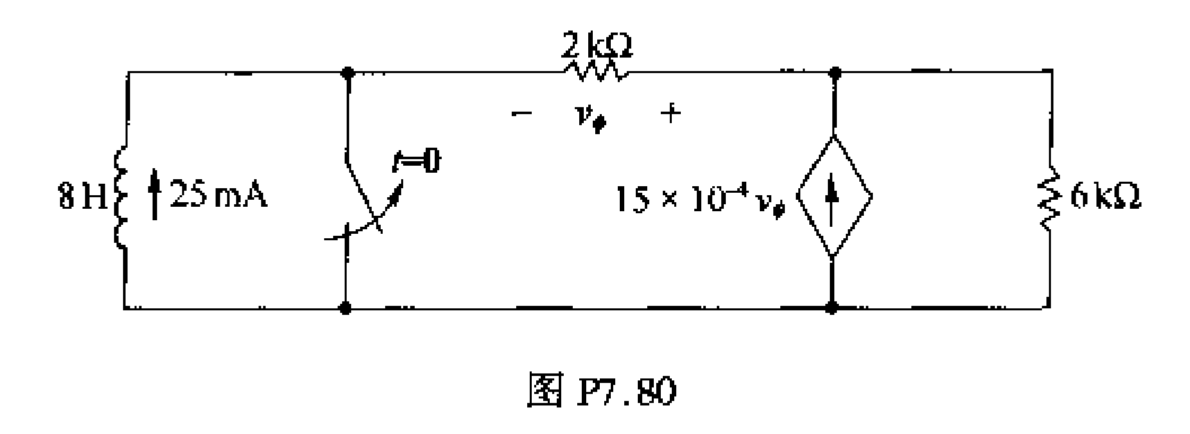


图 P7.80

P7.81 如图 P7.81 电路中的间隙,两端的电压达到 36 kV 时,将出现弧光。电感中的初

始电流为零。可以调整 β 值使得电感端的戴维南电阻为 - 3 kΩ。

(a) β 值是多少?

(b) 开关关闭后多少微秒,间隙出现弧光?

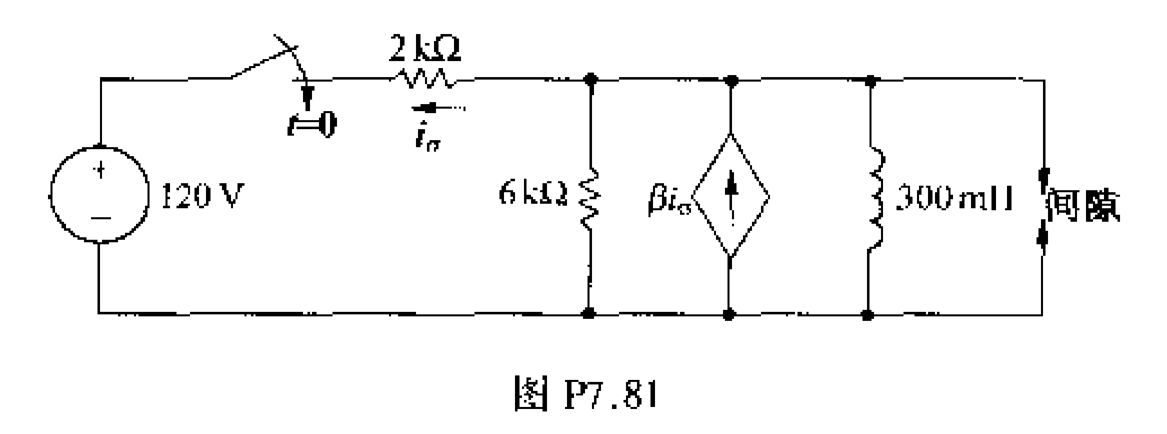


图 P7.81

7.82 图 P7.82 所示电路用来关闭 a 和 b 间的开关,并关闭预定时间段。只要继电器线圈的电压超过 5 V,继电器将保持它的接触臂在下方。当线圈电压等于 5 V,继电器接触臂通过一个机械弹簧作用返回到初始位置。a 和 b 之间的开关通过按下按钮立刻关闭。假设当按钮第一次按下时电容完全充电。继电器线圈的电阻是 25 kΩ,线圈的电感忽略不计。

(a) a 和 b 之间的开关将关闭多长时间?

(b) 写出从继电器触点第一次打开到电容完全充电的 i 表达式。

(c) 需要多少毫秒(a 和 b 之间电路中断后),电容达到它终值的 85%?

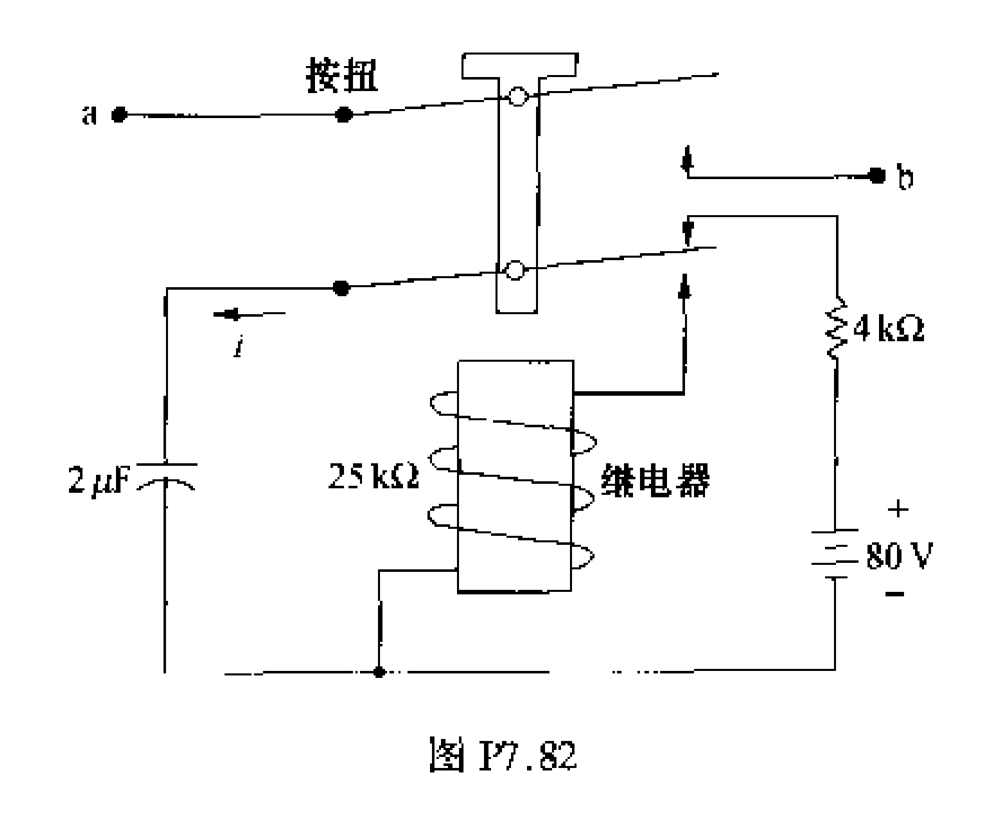


图 P7.82

P7.83 图 P7.83 电路中的开关在 a 端时,电容中无能量存储。开关在位置 a 保持 20 ms,然后瞬间移到位置 b。在接触 a 端后多少毫秒,运放达到饱和状态?

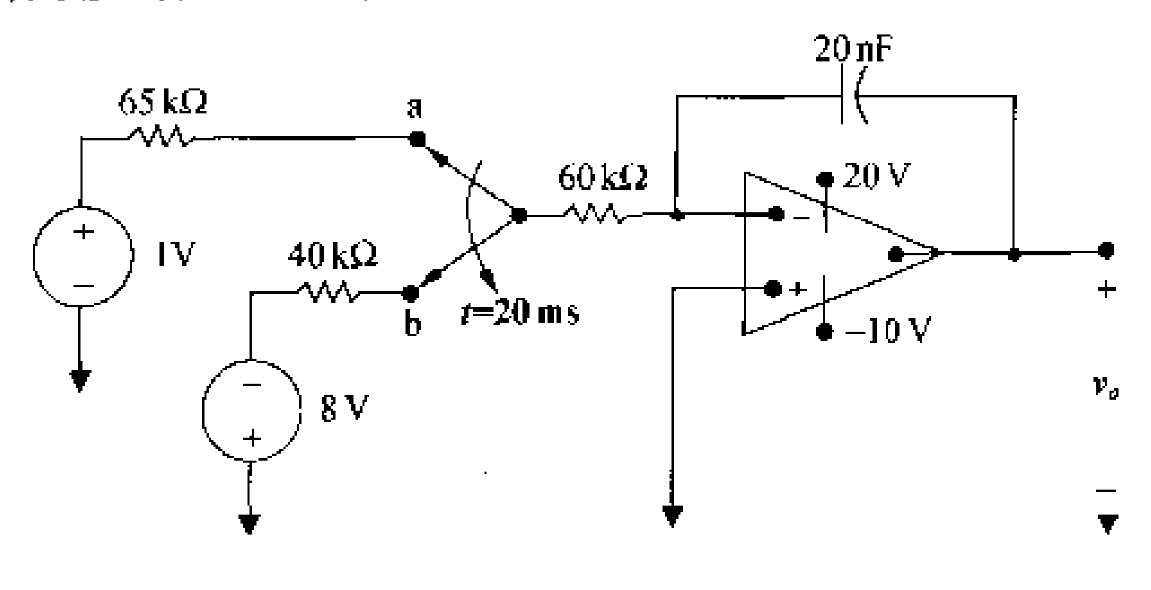


图 P7.83

P7.84 图 P7.84 所示电路中的双电极开关关闭时，电容的初始电压是 45 mV 和 15 mV，如图所示。求 $v_o(t)$，$v_2(t)$和 $v_f(t)$的表达式，只要理想运放工作在线性区，它们都可适用。

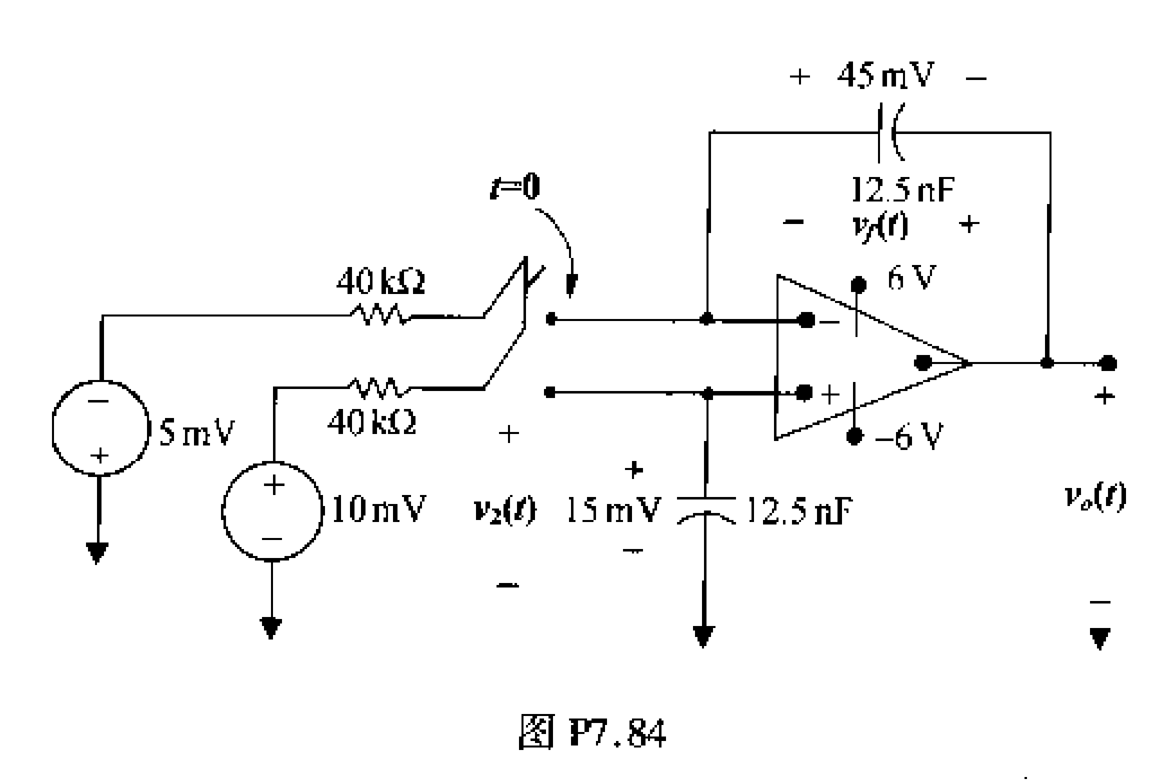


图 P7.84

P7.85 图 P7.85 所示电路中，开关关闭瞬间，电容中存储的能量为零。理想运算放大器在 3 ms 达到饱和。*R* 的值(以千欧姆为单位)是多少？

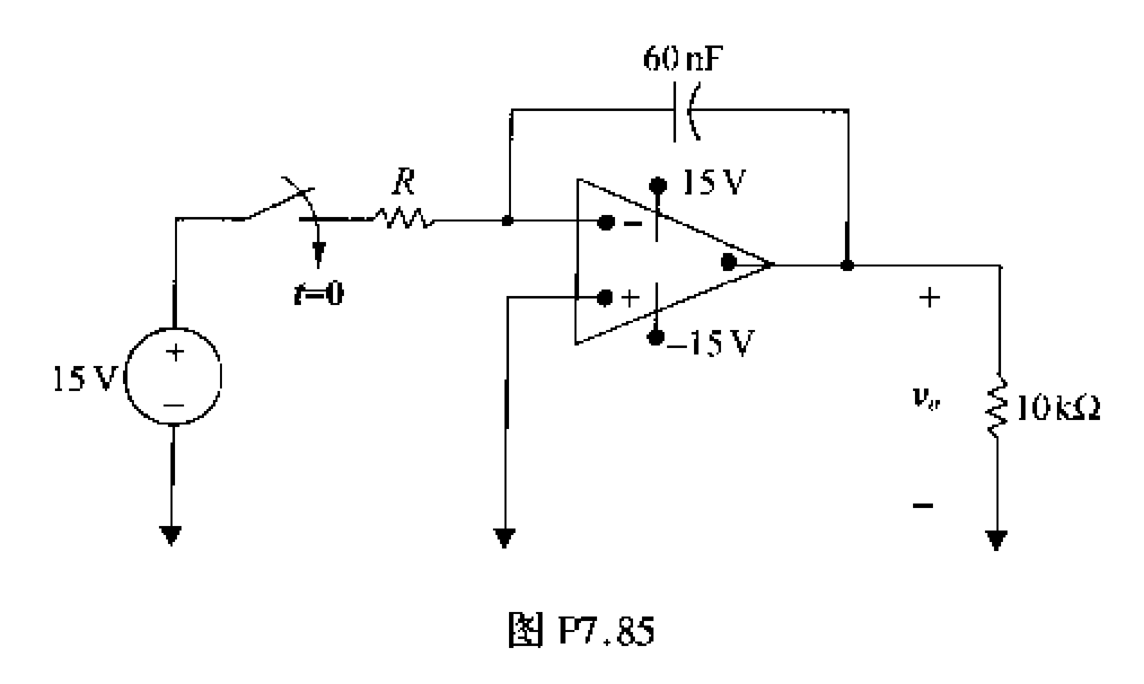


图 P7.85

7.86 如图 P7.85 所示电路，开关关闭瞬间，电容充电到 5 V，在右手端为正。如果理想运算放大器在 8 ms 达到饱和，*R* 的值是多少？

P7.87 如图 P7.87 中的开关关闭瞬间，电容的电压是 16 V。假设是理想运算放大器。开关关闭后多少毫秒，输出电压 v_o 等于零？

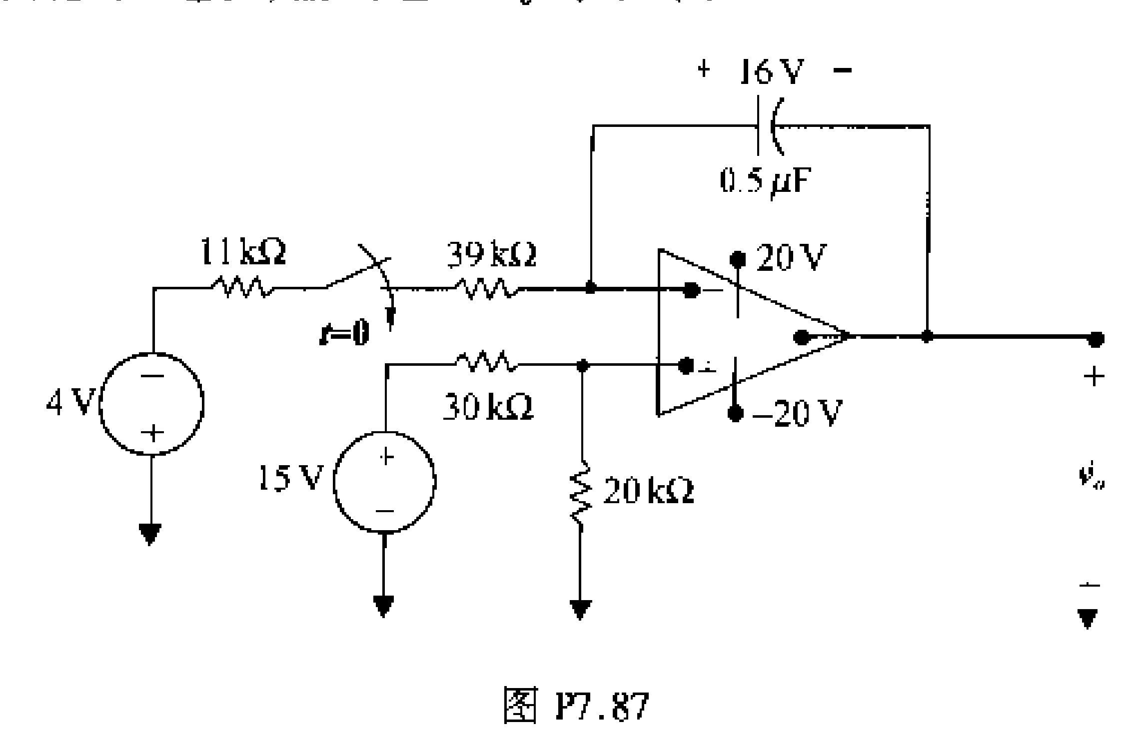


图 P7.87

P7.88 (a) 如图 P7.88 所示电路,开关关闭时电容无能量存储。运算放大器经过多长时间饱和?

(b) 电容的初始电压为 2 V,下端为正,重复(a)。

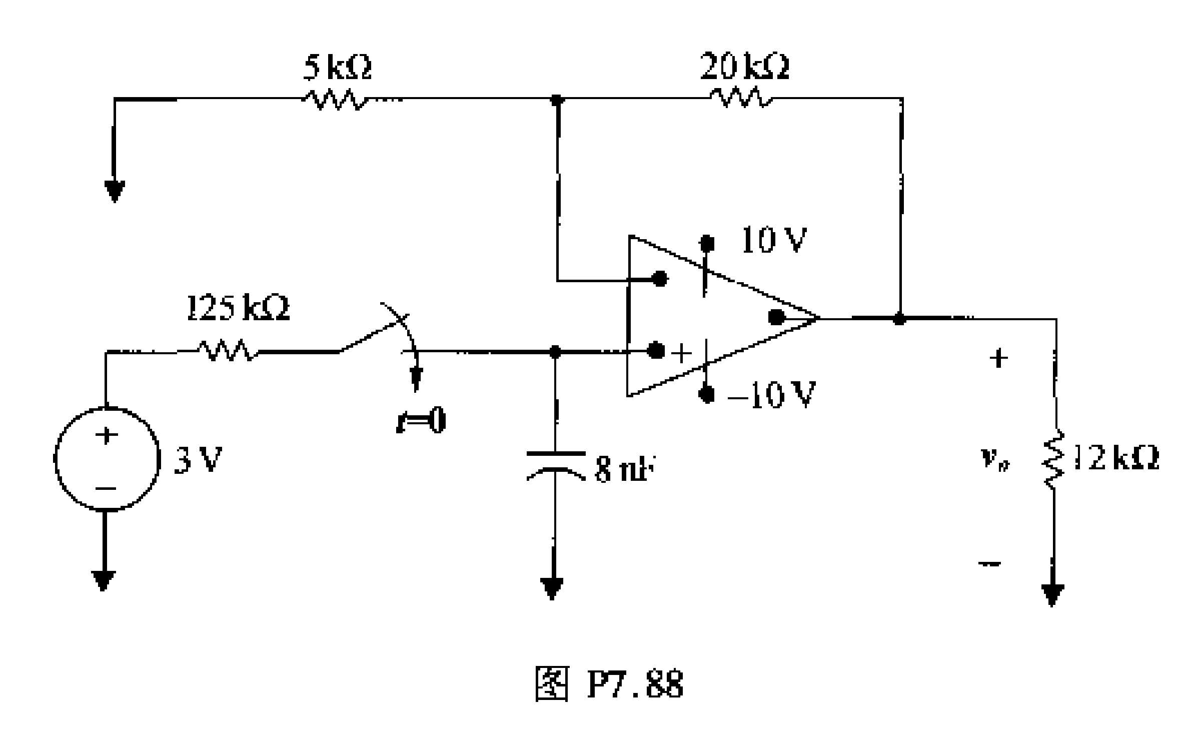


图 P7.88

P7.89 图 P7.89 所示电路,两个开关关闭瞬间,电容中无能量存储。

(a) 求作为 v_a, v_b, R 和 C 函数的 v_o。

(b) 在(a) 中所得结果的基础上,说明电路的作用。

(c) 如果 $v_a = 10$ mV, $v_b = 60$ mV, $R = 40$ kΩ, $C = 25$ nF, $V_{CC} = 12$ V,运放经过多长时间饱和?

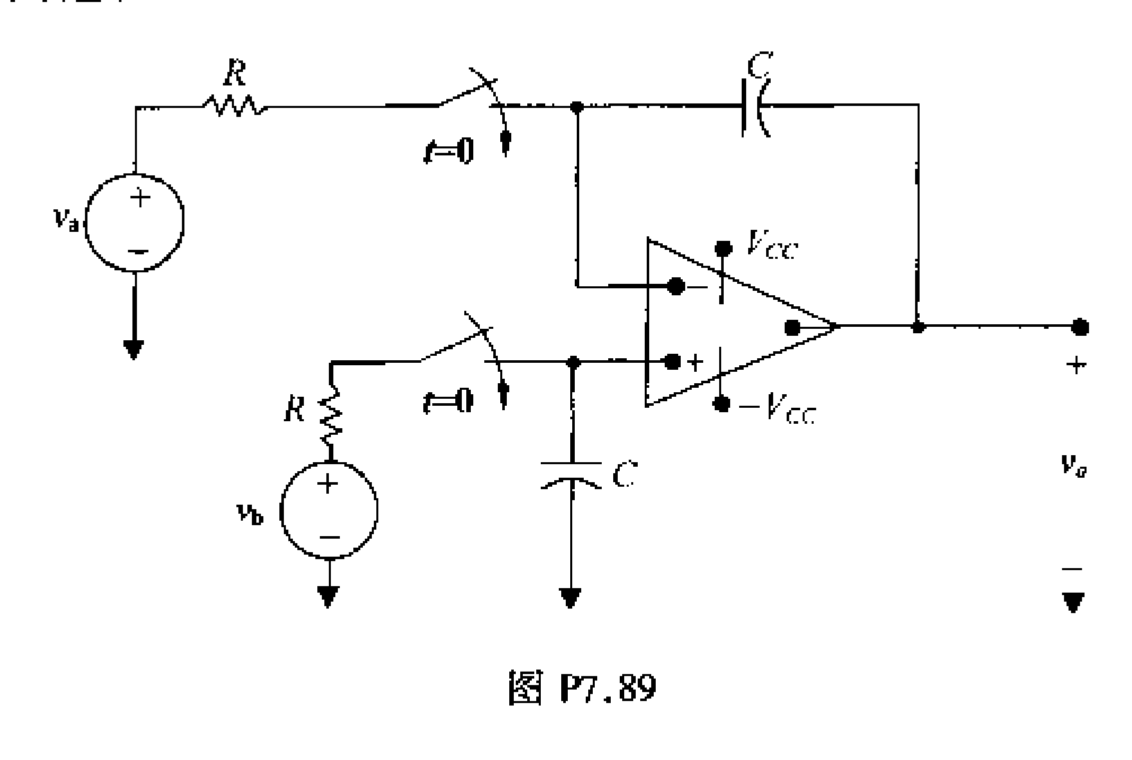


图 P7.89

P M7.90 图 P7.90 (a)电路中的电压源产生图 P7.90 (b)所示的三角波。假设在 $t = 0$ 时电容中存储的能量为 0。

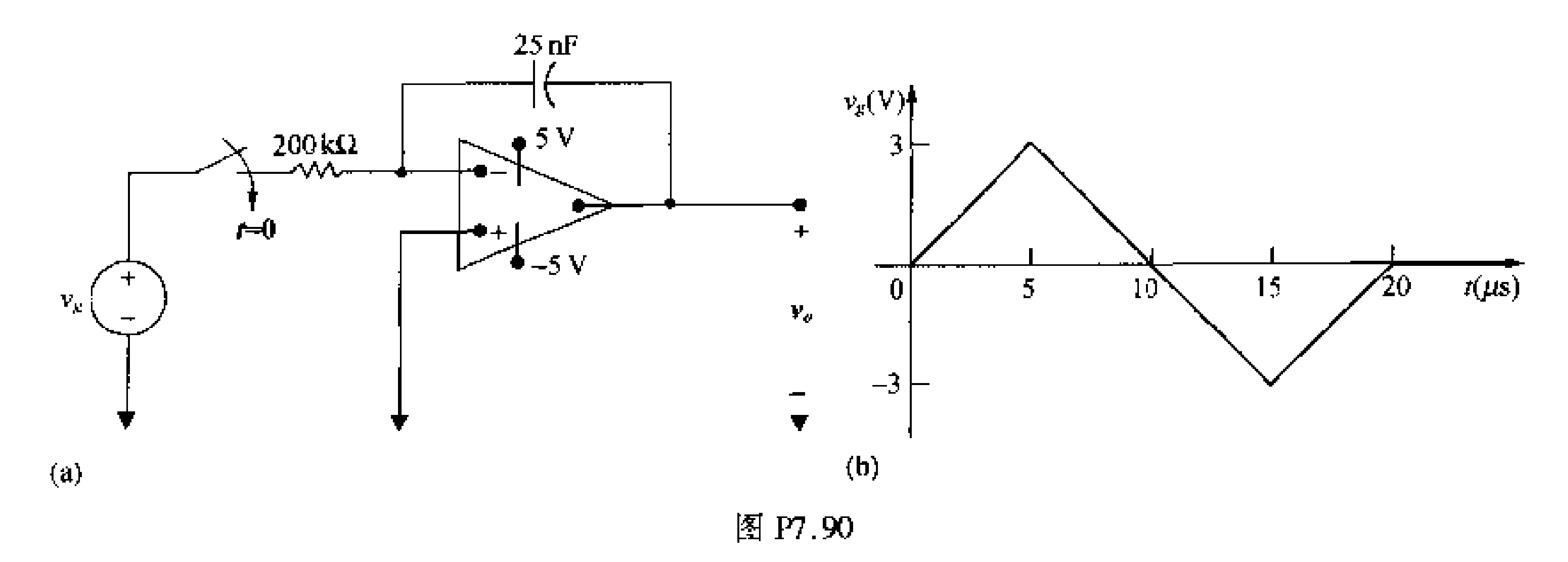


图 P7.90

(a) 求在 $0 \leq t \leq 5\ \mu s$, $5\ \mu s \leq t \leq 15\ \mu s$, $15\ \mu s \leq t \leq 20\ \mu s$ 期间的 $v_o(t)$表达式。

(b) 画出 0 到 20 μs 之间的输出波形。

(c) 如果 $t > 20\ \mu s$ 时三角输入电压继续重复,请问输出电压是何种形式？请解释。

P7.91 图 P7.91 (a)所示电压脉冲作用于图 P7.91 (b)所示的理想积分放大器。在 $v_o(t) = 0$时,求下述条件 $v_o(t)$的表达式。

(a) $t < 0$。

(b) $0 \leq t \leq 50$ ms。

(c) 50 ms $\leq t \leq$ 100 ms。

(d) 100 ms $\leq t \leq \infty$。

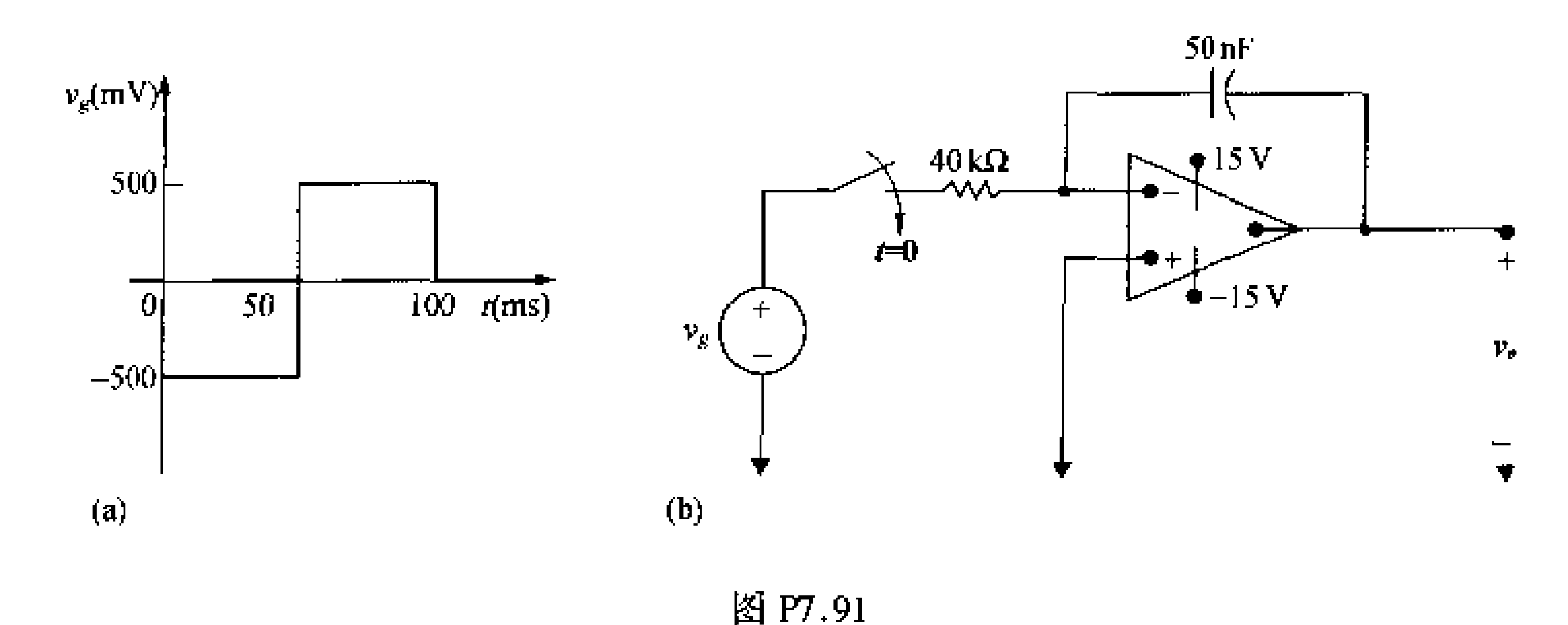


图 P7.91

P7.92 用一个 4 MΩ 的电阻代替 50 nF 反馈电容,重复习题 P7.91。

7.93 图 P7.93 所示电路称做多谐振荡器,在脉冲电路中有广泛的应用。该习题是关于电路工作时电容充电和放电的。分析电路的关键是要理解理想晶体管开关 T_1 和 T_2 的特性。电路的设计使得开关在 ON 和 OFF 之间自动转换。当 T_1 为 OFF 时, T_2 为 ON,反之亦然。在分析该电路时,假设开关或是 ON 或是 OFF,假设理想晶体管开关可以在瞬间改变状态。换句话说,它可以从 OFF 瞬间到 ON,反之亦然。当晶体管开关是 ON,(1) 基极电流 i_b 大于零,(2) 端电压 v_{be}为零,(3) 端电压 v_{ce}为零,因此,晶体管开关是 ON 时 b,e 和 c,e 端表现为短路。晶体管开关是 OFF 时,(1) 端电压 v_{be}是负的,(2) 基极电流是 0,(3) 在 c,e 端开路,因此,晶体管开关是 OFF 时,b,e 和 c,e 端表现为开路。假设 T_2 从 ON 刚转换到 OFF,而 T_1 从 OFF 刚转换到 ON,可以假设在这个瞬间,C_2 已充电到电源电压 V_{CC}, C_1 上的电荷为零,同时假设 $C_1 = C_2$ 以及 $R_1 = R_2 = 10R_L$。

(a) 推导在 T_2 为 OFF 期间的 v_{be2}表达式。

(b) 推导在 T_2 为 OFF 期间的 v_{ce2}表达式。

(c) 求 T_2 为 OFF 的时间。

(d) 求 T_2 为 OFF 期间末的 v_{ce2}值。

(e) 推导在 T_2 为 OFF 期间的 i_{b1}表达式。

(f) 求 T_2 为 OFF 期间末的 i_{b1}的值。

(g) 画出在 T_2 为 OFF 期间,v_{ce2}对应于 t 的波形图。

(h) 画出在 T_2 为 OFF 期间,i_{b1}对应于 t 的波形图。

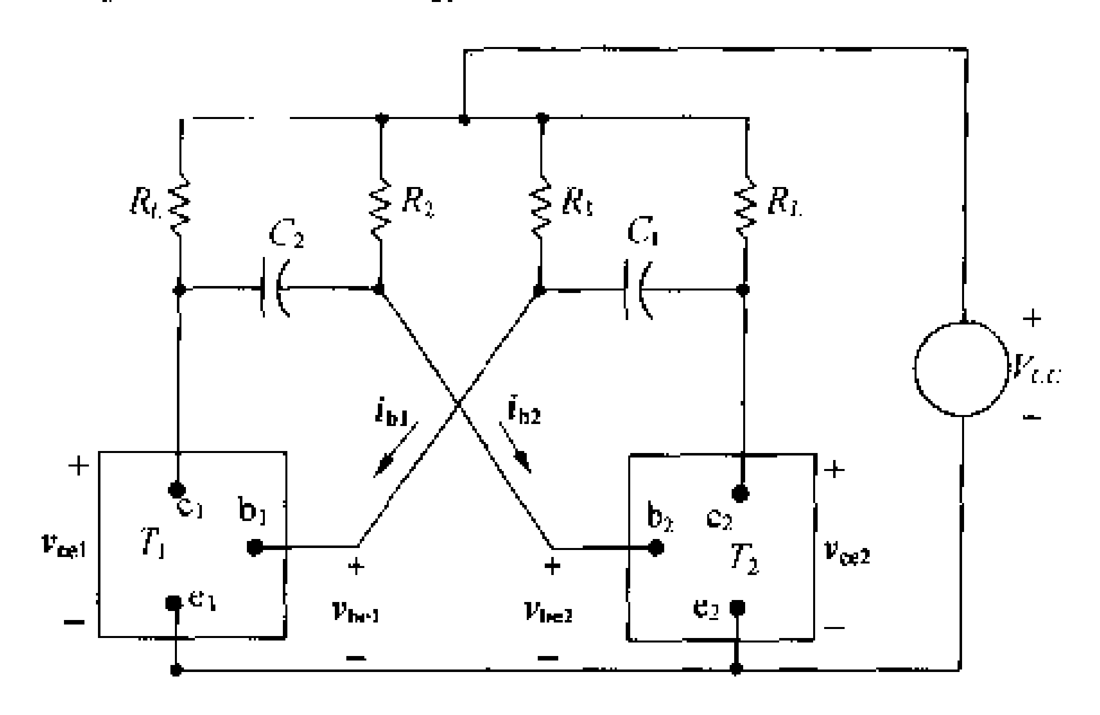


图 P7.93

7.94 图 P7.93 电路中元件值是 $V_{CC}=9$ V, $R_L=3$ kΩ, $C_1=C_2=2$ nF, $R_1=R_2=18$ kΩ。

(a) 在一个周期内,T_2 在 OFF 状态多长时间?

(b) 在一个周期内,T_2 在 ON 状态多长时间?

(c) 对于 T_1 重复(a)。

(d) 对于 T_1 重复(b)。

(e) 在 T_1 转向 ON 后的瞬间,i_{b1}的值是多少?

(f) 在 T_1 转向 OFF 之前的瞬间,i_{b1}的值是多少?

(g) 在 T_2 转向 ON 之前的瞬间 v_{ce2}的值是多少?

7.95 $C_1=3$ nF, $C_2=2.8$ nF,其他元件值不变,重复习题 7.94。

7.96 一个多谐振荡器满足下列条件:(1)晶体管开关的一个周期中,在 ON 为 48 μs,在 OFF 为 36 μs,(2)$R_L=2$ kΩ,(3)$V_{CC}=5$ V,(4)$R_1=R_2$,(5)$6R_L \leq R_1 \leq 50R_L$,对于电容 C_1 和 C_2 的限定值是多少?

7.97 图 P7.97 所示电路是一个单稳多谐振荡器。"单稳"一词用来描述电路有一个稳定状态。如果它处在稳定状态,电子开关 T_2 为 ON,T_1 为 OFF。(习题 7.93 描述了理想晶体管开关的工作情况。)瞬间关闭开关 S,T_2 转换成 OFF。S 返回到打开位置后,T_2 将返回到它的 ON 状态。

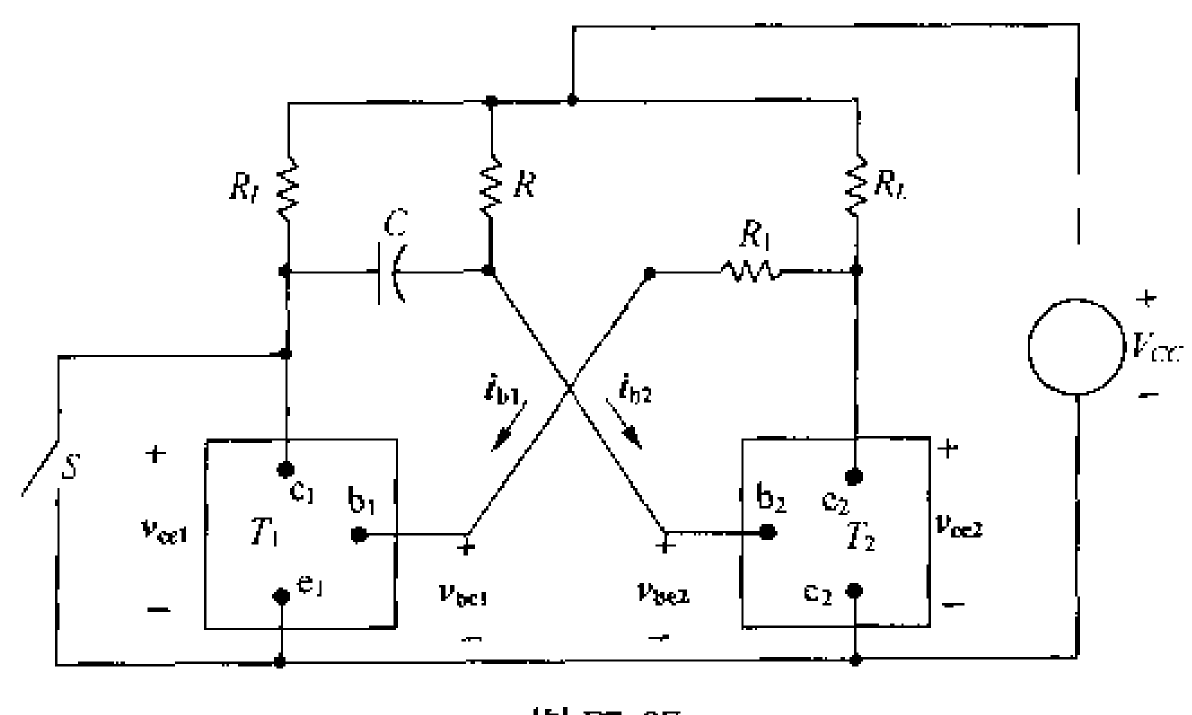


图 P7.97

(a) 证明如果 T_2 为 ON，则 T_1 为 OFF，并保持在 OFF。

(b) 解释为什么当 S 瞬间关闭时，T_2 转换成 OFF。

(c) 证明 T_2 在 OFF 状态下保持 $RC\ln 2$ s。

7.98 图 P7.97 所示电路中的参数值是，$V_{CC}=6$ V，$R_1=5.0$ kΩ，$R_L=20$ kΩ，$C=250$ pF，$R=23.083$ Ω。

(a) 假设 S 打开时电路已经达到稳定状态，S 瞬间关闭后，画出 v_{ce2} 对应于 t 的波形图。假设在 $t=0$ 时，S 关闭。做出在 $-5\ \mu s \leqslant t \leqslant 10\ \mu s$ 期间的波形图。

(b) 对于 i_{b2}，重复(a)。

◆7.99 (a) 对于图 7.48 所示闪光灯电路，证明当灯导通时，电容电压降表达式为：

$$v_L(t)=V_{Th}+(V_{max}-V_{Th})e^{-(t-t_o)/\tau}$$

其中：

$$V_{Th}=\frac{R_L}{R+R_L}V_s$$

$$\tau=\frac{RR_LC}{R+R_L}$$

(b) 对于图 7.48 所示闪光灯电路，证明灯导通时间表达式为：

$$(t_c-t_o)=-\frac{RR_LC}{R+R_L}\ln\frac{V_{max}-V_{Th}}{V_{min}-V_{Th}}$$

◆7.100 图 7.45 所示电路，当灯电压达到 15 V 时灯开始导通。灯导通期间，可视为 10 kΩ 电阻。直到灯电压下降到 5 V，灯停止导通。当灯不导通时，可视为开路，$V_s=40$ V，$R=800$ kΩ，$C=25\ \mu$F。

(a) 灯每分钟打开多少次？

(b) 800 kΩ 电阻用可变电阻代替。调整电阻至灯每分钟闪 12 次。R 的值是多少？

P◆7.101 在图 7.45 所示闪光灯电路中，当灯导通时，它可视为 1.3 kΩ 的电阻。灯在 900 V 时触发，在 300 V 关闭。

(a) 如果 $V_s=1000$ V，$R=3.7$ kΩ，$C=250\ \mu$F，灯每分钟闪多少次？

(b) 由电源释放的平均电流是多少毫安？

(c) 假设闪光灯每天工作 24 小时。如果功率的成本是每千瓦小时 5 美分，每年闪光灯的工作费用是多少？

7.102 图 P7.102 所示的继电器，只要它的电流大于 0.4 A，就将 30 V 的直流发电机连接到直流总线。如果继电器电流下降到 0.4 A 或更低，弹簧负载的继电器立即将直流总线连接到 30 V 备用电池。继电器的线圈电阻是 60 Ω，继电器的线圈电感要求确定。

(a) 假设驱动 30 V 直流发电机的主马达突然慢下来，引起电压突然下降到 21 V，为确保备用电池在 0.5 秒内连接到直流总线，L 值应是多少？

(b) 使用(a) 中所确定的 L 值，如果产生的电压突然下降为 0，继电器需要工作多长时间？

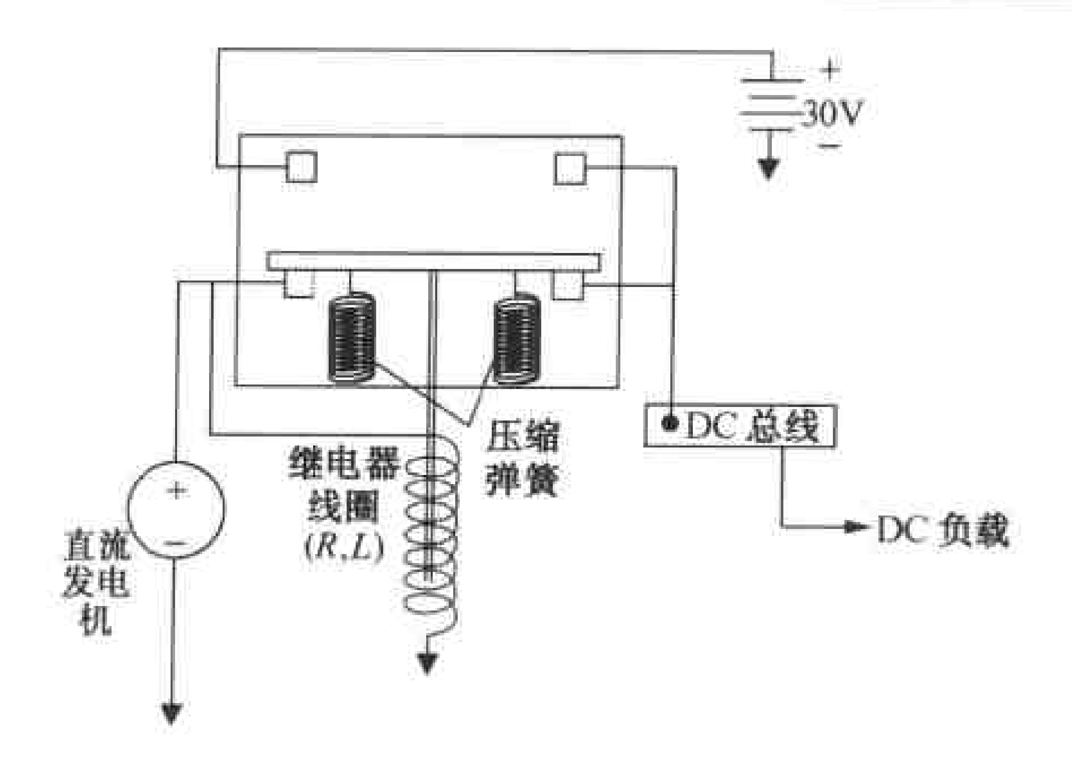


图 P7.102

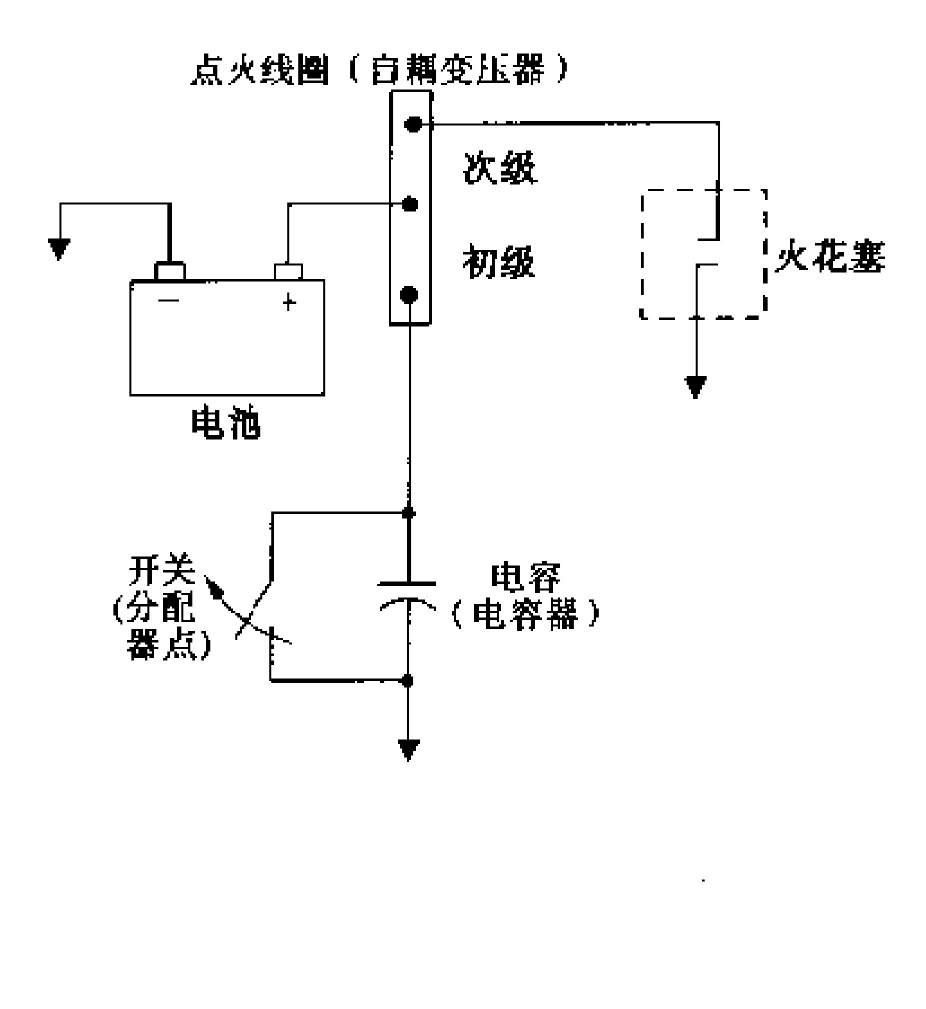
第 8 章　RLC 电路的固有响应和阶跃响应

实例

点火电路—

第 8 章,将介绍 RLC 电路的阶跃响应。汽车中的点火电路是基于 RLC 电路暂态响应的原理工作的。在点火电路中,通过开关的动作使电感线圈中产生一个快速变化的电流,电感线圈通常称做点火线圈,点火线圈由两个串联的磁耦合线圈组成,又称为自耦变压器,其中与电池相连的线圈称做初级线圈,与火花塞相连的线圈称为次级线圈。初级线圈上电流的快速变化通过磁耦合(互感)使次级线圈上产生一个高电压,其峰值可达 20 至 40 kV,这一高压将在火花塞的间隙间产生一个电火花,从而点燃气缸中的油-汽混合物。

点火系统的基本组成原理如图所示。在现代的汽车中,常用电子开关(相对于机械开关来说)使初级线圈上产生一个快速变化的电流。对电子开关的理解需要电子元件的知识,这一内容超出本书的范围,所以不做介绍。老式的常用点火电路的分析对学习实际电路的设计问题很有帮助。



本章,将讨论两种电路的固有响应和阶跃响应:并联 RLC 电路和串联 RLC 电路。对于并联 RLC 电路来说,存储在电感、电容中的能量释放,将在并联支路上产生电压。为了求出并联电路的固有响应,需要求出并联支路上的电压。电路如图 8.1 所示。电容上的初始电压 V_0 表

示存储在电容上的初始能量,流过电感的初始电流 I_0 表示存储于电感上的初始能量。要想得到各支路的电流,就必须求得各支路的电压。

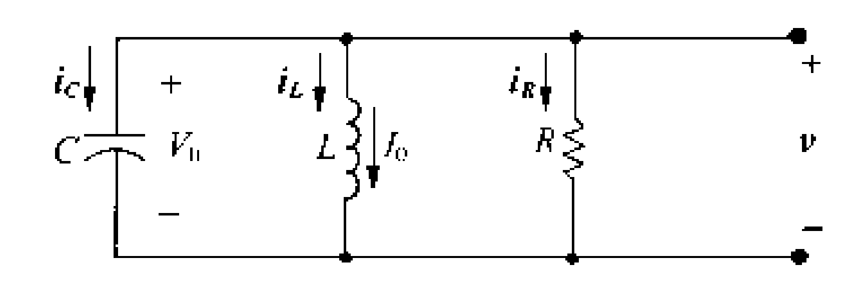


图 8.1 并联 *RLC* 电路固有响应电路图

并联 *RLC* 电路的阶跃响应如图 8.2 所示。当电路突然施加一个直流信号,电路的并联支路将产生电压,此时能量能否存储在电路中要看具体的电路。

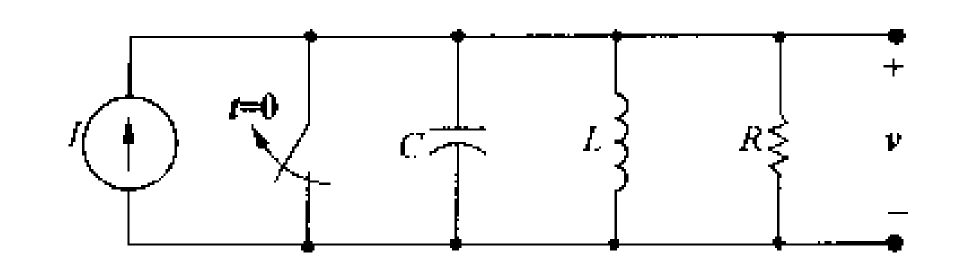


图 8.2 并联 *RLC* 电路阶跃响应电路图

如图 8.3 所示,为了求出串联 RLC 电路的固有响应,需要求出串联元件上的电流,而这电流的产生取决于初始状态下存储在电感、电容上的能量释放。如前所述,初始电感电流 I_0 和初始电容电压 V_0 代表初始存储能量。要求得各分立元件上的电压值,须先求出流过分立元件的电流值。

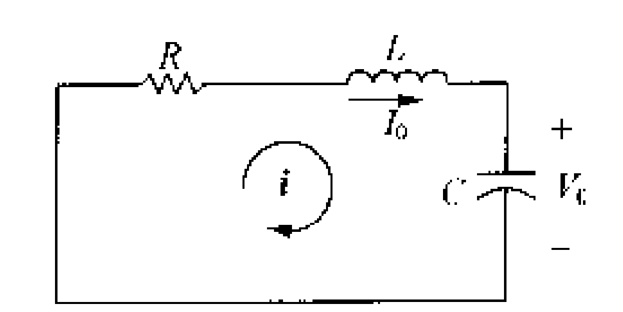


图 8.3 串联 *RLC* 电路固有响应电路图

图 8.4 表示串联 RLC 电路的阶跃响应,我们感兴趣的是当一个直流电压源突然加到电路上后电路中产生的电流。当开关闭合后,能量能否存储在电路中也要看具体的电路。

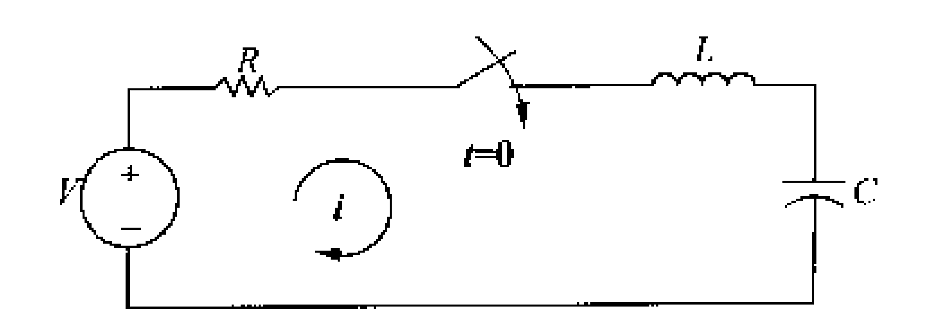


图 8.4 串联 *RLC* 电路阶跃响应电路图

如果读者没有学过微分方程,对并联或串联 *RLC* 电路的分析会有一定的困难,因此介绍微分方程的求解是非常有必要的。这里,首先分析并联 *RLC* 电路的固有响应,主要内容包括两部分:第一,讨论用来描述电路的微分方程的求解方法;第二,讨论解的三种独特形式。然后,再介绍并联 *RLC* 电路三种同样形式的阶跃响应,最后,介绍串联 *RLC* 电路的固有响应和阶

跃响应。

8.1　并联 RLC 电路固有响应的介绍

求解图 8.1 所示电路的固有响应，首先要推出电压 v 的微分方程。因为每个元件上的电压都相同，所以先求电压，然后利用伏安关系求每条支路上的电流。由于流出节点的电流和为零，所以可以很轻松的获得所需电压的微分方程：

$$\frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v\mathrm{d}\tau+I_0+C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0 \tag{8.1}$$

在式 (8.1) 中，对 t 取一次微分，去掉微分符，由于 I_0 是一个常数，得到：

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{v}{L}+C\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{8.2}$$

将式 (8.2) 除以电容 C，并整理得：

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{v}{LC}=0 \tag{8.3}$$

将式 (8.3) 与第 7 章中的微分方程比较，可以发现，不同之处在于出现了二次微分，式 (8.3) 为含常数的常规二阶微分方程。第 8 章的电路既包含电容也包含电感，所以，微分方程为二阶微分方程，这种电路又称为二阶电路。

8.1.1　二阶微分方程的一般解法

在第 7 章，曾采用分离变量再积分的方法求解一阶微分方程，对于式 (8.3) 典型的解法是，假定解为指数形式，就是说，假设电压为：

$$v=A\mathrm{e}^{st} \tag{8.4}$$

其中 A 和 s 都是未知常数。

在说明怎样通过这个假设得出公式 (8.3) 的解之前，先来证明假设的合理性。首先观察式 (8.3)：解的二次微分加上常数与解的一阶微分之积再加上常数与解本身之积，结果对于任何一个 t 来说都必须等于零。只有当解的高阶微分与解具有相同形式时，才能满足这一情况，指数函数正好满足这一规律。另外由于在第 7 章里，推出一阶方程的解是指数形式，假设二阶方程的解也包含指数是合理的。

如果式 (8.4) 是式 (8.3) 的解，那么对于任何一个 t 都必须满足式 (8.3)，将式 (8.4) 代入式 (8.3) 中并整理得：

$$As^2\mathrm{e}^{st}+\frac{As}{RC}\mathrm{e}^{st}+\frac{A\mathrm{e}^{st}}{LC}=0$$

或者写成：

$$A\mathrm{e}^{st}\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)=0 \tag{8.5}$$

由于对于任意的 st 取值，$\mathrm{e}^{st}\neq 0$，所以，只有当 $A=0$ 或括号内的分式为零时，方程式才成立。如果用 $A=0$ 作为方程的通解，则意味着电压在任何时候均为零 —— 当电感或电容中有能量储存时，实际上是不可能的。因此，要使式 (8.4) 成为式 (8.3) 的解，扩号中的分式必须为零，或者说：

$$s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}=0 \tag{8.6}$$

式 (8.6) 称为微分方程的特征方程,因为这个二阶方程的解将决定 $v(t)$的数学特性。

式 (8.6) 的两个解分别为:

$$s_1=-\frac{1}{2RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \tag{8.7}$$

$$s_2=-\frac{1}{2RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \tag{8.8}$$

将 s_1,s_2 代入式 (8.4) 中,所得的结果将满足微分方程式 (8.3) 。注意:在式 (8.5) 中忽略了 A 的值,即两个解:

$$v_1=A_1e^{s_1t}$$

$$v_2=A_2e^{s_2t}$$

均满足式 (8.3) ,分别用 v_1,v_2 表示。可以看出它们的和也是方程的一个解,如果令:

$$v=v_1+v_2=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t} \tag{8.9}$$

那么:

$$\frac{dv}{dt}=A_1s_1e^{s_1t}+A_2s_2e^{s_2t} \tag{8.10}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}=A_1s_1^2e^{s_1t}+A_2s_2^2e^{s_2t} \tag{8.11}$$

将式 (8.9) ~(8.11)代入到式 (8.3) 可得:

$$A_1e^{s_1t}\left(s_1^2+\frac{1}{RC}s_1+\frac{1}{LC}\right)+A_2e^{s_2t}\left(s_2^2+\frac{1}{RC}s_2+\frac{1}{LC}\right)=0 \tag{8.12}$$

由于 s_1,s_2 均为特征方程的根,所以括号内的部分均为零,由此得出图 8.1 所示并联 RLC 电路的固有响应为:

$$v=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t} \tag{8.13}$$

式 (8.13) 是式 (8.9) 的重复。v_1,v_2,v_1+v_2 均为微分方程的解,因此,方程式 (8.3) 的解如式 (8.13) 所示。特征方程的根(s_1,s_2)由电路参数 R,L,C 决定,初始状态决定常数 A_1,A_2 的取值。如果 s_1,s_2 相等,公式 (8.13) 的形式必须修改,在 8.2 节的临界阻尼电压响应中将讨论这个问题。

$v(t)$的变化取决于 s_1,s_2,因此,求解固有效应的第一步是确定特征方程的根。式 (8.7) 和式 (8.8) 采用文献中普遍使用的符号,即为:

$$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \tag{8.14}$$

$$s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \tag{8.15}$$

其中:

$$\alpha=\frac{1}{2RC} \tag{8.16}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{8.17}$$

如表 8.1 所示。

表 8.1　并联 RLC 电路的固有响应参数

参　数	名　称	在固有响应中的取值
s_1,s_2	特征根	$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$
		$s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$
α	阻尼频率	$\alpha=\frac{1}{2RC}$
ω_0	谐振角频率	$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

由于指数 e 是无量纲的，所以，s_1,s_2(以及 α,ω_0)具有时间的倒数，或者说频率的量纲。为了区分这些频率，采用以下这些术语：s_1,s_2 称为复频率，α 称为固有频率，ω_0 称为谐振角频率。这些术语的明确含义将随着这一章内容的逐渐深入而愈加清晰，所有这些频率都具有角频率的量纲，故采用统一单位弧度每秒(rad/s)。特征根 s_1,s_2 的值取决于 α 和 ω_0，这里有三种可能的输出：如果$\omega_0^2<\alpha^2$，两根为不相同的实数，为讨论的需要，称这种电压响应为过阻尼响应；如果 $\omega_0^2>\alpha^2$，两根为复数，且为共轭复数，这时的电压响应称为欠阻尼响应；如果 $\omega_0^2=\alpha^2$，两根为相等的实数，此时的电压响应称为临界阻尼响应。通过下面的讨论读者将会看到，不同的阻尼状态将影响电压响应过渡到稳态的过程，对于这三种情况将在 8.2 节中分别予以介绍。

例 8.1 说明 s_1,s_2 的值如何由 R,L,C 决定。

例 8.1　(a) 如果 $R=200\ \Omega$, $L=50$ mH, $C=0.2\ \mu$F，求决定图 8.5 所示电路电压响应的特征方程的根。

(b) 电压响应是过阻尼、欠阻尼还是临界阻尼？

(c) 如果 $R=312.5\ \Omega$，重复(a)，(b)两问。

(d) 电压响应为临界阻尼时，求电阻 R。

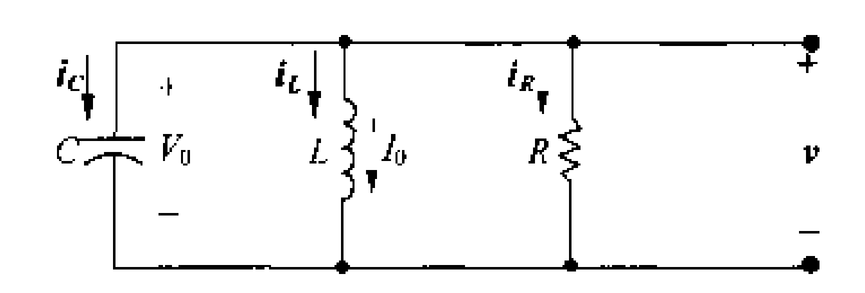


图 8.5　并联 RLC 电路固有响应电路图

解：

(a) 对于给定的 R,L,C 值：

$$\alpha=\frac{1}{2RC}=\frac{10^6}{(400)(0.2)}=1.25\times10^4\,\text{rad/s}$$

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC}=\frac{(10^3)(10^6)}{(50)(0.2)}=10^8\,\text{rad}^2/\text{s}^2$$

由式(8.14)和式(8.15)：

$$s_1=-1.25\times10^4+\sqrt{1.5625\times10^8-10^8}$$
$$=-12500+7500=-5000\ \text{rad/s}$$
$$s_2=-1.25\times10^4-\sqrt{1.5625\times10^8-10^8}$$

$$= -12500 - 7500 = -20000 \text{ rad/s}$$

(b) 因为 $\omega_0^2 < \alpha^2$,所以电压响应为过阻尼。

(c) 如果 $R = 312.5\ \Omega$,则有:

$$\alpha = \frac{10^6}{(625)(0.2)} = 8000 \text{ rad/s}$$

$$\alpha^2 = 64 \times 10^6 = 0.64 \times 10^8 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

由于 ω_0^2 仍为 $10^8 \text{rad}^2/\text{s}^2$,则:

$$s_1 = -8000 + \text{j}6000 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -8000 - \text{j}6000 \text{ rad/s}$$

(在电子工程中,虚数$\sqrt{-1}$用字母 j 表示,因为 i 已被用来表示电流。)

由于 $\omega_0^2 > \alpha^2$,所以电压响应为欠阻尼响应。

(d) 临界阻尼要求 $\omega_0^2 = \alpha^2$,即:

$$\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \frac{1}{LC} = 10^8$$

或者:

$$\frac{1}{2RC} = 10^4$$

则:

$$R = \frac{10^6}{(2 \times 10^4)(0.2)} = 250\ \Omega$$

练习题

8.1 图 8.5 所示电路的电阻和电感分别为 100 Ω 和 20 mH。

(a) 求出使电压响应为临界阻尼时的电容值。

(b) 要使固有频率为 5 krad/s,求此时的 C 值以及特征方程的根。

(c) 要使谐振频率为 20 krad/s,求此时的 C 值以及特征方程的根。

答:(a) $C = 500$ nF,(b) $C = 1\ \mu$F, $s_1 = -5000 + \text{j}5000$ rad/s, $s_2 = -5000 - \text{j}5000$ rad/s,
(c) $C = 125$ nF, $s_1 = -5359$ rad/s, $s_2 = -74641$ rad/s。

8.2 并联 *RLC* 电路固有响应的形式

现在,读者已知二阶 *RLC* 电路的响应取决于 s_1, s_2 的值,而 s_1, s_2 又取决于电路的参数 R, L, C,因此,求解固有响应的第一步是先确定 s_1, s_2 值,然后,确定响应是过阻尼、欠阻尼还是临界阻尼。

要完整的描述固有响应,还需要确定式(8.13)中的参数 A_1 和 A_2 的值,求解方法是利用初始条件,即初始电流(或电压)以及电流(或电压)一次微分后的初始值。求二阶电路的阶跃响应时,同样会用到初始条件以及变量的稳态值。

在这一节,分别分析三种阻尼状态的固有响应,首先从过阻尼响应开始。对于三种阻尼状

态，其响应方程与要求解参数的方程略有不同，这就是为什么要在问题的开头确定响应为过阻尼、欠阻尼还是临界阻尼的原因。

8.2.1　过阻尼电压响应

当特征方程的根为两个不同的实数时，称并联 *RLC* 电路的电压响应为过阻尼的，电压的解具有以下形式：

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{8.18}$$

其中 s_1, s_2 为特征方程的根，A_1, A_2 由初始状态决定，确切的说是由 $v(0^+)$ 和 $dv(0^+)/dt$ 决定的，而 $v(0^+)$ 和 $dv(0^+)/dt$ 又是由电容上的初始电压 V_0 和电感上的初始电流 I_0 决定的。

下面将介绍如何用电容上的初始电压和电感上的初始电流来确定 A_1 和 A_2 的值。由式(8.18) 得到：

$$v(0^+) = A_1 + A_2 \tag{8.19}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2 \tag{8.20}$$

s_1, s_2 已知，求解 A_1, A_2 的任务就变为求解 $v(0^+)$ 和 $dv(0^+)/dt$，$v(0^+)$ 是电容上的初始电压，$dv(0^+)/dt$ 的值可以通过求 $t = 0^+$ 时电容支路上的初始电流得到，即：

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} \tag{8.21}$$

用基尔霍夫电流定律求电容支路上的初始电流。在 $t = 0^+$ 时刻，三条支路上的电流之和必定为零，电阻支路上的电流为初始电压除以电阻，电感支路上的电流为 I_0，由图 8.5 得到：

$$i_C(0^+) = \frac{-V_0}{R} - I_0 \tag{8.22}$$

有了 $i_C(0^+)$，利用式 (8.21) 即可求得 $dv(0^+)/dt$。

总结过阻尼电压响应 $v(t)$ 的求解过程如下：

1. 由 R, L, C，确定特征方程的根 s_1, s_2。
2. 通过分析电路求出 $v(0^+)$ 和 $dv(0^+)/dt$。
3. 同时解式 (8.23)，(8.24) 即可求得 A_1, A_2 的值。

$$v(0^-) = A_1 + A_2 \tag{8.23}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = s_1 A_1 + s_2 A_2 \tag{8.24}$$

4. 将 s_1, s_2, A_1, A_2 代入式 (8.18) 中，求出 $v(t)$。

例 8.2，8.3 给出了求解并联 *RLC* 电路过阻尼响应的过程。

例 8.2　如图 8.6 所示电路，$v(0^+) = 12\ \text{V}$，$i_L(0^+) = 30\ \text{mA}$。

(a) 求各条支路上的初始电流。

(b) 求 dv/dt 的初始值。

(c) 求 $v(t)$ 的表达式。

(d) 粗略画出 $0 \leq t \leq 250\ \mu s$ 时的 $v(t)$ 曲线。

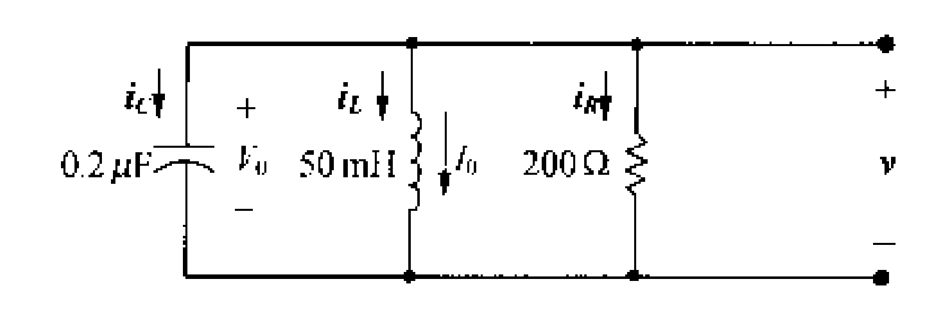


图 8.6 例 8.2 电路图

解:

(a) 因为电感上的电流不能突变,所以,电感上的初始电流为 30 mA:

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 30\ \text{mA}$$

电容使并联元器件两端的电压为 12 V,因此,电阻支路上的电流 $i_R(0^+)$为 12/200,即 60 mA,利用基尔霍夫电流定律,每一瞬间流出节点的电流之和为零,因此:

$$\begin{aligned} i_C(0^+) &= -i_L(0^+) - i_R(0^+) \\ &= -90\ \text{mA} \end{aligned}$$

如果假设电感电流和电容电压在能量开始释放的时刻就具有给定的直流稳态值,且 $i_C(0^-)=0$,则电容上的电流在 $t=0$ 时刻,有一个瞬间突变。

(b) 由于 $i_C = C(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$:

$$\frac{\mathrm{d}v(0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{-90\times10^{-3}}{0.2\times10^{-6}} = -450\ \text{kV/s}$$

(c) 特征方程的根 s_1, s_2 由 R, L, C 确定,利用公式 (8.14),(8.15),(8.16),(8.17)可得:

$$\begin{aligned} s_1 &= -1.25\times10^4 + \sqrt{1.5625\times10^8 - 10^8} \\ &= -12\,500 + 7500 = -5000\ \text{rad/s} \\ s_2 &= -1.25\times10^4 - \sqrt{1.5625\times10^8 - 10^8} \\ &= -12500 - 7500 = -20000\ \text{rad/s} \end{aligned}$$

由于根有不相同的实数,所以响应为过阻尼响应,具有式 (8.18) 的形式,A_1, A_2 的值由式 (8.23),(8.24)确定,由于已经得到 $s_1, s_2, v(0^+)$和 $\mathrm{d}v(0^+)/\mathrm{d}t$ 的值,所以:

$$\begin{aligned} 12 &= A_1 + A_2 \\ -450\times10^3 &= -5000A_1 - 20000A_2 \end{aligned}$$

求解两个方程,得 $A_1 = -14$ V,$A_2 = 26$ V,将这些值代入式 (8.18) 中,得到过阻尼电压响应为:

$$v(t) = (-14\mathrm{e}^{-5000t} + 26\mathrm{e}^{-20000t})\ \text{V},\quad t\geqslant0$$

检验上述计算,其解满足:$v(0) = 12$ V,$\mathrm{d}v(0^+)/\mathrm{d}t = -450000$ V/s

(d) 图 8.7 给出了 $0\leqslant t\leqslant250\ \mu\text{s}$ 区间的 $v(t)$变化曲线。

例 8.3 推导例 8.2(图 8.6)存贮能量释放过程中的各支路电流 i_R, i_L, i_C 表达式。

解:

通过例 8.2,已知三条支路上的电压为:

$$v(t) = (-14\mathrm{e}^{-5000t} + 26\mathrm{e}^{-20000t})\ \text{V},\ t\geqslant0$$

则电阻支路上的电流为:

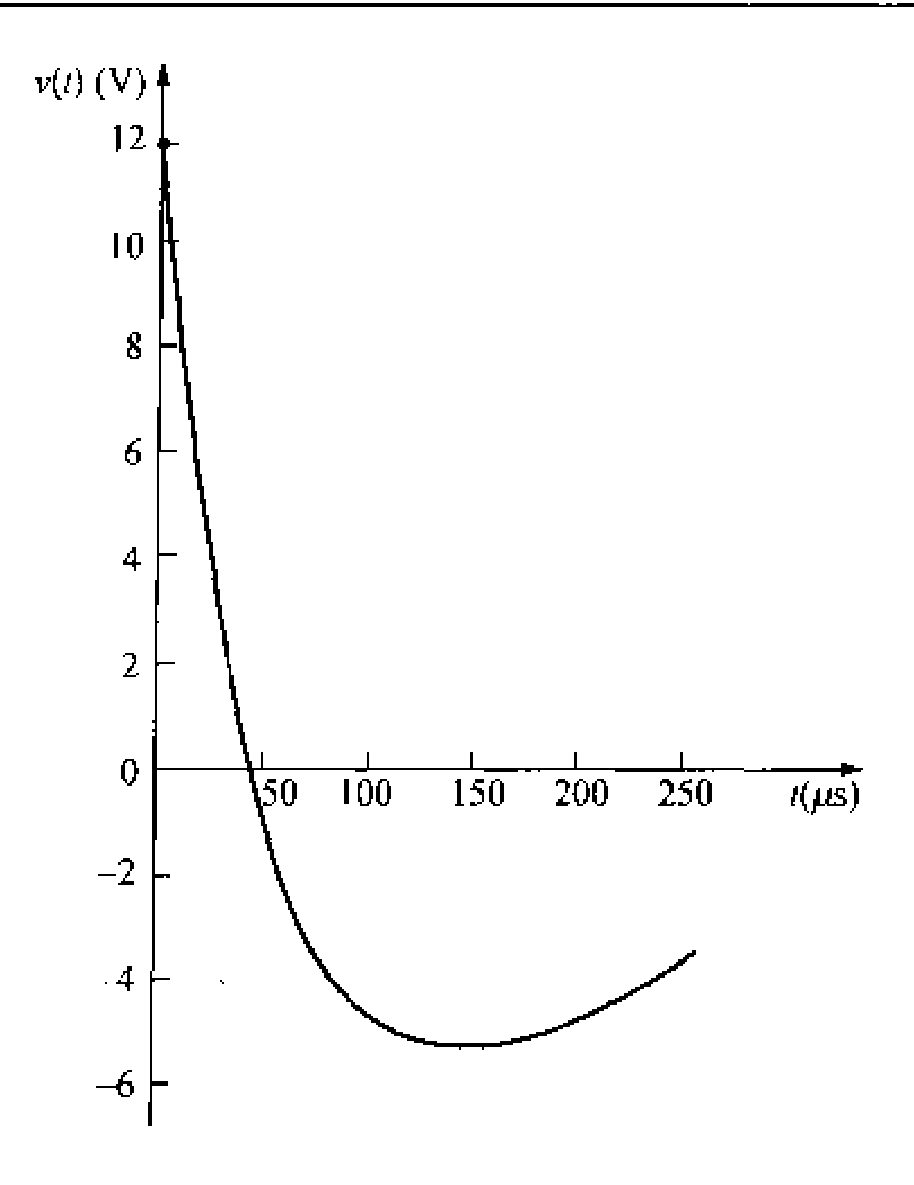


图 8.7　例 8.2 电压响应

$$i_R(t)=\frac{v(t)}{200}=(-70e^{-5000t}+130e^{-20000t})\ \text{mA},\ t\geqslant 0$$

求解电感支路上的电流有两种方法，一是利用电感两端的电压与电流间的积分关系：

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v_L(x)\mathrm{d}x+I_0$$

另一种方法是先求电容支路上的电流，再利用基尔霍夫电流定律：$i_R+i_L+i_C=0$。采用后一种方法，电容支路上的电流为：

$$\begin{aligned}i_C(t)&=C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\&=0.2\times10^{-6}(70000e^{-5000t}-520000e^{-20000t})\\&=(14e^{-5000t}-104e^{-20000t})\ \text{mA},\ t\geqslant 0^+\end{aligned}$$

$i_C(0^+)=-90$ mA，符合例 8.2 中的结果。则可求得电感支路上的电流为：

$$\begin{aligned}i_L(t)&=-i_R(t)-i_C(t)\\&=(56e^{-5000t}-26e^{-20000t})\ \text{mA},\ t\geqslant 0\end{aligned}$$

在练习题 8.2 中，把用积分法求电感电流的问题留给读者。注意：i_L 的表达式必须满足初始电感电流。

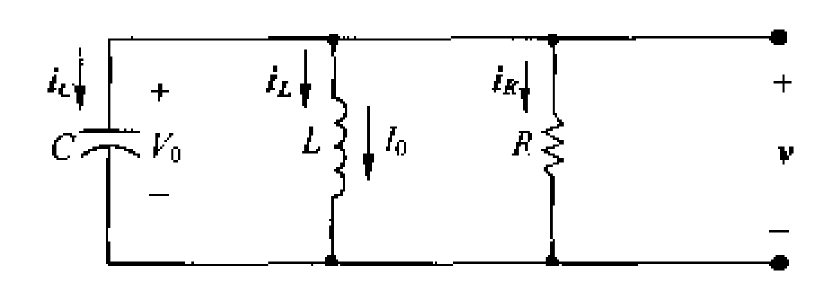
练习题

8.2　利用 i_L 与 v 之间的积分关系求图 8.6 所示电路的 i_L 表达式。

答：$i_L(t)=(56e^{-5000t}-26e^{-20000t})$ mA，$t\geqslant 0$

8.3　如图所示，电路中各元件参数分别为 $R=2\ \text{k}\Omega$，$L=250$ mH，$C=10$ nF，电感上的初始电流 $I_0=-4$ A，电容上的初始电压为 0 V，输出信号为电压 v，求：(a) $i_R(0^+)$，(b)

$i_C(0^+)$,(c) $dv(0^+)/dt$,(d) A_1,(e) A_2,(f) 当 $t \geq 0$ 时的 $v(t)$。



答:(a) 0,(b) 4 A,(c) 4×10^8 V/s,(d) 13333 V,(e) −13333 V,(f) $13333(e^{-10000t}-e^{-40000t})$V

8.2.2 欠阻尼电压响应

当 $\omega_0^2 > \alpha^2$ 时,特征方程的根为复数,此时的响应为欠阻尼响应。为方便起见,把 s_1,s_2 表示为:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2-\alpha^2)}$$
$$= \alpha + j\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$
$$= -\alpha + j\omega_d \tag{8.25}$$
$$s_2 = -\alpha - j\omega_d \tag{8.26}$$

其中:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2-\alpha^2} \tag{8.27}$$

ω_d 称为阻尼角频率,后面将解释这个名称的含义。

并联 *RLC* 电路的欠阻尼电压响应为:

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2 e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \tag{8.28}$$

符合式(8.18)。在将式(8.18)变换到式(8.28)的过程中,利用了欧拉变换:

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \tag{8.29}$$

因此:

$$v(t) = A_1 e^{(-\alpha+j\omega_d)t} + A_2 e^{-(\alpha+j\omega_d)t}$$
$$= A_1 e^{-\alpha t}e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t}e^{-j\omega_d t}$$
$$= e^{-\alpha t}(A_1\cos\omega_d t + jA_1\sin\omega_d t + A_2\cos\omega_d t - jA_2\sin\omega_d t)$$
$$= e^{-\alpha t}[(A_1+A_2)\cos\omega_d t + j(A_1-A_2)\sin\omega_d t]$$

用 B_1,B_2 来代替 A_1+A_2 和 $j(A_1+A_2)$这两个共轭虚数,即可得到:

$$v = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t)$$
$$= B_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2 e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

由于电压是实数,所以常数 B_1,B_2 是实数,不是虚数,不要被 $B_2 = j(A_1+A_2)$的表面现象所迷惑。因为在欠阻尼状态下,A_1 和 A_2 是共轭虚数,所以 B_1,B_2 是实数(见习题 8.13 和 8.14)。之所以采用参数 B_1,B_2 来描述欠阻尼响应,是因为它们可以使电压表达式较为简单。存贮在电路中的初始能量将决定 B_1,B_2 的大小,使用同样的方法也可以求出 A_1 和 A_2:通过求解 $t=0^+$ 时刻的 v 值以及微分值。与 s_1,s_2 一样,α 和 ω_d 是与电路参数 R,L,C 紧密关联的。

对于欠阻尼响应。决定 B_1,B_2 的两个假设方程为:

$$v(0^+) = V_0 = B_1 \tag{8.30}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2 \tag{8.31}$$

先分析欠阻尼响应的一般性质。首先，三角函数决定响应具有振荡性，也就是说电压在正负值之间变换，电压振荡的速率与 ω_d 有关。其次，振荡的幅度逐渐衰减。幅度衰减速率由 α 决定。由于 α 决定振荡的衰减速率，所以 α 被称为阻尼因子或阻尼参数，这就是 ω_d 为什么被称为阻尼角频率的原因。如果无阻尼，则 $\alpha = 0$，且振荡频率为 ω_0。只要电路中有一个损耗元件 R，α 就不等于零，并且振荡的频率 $\omega_d < \omega_0$。因此，当 $\alpha \neq 0$ 时，振荡的频率就是阻尼的。

由于电路中存在两个能量存贮元件，电感和电容，所以振荡可能发生。（这个电路的机械分析可以用悬挂于弹簧上的质量块来解释，当能量存贮于弹簧和运动着的质量块中时就会产生振荡）。例 8.4 所示电路为一欠阻尼响应电路，我们通过这一例子来说明欠阻尼响应的特性。总之，读者会注意到求欠阻尼响应的过程与求过阻尼响应的过程非常相似，只是响应方程和获取常量的假设方程略有不同。

例 8.4　图 8.8 所示电路，$V_0 = 0$，$I_0 = -12.25$ mA。

(a) 计算特征方程的根。

(b) 计算 $t = 0^+$ 时的 v 和 dv/dt。

(c) 计算 $t \geq 0$ 时的电压响应。

(d) 画出 $0 \leq t \leq 11$ ms 的 $v(t)$ 曲线。

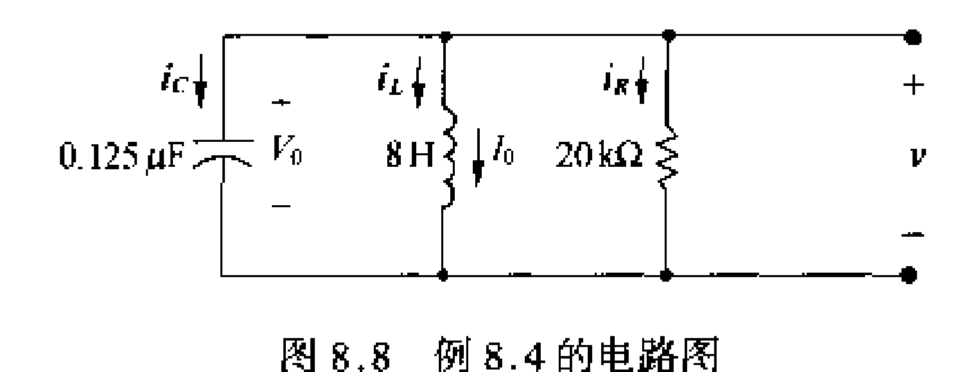


图 8.8　例 8.4 的电路图

解：

(a) 因为：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{2(20)10^3(0.125)} = 200 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{10^6}{(8)(0.125)}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

所以：

$$\omega_0^2 > \alpha^2$$

响应为欠阻尼。此时：

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^6 - 4 \times 10^4} = 100\sqrt{96}$$

$$= 979.80 \text{ rad/s}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d = -200 + j979.80 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d = -200 - j979.80 \text{ rad/s}$$

对于欠阻尼状况，一般不直接用到 s_1 和 s_2，因此可以不求，这里求出的目的是为了明

确 s_1, s_2 在欠阻尼状况下为复频率。

(b) 因为 v 是电容的端电压,则有:

$$v(0) = v(0^+) = V_0 = 0$$

因为 $v(0^+) = 0$,在 $t = 0^+$ 时刻,电阻支路上的电流为零,因此,$t = 0^+$ 时刻电容上的电流是负的电感电流:

$$i_C(0^+) = -(-12.25) = 12.25 \text{ mA}$$

因此,初始电压的微分值为:

$$\frac{\mathrm{d}v(0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{(12.25)(10^{-3})}{(0.125)(10^{-6})} = 98000 \text{ V/s}$$

(c) 由公式(8.20)和(8.31)可知,$B_1 = 0$,则有:

$$B_2 = \frac{98000}{\omega_d} \approx 100 \text{ V}$$

将 $\alpha, \omega_d, B_1, B_2$ 的值代入 $v(t)$ 的表达式中得:

$$v(t) = 100e^{-200t} \sin 979.80t \text{ V}, t \geq 0$$

(d) 图 8.9 给出了能量释放前 11 ms 电压 $v(t)$ 的变化曲线。曲线清晰地显示了欠阻尼响应的阻尼振荡特性。电压通过在稳态值的上下变动最终趋于稳定,另外,趋于稳态值的摆动幅度随着时间的推移逐渐减小。

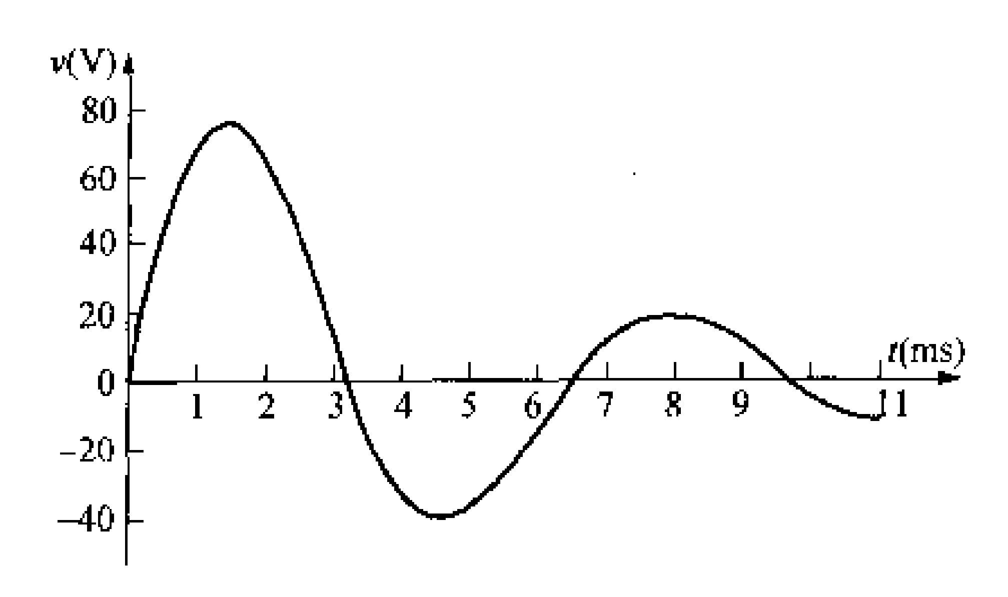


图 8.9 例 8.4 的电压响应

8.2.3 欠阻尼响应特性

欠阻尼响应具有几个重要的特性。首先,当电路中的损耗减小时,振荡持续的时间将增加,且振荡频率接近于 ω_0,换句话说,当 $R \to \infty$ 时,图 8.8 所示电路的损耗将趋于零,因为 $p = v^2/R, R \to \infty, \alpha \to 0$,说明 $\omega_d \to \omega_0$。当 $\alpha = 0$ 时,电压的幅值将保持为常数,角频率为 ω_0 的振荡将保持下去。在例 8.4 中,如果 R 变为无限大,则 $v(t)$ 的解为:

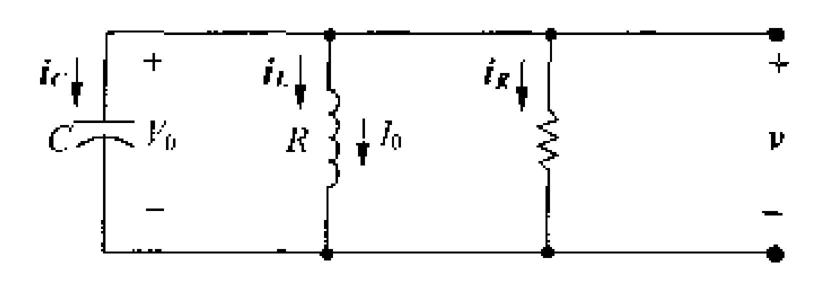
$$v(t) = 98\sin 1000t \text{ V}, t \geq 0$$

在这种情况下,振荡为持久振荡,电压幅值为 98 V,频率为 1000 rad/s。

现在,可以定性地描述欠阻尼响应和过阻尼响应之间的区别。在一个欠阻尼系统里,响应是振荡的,或者说是在最终值上下"弹跳"的,这个振荡也被称为"振铃"。在一个过阻尼系统里,响应趋于最终值的过程没有振铃,或者描述为一个"缓慢"的过程。对于一个二阶系统,如果希望能在尽可能短的时间里得到一个稳定响应输出值,而不关心在响应达到稳态过程中出现的振铃,就应该设计一个欠阻尼响应系统。另一方面,如果希望响应不超过稳态值,或许是

为了确保元件不被损坏，就需要设计一个过阻尼系统，此时，就不得不接受到达稳态值相对较慢的一个上升过程。

练习题



8.4 10 mH 电感、1 μF 电容和可变电阻连接成图示并联电路，调整电阻值使特征方程的根为 $-8000 \pm j6000$ rad/s，电容上的初始电压为 10 V，电感上的初始电流为 80 mA。求：(a) R，(b) $dv(0^+)/dt$，(c) B_1 和 B_2，(d) $i_L(t)$。

答：(a) 62.5 Ω，(b) −240000 V/s，(c) $B_1 = 10$ V，$B_2 = -80/3$ V，(d) $i_L = 10\,e^{-8000t}[8\cos 6000t + (82/3)\sin 6000t]$ mA，$t \geq 0$。

8.2.4 临界阻尼电压响应

当 $\omega_0^2 = \alpha^2$ 或者 $\omega_0 = \alpha$ 时，图 8.8 所示二阶电路为临界阻尼电路。当电路是临界阻尼时，其响应在振荡的边缘，两个特征方程的根为相等的实数，即：

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{1}{2RC} \tag{8.32}$$

此时，电压的形式不再如式 (8.18) 所示，由于 $s_1 = s_2 = -\alpha$，式 (8.18) 将变为：

$$v = (A_1 + A_2)e^{-\alpha t} = A_0 e^{-\alpha t} \tag{8.33}$$

其中 A_0 是一个任意常数，考虑到电路的参数 R 和 C 与 α 之间的关系，只有一个任意参数 A_0 的条件下，式 (8.33) 不能满足两个独立的初始条件(V_0, I_0)。

为解决这个问题，回到最初的假设，假设解为式 (8.18) 的形式。当特征根相等时，微分方程的解应具有不同的形式，即：

$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \tag{8.34}$$

在具有相同根的情况下，解为一个简单的指数分量与一个线性因子和指数因子乘积之和的形式，在微分方程的介绍中，将对式 (8.34) 进行证明。要求出微分方程的解，先要求出 D_1 和 D_2，其求解方法类似于欠阻尼和过阻尼的情况，利用电压的初始值和电压一次微分的初始值，可以得到关于 D_1 和 D_2 的两个方程。

由式 (8.34)，假设决定 D_1 和 D_2 的两个方程为：

$$v(0^+) = V_0 = D_2 \tag{8.35}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2 \tag{8.36}$$

可以看出，对于临界阻尼响应，$v(t)$ 以及关于 D_1，D_2 的两个假设方程的形式不同于过阻尼和欠阻尼，但求解的方法相同。实际情况中，临界阻尼的情况很少遇到，主要原因是临界阻尼要求 ω_0 和 α 完全相等。而 ω_0 和 α 的取值依赖于电路参数，实际电路中很难选取到满足 $\omega_0 = \alpha$ 要求的元件。

例 8.5 说明了求解并联 RLC 电路临界阻尼响应的方法。

例8.5 (a) 例 8.4(图 8.8)中的电路,求解电路响应为临界阻尼的电阻 R。

(b) 求 $t\geqslant 0$ 时的 $v(t)$。

(c) 画出 $0\leqslant t\leqslant 7$ ms 区间的 $v(t)$曲线。

解

(a) 由例 8.4,已知 $\omega_0^2=10^6$,所以对于临界阻尼:

$$\alpha=10^3=\frac{1}{2RC}$$

或者:

$$R=\frac{10^6}{(2000)(0.125)}=4000\ \Omega$$

(b) 由例 8.4,已知 $v(0^+)=0$,$\mathrm{d}v(0^+)/\mathrm{d}t=98.000$ V/s。由式 (8.35),(8.36)可得 $D_2=0$,$D_1=98000$ V/s,将 α,D_1,D_2 代入到式 (8.34) 中,得:

$$v(t)=98000te^{-1000t}\ \mathrm{V},\ t\geqslant 0$$

(c) 图 8.10展示了 $0\leqslant t\leqslant 7$ ms 区间 $v(t)$的变化曲线。

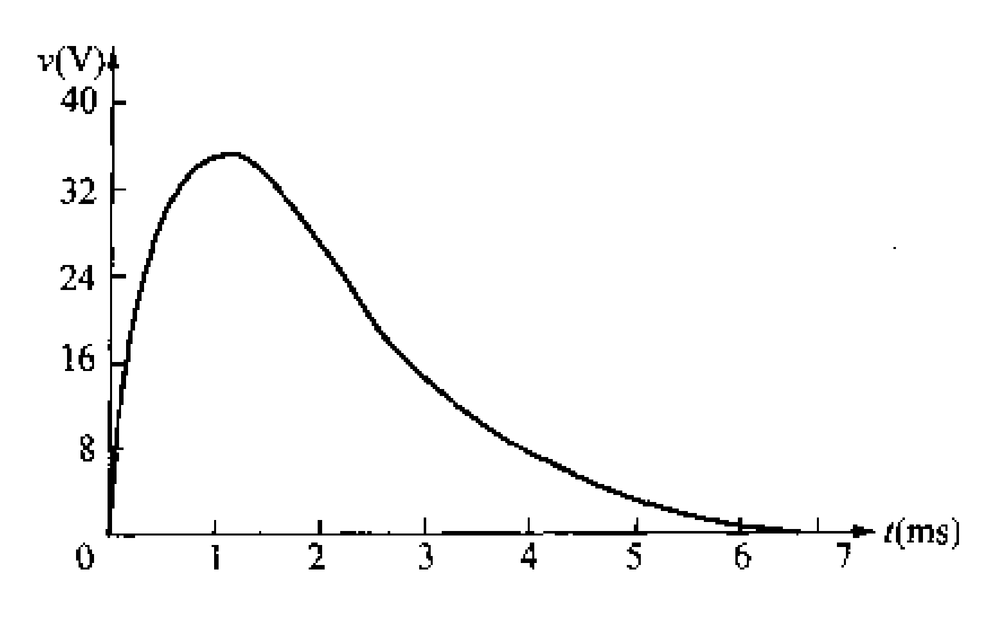


图 8.10 例 8.5 的电压响应

练习题

8.5 调整练习题 8.4 中的电阻值,使电路处于临界阻尼状态。已知电感和电容的值分别为 0.4 H 和 10 μF。电路中的初始能量为 25 mJ,平均贮存于电感和电容中。求:(a) R,(b) V_0,(c) I_0,(d) D_1 和 D_2,(e) i_R,$t\geqslant 0^+$。

答:(a) 100 Ω,(b) 50 V,(c) 250 mA,(d) −50000 V/s,50 V,(e) $i_R(t)=(-500te^{-500t}+0.50e^{-500t})$A, $t\geqslant 0^+$。

这里,通过简单的总结归纳了并联 RLC 电路的分析结果。求取固有响应的第一步需要计算特征方程的根,了解电路是过阻尼、欠阻尼还是临界阻尼。如果特征根是不相等的实数($\omega_0^2<\alpha^2$),响应就是过阻尼的,并且电压为:

$$v(t)=A^1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

其中:

$$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

$$s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

A_1, A_2 的值由下面两个公式求得：

$$v(0^+) = A_1 + A_2$$

$$\frac{\mathrm{d}v(0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_C(0^+)}{C} = s_1 A_1 + s_2 A_2$$

如果根为虚数($\omega_0^2 > \alpha^2$)，则响应为欠阻尼，且电压为：

$$v(t) = B_1 \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2 \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

其中：

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

B_1, B_2 的值由下面两个公式求得：

$$v(0^+) = V_0 = B_1$$

$$\frac{\mathrm{d}v(0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$

如果特征方程的根为相等的实数($\omega_0^2 = \alpha^2$)，则电压响应为：

$$v(t) = D_1 t\mathrm{e}^{-\alpha t} + D_2 \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

其中 α 的形式如前所述。D_1, D_2 的值由下面两个式子求得：

$$v(0^+) = V_0 = D_2$$

$$\frac{\mathrm{d}v(0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2$$

8.3　并联 RLC 电路的阶跃响应

求并联 RLC 电路的阶跃响应，就是给电路突然施加一个电流源信号，求解并联支路两端产生的电压信号或者在各支路上产生的电流信号。采用电流源，能量能否存贮在电路中，要看具体电路。电路如图 8.11 所示，为了找出求解二阶电路阶跃响应的一般方法，重点应求解电感支路上的电流(i_L)。之所以关心电感支路上的电流是因为随着 t 的增加，该电流不会趋于零，相反，当开关打开一段时间后，电流值会趋于直流电流源的电流值 I_0。由于希望找出求解阶跃响应的一般方法，所以假设电路中的初始能量为零，这将减化计算同时又不会影响求解的过程。例 8.10 介绍如何将初始状态引入到求解过程中。

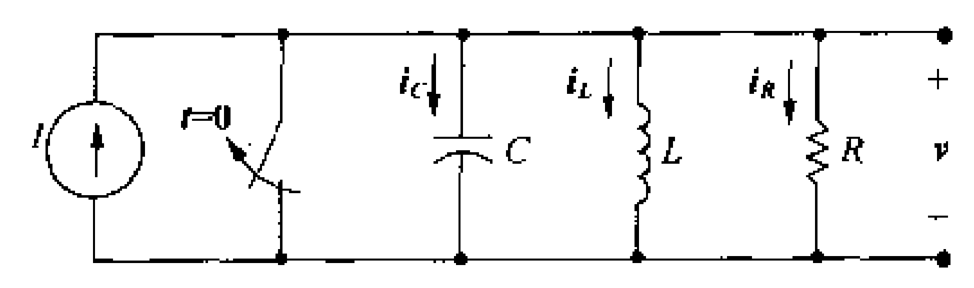


图 8.11　并联 RLC 电路阶跃响应电路图示例

为了求出电感电流 i_L，必须求解如下所示的二阶微分方程。由基尔霍夫电流定律，有：

$$i_L + i_R + i_C = I$$

或者:

$$i_L + \frac{v}{R} + C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = I \tag{8.37}$$

因为:

$$v = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \tag{8.38}$$

所以:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} \tag{8.39}$$

将式 (8.38) 和式 (8.39) 代入到式 (8.37) 中得:

$$i_L + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} = I \tag{8.40}$$

为方便起见,将上式两边除以 LC 并整理得:

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{i_L}{LC} = \frac{I}{LC} \tag{8.41}$$

比较式 (8.41) 和式 (8.3) ,可以看出区别在于式 (8.41) 的右边不为零。在说明如何求解式 (8.41) 之前,先用间接法获得它的解。已知式 (8.41) 的解之后,再解释直接求解法将会容易理解一些。

8.3.1 间接法

可以通过求电压 v 间接求解 i_L。由于 v 满足的微分方程与式 (8.3) 是相同的,所以可以利用 8.2 节介绍的方法。为了说明这一点,将式 (8.37) 中的 i_L 表示为 v 的函数,可得:

$$\frac{1}{L}\int_0^t v\,\mathrm{d}\tau + \frac{v}{R} + C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = I \tag{8.42}$$

由于 I 是一个常数,将式 (8.42) 对 t 微分一次可得:

$$\frac{v}{L} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + C\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

或者表示为:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{LC} = 0 \tag{8.43}$$

同 8.2 节中讨论的一样,v 的解由特征方程的根决定。三种可能解的形式为:

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{8.44}$$

$$v = B_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2 e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \tag{8.45}$$

$$v = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \tag{8.46}$$

注意:由于 $t>0$ 时,电路中有电源存在,所以在计算式 (8.44) ~ (8.46)的参数时必须考虑在 $t=0^+$ 时刻电源上的电流。

将式 (8.44) ~ (8.46)代入到式 (8.37) 中,可以求得 i_L 三种可能的解为:

$$i_L = I + A'_1 e^{s_1 t} + A'_2 e^{s_2 t} \tag{8.47}$$

$$i_L = I + B'_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B'_2 e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \tag{8.48}$$

$$i_L = I + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t} \tag{8.49}$$

其中 $A'_1, A'_2, B'_1, B'_2, D'_1, D'_2$ 为任意常数。

对于任何一种情况都可以通过求解电压来获取这些任意常数的最佳取值，但这种方法太复杂。

8.3.2 直接法

如果利用响应的初始值求解常数的最佳解，则要简单得多。讨论电路时，可以用 $i_L(0)$ 和 $\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t$ 求解最佳参数。

带常数的二阶微分方程的解等于一个强制响应加上一个固有响应。因此，阶跃响应的解可以表示为：

$$i = I_f + \{固有响应\} \tag{8.50}$$

或者：

$$v = V_f + \{固有响应\} \tag{8.51}$$

其中 I_f 和 V_f 表示响应的终值，这个值可能为零，例如图 8.8 所示电路中的电压 v。

例 8.6～8.10 说明了用直接法求解并联 RLC 电路的阶跃响应的步骤。

例 8.6　图 8.12 所示电路中的初始能量为零，$t=0$ 时刻，将一个 24 mA 的直流源作用到电路上，电阻值为 400 Ω。

(a) i_L 的初始值？

(b) $\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t$ 的初始值？

(c) 特征方程的根是多少？

(d) $t \geq 0$ 时，$i_L(t)$ 的数学表达式？

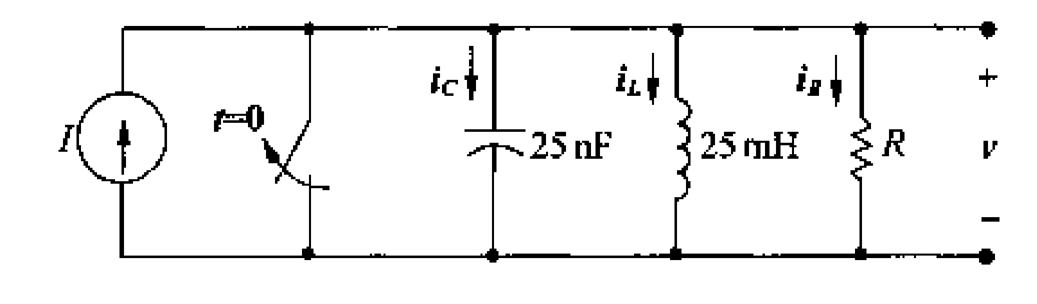


图 8.12　例 8.6 电路图

解：

(a) 直流电流源加到电路之前，电路中没有贮存能量。因此，电感上的初始电流为零，由于电感上的电流不能突变，因此，开关打开后的瞬间，$i_L(t)=0$。

(b) 开关打开之前，电容上的初始电压为零，因此，开关闭合后的瞬间它仍为 0。

由于 $v = L\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t$

所以：

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$$

(c) 由电路参数得：

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{10^{12}}{(25)(25)} = 16 \times 10^8$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^9}{(2)(400)(25)} = 5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

或者：

$$\alpha^2 = 25 \times 10^8$$

因为 $\omega_0^2 < \alpha^2$，特征方程的根为两不相等的实数，因此：

$$s_1 = -5 \times 10^4 + 3 \times 10^4 = -20000 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -5 \times 10^4 - 3 \times 10^4 = -80000 \text{ rad/s}$$

(d) 由于特征方程的根为两不相等的实数，所以电感电流响应为过阻尼响应，$i_L(t)$具有式(8.47)的形式，即：

$$i_L = I_f + A'_1 e^{s_1 t} + A'_2 e^{s_2 t}$$

A_1, A_2 由下面两个方程确定：

$$i_L(0) = I_f + A'_1 + A'_2 = 0$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = s_1 A'_1 + s_2 A'_2 = 0$$

解方程得：

$$A'_1 = -32 \text{ mA}, A'_2 = 8 \text{ mA}$$

$i_L(t)$的表达式为：

$$i_L(t) = (24 - 32e^{-20000t} + 8e^{-80000t}) \text{ mA}, \ t \geqslant 0$$

例 8.7 例 8.6(图 8.12)所示电路中的电阻 $R = 625\ \Omega$，求 $t \geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$。

解：

由于 LC 保持不变，ω_0^2 具有与例 8.6 相同的值，即 $\omega_0^2 = 16 \times 10^8$。$R$ 上升到 625 Ω，使 α 下降为 3.2×10^4 rad/s。由于 $\omega_0^2 > \alpha^2$，特征方程的根为复数，所以有：

$$s_1 = -3.2 \times 10^4 + j2.4 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -3.2 \times 10^4 - j2.4 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

电流响应为欠阻尼响应，并且具有式(8.48)的形式：

$$i_L(t) = I_f + B'_1 e^{-\alpha t} \cos\omega_d t + B'_2 e^{-\alpha t} \sin\omega_d t$$

其中 $\alpha = 32\ 000$ rad/s，$\omega_d = 24\ 000$ rad/s，$I_f = 24$ mA。

与例 8.6 一样，B'_1、B'_2 的值由初始状态决定。

例 8.8　将例 8.6(图 8.12)所示电路中的电阻设为 500 Ω，求 $t\geq 0$ 时的 i_L。

解：

ω_0^2 保持为 16×10^6，因为 R 变为 500 Ω，所以 $\alpha=4\times10^4\text{s}^{-1}$。因此，响应为临界阻尼响应，$i_L(t)$ 的形式如式 (8.49) 所示：

$$i_L(t)=I_f+D'_1te^{-\alpha t}+D'_2e^{-\alpha t}$$

同样，D'_1，D'_2 的值由初始条件确定：

$$i_L(0)=I_f+D'_2=0$$

$$\frac{di_L}{dt}(0)=D'_1-\alpha D'_2=0$$

因此：

$$D'_1=-960000\ \text{mA/s},D'_2=-24\ \text{mA}$$

$i_L(t)$ 的表达式为：

$$i_L(t)=(24-960000te^{-40000t}-24e^{-40000t})\ \text{mA},t\geq 0$$

例 8.9　(a) 在同一张图上画出例 8.6～8.8 所示电路的过阻尼、欠阻尼和临界阻尼响应，要求时间范围大于 0 到 220 μs。

(b) 从(a) 的图中找出 i_L 到达最终值的 90% 所需的时间。

(c) 在(b)结果的基础上，读者认为哪种响应方式能在最短的时间里使输出达到最终值的 90%？

(d) 要求确保电流值不超过最终稳定值，读者倾向于设计哪种响应方式？

解：

(a) 见图 8.13。

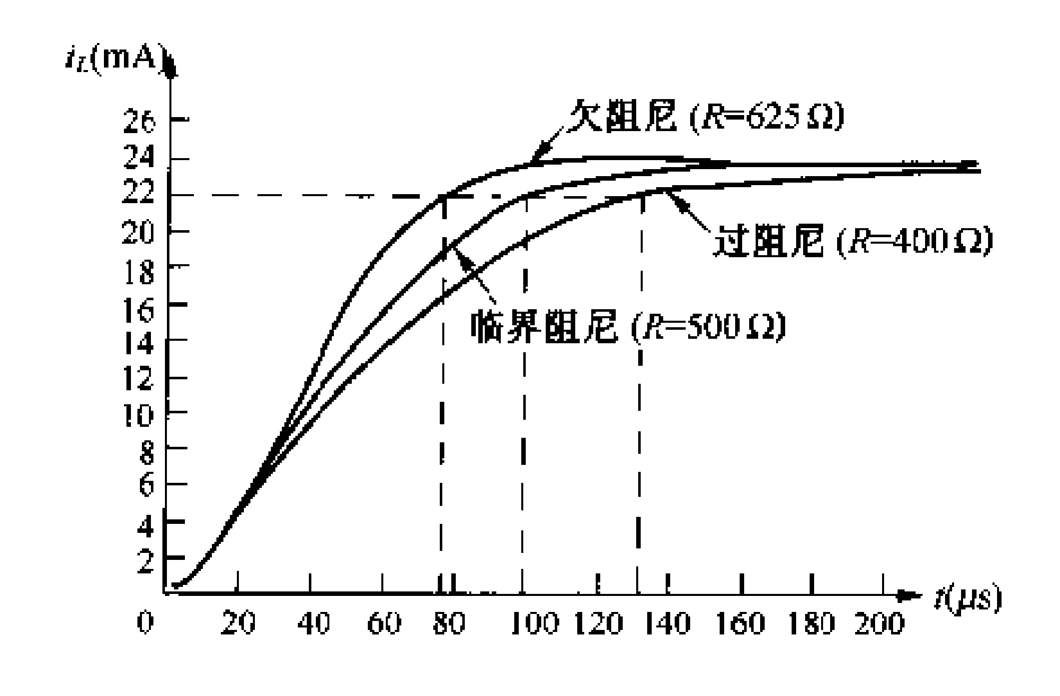


图 8.13　例 8.9 电流变化曲线

(b) i_L 的稳态值为 24 mA，由图可以得出当 $i_L=21.6$ mA 时，$t_{od}=130$ μs，$t_{cd}=97$ μs，$t_{ud}=74$ μs。

(c) 欠阻尼响应到达稳态值的 90% 需要的时间最短，在对速度要求较高的设计中常采用这种响应方式。

(d) 从图中可以看出，欠阻尼响应会超出稳态值，而过阻尼和临界阻尼响应则没有。虽然后两种状态都满足设计要求，但采用过阻尼响应最好，因为只有在元件参数非常精确的条件下，才能够获得临界阻尼响应，这是不实际的。

例 8.10 例 8.8 中所示电路(图 8.12),$R=500\ \Omega$,电感上的初始电流为 29 mA,电容上的初始电压为 50 V,求(a) $i_L(0)$,(b) $di_L(0)/dt$,(c) $i_L(t),t\geq0$,(d) $v(t),t\geq0^+$。

解:

(a) 由于电感上的电流不能突变,所以当电流源突然加到电路上时,电感上的电流为 $i_L(0)$,即 29 mA。

(b) 电感两端的初始电压由电容决定,因此:

$$L\frac{di_L}{dt}(0^+)=50$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+)=\frac{50}{25}\times10^3=2000\ \text{A/s}$$

(c) 由例 8.8 的解可知,电流响应为临界阻尼响应,因此:

$$i_L(t)=I_f+D'_1te^{-\alpha t}+D'_2e^{-\alpha t}$$

其中:

$$\alpha=\frac{1}{2RC}=40000\ \text{rad/s},I_f=24\ \text{mA}$$

D'_1,D'_2 的值由电路的初始状态决定,首先由初始电感电流得:

$$i_L(0)=I_f+D'_2=29\ \text{mA}$$

D'_2 的解为:

$$D'_2=29-24=5\ \text{mA}$$

D'_1 的解为:

$$\frac{di_L}{dt}(0^+)=D'_1-\alpha D'_2=2000$$

或:

$$\begin{aligned}D'_1&=2000+\alpha D'_2\\&=2000+40000(5\times10^{-3})\\&=2200\ \text{A/s}=2.2\times10^6\ \text{mA/s}\end{aligned}$$

因此,$i_L(t)$的表达式为:

$$i_L(t)=(24+2.2\times10^6te^{-40000t}+5e^{-40000t})\ \text{mA},t\geq0$$

(d) 由电感上电压和电流间的伏安关系,可以求出 $t\geq0$ 时,$v(t)$的表达式为:

$$\begin{aligned}v(t)&=L\frac{di_L}{dt}\\&=(25\times10^{-3})[(2.2\times10^6)(-40000)te^{-40000t}\\&\quad+2.2\times10^6e^{-40000t}+(5)(-40000)e^{-40000t}]\times10^{-3}\\&=-2.2\times10^6te^{-40000t}+50e^{-40000t}\ \text{V}\end{aligned}$$

为了验证结果的正确性,让我们求一下电感上的初始电压是否为 50 V:

$$v(0^+)=-2.2\times10^6(0)(1)+50(1)=50\ \text{V}$$

练习题

8.6 电路如图所示,$R=500\ \Omega,L=0.64\ \text{H},C=1\ \mu\text{F},I_0=0.5\ \text{A},V_0=40\ \text{V},I=-1\ \text{A}$。

求：(a) $i_R(0^+)$，(b) $i_C(0^+)$，(c) $\mathrm{d}i_L(0^+)/\mathrm{d}t$，(d) s_1, s_2，(e) $t \geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$，(f) $t \geqslant 0^+$ 时的 $v(t)$。

答：(a) 80 mA，(b) -1.58 A，(c) 62.5 A/s，(d) $(-1000 + \mathrm{j}750)$ rad/s，$(-1000 - \mathrm{j}750)$ rad/s，(e) $i_L(t) = [-1 + \mathrm{e}^{-1000t}[1.5\cos 705t + 2.0833\sin 750t]$ A，$t \geqslant 0$，(f) $v(t) = \mathrm{e}^{-1000t}(40\cos 750t - 2053.33\sin 750t)$ V，$t \geqslant 0^+$。

8.4　串联 *RLC* 电路的固有响应和阶跃响应

由于串联 *RLC* 电路和并联 *RLC* 电路可以用相同形式的微分方程来描述，所以两种电路的固有和阶跃响应的求解过程类似。对于图 8.14 所示电路，闭合回路电压方程为：

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}\tau + V_0 = 0 \tag{8.52}$$

图 8.14　串联 *RLC* 电路固有响应电路图

对 t 求一次微分得：

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{C} = 0 \tag{8.53}$$

整理得：

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{LC} = 0 \tag{8.54}$$

比较式 (8.54) 和式 (8.3)，可以发现两方程的形式相同。因此，可以采用式 (8.3) 的求解方法来解式 (8.54)。

由式 (8.54)，可知串联 *RLC* 电路的特征方程为：

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.55}$$

特征根为：

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{8.56}$$

或者：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{8.57}$$

固有频率为：

$$\alpha = \frac{R}{2L}\ \mathrm{rad/s} \tag{8.58}$$

谐振角频率为：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ \text{rad/s} \tag{8.59}$$

可以注意到，虽然串联 RLC 电路的阻尼频率与并联 RLC 电路的固有频率不同，但是，其谐振角频率相同。

根据 ω 和 α 间的关系：$\omega_0^2 < \alpha^2$，$\omega_0^2 > \alpha^2$ 或者 $\omega_0^2 = \alpha^2$，把电流响应分为过阻尼、欠阻尼和临界阻尼三种响应，电流的三种响应形式如下：

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}\text{(过阻尼)} \tag{8.60}$$

$$i(t) = B_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2 e^{-\alpha t}\sin\omega_d t\text{(欠阻尼)} \tag{8.61}$$

$$i(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}\text{(临界阻尼)} \tag{8.62}$$

在固有电流响应的基础上，通过任何一个电路元件都可推出固有电压响应。

为了说明串联 RLC 电路阶跃响应的求解过程与并联 RLC 电路的求解过程相同，列写图 8.15 所示电路的电容电压的微分方程，与图 8.11 所示电路的电感电流的微分方程进行比较，会发现两者具有相同的形式。为了讨论问题方便起见，假设开关闭合时，电路的初始能量为零。

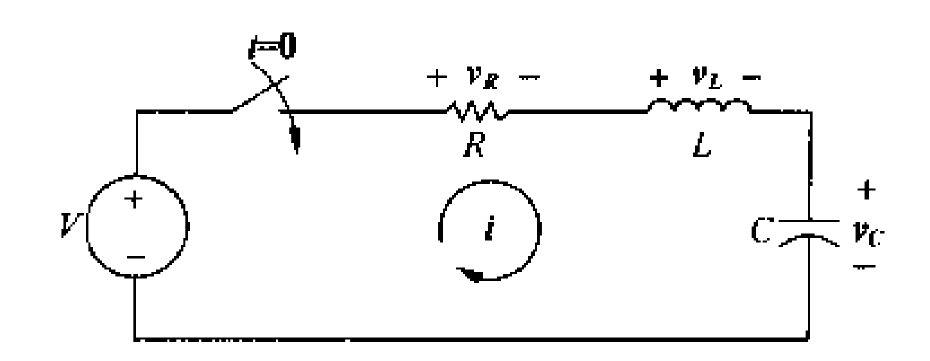


图 8.15 串联 RLC 电路阶跃响应电路图

对图 8.15，由基尔霍夫电压定律可得：

$$V = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + v_C \tag{8.63}$$

电流(i)与电容电压(v_C)的关系为：

$$i = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} \tag{8.64}$$

由此得：

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2} \tag{8.65}$$

将式(8.64)与式(8.41)代入到式(8.63)中，并整理得：

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + \frac{v_C}{LC} = \frac{V}{LC} \tag{8.66}$$

式(8.66)同式(8.41)具有相同的形式；因此 v_C 的求解过程同 i_L 一样，v_C 三种可能的解为：

$$v_C = V_f + A'_1 e^{s_1 t} + A'_2 e^{s_2 t}\text{(过阻尼)} \tag{8.67}$$

$$v_C = V_f + B'_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B'_2 e^{-\alpha t}\sin\omega_d t\text{(欠阻尼)} \tag{8.68}$$

$$v_C = V_f + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t}\text{(临界阻尼)} \tag{8.69}$$

其中 V_f 是 v_C 的稳态值，由图 8.15 可知，v_C 的稳态值为直流电压 V。

例 8.11 和例 8.12 给出了求解串联 RLC 电路固有响应和阶跃响应的方法与技巧。

例 8.11　图 8.16 所示电路，电容为 0.1 μF，电容电压为 100 V，在 $t=0$ 时，电容通过 100 mH 的电感和 560 Ω 的电阻放电。求：

(a) $t \geqslant 0$ 时的 $i(t)$。

(b) $t \geqslant 0$ 时的 $v_C(t)$。

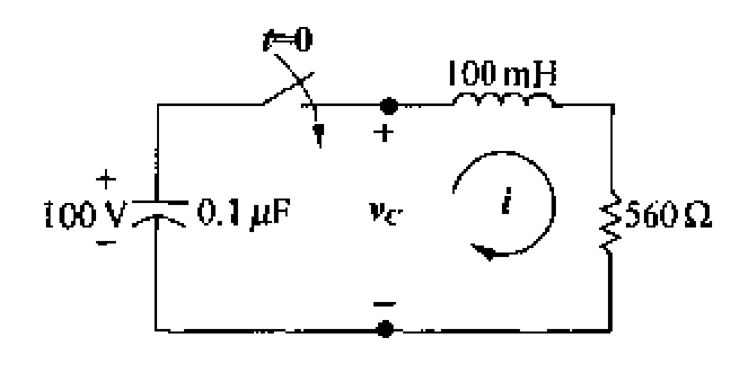


图 8.16　例 8.11 电路图

解：

(a) 首先，求特征方程的根，由给定参数可知：

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{(10^3)(10^6)}{(100)(0.1)} = 10^8$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{560}{2(100)} \times 10^3 = 2800 \text{ rad/s}$$

比较 ω_0^2 和 α^2，由于：

$$\alpha^2 = 7.84 \times 10^6 = 0.0781 \times 10^8$$

$\omega_0^2 > \alpha^2$，所以响应为欠阻尼响应，$i(t)$ 的表达式为：

$$i(t) = B_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2 e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

其中 $\alpha = 2800$ rad/s，$\omega_d = 9600$ rad/s，B_1 和 B_2 的值由初始条件确定，由于开关闭合前，电感电流为零，所以开关闭合后的瞬间，电感电流也为零，即：

$$i(0) = 0 = B_1$$

为了求 B_2，先计算 $\mathrm{d}_i(0^+)/\mathrm{d}t$。由电路可知，开关闭合的瞬间，$i(0)=0$，电阻上没有电压降，因此，电容上的初始电压等于电感两端的电压，即：

$$L\frac{\mathrm{d}i(0^+)}{\mathrm{d}t} = V_0$$

或者：

$$\frac{\mathrm{d}i(0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{V_0}{L} = \frac{100}{100} \times 10^3 = 1000 \text{ A/s}$$

因为 $B_1 = 0$，则有：

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 400B_2 e^{-2800t}(24\cos 9600t - 7\sin 9600t)$$

因此：

$$\frac{\mathrm{d}i(0^+)}{\mathrm{d}t} = 9600B_2$$

$$B_2 = \frac{1000}{9600} \approx 0.1042 \text{ A}$$

$I(t)$的解为：

$$i(t)=0.1042\mathrm{e}^{-2800t}\sin 9600t\ \mathrm{A},\ t\geqslant 0$$

(b) $v_C(t)$可利用下面的任一个关系式求：

$$v_C=-\frac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}\tau+100$$

$$v_C=iR+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

(推荐使用第二个关系式)$v(t)$的解为：

$$v_C(t)=(100\cos 9600t+29.17\sin 9600t)\mathrm{e}^{-2800t}\mathrm{V},\ t\geqslant 0$$

例 8.12 图 8.17 所示电路，电感为 100 mH，电容为 0.4 μF，电路中没有初始能量，求 $t\geqslant 0$ 时的$v_C(t)$。

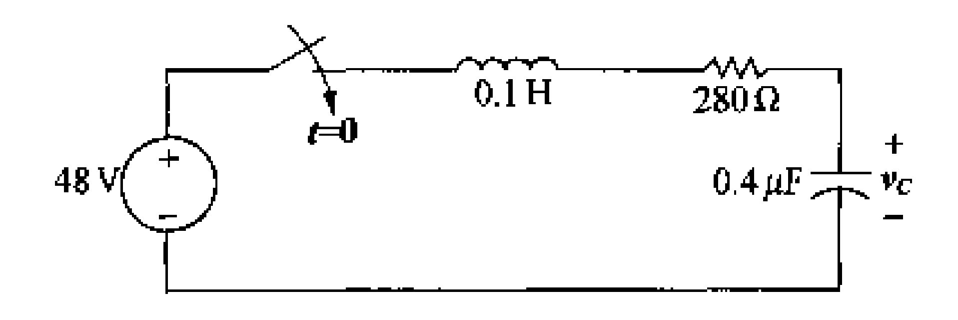


图 8.17 例 8.12 电路图

解：

特征方程的根为：

$$s_1=-\frac{280}{0.2}+\sqrt{\left(\frac{280}{0.2}\right)^2-\frac{10^6}{(0.1)(0.4)}}$$
$$=(-1400+\mathrm{j}4800)\ \mathrm{rad/s}$$
$$s_2=(-1400-\mathrm{j}4800)\ \mathrm{rad/s}$$

根为复数，所以电压响应为欠阻尼响应：

$$v_C(t)=48+B'_1\mathrm{e}^{-1400t}\cos 4800t+B'_2\mathrm{e}^{-1400t}\sin 4800t,\ t\geqslant 0$$

由于电路中没有初始能量，所以 $v_C(0)$和 $\mathrm{d}v_C(0^+)/\mathrm{d}t$ 都为零，因此：

$$v_C(0)=0=48+B'_1$$

$$\frac{\mathrm{d}v_C(0^+)}{\mathrm{d}t}=0=4800B'_2-1400B'_1$$

解方程得：

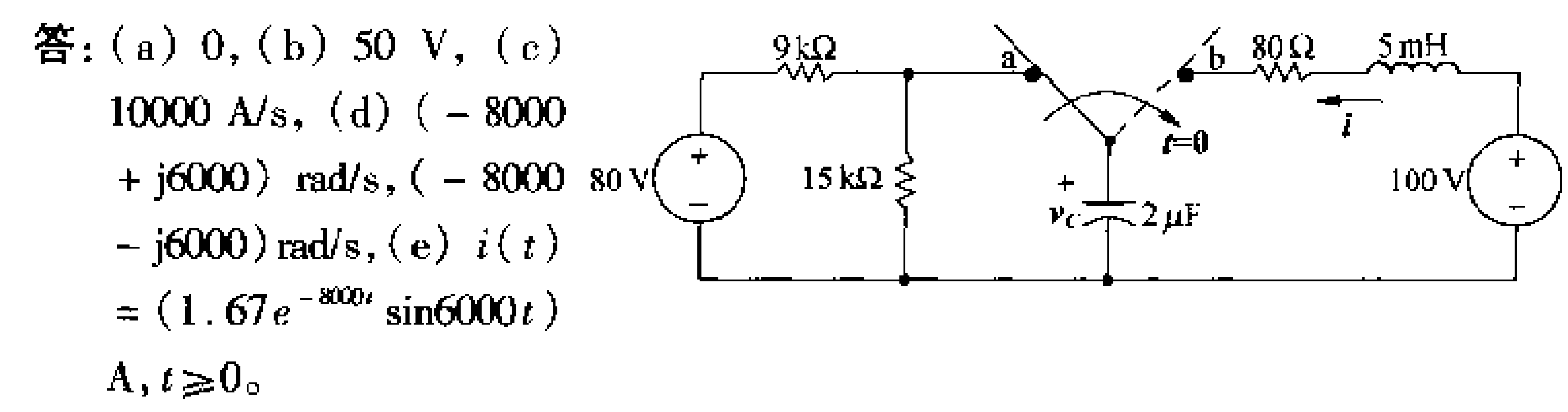
$$B'_1=-48\ \mathrm{V}$$
$$B'_2=-14\ \mathrm{V}$$

因此，$v_C(t)$的解为：

$$v_C(t)=(48-48\mathrm{e}^{-1400t}\cos 4800t-14\mathrm{e}^{-1400t}\sin 4800t)\mathrm{V},\ t\geqslant 0$$

练习题

8.7 开关在图示 a 处已停留很长时间，$t=0$ 时刻，将开关置于 b 处，求(a) $i(0^+)$，(b) $v_C(0^+)$，(c) $\mathrm{d}i(0^+)/\mathrm{d}t$，(d) s_1, s_2，(e) $t\geqslant 0$时的 $i(t)$。



答：(a) 0，(b) 50 V，(c) 10000 A/s，(d) (−8000 + j6000) rad/s，(−8000 − j6000) rad/s，(e) $i(t) = (1.67e^{-8000t}\sin 6000t)$ A，$t \geqslant 0$。

8.8　求 $t \geqslant 0$ 时，练习题 8.7 所示电路的 $v_C(t)$。

答：$v_C = [100 - e^{-8000t}(50\cos 6000t + 66.67\sin 6000t)]$ V，$t \geqslant 0$。

8.5　含两个集成运放的电路

若一个电路包含两个级联的运算放大器，则这个电路是一个二阶电路。也就是说，第二个运放的输出电压与第一个运放的输入电压间为二阶微分方程的关系，图 8.18 是一个包含两个级联运放的电路，下面对该电路进行分析。

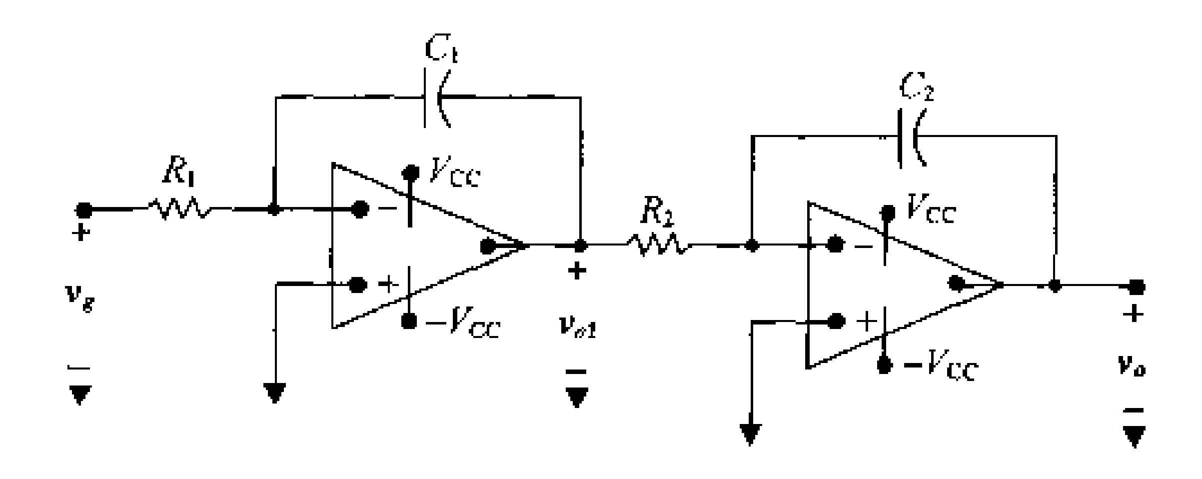


图 8.18　两级联运算放大器电路

假设运算放大器为理想运算放大器来推导描述 v_o 与 v_g 关系的微分方程。先求第一个运算放大器反相输入端的电流和，由于运放为理想运放，因此有：

$$\frac{0 - v_g}{R_1} + C_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0 - v_{o1}) = 0 \tag{8.70}$$

整理得：

$$\frac{\mathrm{d}v_{o1}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R_1C_1}v_g \tag{8.71}$$

求流出第二个运算放大器反相输入端的电流和：

$$\frac{0 - v_{o1}}{R_2} + C_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0 - v_o) = 0 \tag{8.72}$$

或者写为：

$$\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R_2C_2}v_{o1} \tag{8.73}$$

对式 (8.73) 取微分得：

$$\frac{\mathrm{d}^2v_0}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{R_2C_2}\frac{dv_{o1}}{dt} \tag{8.74}$$

将式 (8.71) 代入式 (8.74) 中，可得 v_o 与 v_g 之间的微分方程为：

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} = \frac{1}{R_1 C_1}\frac{1}{R_2 C_2} v_g \tag{8.75}$$

例 8.13 给出了含两个级联运算放大器电路的阶跃响应的求解方法。

例 8.13 图 8.19 所示电路,没有初始能量,给电路输入一个 25 mV 的电压 v_g,求:

(a) $0 \leqslant t \leqslant t_{sat}$ 时,$v_o(t)$ 的表达式。

(b) 经过多长时间,电路达到饱和状态?

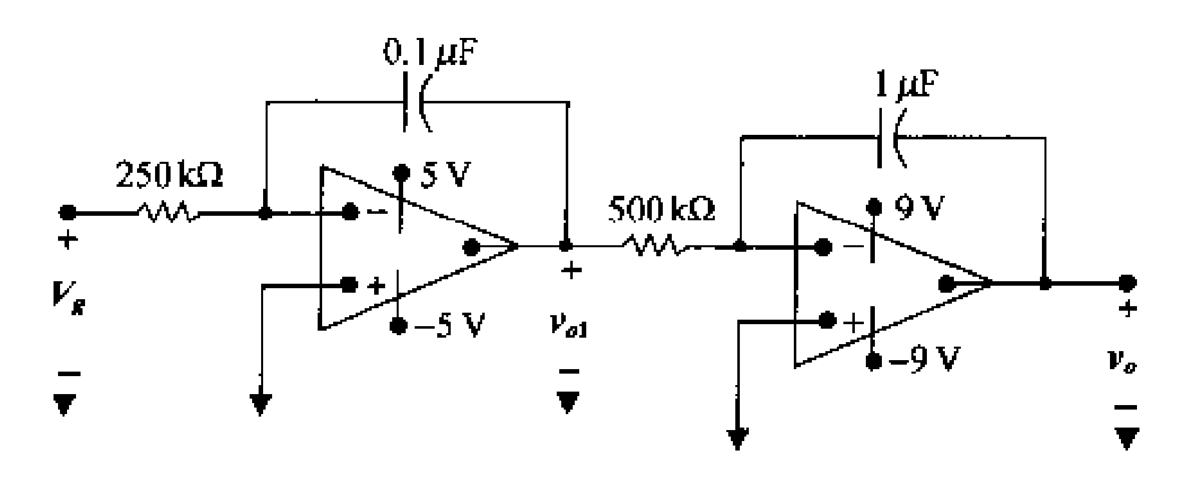


图 8.19 例 8.13 的电路图

解:

(a) 由图 8.19 可知,运算放大器的比例系数为:

$$\frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1\ 000}{(250)(0.1)} = 40$$

$$\frac{1}{R_2 C_2} = \frac{1\ 000}{(500)(1)} = 2$$

又由于 $t>0$ 时,$v_g = 25$ mV,代入到式 (8.75) 中可得:

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} = (40)(2)(25\times 10^{-3}) = 2$$

令:

$$g(t) = \frac{dv_o}{dt}$$

则:

$$\frac{dg(t)}{dt} = 2,\ dg(t) = 2dt$$

所以:

$$\int_{g(0)}^{g(t)} dy = 2\int_0^t dx$$

因此:

$$g(t) - g(0) = 2t$$

由于:

$$g(0) = \frac{dv_o(0)}{dt} = 0$$

电路中的初始能量为零,且运放为理想运放(见练习题 8.9),所以:

$$\frac{dv_o}{dt} = 2t,\ v_o = t^2 + v_o(0)$$

由于 $v_o(0)=0$，所以 v_o 的表达式为：

$$v_o = t^2, 0 \leq t \leq t_{sat}$$

(b) 当 $v_o = 9$ V 或 $t = 3$ s 时，第二个放大器达到饱和状态。但也可能出现这种情况，在 $t = 3$ s之前，第一个运放达到饱和，为了证明这种可能性，由式(8.71)求 dv_{o1}/dt：

$$\frac{dv_{o1}}{dt} = -40(25)\times 10^{-3} = -1$$

解 v_{o1} 得：

$$v_{o1} = -t$$

因此，当 $t = 3$ s 时，$v_{o1} = -3$ V，由于第一个运放的电源电压为 ±5 V，所以，当第二个运放达到饱和时，第一个运放不会达到饱和状态。一旦电路达到饱和状态，就不能再用线性模型来分析电路。

练习题

8.9 证明如果在 v_g 跳变的瞬间，图 8.19 所示电路中没有初始能量，则 $t=0$ 时 $dv_o/dt = 0$。

答：推导。

8.10 (a) 如果 $v_{o1}(0) = 5$ V，$v_o(0) = 8$ V，求图 8.19 所示电路的 $v_o(t)$，$0 \leq t \leq t_{sat}$。

(b) 电路需要多长时间达到饱和？

答：(a) $v_o = t^2 - 10t + 8$ V，(b) $t_{sat} = 99.02$ ms。

8.5.1 具有反馈电阻的两级运算放大电路

图 8.20 所示电路对图 8.18 电路做了一定的改进，由 7.7 节的内容已知，集成放大器电流达到饱和是由于反馈电容上电荷的积累造成的，如果在反馈电容上并联一个电阻就可以克服这个问题，下面推导输出电压 v_o 的方程，并通过例 8.13 介绍集成放大器反馈电阻的重要作用。

为了得到 v_{o1} 与 v_g 之间的二阶微分方程式，先求第一级运放反相输入端的电流方程：

$$\frac{0 - v_g}{R_a} + \frac{0 - v_{o1}}{R_1} + C_1 \frac{d}{dt}(0 - v_{o1}) = 0 \tag{8.76}$$

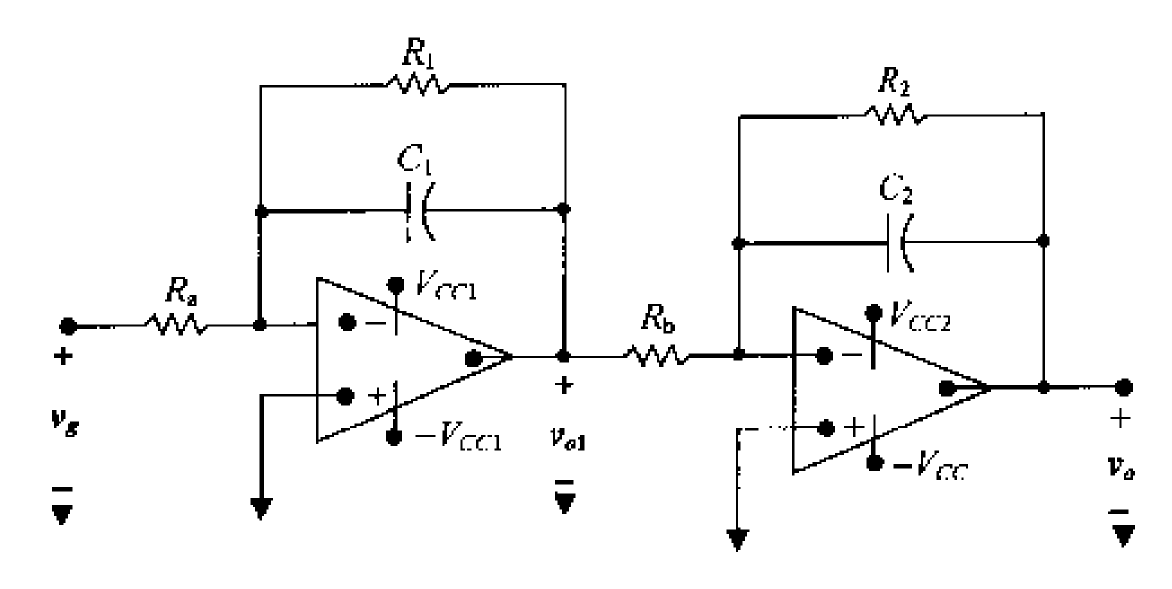


图 8.20 带有反馈电阻的级联运算放大器电路

化简得：

$$\frac{\mathrm{d}v_{o1}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R_1C_1}v_{o1}=\frac{-v_g}{R_aC_1} \tag{8.77}$$

为方便起见,令 $\tau_1=R_1C_1$,上式可写为:

$$\frac{\mathrm{d}v_{o1}}{\mathrm{d}t}+\frac{v_{o1}}{\tau_1}=\frac{-v_g}{R_aC_1} \tag{8.78}$$

求第二级运放反相输入端的电流方程:

$$\frac{0-v_{o1}}{R_b}+\frac{0-v_o}{R_2}+C_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0-v_o)=0 \tag{8.79}$$

整理得:

$$\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t}+\frac{v_o}{\tau_2}=\frac{-v_{o1}}{R_bC_2} \tag{8.80}$$

其中 $\tau_2=R_2C_2$,对式(8.80)取微分得:

$$\frac{\mathrm{d}^2v_o}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{\tau_2}\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{R_bC_2}\frac{\mathrm{d}v_{o1}}{\mathrm{d}t} \tag{8.81}$$

由式(8.78)得:

$$\frac{\mathrm{d}v_{o1}}{\mathrm{d}t}=\frac{-v_{o1}}{\tau_1}-\frac{v_g}{R_aC_1} \tag{8.82}$$

由式(8.80)得:

$$v_{o1}=-R_bC_2\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}-\frac{R_bC_2}{\tau_2}v_o \tag{8.83}$$

利用式(8.82)和式(8.83)消去式(8.81)中的 $\mathrm{d}v_{o1}/\mathrm{d}t$,即可得需要的关系式:

$$\frac{\mathrm{d}^2v_o}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{1}{\tau_1\tau_2}\right)v_o=\frac{v_g}{R_aC_1R_bC_2} \tag{8.84}$$

由式(8.84)可得特征方程为:

$$s^2+\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)s+\frac{1}{\tau_1\tau_2}=0 \tag{8.85}$$

可以求得特征根为实数:

$$s_1=\frac{-1}{\tau_1} \tag{8.86}$$

$$s_2=\frac{-1}{\tau_2} \tag{8.87}$$

例8.14分析了两级运算放大器阶跃响应的求解方法,其中电路的反馈电容被反馈电阻旁路。

例8.14 图8.20所示电路,$R_a=100\ \mathrm{k\Omega}$, $R_1=500\ \mathrm{k\Omega}$, $C_1=0.1\ \mu\mathrm{F}$, $R_b=25\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2=100\ \mathrm{k\Omega}$, $C_2=1\ \mu\mathrm{F}$,运放的电源电压为 ±6 V,在 $t=0$ 时刻,运算电路输入一个250 mV的电压信号(v_g),反馈电容上没有初始能量存贮。

(a) 求 v_o 的微分方程表达式。

(b) 求 $t\geqslant0$ 时的 $v_o(t)$。

(c) 求 v_{o1} 的微分方程表达式。

(d) 求 $t \geqslant 0$ 时的 $v_{o1}(t)$。

解：

(a) 由电路参数已知 $\tau_1 = R_1 C_1 = 0.05$ s，$\tau_2 = R_2 C_2 = 0.10$ s 以及 $v_g / R_a C_1 R_b C_2 = 1000$ V/s²，将这些值代入到式 (8.84) 中得：

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 30\frac{dv_o}{dt} + 200v_o = 1\,000$$

(b) 特征方程的根为 $s_1 = -20$ rad/s，$s_2 = -10$ rad/s，由于 $t \to \infty$ 时，电容相当于开路，所以，v_o 的稳态值为输入电压乘以各级电压增益，即：

$$v_o(\infty) = (250 \times 10^{-3})\frac{(-500)}{100}\frac{(-100)}{25} = 5\text{ V}$$

所以，v_o 具有如下形式：

$$v_o = 5 + A'_1 e^{-10t} + A'_2 e^{-20t}$$

因为 $v_o(0) = 0, dv_o(0) = 0$，所以，$A'_1 = -10$ V，$A'_2 = 5$ V，则 v_o 为：

$$v_o(t) = (5 - 10e^{-10t} + 5e^{-20t})\text{V}, t \geqslant 0$$

该解是在假设两个运放都没有饱和的基础上得出的。由此可以得出 v_o 的终值为 5 V，小于电源电压 6 V，所以，第二个运放不会饱和，v_{o1} 的稳态值为 $(250 \times 10^{-3})(-500/100)$，或者说是 −1.25 V，因此，第一个运放也不会饱和，所以，最初的假设以及所得到的解都是正确的。

(c) 将电路各参数的值代入到式 (8.78) 中，得到 v_o 的微分方程为：

$$\frac{dv_{o1}}{dt} + 20v_{o1} = -25$$

(d) 由于 v_{o1} 的初值和终值都与时间常数 τ_1 有关，因此，根据 7.4 节中介绍的方法将解写为：

$$\begin{aligned} v_{o1} &= -1.25 + [0 - (-1.25)]e^{-20t} \\ &= -1.25 + 1.25e^{-20t}\text{ V}, t \geqslant 0 \end{aligned}$$

练习题

8.11　将例 8.14 中的反馈电阻 R_1 和 R_2 去掉，重新计算例 8.14。

答：(a) $d^2v_o/dt^2 = 1\,000$，(b) $v_o = 500t^2$ V，$0 \leqslant t \leqslant 0.1095$ s，(c) $dv_{o1}/dt = -25$，(d) $v_{o1} = -25t$ V，$0 \leqslant t \leqslant 0.1095$ s。

8.12　如果 $v_{o1}(0) = -2$ V，$v_o(0) = 4$ V，重求例 8.14。

答：(a) 与例 8.14 相同，(b) $v_o = (5 + 2e^{-10t} - 3e^{-20t})$ V，$t \geqslant 0$，(c) 与例 8.14 相同，(d) $v_{o1} = -(1.25 + 0.75e^{-20t})$ V，$t \geqslant 0$。

实例

点火电路二

重新回到本章开始介绍的实际电路，系统电路图如图 8.21 所示。电路参数如何取值，才能

产生足够的能量将汽缸中的汽油-空气混合物点燃？首先，火花塞上的最大有效电压 v_{sp} 必须足够的高，以点燃汽油；其次，电容两端的电压不能很高，以防止在开关或各分布点上产生电弧；最后，自耦变压器初级线圈的电流必须产生足够的能量存贮在电路中，用来点燃汽缸中的汽油-空气混合物。存贮在电路中的能量在开关动作的瞬间与电流的平方成正比，即，$w_0 = \frac{1}{2}Li^2(0)$。

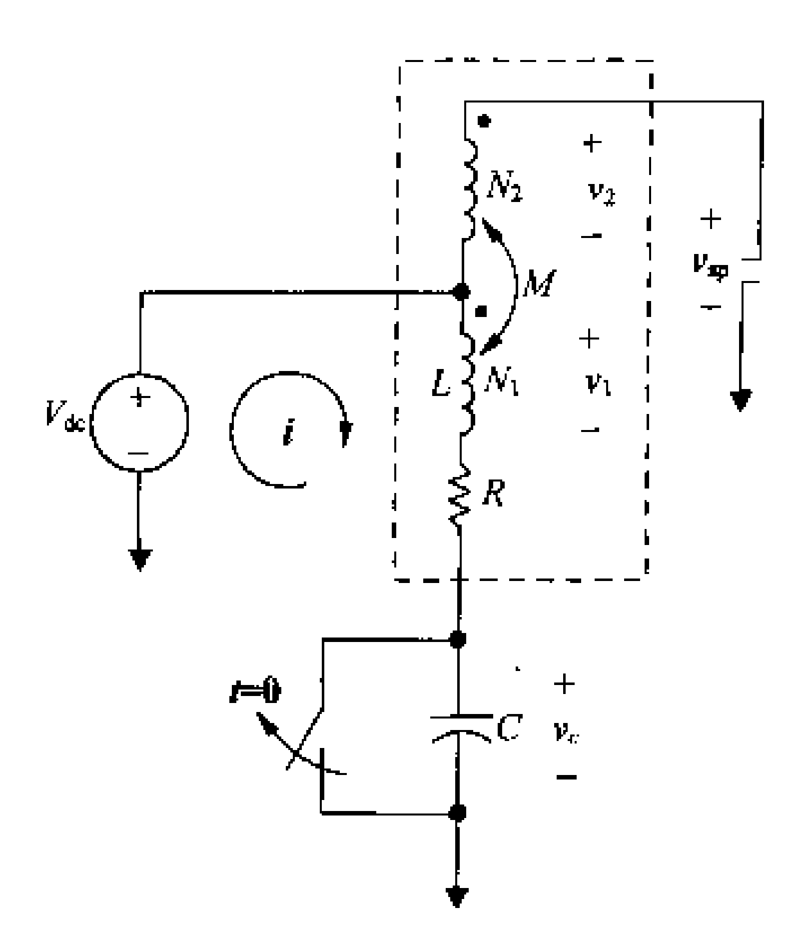


图 8.21 自动点火系统的电路图

例 (a) 图 8.21 所示电路的参数如下：$V_{dc} = 12$ V，$R = 4\ \Omega$，$L = 3$ mH，$a = 100$，求火花塞上的最大电压。

(b) 当火花塞上的电压达到最高值时，开关两触点的位置应相隔多远才能防止电弧的产生？

解：

(a) 分析电路，求火花塞电压 v_{sp} 的关系式。首先求电路上的电压，假设开关动作时初级线圈的电流达到最大可能值 V_{dc}/R，其中 R 为电路的总电阻；假设次级线圈电压 v_2 和初级线圈电压 v_1 的比值等于其匝数比 N_2/N_1。首先证明假设的正确性，次级线圈开路，其上产生的电压为：

$$v_2 = M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{8.88}$$

初级线圈上的电压为：

$$v_1 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{8.89}$$

由式 (8.88) 和式 (8.89) 可得：

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{M}{L} \tag{8.90}$$

由于铁芯自耦变压器的磁通量 ϕ_{11} 和 ϕ_{12} 相等，所以由式 (8.90) 可得：

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_1 N_2 p}{N_1^2 p} = \frac{N_2}{N_1} = a \tag{8.91}$$

分析点火电路的电压：当开关断开时，在参数 R,L,C 的作用下，初级线圈上的电流响应为欠阻尼响应，利用 8.4 节中介绍的方法，假设开关断开时 $t=0$，可得初级线圈的电流方程为：

$$i=\frac{V_{dc}}{R}e^{-\alpha t}\left[\cos\omega_d t+\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right] \tag{8.92}$$

其中：

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

$$\omega_d=\sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}$$

（见习题 8.55(a)）自耦变压器初级线圈上产生的电压为：

$$v_1=L\frac{di}{dt}=\frac{-V_{dc}}{\omega_d RC}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \tag{8.93}$$

（见习题 8.55(b)）由式 (8.91) 可得：

$$v_2=\frac{-aV_{dc}}{\omega_d RC}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \tag{8.94}$$

利用电容的伏安特性：

$$v_c=\frac{1}{C}\int_0^t i\,dx+v_c(0) \tag{8.95}$$

或通过初级线圈的网孔方程：

$$v_c=V_{dc}-iR-L\frac{di}{dt} \tag{8.96}$$

可以得到电容端电压为：

$$v_c=V_{dc}[1-e^{-\alpha t}\cos\omega_d t+Ke^{-\alpha t}\sin\omega_d t] \tag{8.97}$$

其中：

$$K=\frac{1}{\omega_d}\left(\frac{1}{RC}-\alpha\right)$$

（见习题 8.55(c)）由图 8.21 可得火花塞的电压为：

$$\begin{aligned}v_{sp}&=V_{dc}+v_2\\&=V_{dc}-\frac{aV_{dc}}{\omega_d RC}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t\\&=V_{dc}\left[1-\frac{a}{\omega_d RC}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t\right]\end{aligned} \tag{8.98}$$

为了求得 v_{sp} 的最大值，先求 $dv_{sp}/dt=0$ 的 t_{max}，再求 v_{sp}。t_{max} 的表达式为：

$$t_{max}=\frac{1}{\omega_d}\arctan\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right) \tag{8.99}$$

（见习题 8.56）在题目给出的元件参数的作用下：

$$\alpha=\frac{R}{2L}=\frac{4\times10^3}{6}=666.67\text{ rad/s}$$

和

$$\omega_d = \sqrt{\frac{10^9}{1.2} - (666.67)^2} = 28859.81 \text{ rad/s}$$

将 α 和 ω_d 代入式(8.99)得:

$$t_{max} = 53.63\ \mu s$$

现在利用式(8.98)可得火花开关的最大电压:

$$v_{sp}(t_{max}) = -25975.69 \text{ V}$$

(b) 由式(8.97)可得 t_{max} 时电容端电压:

$$v_c(t_{max}) = 262.15 \text{ V}$$

空气的绝缘能力大致为 3×10^6 V/m,所以开关两触点间的距离必须为 $262.15/3\times10^6$(或者是 87.38)μm,才能防止 t_{max} 时刻电弧的产生。在本章的结尾有两道习题 8.57 和 8.58 可以帮助读者进一步分析该电路。在设计和验证点火系统时,必须考虑以下几个问题:不均匀的汽油-空气混合物;随着火花塞电极的腐蚀,火花塞间隙的扩大;火花塞电压与电机速度之间的关系;开关闭合后,初级线圈的电流建立其初始值需要的时间,以及为了保证工作的可靠性需要维持的时间。

可以通过对点火系统的分析,解释为什么现在的汽车已经用电子开关取代机械开关。考虑到汽油的经济性和废气的排放,这个电流需要一个宽间隔的火花塞,也就是说需要一个较高的有效火花塞电压(高至 40 kV),这个电压不可能通过机械开关来获得,电子开关允许自耦变压器的初级线圈上有较大的初始电流,这就意味着系统中可以存贮较高的能量。因此,对油-汽混合物以及行驶条件的要求也就可以更宽一些。电子开关消除了对点接触的要求,也就是说,消除了系统中点接触电弧的不利影响。

小结

- 并联 RLC 电路和串联 RLC 电路具有相同形式的特征方程,即:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

其中对并联 RLC 电路,$\alpha = 1/2RC$,对串联 RLC 电路,$\alpha = R/2L$。不论是并联还是串联 RLC 电路,$\omega_0^2 = 1/LC$。

- 特征方程的根为:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- 串并联 RLC 电路的固有响应和阶跃响应的形式取决于 α^2 和 ω_0^2 的取值,分为过阻尼、欠阻尼以及临界阻尼响应三种类型,这些名称描述了耗能元件(如 R)对电路响应的影响。固有频率 α 也与电阻 R 的大小有关。
- 在表格中,总结了二阶电路的响应相应为过阻尼响应、欠阻尼、临界阻尼的条件响应特性:

电路状态	条件	响应特性
过阻尼	$\alpha^2 > \omega_0^2$	电压或电流在趋于稳态值的过程中,没有振荡
欠阻尼	$\alpha^2 < \omega_0^2$	电压或电流在趋于稳态值的过程中有振荡
临界阻尼	$\alpha^2 = \omega_0^2$	电压或电流在趋于稳态值的过程中,处于振荡的临界状态

- 求二阶电路的固有响应，首先要确定响应为过阻尼响应、欠阻尼响应还是临界阻尼响应，然后再解表中所列方程：

电路状态	固有响应	参数方程
过阻尼	$x(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$	$x(0)=A_1+A_2$
		$dx/dt(0)=A_1s_1+A_2s_2$
欠阻尼	$x(t)=(B_1\cos\omega_dt+B_2\sin\omega_dt)e^{-\alpha t}$	$x(0)=B_1$
		$dx/dt(0)=-\alpha B_1+\omega_dB_2$
		$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$
临界阻尼	$x(t)=(D_1t+D_2)e^{-\alpha t}$	$x(0)=D_2$
		$dx/dt(0)=D_1-\alpha D_2$

- 求二阶电路的阶跃响应，同样要根据阻尼情况求解如下表所示的相应的方程：

电路状态	阶跃响应	参数方程
过阻尼	$x(t)=X_f+A'_1e^{s_1t}+A'_2e^{s_2t}$	$x(0)=X_f+A'_1+A'_2$
		$dx/dt(0)=A'_1s_1+A'_2s_2$
欠阻尼	$x(t)=X_f+(B'_1\cos\omega_dt+B'_2\sin\omega_dt)e^{-\alpha t}$	$x(0)=X_f+B'_1$
		$dx/dt(0)=-\alpha B'_1+\omega_dB'_2$
临界阻尼	$x(t)=X_f+D'_1te^{-\alpha t}+D'_2e^{-\alpha t}$	$x(0)=X_f+D'_2$
		$dx/dt(0)=D'_1-\alpha D'_2$

其中，X_f 为 $x(t)$ 的稳态值。

- 对于三种响应中的未知参数（例如：As，Bs 和 Ds），可以通过计算响应的初值以及初值的一次微分 $dx(0)/dt$ 求得。
- 两个理想集成运放电路级联之后，第二个运放的输出与第一个运放的输入信号之间是二阶微分方程的关系，因此，在本章所用到的方法可以用来分析级联集成运放电路的动作特点。简单集成运放电路随着其反馈电容上电荷的积聚，放大倍数会达到饱和，通过在反馈电容上并联一个反馈电阻就可以克服运放的这一局限性。

习题

P8.1　图 8.1 所示电路，$R=2\ \Omega$，$L=0.4$ H，$C=0.25$ F，$V_0=0$ V，$I_0=-3$ A。

(a) 求 $t\geqslant0$ 时的 $v(t)$。

(b) 求使 $dv/dt=0$ 的前三个 t 值，它们分别称为 t_1,t_2,t_3。

(c) 证明 $t_3-t_1=T_d$。

(d) 证明 $t_2=t_1=T_d/2$。

(e) 计算 $v(t_1),v(t_2),v(t_3)$。

(f) 画出 $0\leqslant t\leqslant t_2$ 的 $v(t)$ 曲线。

P8.2　(a) 如果将题 8.1 电路中的电阻去掉，求 $t\geqslant0$ 时的 $v(t)$。

(b) 计算 $v(t)$ 的频率，单位为赫兹。

(c) 计算 $v(t)$的最大幅值。

8.3 图 8.1 所示电路,当电容 为 50 uF 时:

$$v = 125e^{-4000t}(\cos 3000t - 2\sin 3000t)\ \text{V}, t \geqslant 0$$

求(a) L,(b) R,(c) V_0,(d) I_0,(e) $i_L(t)$。

8.4 图 8.1 所示电路的电压响应为:

$$v(t) = D_1 te^{-4000t} + D_2 e^{-4000t}, t \geqslant 0$$

电感上的初始电流(I_0)为 5 mA,电容上的初始电压(V_0)为 25 V,电感为 5 H。

(a) 求 R, C, D_1, D_2 的值。

(b) 求 $t \geqslant 0^+$ 时的 $i_C(t)$。

8.5 图 8.1 所示电路,$C = 0.05\ \mu\text{F}$,其上的初始电压为 15 V,电感上的初始电流为零,$t \geqslant 0$时的电压响应为:

$$v(t) = -5e^{-5000t} + 20e^{-20000t}\ \text{V}$$

(a) 求 R, L, α, ω_0。

(b) 求 $t \geqslant 0^+$ 时的 $i_R(t)$, $i_L(t)$以及 $i_C(t)$。

P8.6 图 8.1 所示电路,5H 的电感被一个 8 nF 的电容旁路,调整电阻 R 的取值,使响应为临界阻尼响应,$V_0 = -25$ V, $I_0 = -1$ mA。

(a) 求 R 值。

(b) 求 $t \geqslant 0$ 时的 $v(t)$。

(c) 当 $i_C(t) = 0$ 时,求 $v(t)$。

(d) 当 $i_C(t) = 0$ 时,电路中存贮的能量是初始能量的百分之几?

P8.7 图 8.1 所示电路,$R = 2000\ \Omega$, $C = 10$ nF, $L = 250$ mH, 初始电感电流为 −30 mA,初始电容电压为 90 V。

(a) 求电路各支路上的初始电流。

(b) 求 $t \geqslant 0$ 时的 $v(t)$。

(c) $t \geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$。

P8.8 将题 8.7 中的电阻变为 12500/3 Ω,求 $t \geqslant 0$ 时的 $v(t)$。

P8.9 将题 8.7 中的电阻变为 2500 Ω,求 $t \geqslant 0$ 时的 $v(t)$。

8.10 并联 *RLC* 电路,$R = 5000\ \Omega$, $L = 1.25$ H, $C = 8$ nF。

(a) 计算描述电路电压响应的特征方程的根。

(b) 响应是过阻尼、欠阻尼还是临界阻尼?

(c) 阻尼频率为 6 krad/s 时,求 R。

(d) 在(c)中 R 的取值下,特征方程的根为多少?

(e) 响应为临界阻尼时,R 为何值?

8.11 图 8.1 所示电路的固有响应为:

$$v = -12(e^{-200t} + e^{-1800t})\ \text{V}, t \geqslant 0$$

如果 $L = 25$ H, $C = 18\ \mu\text{F}$,求 $i_L(0^+)$。

8.12 图 8.1 所示电路的初始电压 $v = 0$,电容上的初始电流 $I(0^+) = 5$ mA,当 $R = 200\ \Omega$ 时,电容电流的表达式如下:

$$i_c(t)=A_1e^{-160t}+A_2e^{-40t},\ t\geqslant 0^+$$

(a) 求 a, w_0, L, C, A_1, A_2。

(b) 求 $t\geqslant 0$ 时的 $v(t)$。

(c) 求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_R(t)$。

(d) 求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$。

8.13 假设图 8.1 所示电路的欠阻尼电压响应为：

$$v(t)=(A_1+A_2)e^{-\alpha t}\cos\omega_d t+j(A_1-A_2)e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

初始电感电流为 I_0，初始电容电压为 V_0。证明：A_2 是 A_1 的一种变形（提示：利用文中提到的分析过程求 A_1 和 A_2。）。

8.14 证明习题 8.13 的结论，即 A_1 和 A_2 的表达式符合式 (8.30) 和式 (8.31)。

P8.15 电路如图 P8.15 所示，且已处于稳态，在 $t=0$ 时刻，开关由 a 到 b。求 $t\geqslant 0$ 时的 $v_o(t)$。

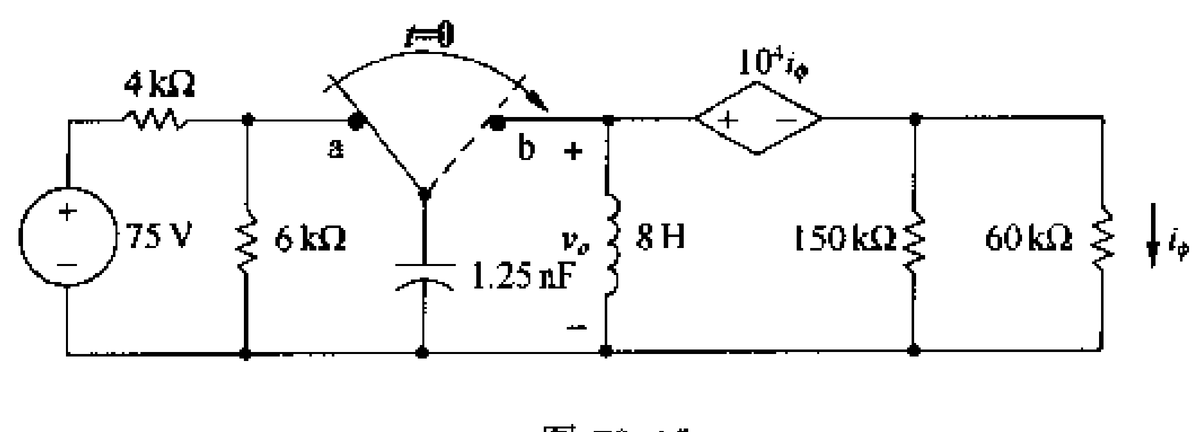


图 P8.15

P M8.16 将例 8.4 电路中的电阻值改为 3200 Ω，

(a) 求 $t\geqslant 0$ 时的 $v(t)$。

(b) 画出 $0\leqslant t\leqslant 7$ 时的 $v(t)$ 曲线。与例 8.4($R=20$ kΩ)以及例 8.5($R=4$ kΩ)中的结果进行比较，注意：$v(t)$ 的峰值，以及出现峰值的时间。

P M8.17 例 8.6 所示电路，求 $t\geqslant 0$ 时，(a) $v(t)$，(b) $i_R(t)$，(c) $i_C(t)$。

P8.18 例 8.7 所示电路 $t\geqslant 0$ 时，(a) $v(t)$，(b) $i_C(t)$。

P8.19 例 8.8 中的电路，求 $t\geqslant 0$ 时的 $v(t)$。

P8.20 图 P8.20 所示电路，两开关同时动作，当开关 1 位于 a 位置时开关 2 位于 d 位置，当把开关 1 移至 b 位置时，开关 2 移至 c 位置，反之亦然。$t=0$ 时，开关移至另一位置，求 $t\geqslant 0$ 时的 $v_o(t)$。

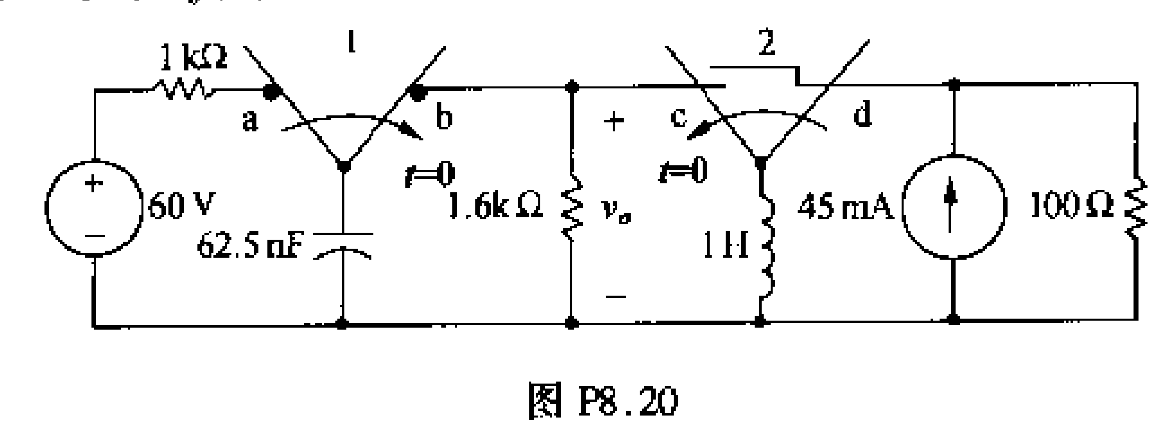


图 P8.20

P8.21 图 P8.20 所示电路，电阻由 1.6 kΩ 增大为 2.0 kΩ，电感由 1 H 减小为 0.64 H，求 $t\geqslant 0$ 时的 $v_o(t)$。

P8.22 图 P8.23 所示电路，电阻由 1.6 kΩ 减小为 800 Ω，电感由 1H 减小为 160 mH，求 $t\geqslant 0$

时的 $v_o(t)$。

8.23 图 P8.23 所示,50 uF 的电容上存储有 90 μJ 的初始能量,电感上的初始能量为零,描述固有电流响应的特征方程的根为 $-1000\ s^{-1}$ 和 $-4000\ s^{-1}$。

(a) 求 R 和 L。

(b) 求 $i(0)$ 以及 $di(0)/dt$。

(c) 求 $t\geq 0$ 时的 $i(t)$。

(d) 开关闭合多少微秒后,电流达到最大值。

(e) 电流 i 最大为多少毫安?

(f) 求 $t\geq 0$ 时的 $v_L(t)$。

P8.24 图 P8.24 所示电路已处于稳态,$t=0$ 时刻,开关闭合,求 $t\geq 0$ 时的 v_o。

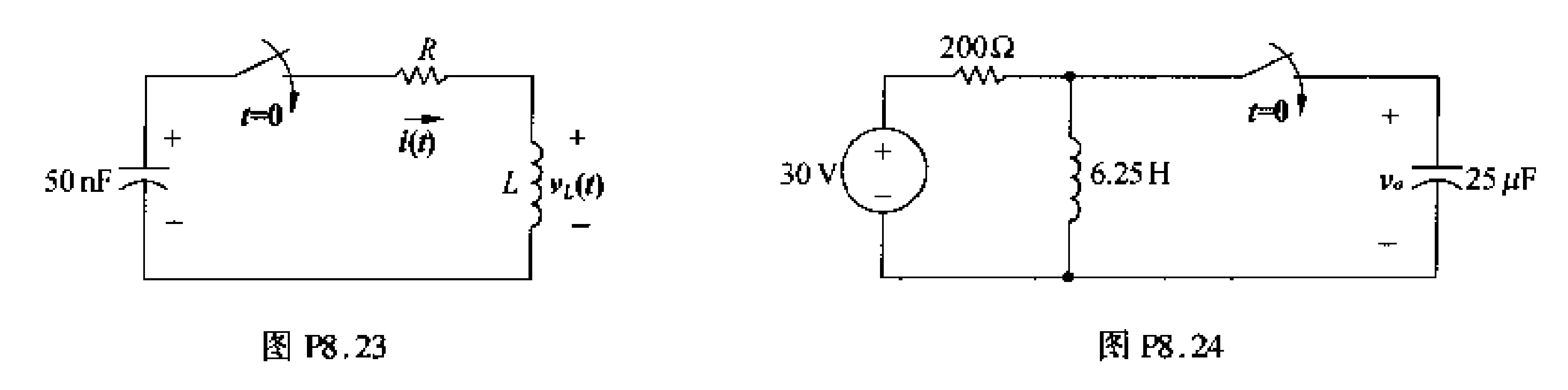


图 P8.23　　　　图 P8.24

P8.25 图 P8.25 所示电路已处于稳态,$t=0$ 时刻,电压突然降为 100 V,求 $t\geq 0$ 时的 $v_o(t)$。

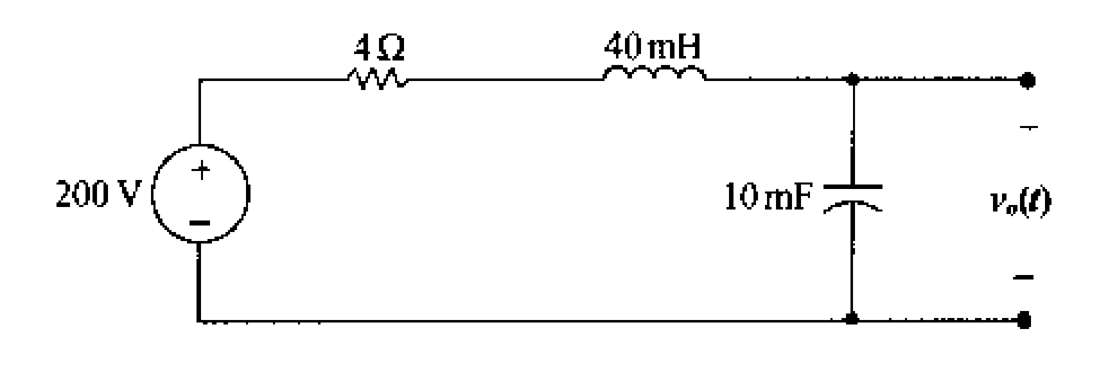


图 P8.25

8.26 图 8.3 所示电路的电流为:

$$i = B_1 e^{-800t}\cos 600t + B_2 e^{-800t}\sin 600t,\ t\geq 0$$

电容值为 500 μF,初始电流为零,初始电容电压为 12 V,求 R, L, B_1 和 B_2。

8.27 求题 8.26 电路中,500 μF 电容两端的电压,假设电容上端的电压极性为正。

P8.28 图 P8.28 所示电路,开关 1 和开关 2 同时动作,当开关 1 打开时,开关 2 闭合,反之亦然。$t=0$ 时,电路已处于稳态,求 $t\geq 0$ 时的 $i_L(t)$。

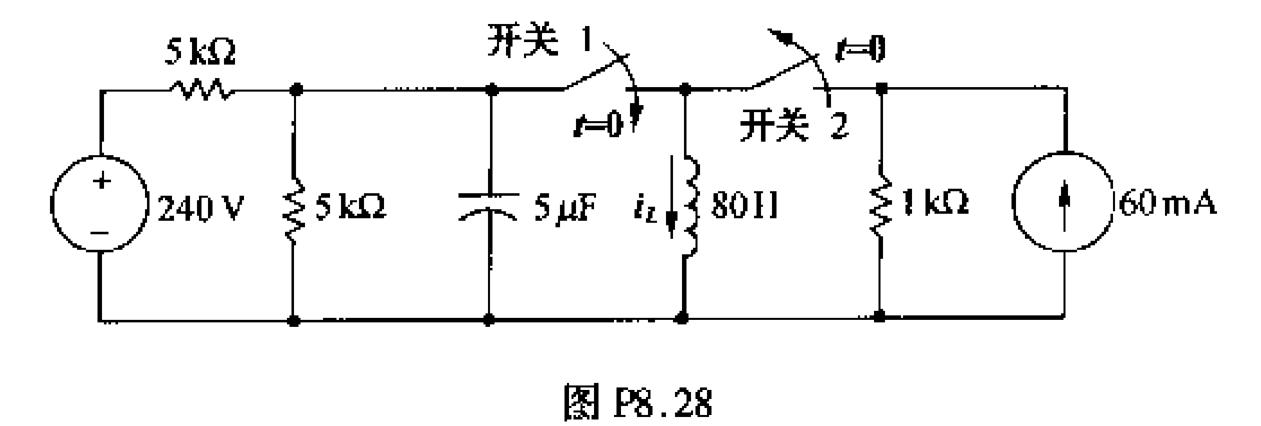


图 P8.28

P M8.29 图 P8.29 所示电路中的初始能量为零,求 $t\geq 0$ 时的 $v_o(t)$。

P8.30 图 P8.30 所示电路已处于稳态,$t=0$ 时开关闭合,求 $t\geq 0$ 时的 $v_o(t)$。

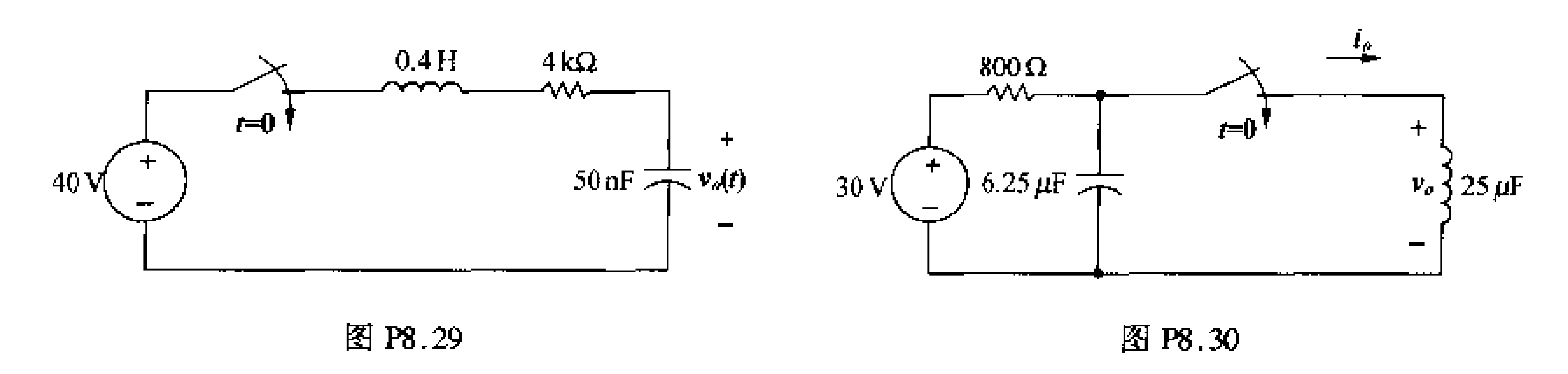


图 P8.29　　　　图 P8.30

P8.31 (a) 图 P8.30 所示电路,求 $t \geq 0$ 的 i_o。

(b) 证明 i_o 的解与题 8.30 中 v_o 的解一致。

P8.32 图 P8.32 所示电路,初始能量为零,$t=0$ 时刻,开关闭合,求 $t \geq 0$ 时的 $v_o(t)$。

P8.33 (a) 求 $t \geq 0$ 时,图 P8.32 所示电路的 i_o。

(b) 证明 i_o 的解与题 8.32 中 v_o 的解一致。

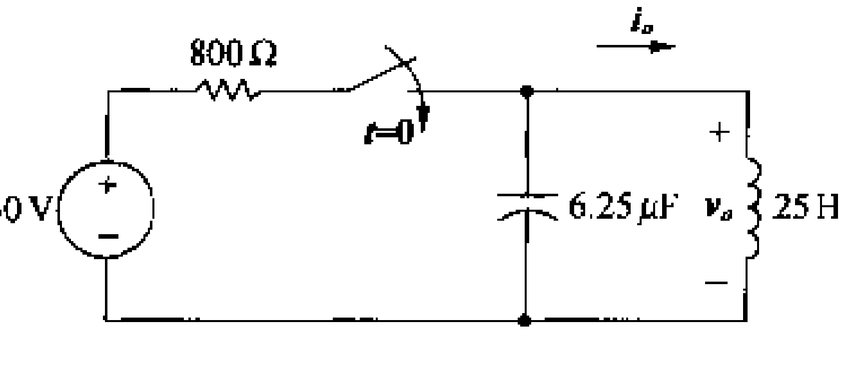
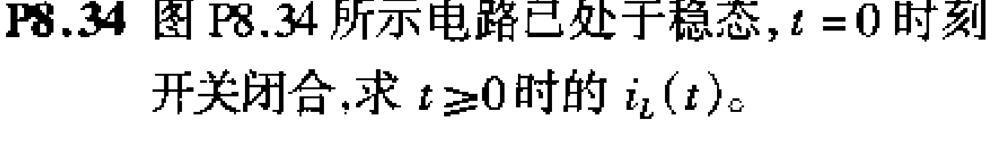


图 P8.32



P8.34 图 P8.34 所示电路已处于稳态,$t=0$ 时刻开关闭合,求 $t \geq 0$ 时的 $i_L(t)$。

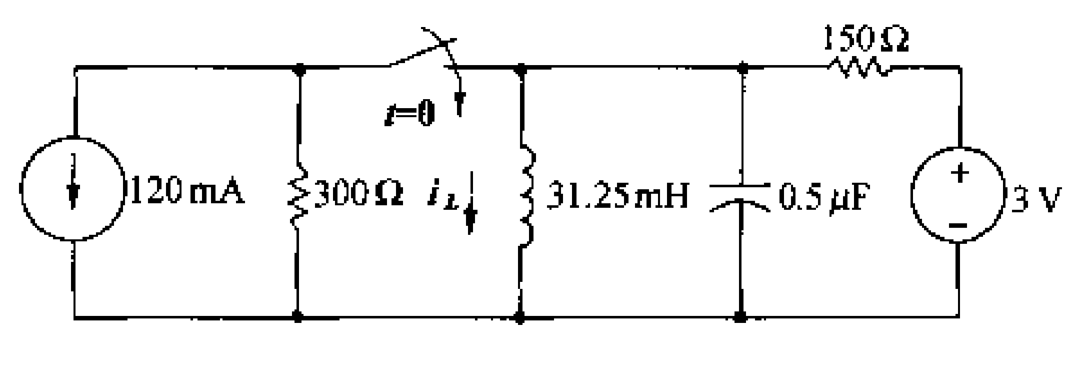


图 P8.34

P M8.35 图 P8.35 所示,电路已处于稳态,$t=0$ 时刻,开关由 a 处置于 b 处,求 $t \geq 0$ 时的 $i_L(t)$。

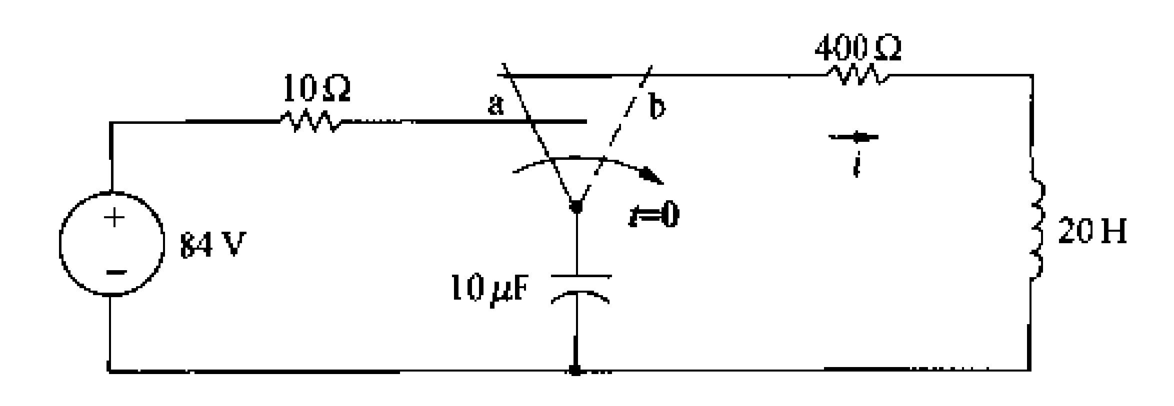


图 P8.35

P8.36 图 P8.36 所示,电路已处于稳态,$t=0$ 时刻,开关由 a 置于 b 处,求:

(a) $v_o(0^+)$。

(b) $dv_o(0^+)/dt$。

(c) $t \geq 0$ 时的 $v_o(t)$。

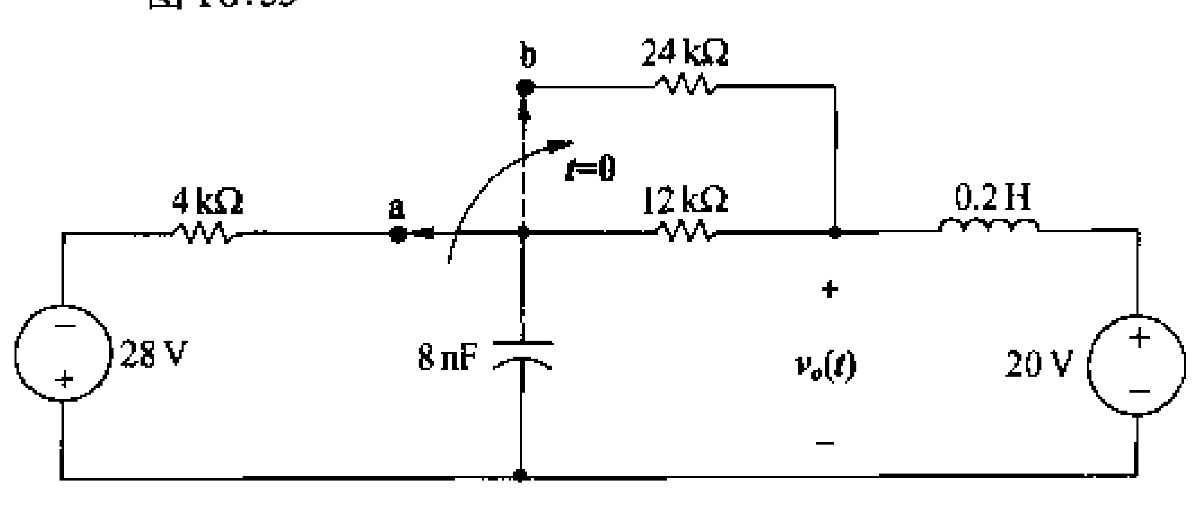


图 P8.36

P8.37 图 P8.37 所示电路,开关已处于稳态,$t=0$ 时刻,开关断开,求:

(a) $t\geqslant 0$ 时的 $i_o(t)$。

(b) $t\geqslant 0$ 时的 $v_o(t)$。

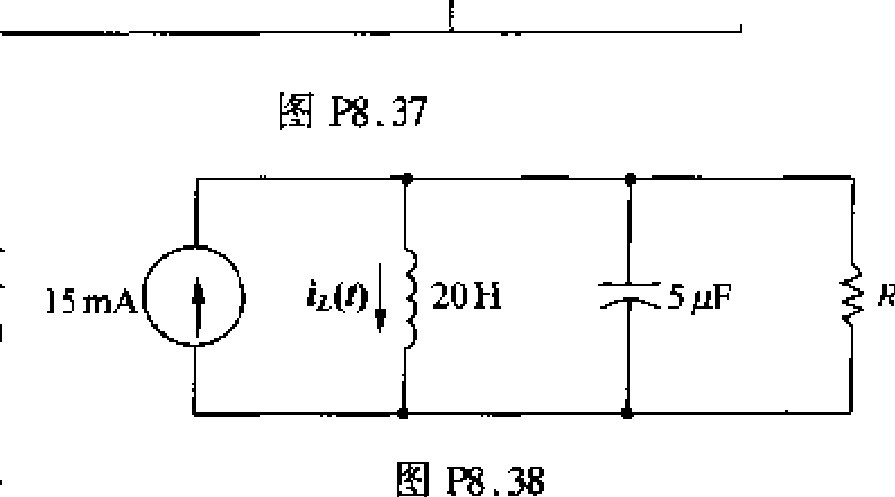


图 P8.37

PM8.38 图 P8.38 所示电路,20 H 电感上的初始电流为 −30 mA,电容上的初始电压为 60 V(上端为正),假设突然给电路施加一个 15 mA 的直流电流源,若 $R=800\ \Omega$。求 $t\geqslant 0$时的 $i_L(t)$。

15 mA　$i_L(t)$　20 H　5 μF　R

图 P8.38

PM8.39 图 P8.38 所示电路的电阻增大为 1250 Ω,求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$。

PM8.40 图 P8.38 所示电的电阻变为 100 Ω,求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$。

P8.41 图 8.41 所示电路,开关已闭合很长时间,$t=0$ 时,开关已断开,求 $t\geqslant 0$ 时的 $v_o(t)$。

8.42 图 P8.42 所示,电路已处于稳态,$t=0$ 时开关断开,假设在电路参数的作用下,响应为欠阻尼响应。

(a) 推导 $t\geqslant 0$ 时刻,$v_o(t)$作为 v_g,α,ω_d, C 和 R 的函数的表达式。

(b) 推导 v_o 幅值最大时的t 的表达式。

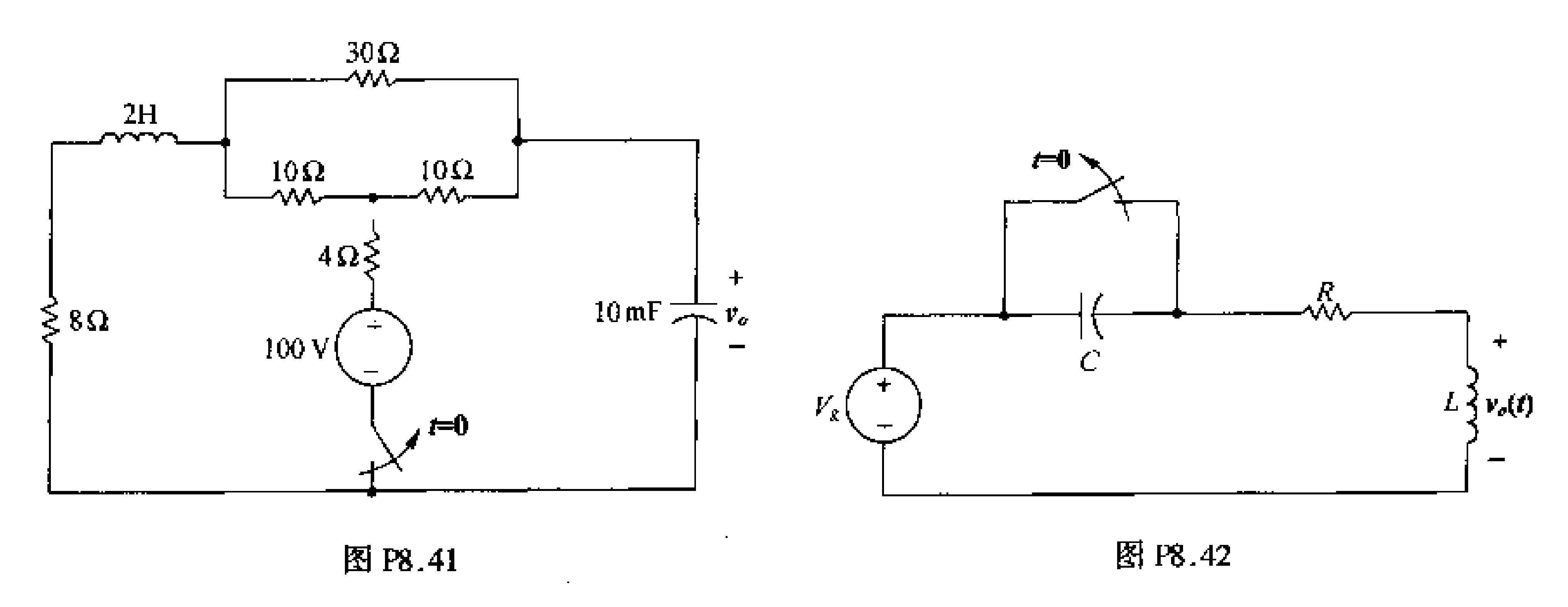


图 P8.41　　图 P8.42

P8.43 图 P8.42 所示电路参数为 $R=120\ \Omega$, $L=5$ mH, $C=500$ nF, $v_g=-600$ V。

(a) 求 $t\geqslant 0$ 时的 $v_o(t)$表达式?

(b) 开关断开多长时间,电感电压最大?

(c) 电感电压的最大值?

(d) $R=12\ \Omega$,重复(a),(b),(c)三问。

P8.44 图 P8.44 所示,电路已处于稳态,$t=0$ 时刻开关闭合,求:

(a) $t\geqslant 0^+$ 时的 $v_o(t)$。

(b) $t\geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$。

P8.45 由图 P8.44 所示电路。

(a) 求传输到电感上的总能量。

(b) 求传输到电阻上的总能量。

(c) 求传输到电容上的总能量。

(d) 求电流源上的总能量。

(e) 利用能量转换的原理检查(a)至(d)的结果。

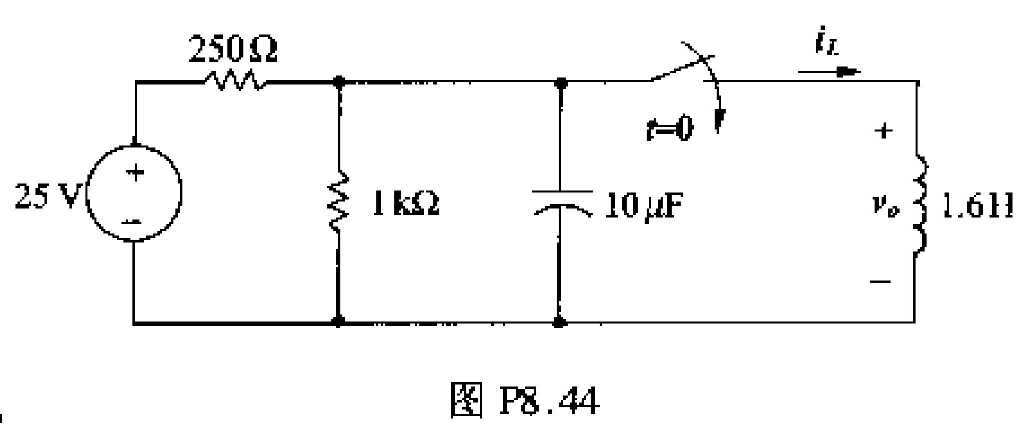


图 P8.44

P8.46 图 P8.46 所示电路,调整电阻值使响应为临界阻尼响应,初始电容电压为 90 V,初始电感电流为 24 mA,

(a) 求 R 值。

(b) 求开关闭合瞬间的 i 和 di/dt。

(c) 求 $t \geqslant 0$ 时的 $v_C(t)$。

P8.47 图 P8.47 所示电路两开关同时动作,当开关 1 位于位置 a 时,开关 2 闭合,当开关 1 位于位置 b,开关 2 断开。电路已处于稳态 $t=0$ 时,开关 1 移至位置 b,求 $t \geqslant 0$ 时的 $v_c(t)$。

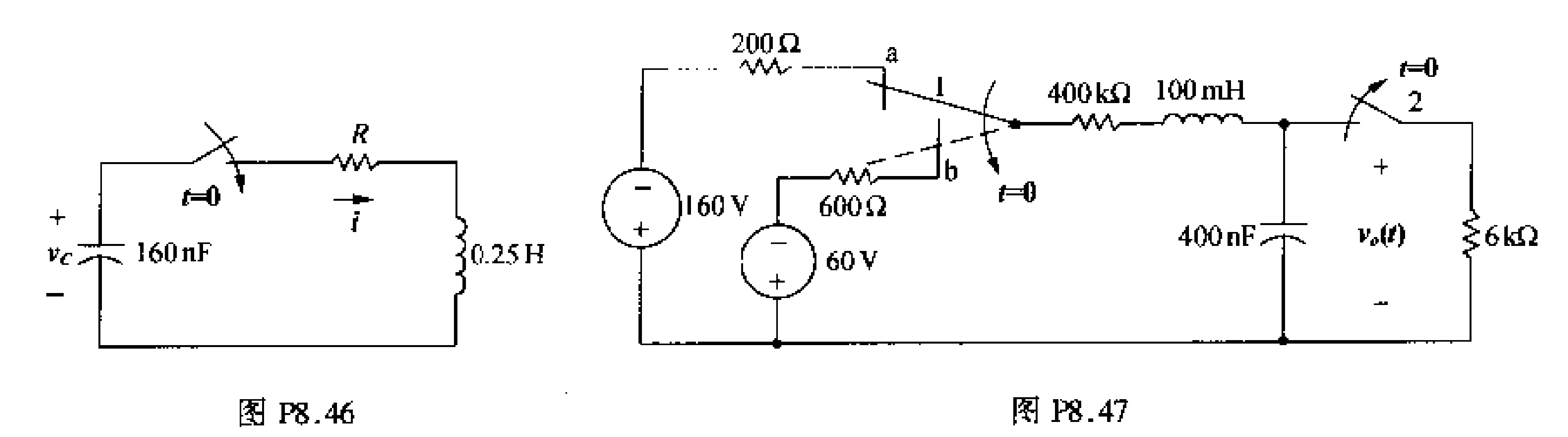


图 P8.46　　图 P8.47

P8.48 图 P8.48 所示电路,开关已在 a 处很长时间,$t=0$ 时,开关移至位置 b。求:

(a) v_a 的初始值。

(b) dv_a/dt 得初始值。

(c) $t \geqslant 0$ 时的 $v_a(t)$。

图 P8.48

8.49 假设图 8.15 所示电路的电容电压响应为欠阻尼响应,同时假设开关闭合时,电路元件上没有存贮能量。

(a) 证明:$dv_c/dt = (\omega_0^2/\omega_d)Ve^{-\alpha t}\sin\omega_d t$

(b) 证明当 $t = n\pi/\omega_d$ 时,$dv_c/dt = 0$,其中 $n = 0,1,2,\cdots$。

(c) 令 $t_n = n\pi/\omega_d$,证明:$V - V(-1)^n e^{-\alpha n\pi/\omega_d}$

(d) 证明:

$$\alpha = \frac{1}{T_d}\ln\frac{v_C(t_1) - V}{v_C(t_3) - V}$$

其中:$T_d = t_3 - t_1$。

8.50 图 8.15 所示电路,电容两端的电压具有如下特点:开关闭合几秒钟后,电压为常数

50 V,当电压第一次接近 50 V 时,其峰值电压为 63.505 V,且出现在开关闭合 π/12 ms的时刻,当开关闭合 π/4 ms 后,电压达到第二个峰值 50.985 V,当开关闭合时,设有能量存储于电容和电感中,求电路参数 R 和 L。

(提示:先计算习题 8.49)

P8.51 将图 P8.51 所示电压信号加到图 P8.51(b)所示的级联运算放大器电路上,电容上的初始能量为零。

(a) 分别求出 $0 \leqslant t \leqslant 0.2$ s 和 0.2 s$\leqslant t \leqslant t_{sat}$时的 $v_o(t)$和 $v_{o1}(t)$。

(b) 求 t_{sat}。

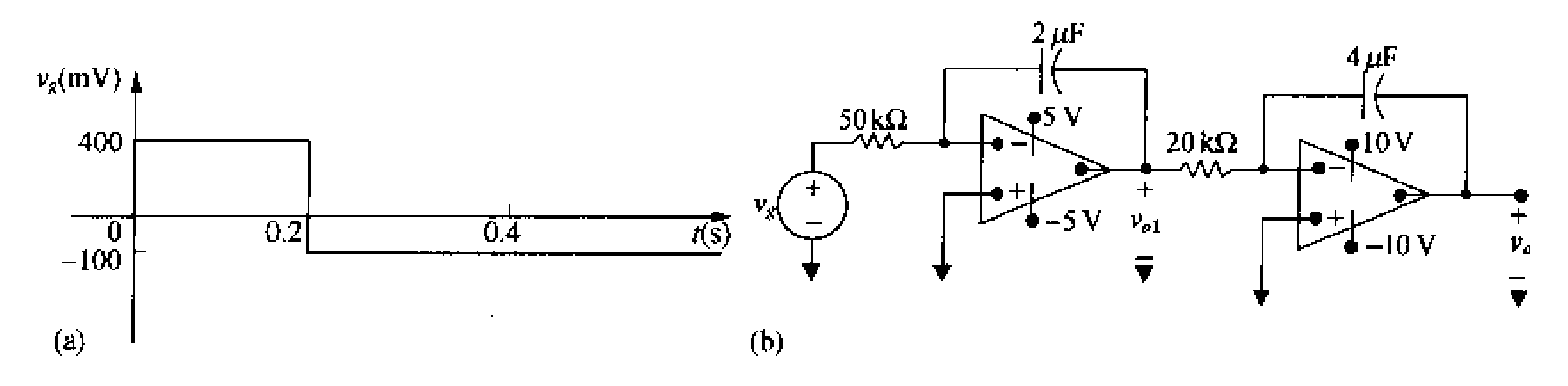


图 P8.51

P8.52 图 P8.51(b)所示电路,将 2 个 250 kΩ 的电阻分别并联到 2 μF 和 4 μF 电容上,并且电路中的初始能量为零,求 $0 \leqslant t \leqslant 0.2$ s 以及 0.2 s$\leqslant t \leqslant \infty$时的 $v_o(t)$和 $v_{o1}(t)$。

8.53 (a) 推导图 P8.53 所示电路输出电压与输入电压之间的微分方程。

(b) 将(a)的结果与式 (8.75) 进行比较,图 8.18 所示电路 $R_1C_1 = R_2C_2 = RC$。

(c) 图 P8.53 所示电路有何优点?

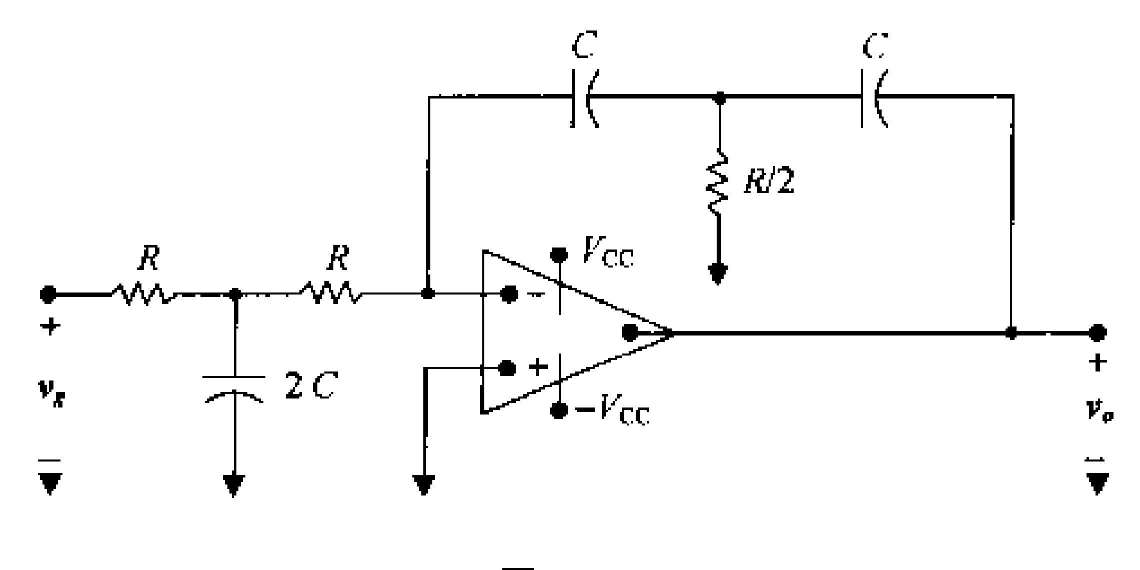


图 P8.53

8.54 (a) 推导图 P8.54 (a)所示弹簧——质量系统的微分方程,假设弹簧产生的力与它的变形成正比,质量为常数,摩擦力与质量块移动的速度成正比。

(b) 整理(a)中的推导式,将高阶因子表示为其他参数的函数。假设电压等于 d^2x/dt^2,积分后的生成 dx/dt 和 x,通过电压比较器得到这些参数,d^2x/dt^2 用加法器电路产生,依据这些想法,分析图 P8.54(b)所示电路,特别需要说明每一个阴影部分电路的功能。假设 A 点的信号为 d^2x/dt^2,求出 B,C,D,E,F 各点的信号,同时讨论微分方程中参数 $R, R_1, C_1, R_2, C_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ 以及 R_7, R_8 的作用。

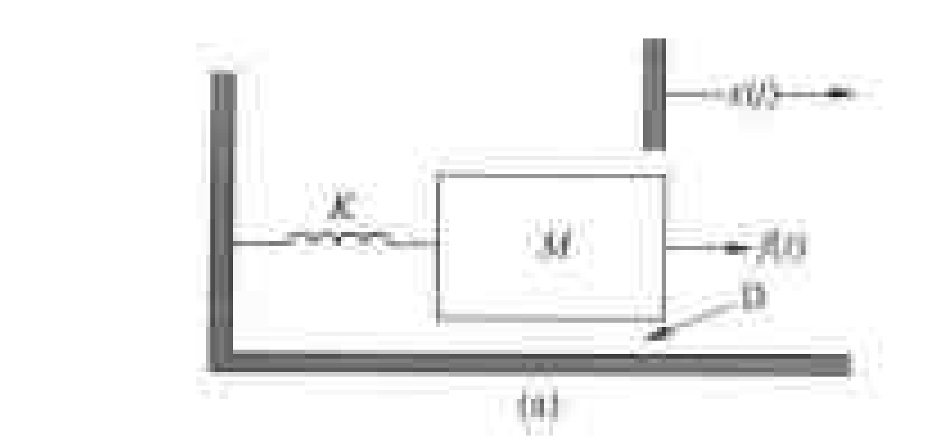


图 P8.54

◆**8.55** (a) 推导式 (8.92)。

(b) 推导式 (8.93)。

(c) 推导式 (8.97)。

◆**8.56** 推导式 (8.99)。

◆**8.57** (a) 针对本章实例中所举的例子,令参数不变,求电容两端的电压达到最大值的时间。

(b) 求 v_c 的最大值。

(c) 比较(a),(b)的结果。

◆**8.58** 图 8.21 所示电路的参数分别为 $R = 3\ \Omega$, $L = 5$ mH, $C = 0.25\ \mu$F, $V_{dc} = 12$ V, $A = 50$。

设初级线圈电流为 4 A 时,开关断开。求:

(a) $t=0^+$ 时刻,电路中的能量为多少?

(b) 假设火花塞没有点燃,其上的最大电压为多少?

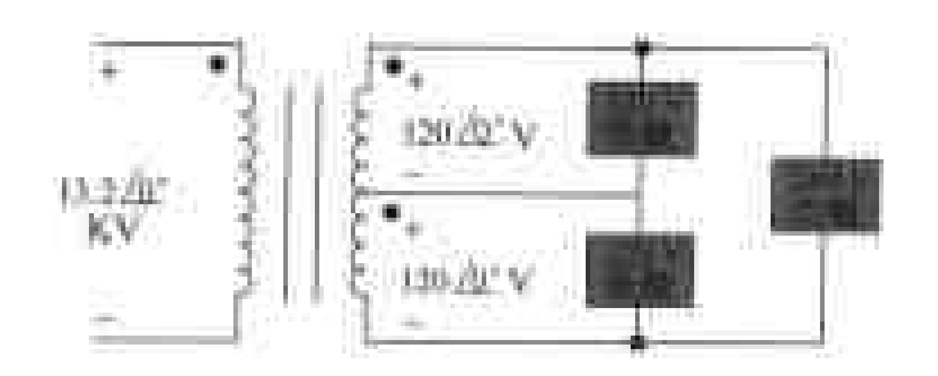
(c) 当火花塞两端的电压达到最大值时,电容两端的电压为多少?

第9章 正弦稳态分析

实例

常见供电系统一

本章将介绍工作在正弦稳态信号下的电源系统，该系统可用来产生、传输和分配电力。在美国，广泛应用于电力系统的是如图所示的三线 240/120 V 的供电电路。



其中变压器将传输过来的有效电压由 13.2 kV 降为 240 V，120 V 电压由次级线圈的中间抽头提供。在美国，电源系统的工作频率为 60 Hz，有的国家采用的电源系统工作频率在 50 Hz 至 60 Hz 之间。上面提到的电压值均为方均根(rms)，我们将在第 10 章介绍时变信号的方均根值的含义。

到现在为止，一直讨论的电路都是常量信号源电路；而在第 9 章，将要研究时变电流源或电压源电路。重点讨论电压源或电流源按正弦变化时的电路，之所以要把正弦变化的电压源或电流源以及它们对电路行为的影响作为重点研究对象，主要有以下几点原因；首先，发电、传输、供电以及耗电基本上都发生在正弦稳态的条件下；其次，了解正弦电路的行为是分析非正弦电路的前提；第三，正弦稳态分析可以简化电力系统的设计。因此，设计者可以根据希望的正弦稳态响应列出各种技术指标，并设计出满足条件的电路或系统。如果设计满足要求，对于非正弦输入信号，电路也能产生满意的响应。

后面的章节所讲述的内容主要依赖于对正弦稳态电路分析方法的全面理解。第 1～4 章中介绍的分析和简化直流电路的方法同样适用于正弦电路，因此，第 9 章中的许多内容读者会觉得很熟悉，正弦分析遇到的主要困难是，建立合理的电路方程以及复杂方程的数学运算。

9.1 正弦信号源

正弦电压源(独立电压源和非独立电压源)能够产生随时间正弦变化的电压信号。正弦电流源(独立电流源和非独立电流源)能够产生随时间正弦变化的电流信号。下面，先复习一下

正弦函数,复习时,使用电压信号,对于电流信号同样适用。

一个按正弦规律变化的函数既可以用正弦函数表示也可以用余弦函数表示。下面的讨论中,采用余弦函数,因此,正弦变化的电压可以表示为:

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \tag{9.1}$$

为了有助于讨论式(9.1)中各个参数,给出电压随时间变化的曲线,如图9.1所示。

应当注意到,正弦函数按一定的时间间隔重复,这样的函数称为周期函数。将正弦函数出现所有可能的值所需要的时间称为周期,用 T 表示,单位为秒。T 的倒数给出每秒周期的个数,称为频率,用 f 表示,即:

$$f = \frac{1}{T} \tag{9.2}$$

单位为赫兹,或表示为 Hz。(每秒周期的称呼在当代的技术文献中很少使用。)式(9.1)中 t 的系数由 T 或 f 决定,表示正弦函数变化的角频率,即:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T(\text{rad(弧度)/s(秒)}) \tag{9.3}$$

式(9.3)基于这样一个事实,余弦(或正弦)函数每经过一个周期,ωt 都要转过 2π 个弧度(360°)。由式(9.3)可知,如果时间 t 是周期 T 的整数倍,则 ωt 将是 2π 弧度的整数倍。系数 V_m 给出了正弦电压的最大值,$\pm V_m$ 是电压的上下限(幅值)。各参数如图9.1所示。式(9.1)中的角 ϕ 称为正弦电压的相位角,它决定了 $t=0$ 时,正弦函数的值,改变相位角,将使正弦函数沿时间轴平移,但不会影响幅值(V_m)和角频率(ω)。例如,如果将 ϕ 降为零,则图9.1所示的余弦函数将右移至图9.2所示的位置。如果 ϕ 为正,则正弦函数左移;如果 ϕ 为负,则正弦函数右移(见习题9.2)。

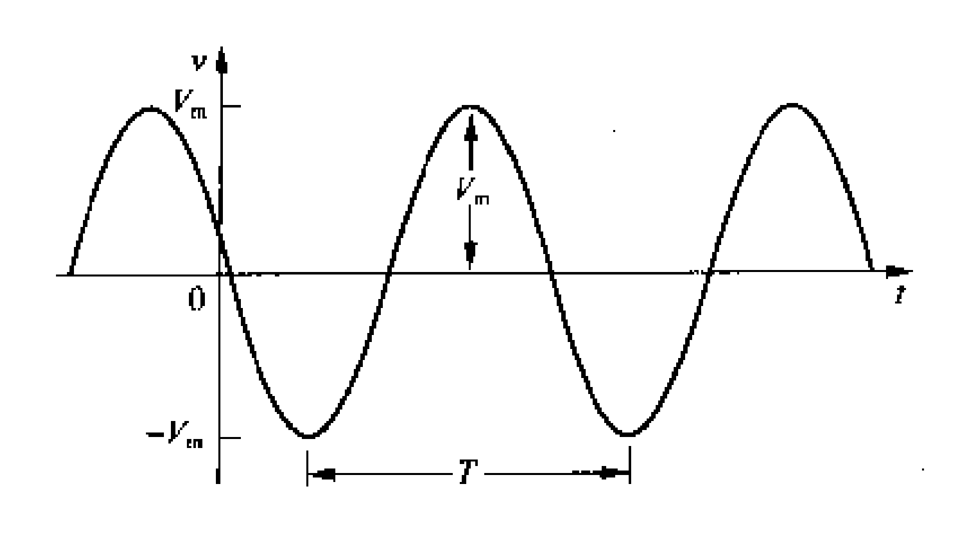


图9.1　正弦电压

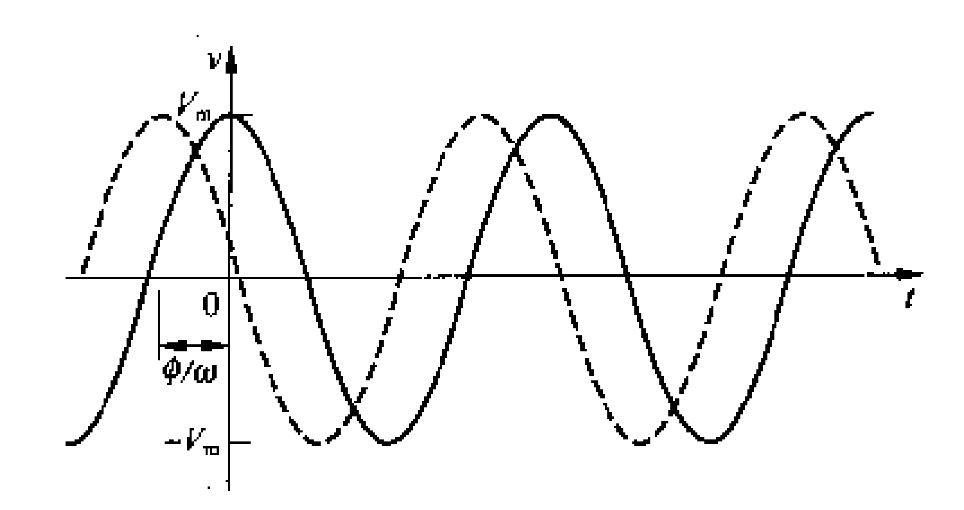


图9.2　当 $\phi=0$ 时,图9.1的正弦电压右移

ωt 和 ϕ 必须有相同的单位,因为在正弦函数中它们是直接相加的。由于 ωt 用弧度表示,所以 ϕ 也应该用弧度表示,但是 ϕ 通常用度来表示,因此,当两个量相加时,应该将 ωt 由弧度转化为度。由三角学的知识可知,弧度与度之间的关系式为:

$$(\text{度}) = \frac{180°}{\pi}(\text{弧度}) \tag{9.4}$$

正弦电压(电流)函数的另一个重要特征是它的方均根。一个函数平方的平均值再开方称为该函数的方均根。因此,如果 $v = V_m\cos(\omega t + \phi)$,则 v 的方均根为:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)\,\mathrm{d}t} \tag{9.5}$$

由式(9.5)可知,函数平方的平均值是通过对 v^2 在一个周期(即 t_0 到 t_0+T)上积分再除以积

分时间 T 得到的，并且积分起始时间 t_0 是任意的。

式 (9.5) 中，根号下的值为 $V_m^2/2$(见习题 9.7)，因此 v 的方均根为：

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{9.6}$$

正弦电压的方均根仅仅取决于 v 的最大幅值，也就是 V_m。方均根既不是频率的函数，也不是相位角的函数。强调这一点是由于它关系到第 10 章(见 10.3 小节)中功率的计算。

已知功率、相位角和幅值(或者说是方均根值)，就可以完整地描述一个正弦信号。例 9.1、例 9.2 和例 9.3 说明了正弦函数的基本特性，例 9.4 给出了一个周期函数方均根值的计算，目的是为了进一步明确方均根的含义。

例 9.1　幅值为 20 A 的正弦电流，周期为 1 ms，0 时刻电流的幅值为 10 A。

(a) 求电流的频率，单位为赫兹。

(b) 求电流的频率，单位为弧度每秒。

(c) 求 $i(t)$ 的余弦函数表达式，其中 ϕ 用度表示。

(d) 求电流的方均根。

解：

(a) 由题意知，$T = 1$ ms；因此，$f = 1/T = 1\,000$ Hz。

(b) $\omega = 2\pi f = 2\,000\pi$ rad/s

(c) 由于 $i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi) = 20\cos(2\,000\pi t + \phi)$，且 $i(0) = 10$ A，所以 $10 = 20\cos\phi$，$\phi = 60°$，电流 $i(t)$ 的表达式为：

$$i(t) = 20\cos(2\,000\pi t + 60°)$$

(d) 由公式 (9.6)，知道正弦电流的方均根为 $I_m/\sqrt{2}$，所以本题的方均根为 $20/\sqrt{2}$，即 14.14 A。

例 9.2　正弦电压 $v = 300\cos(120\pi t + 30°)$

(a) 求正弦电压的周期，单位 ms。

(b) 频率为多少赫兹?

(c) 求 $t = 2.778$ ms 时，v 的幅值。

(d) 求 v 的方均根。

解：

(a) 由 v 的表达式可得，$w = 120\pi$ rad/s，因为 $\omega = 2\pi/T$，所以，$T = 2\pi/\omega = \frac{1}{60}$ s，即 16.667 ms。

(b) $f = 1/T = 60$ Hz。

(c) 由(a)知 $\omega = 2\pi/16.667$，在 $t = 2.778$ ms 时刻，ωt 接近 1.047 rad，即 60°。因此，$v(2.778\text{ ms}) = 300\cos(60° + 30°) = 0$ V

(d) $V_{rms} = 300/\sqrt{2} = 212.13$ V。

例 9.3　相位角减去 90°($\pi/2$ rad)，可以把一个正弦函数变为余弦函数。

(a) 证明这个变换是成立的：

$$\sin(\omega t + \theta) = \cos(\omega t + \theta - 90°)$$

(b) 用(a)的结论将 $\sin(\omega t + 30°)$ 变为余弦函数。

解：

(a) 公式的证明可以利用三角函数：

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

令 $\alpha=\omega t+\theta,\beta=90°$，由于 $\cos 90°=0,\sin 90°=1$，所以：

$$\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha=\sin(\omega t+\theta)=\cos(\omega t+\theta-90°)$$

(b) 由(a)得：

$$\sin(\omega t+30°)=\cos(\omega t+30°-90°)=\cos(\omega t-60°)$$

例 9.4 计算图 9.3 所示三角波电流的方均根，用电流峰值 I_p 表示。

解：

由式 (9.5) 已知，i 的方均根为：

$$I_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}i^2\mathrm{d}t}$$

平方根下的积分值即为 i^2在一个周期上的面积。平方函数 i^2在 0 到 T 时间段上的面积如图 9.4 中阴影所示。可见，i^2在一个周期上的面积为 0 到 $T/4$ 秒面积的 4 倍，即：

$$\int_{t_0}^{t_0+T}i^2\mathrm{d}t=4\int_0^{T/4}i^2\mathrm{d}t$$

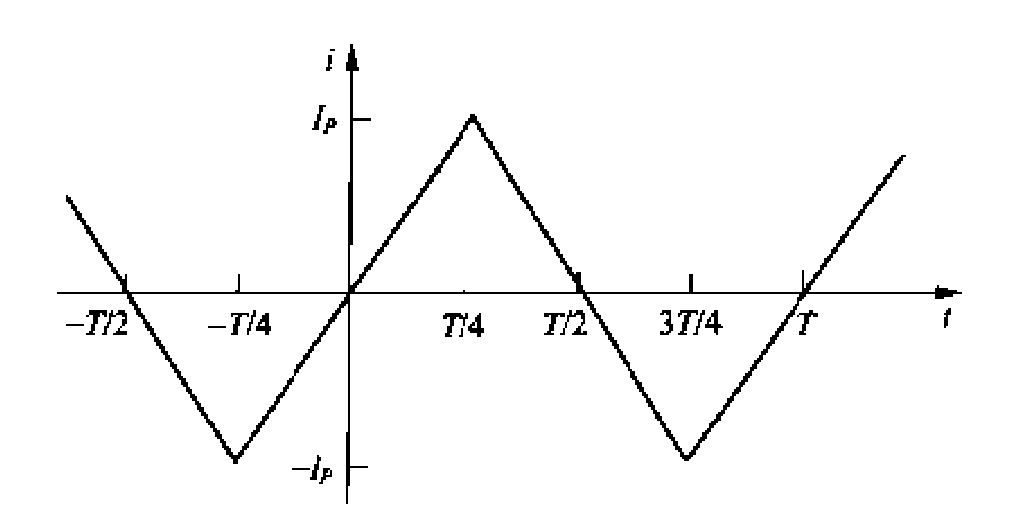


图 9.3 周期三角波电流

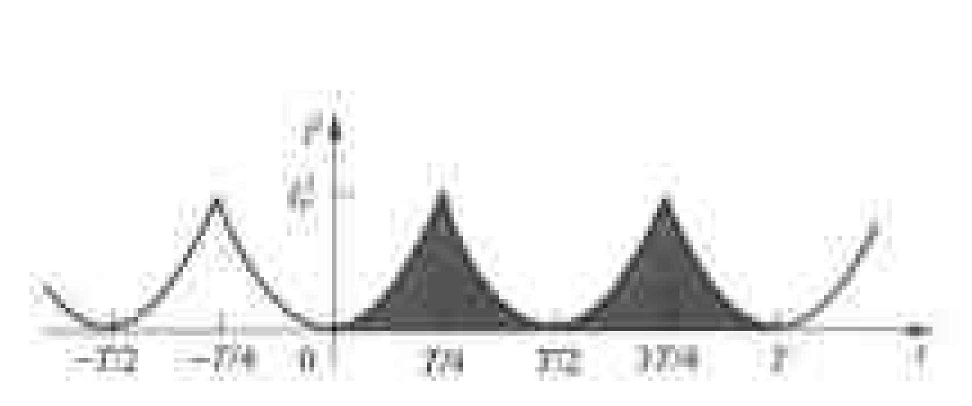


图 9.4 i^2 与 t 的关系图

在 0 到 $T/4$ 时间段上，i 的表达式为：

$$i=\frac{4I_p}{T}t,0<t<T/4$$

一个周期上 i^2的面积为：

$$\int_{t_0}^{t_0+T}i^2\mathrm{d}t=4\int_0^{T/4}\frac{16I_p^2}{T^2}t^2\mathrm{d}t=\frac{I_p^2T}{3}$$

函数的求均值即为一个周期上的面积除以周期，即：

$$i_{mean}=\frac{1}{T}\frac{I_p^2T}{3}=\frac{1}{3}I_p^2$$

电流的方均根即为平均值的方均根，即：

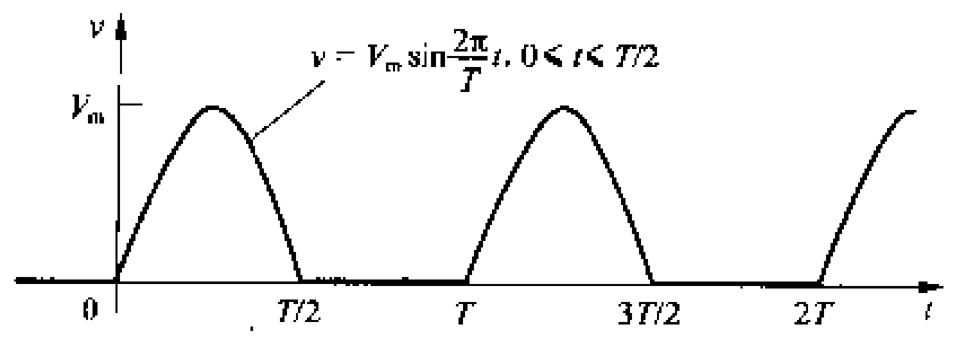
$$I_{rms}=\frac{I_p}{\sqrt{3}}$$

练习题

9.1 正弦电压 $v = 10\cos(3\,769.91t - 53.13°)$。

求：(a) f，(b) T(单位为 ms)，(c) V_m，(d) $v(0)$，(e) ϕ，分别用度和弧度表示，(f) 使 $v = 0$ 的最小的时间值 t，要求 $t > 0$，(g) $dv/dt = 0$ 时的最小时间值，要求 $t > 0$。

答：(a) 600 Hz，(b) 1.67 ms，(c) 10 V，(d) 6 V，(e) $-53.13°$，-0.9273 rad，(f) 662.62 μs，(g) 245.97 μs。



9.2 求图示半波正弦电压的方均根。

答：$V_{rms} = V_m/2$

9.2　正弦响应

在研究正弦信号源的稳态响应之前，先从大的范围讨论一下这个问题，先看电路的全响应，这将有助于理解电路的稳态响应。电路如图 9.5 所示，其中 V_s 为一正弦电压，即：

$$v_s = V_m\cos(\omega t + \phi) \tag{9.7}$$

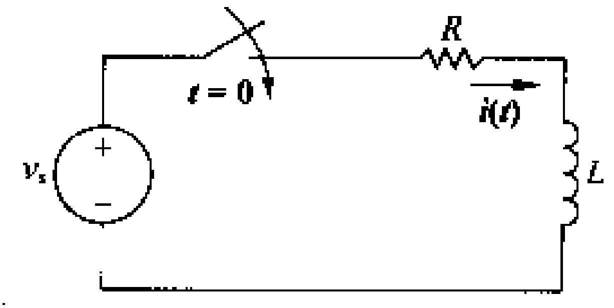


图 9.5　正弦电压源激励下的 RL 电路

为方便起见，假设电路中的初始电流为零，推导出 $t \geq 0$ 时的 $i(t)$ 表达式。类似于第 7 章中求 RC 电路的阶跃响应，惟一的区别在于这里电压源是随时间变化的正弦电压，而不是常数，或者说不是直流电压。对图 9.5 直接利用基尔霍夫电压定律，得到微分方程式 (9.8)：

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = V_m\cos(\omega t + \phi) \tag{9.8}$$

此方程的解在有关微分方程的课程中讨论过，直接使用结论，得 i 的解为：

$$i = \frac{-V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cos(\phi - \theta)e^{-(R/L)t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cos(\omega t + \phi - \theta) \tag{9.9}$$

其中 $\theta = \omega L/R$，若正弦信号源的频率已知，即可方便地求出电路的初相角 θ。

为了验证式 (9.9) 的正确性，可以将其代入到式 (9.8) 中，看对于 $t \geq 0$，是否满足。在习题 9.5 中，留作练习，让读者自己证明。

式 (9.9) 右边的第一个分量，称为电流的暂态分量。因为随着时间的推移，它将趋于无穷小。第二个分量称为稳态分量，只要开关保持闭合状态且信号源为正弦电压，这个分量就一直

存在,暂态分量响应和稳态分量响应合称为全响应。在这一章里,避开微分方程的求解方法,直接讨论稳态响应的求解方法,将有助于求解暂态响应和全响应。

下面研究式 (9.9) 中的稳态分量,得到下面几条关于稳态响应的性质。

1. 稳态响应为一正弦函数。
2. 响应频率与信号源频率相同,这一性质适用于电路参数 R, L, C 均为常数的任一线性电路(如果响应频率与信号源频率不同,则表明电路中含有非线性元件)。
3. 稳态响应的最大值通常与信号源的幅值不同,以前面讨论的电路为例,响应的最大幅值为 $V_m/\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$,而信号源的幅值为 V_m。
4. 稳态响应的相位角通常与信号源不同,在上面讨论的电路,电流的相位角为 $\phi-\theta$,而电压源的相位角是 ϕ。

记住这些性质,有利于理解 9.3 节中介绍的相量求解法。求电路的稳态响应实际上是求响应的幅值及相位角,因为响应的形状及其频率已知。

练习题

9.3 在 $t=0$ 时刻,将电压 $20\cos(800+25°)$ 加到图 9.5 所示电路上,电路的电阻为 80 Ω,电感为 75 mH,其上的初始电流为零。

(a) 求 $t\geqslant 0$ 时的 $i(t)$。

(b) 求 $v(t)$的稳态分量和暂态分量表达式。

(c) 求 $t=1.875$ ms 时的 i。

(d) 求稳态响应的幅值、频率(用弧度表示)以及相位角。

(e) 电压和电流的相位相差多少度?

答: (a) $-195.72e^{-1066.67t}+200\cos(800t-11.87°)$ mA, (b) $-195.72e^{-1066.67t}$ mA, $200\cos(800t-11.87°)$mA, (c) 28.39 mA, (d) 0.2 A, 800 rad/s, $-11.87°$, (e) 36.87°。

9.3 相量

正弦函数的相量是含幅值和相位角的复数。相量的概念可以追溯到欧拉定理,欧拉定理描述了指数函数与三角函数的关系:

$$e^{\pm j\theta}=\cos\theta\pm j\sin\theta \tag{9.10}$$

式 (9.10) 非常重要,它给出了正弦和余弦函数的另一种表示方法。将余弦函数作为指数函数的实数部分,将正弦函数作为指数函数的虚数部分,即:

$$\cos\theta=\mathrm{Re}\{e^{j\theta}\} \tag{9.11}$$

和

$$\sin\theta=\mathrm{Im}\{e^{j\theta}\} \tag{9.12}$$

其中 Re 表示"实数部分",Im 表示"虚数部分"。

在分析正弦稳态响应的过程中,采用余弦函数(见 9.1 节)。利用式 (9.11),可以将式 (9.1) 正弦电压用式 (9.11) 表示为:

$$v=V_m\cos(\omega t+\phi)$$

$$= V_m \mathrm{Re}\{e^{j(\omega t+\phi)}\}$$
$$= V_m \mathrm{Re}\{e^{j\omega t}e^{j\phi}\} \tag{9.13}$$

将 V_m 移到括号内部，并且将两个指数函数的位置互换，结果保持不变，公式 (9.13) 变形为：

$$v = \mathrm{Re}\{V_m e^{j\phi}e^{j\omega t}\} \tag{9.14}$$

可以注意到 $V_m e^{j\phi}$ 是一个包含给定正弦函数的幅值以及相位角的复数，称这个复数为给定正弦函数的相量，则：

$$V = V_m e^{j\phi} = p\{V_m \cos(\omega t + \phi)\} \tag{9.15}$$

其中符号 $p\{V_m\cos(\omega t+\phi)\}$ 读做"$V_m\cos(\omega t+\phi)$ 的相量变换"，通过这种变换可以将时域上的正弦函数变到复数域，有时也称做频率域，因为响应的大小依赖于 ω。

式 (9.15) 是相量的极坐标形式，也可以将相量表示成三角函数的形式，重写式 (9.15) 为：

$$V = V_m \cos\phi + jV_m \sin\phi \tag{9.16}$$

这两种表示方法在相量法中都非常有用。

关于式 (9.15) 还有一点需要说明的是，由于指数函数 $e^{j\phi}$ 经常出现，所以文献中常用一个简化的符号来表示：

$$1\underline{/\phi^\circ} \equiv 1e^{j\phi}$$

在下面的讨论中，将采用这一表示方法。

9.3.1 反相量变换

前面已经讨论了怎样将一个正弦函数变换为相量形式，有时还需用到反变换，也就是说需要用正弦函数来描述相量。例如 $V = 100\underline{/-26^\circ}$，其正弦表达式为 $v = 100\cos(\omega t - 26^\circ)$。由于相量仅仅包含幅值和相位信息，所以不能从相量中推导出 ω 的值。由相量形式变换为时域表达式的形式称之为反变换过程，用公式描述为：

$$p^{-1}\{V_m e^{j\phi}\} = \mathrm{Re}\{V_m e^{j\phi}e^{j\omega t}\} \tag{9.17}$$

其中符号 $p^{-1}\{V_m e^{j\phi}\}$ 读做"$V_m e^{j\phi}$ 的反相量变换"。式 (9.17) 表明要求反相量变换，需要用 $e^{j\omega t}$ 乘以相量并提取实数部分。

相量变换法在电路分析中非常有用，因为它将求取电路正弦稳态响应的幅值和相位角的过程简化为求代数学中复数的过程。下面几点能说明这一结论：

1. 暂态分量随时间的推移逐渐消失，因此稳态分量的解必须满足微分方程（见习题 9.5(b)）。
2. 正弦信号源驱动的线性电路，其稳态响应仍然是一个与信号源同频率的正弦信号。
3. 由式 (9.11) 的表示方法，可以假设稳态响应解的形式为 $\mathrm{Re}\{Ae^{j\beta}e^{j\omega t}\}$。其中 A 为响应的幅值，β 为响应的相位角。
4. 将假设的稳态响应代入到微分方程中，可以消除指数分量 $e^{j\omega t}$，留下复数域下的 A 和 β。

图 9.5 所示电路可以说明以上几点。已知电流 i 的稳态响应解为：

$$i_{ss}(t) = \mathrm{Re}\{I_m e^{j\beta}e^{j\omega t}\} \tag{9.18}$$

其中下角标 ss 表示解为稳态解。将式 (9.18) 代入到式 (9.8) 中，可得表达式：

$$\text{Re}\{j\omega LI_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} + \text{Re}\{RI_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\} \tag{9.19}$$

由式 (9.19)的推导,可知实数符号可以进行与常数的相乘或相除运算。利用式 (9.11)重写式 (9.8) 的右边部分,由代数学中复数的理论可知,实部的和等于和的实部,因此,可以将式 (9.19) 整理为:

$$\text{Re}\{(j\omega L + R)I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\} \tag{9.20}$$

在求正弦稳态响应的过程中由于使用的是余弦函数,因此,得出的推导式 (9.20) 是用 Re 算子表示的。如果采用正弦函数来求正弦稳态响应,那就应该利用式 (9.12),而不是式 (9.11),得出的推导式如式 (9.21)所示:

$$\text{Im}\{(j\omega L + R)I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \text{Im}\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\} \tag{9.21}$$

可以看出式 (9.21) 两边的复数与式 (9.20) 两边的复数完全相同。若复数的实部和虚部分别相等,则这两个实数也相等。因此,由式 (9.20) 和式 (9.21) 可知:

$$(j\omega L + R)I_m e^{j\beta} = V_m e^{j\phi}$$

或者:

$$I_m e^{j\beta} = \frac{V_m e^{j\phi}}{R + j\omega L} \tag{9.22}$$

$e^{j\omega t}$在求响应的幅值(I_m)和相位角(β)的过程中,已被消去。因此,对电路而言,求 I_m和 β 的任务就转变为求复数 $V_m e^{j\phi}$和 $R + j\omega L$ 的代数问题了,注意我们已经讨论过的极坐标和三角函数两种形式。

有一点需要注意:相量变换和反相量变换允许函数在时域和频域之间转换,因此,对于电路的解,即可以表示为时域的形式,也可以表示为频域的形式。但是既包含时域又包含频域的混合解是没有实际物理意义的。

相量法的另一个优点是它可以直接用来计算正弦函数的和。电路分析中经常需要计算电流和电压的和,从这一点上看,相量法的优越性是显而易见的。关于这一特性可以描述为,如果:

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \tag{9.23}$$

其中等式右边所有的电压都是相同频率的正弦电压,那么:

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n \tag{9.24}$$

总相量是所有分量的相量之和。9.5 节中将讨论式 (9.24) 的推导。

在用相量法分析电路之前,先通过一个例子来说明相量法的优势,以读者熟悉的用三角定理求正弦函数和的问题为例。例 9.5 给出了利用相量法简化问题求解的过程。

例 9.5 如果 $y_1 = 20\cos(\omega t - 30°)$,$y_2 = 40\cos(\omega t + 60°)$,求 $y = y_1 + y_2$ 的正弦函数表达式:

(a) 利用三角定理求解。

(b) 利用相量法求解。

解:

(a) 利用两角之和的余弦函数,将 y_1,y_2 展开为:

$$y_1 = 20\cos\omega t\cos 30° + 20\sin\omega t\sin 30°$$

$$y_2 = 40\cos\omega t\cos 60° - 40\sin\omega t\sin 60°$$

y_1,y_2 相加,得:

$$y = (20\cos 30 + 40\cos 60)\cos\omega t + (20\sin 30 - 40\sin 60)\sin\omega t$$
$$= 37.32\cos\omega t - 24.64\sin\omega t$$

将两个分量看成是直角三角形的两个直角边(图 9.6),将方程式的右边乘以和除以直角三角形的斜边,y 的表达式变为:

$$y = 44.72\left(\frac{37.32}{44.72}\cos\omega t - \frac{24.64}{44.72}\sin\omega t\right)$$
$$= 44.72(\cos 33.43°\cos\omega t - \sin 33.43°\sin\omega t)$$

再一次运用两角之和的余弦函数,可得:

$$y = 44.72\cos(\omega t + 33.43°)$$

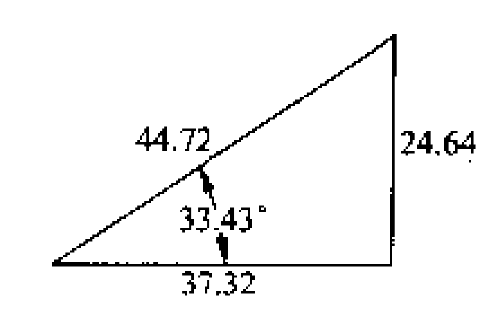


图 9.6　求 Y 时用到的直角三角形

(b) 用如下所示的相量法求解,因为:

$$y = y_1 + y_2$$

则由式 (9.24) 得:

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 + Y_2 \\ &= 20\angle -30° + 40\angle 60° \\ &= (17.32 - j10) + (20 + j34.64) \\ &= 37.32 + j24.64 \\ &= 44.72\angle 33.43° \end{aligned}$$

只要知道了相量 Y,就可以利用相量变换写出相应的三角函数表达式:

$$y = P^{-1}\{44.72e^{j33.43}\} = \mathrm{Re}\{44.72e^{j33.43}e^{j\omega t}\}$$
$$= 44.72\cos(\omega t + 33.43°)$$

由此可以看出相量法求解正弦函数和的优越性,其中需要掌握的是复数在极坐标和三角函数表示法之间的相互转换。

练习题

9.4　求下列三角函数的相量:

(a) $v = 170\cos(377t - 40°)$ V。

(b) $i = 10\sin(1000t + 20°)$ A。

(c) $i = [5\cos(\omega t + 36.87°) + 10\cos(\omega t - 53.13°)]$ A。

(d) $v = [300\cos(20000\pi t + 45°) - 100\sin(20000\pi t + 30°)]$ mV。

答:(a) $V = 170\angle -40°$ V,(b) $I = 10\angle -70°$ A,(c) $I = 11.18\angle -26.57°$ A,(d) $V = 339.90\angle 61.51°$ mV。

9.5 求下列相量的时域表达式：

(a) $V = 18.6\angle -54°$ V。

(b) $I = (20\angle 45° - 50\angle -30°)$ mA。

(c) $V = (20 + \mathrm{j}80 - 30\angle 15°)$ V。

答：(a) $v = 18.6\cos(\omega t - 54°)$ V，(b) $i = 48.81\cos(\omega t + 126.68°)$ mA，(c) $v = 72.79\cos(\omega t + 97.08°)$ V。

9.4 频域下的无源电路元件

在电路分析中，应用相量变换法需要两个步骤。首先，需要建立电流相量与无源电路元件两端的电压相量之间的关系式；其次，需要建立基尔霍夫定律的相量形式，这将在 9.5 节中讨论。在这一节中，我们来建立电流相量与电阻、电容、电感两端的电压相量之间的关系式。从电阻开始，推导过程中采用常规的符号表示法。

9.4.1 电阻的伏安特性

由欧姆定律可知，当电阻上的电流随时间呈正弦变化，即，如果 $i = I_m\cos(\omega t + \theta_i)$，则电阻两端的电压（如图 9.7 所示）为：

$$\begin{aligned} v &= R[I_m\cos(\omega t + \theta_i)] \\ &= RI_m[\cos(\omega t + \theta_i)] \end{aligned} \tag{9.25}$$

其中 I_m 为电流的幅值，单位为安培，θ_i 为电流的相位角。

电压相量为：

$$V = RI_m e^{j\theta_i} = RI_m\angle\theta_i \tag{9.26}$$

由于 $I_m\angle\theta_i$ 是正弦电流相量，所以，式 (9.26) 可写为：

$$V = RI \tag{9.27}$$

即电阻两端的电压相量等于电阻乘以电流相量，图 9.8 为频域下电阻的电路图。



图 9.7 有正弦电流的电阻元件　　　图 9.8 电阻的频域等效电路

公式 (9.25) 和(9.27)都包含了一个重要的信息——即电阻两端的电压和电流之间没有相位移动。图 9.9 描述了这一相位关系，其中电流和电压的初相角均为 60°。因为每条曲线都是在相同的时间达到它们的对应值，所以称信号是同相的（例如，在相同的时刻，信号都能达到负的最大值）。

9.4.2 电感的伏安特性

下面来推导电感的电流相量与它两端的电压相量之间的关系式。在电感上加一正弦电流，产生的相应电压为 $L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$。因此，如果所加电流为 $i = I_m\cos(\omega t + \theta_i)$，则电压的表达式为：

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\omega LI_m\sin(\omega t + \theta_i) \tag{9.28}$$

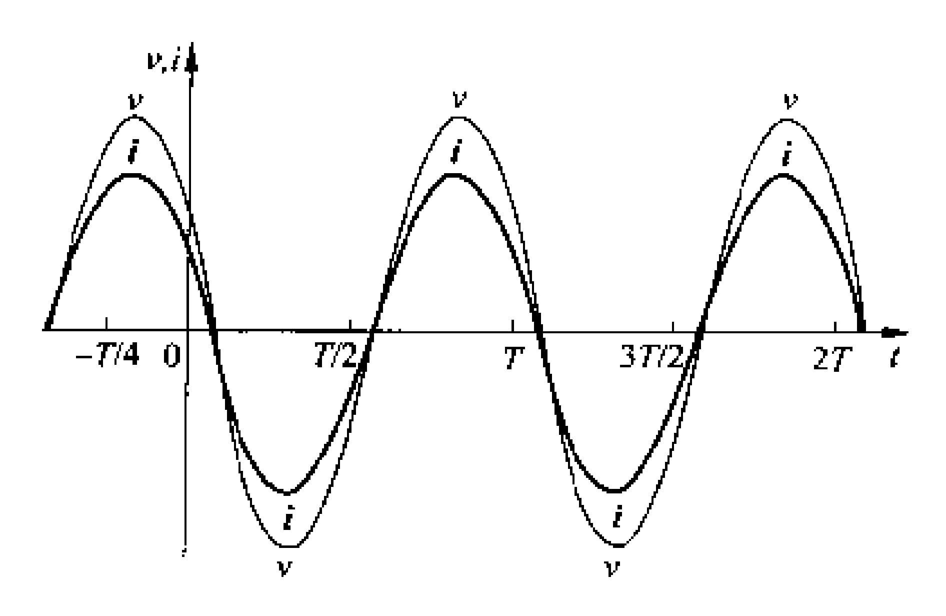


图 9.9　电阻两端的电压和电流同相

将公式 (9.28) 变换为余弦函数的形式：

$$v = -\omega L I_m \cos(\omega t + \theta_i - 90°) \tag{9.29}$$

由式 (9.29) 可知电压相量为：

$$\begin{aligned} V &= -\omega L I_m e^{j(\theta_i - 90°)} \\ &= -\omega L I_m e^{j\theta_i} e^{-j90°} \\ &= j\omega L I_m e^{j\theta_i} \\ &= j\omega L I \end{aligned} \tag{9.30}$$

注意：在公式 (9.30) 的推导过程中，采用了公式：

$$e^{-j90°} = \cos 90° - j\sin 90° = -j$$

式 (9.30) 表明，电感两端的电压相量等于 $j\omega L$ 与电流相量之积。图 9.10 为频域下的电感等效电路，应当注意的是，电感两端的电压相量与电流相量之间的关系同样适用于互感线圈。由于互感系数的存在，耦合线圈中有电流时，线圈上将产生互感电压，这个互感电压相量等于 $j\omega M$ 乘以耦合线圈中的电流相量。

将式 (9.30) 变换为：

$$\begin{aligned} V &= (\omega L \angle 90° \, I_m \angle \theta_i) \\ &= \omega L I_m \angle (\theta_i + 90)° \end{aligned} \tag{9.31}$$

可以看出电压与电流间的相位正好相差 90°。图 9.11 说明了电压超前电流或者说电流滞后电压的概念。例如，电压到达负的峰值刚好比电流到达负的峰值提前 90°。同样可以观察两波形幅值为零或者为正的峰值时的相位。

$j\omega L$

+　V　−

I

图 9.10　电感的频域等效电路

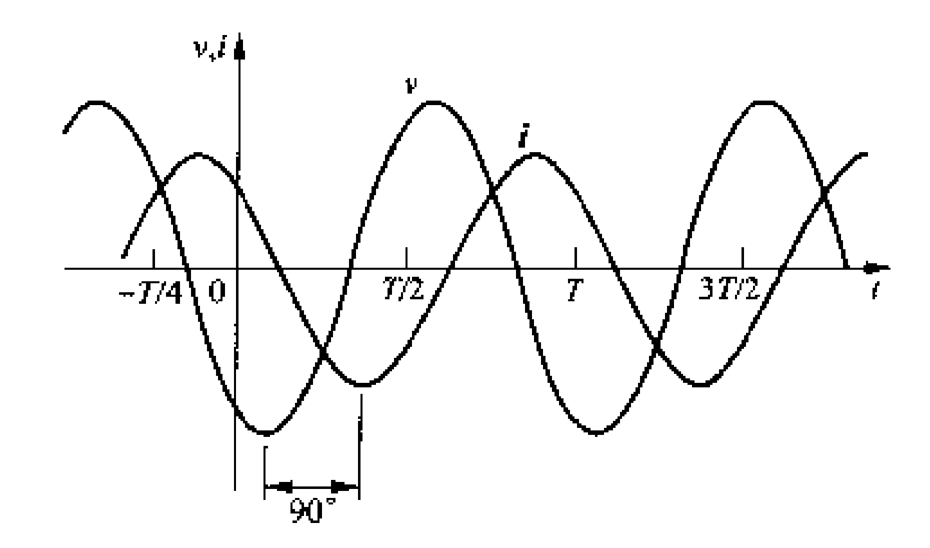


图 9.11　电感两端的电流和电压相位间的关系（$\theta_i = 60°$）

相移也可以用秒来表示。90°的相移等于 1/4 周期,也就是说电压超前电流 $T/4$,即$\frac{1}{4f}$秒。

9.4.3 电容的伏安特性

类似式(9.30)的推导过程,可以得到电容两端的电压相量与电流相量之间的关系式,注意到电容具有如下关系式:

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

若:

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$

则:

$$I = \mathrm{j}\omega CV \tag{9.32}$$

如果将电压表示为电流的函数,可得:

$$V = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}I \tag{9.33}$$

式(9.33)描述了图 9.12 所示频域下电容等效电路的伏安特性。

将式(9.33)进行适当的变换,可以看出电容两端的电压滞后于电流 90°:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\omega C}\underline{/-90^\circ}\ I_m\underline{/\theta_i^\circ} \\ &= \frac{I_m}{\omega C}\underline{/(\theta_i - 90)^\circ} \end{aligned} \tag{9.34}$$

或者说电流超前电压 90°,图 9.13 说明了电容两端电压和电流间的相位关系。

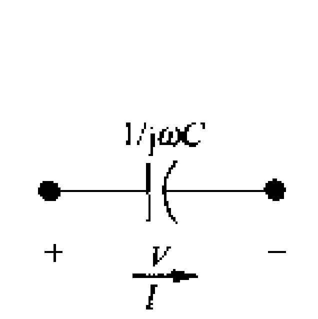


图 9.12 电容的频域等效电路

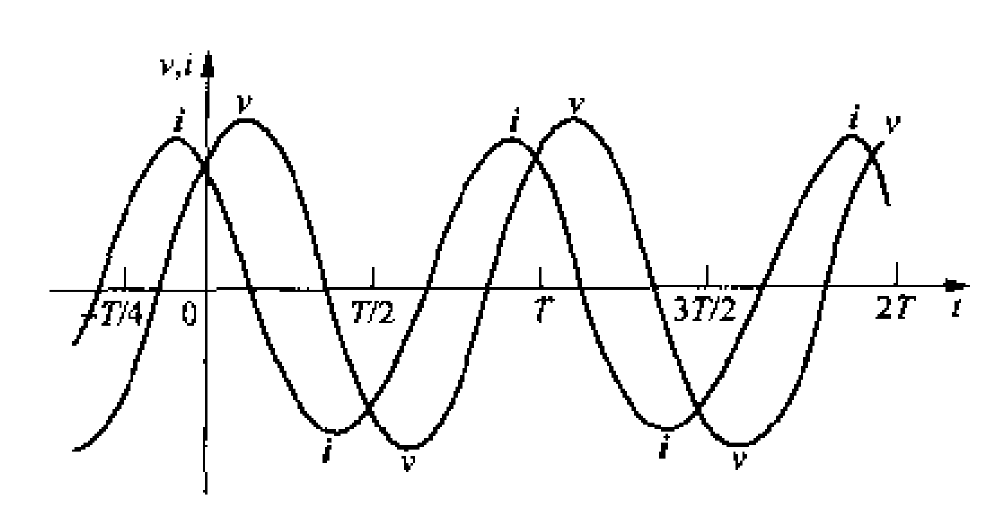


图 9.13 电容两端的电流和电压相位间的关系($\theta_i = 60°$)

9.4.4 阻抗和电抗

总结前面讨论的无源电路元件,比较式(9.27),(9.30)和式(9.33),可以发现这些公式都有一个统一的形式:

$$V = ZI \tag{9.35}$$

其中 Z 表示电路元件的阻抗。由式(9.35)可知,阻抗等于电路元件的电压相量与电流相量之比,因此电阻的阻抗为 R,电感的阻抗为 $\mathrm{j}\omega L$,互感线圈的阻抗为 $\mathrm{j}\omega M$,电容的阻抗为 $1/\mathrm{j}\omega C$。无论何种情况,阻抗的单位均为欧姆。虽然阻抗为复数,但它不是相量,相量是以 $e^{\mathrm{j}\omega t}$ 为系数形式出现的复数。因此,虽然所有的相量都是复数,但并不是所有的复数都是相量。

频域下的阻抗类似于时域下的电阻、电容和电感,阻抗的虚部称为电抗,每一个无源元件

的阻抗和电抗如表 9.1 所示。

表 9.1　阻抗和电抗

电路元件	阻　抗	电　抗
电阻	R	—
电感	$j\omega L$	ωL
电容	$j(-1/\omega C)$	$-1/\omega C$

需要注意的是,如果无源电路元件电流的参考方向是电压升的方向,那么电压和电流的关系式中要加上负号。

练习题

9.6　20 mH 电感上的电流为 10 cos (10000t + 30°) mA。计算:(a) 电感的电抗,(b) 电感的阻抗,(c) 电压相量 V,(d) $v(t)$的稳态表达式。

答:(a) 200 Ω,(b) j 200 Ω,(c) 2 $\angle 120°$V,(d) 2 cos (10000t + 120°)V。

20mH
\+ v −
i

9.7　5 μF 电容两端的电压为 30 cos (4000t + 25°)V。求 (a) 电容的电抗,(b) 电容的阻抗,(c) 电流相量 I,(d) $i(t)$的稳态表达式。

答:(a) −50 Ω,(b) −j50 Ω,(c) 0.6 $\angle 115°$ A,(d) 0.6 cos (4000t + 115°) A。

5μF
\+ v −
i

9.5　频域下的基尔霍夫定律

参考 9.3 节推导的式 (9.23) 和式 (9.24),由于常常需要计算正弦函数之和,因此,相量法在电路分析中很有用,例 9.5 证明了这一点。下面通过推导频域下的基尔霍夫定律来使之规则化。

9.5.1　频域下的基尔霍夫电压定律

假设 $v_1 \sim v_n$ 为一闭合回路上的电压,并且假设电路工作于正弦稳定状态,由基尔霍夫定律得:

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0 \tag{9.36}$$

在正弦稳态下可以写成复数形式:

$$V_{m_1}\cos(\omega t + \theta_1) + V_{m_2}\cos(\omega t + \theta_2) + \cdots + V_{m_n}\cos(\omega t + \theta_n) = 0 \tag{9.37}$$

引入欧拉定律得:

$$\mathrm{Re}\{V_{m_1}e^{j\theta_1}e^{j\omega t}\} + \mathrm{Re}\{V_{m_2}e^{j\theta_2}e^{j\omega t}\} + \cdots + \mathrm{Re}\{V_{m_n}e^{j\theta_n}e^{j\omega t}\} = 0 \tag{9.38}$$

整理得：

$$\mathrm{Re}\{V_{m_1}e^{j\theta_1}e^{j\omega t}+V_{m_2}e^{j\theta_2}e^{j\omega t}+\cdots+V_{m_n}e^{j\theta_n}e^{j\omega t}\}=0 \tag{9.39}$$

提取 $e^{j\omega t}$ 得：

$$\mathrm{Re}\{(V_{m_1}e^{j\theta_1}+V_{m_2}e^{j\theta_2}+\cdots+V_{m_n}e^{j\theta_n})e^{j\omega t}\}=0$$

或者：

$$\mathrm{Re}\{(V_1+V_2+\cdots+V_n)e^{j\omega t}\}=0 \tag{9.40}$$

由于 $e^{j\omega t}\neq 0$，所以：

$$V_1+V_2+\cdots+V_n=0 \tag{9.41}$$

这就是应用于电压相量的基尔霍夫定律。换句话说，式 (9.36) 适用于时域下的正弦电压，而式 (9.41) 是其频域下的的等效公式。

9.5.2　频域下的基尔霍夫电流定律

对于正弦电流可以采用类似的推导方法，如果：

$$i_1+i_2+\cdots+i_n=0 \tag{9.42}$$

则：

$$I_1+I_2+\cdots+I_n=0 \tag{9.43}$$

其中 $I_1, I_2, \ldots, I_n$ 为电流 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ 的相量。

式 (9.35) 、(9.41)和式 (9.43) 是频域下电路分析的基础。读者应当注意到，式 (9.35) 与欧姆定律具有相同的形式，而式 (9.41) 和式 (9.43) 描述了基尔霍夫定律的相量形式，因此，可以用分析电阻电路的各种方法求电流相量和电压相量，不需要新的分析方法。第 2 至第 4 章中介绍基本电路分析方法以及各种简化法都要可以用来分析频域下的电路。电路的相量分析法包括两个基本任务：(1)必须建立电路的频域模型。(2)必须能够熟练地进行复数或者代数计算。在后面的讨论中，将给出相量分析的应用，首先从串联、并联和三角形-星形变换开始。

练习题

9.8　一个节点有 4 条支路，支路电流(i_1, i_2, i_3, i_4)的参考方向为流入节点。如果 $i_1 = 100\cos(\omega t+25°)$ A，$i_2=100\cos(\omega t+145°)$ A，$i_3=100\cos(\omega t-95°)$ A，求 i_4。

答：$i_4=0$。

9.6　串联、并联和三角形-星形变换

串联阻抗或者并联阻抗的合并方法以及戴维南等效变换同电阻电路一样，惟一的区别在于阻抗合并时需要对复数进行熟练的代数运算。

9.6.1　并联阻抗和串联阻抗的合并

将各阻抗相加可以将串联阻抗等效为一个阻抗。电路如图 9.14 所示，a，b 两端点间阻抗 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ 相互串联。阻抗串联时，它们具有相同的电流相量 I，由式 (9.35) 可知，阻抗上的压降分别为 $Z_1I, Z_2I, \ldots, Z_nI$，根据基尔霍夫电压定律：

$$V_{ab} = Z_1 I + Z_2 I + \cdots + Z_n I$$
$$= (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) I \tag{9.44}$$

图 9.14　串联阻抗

a,b 两端点间的等效阻抗为：

$$Z_{ab} = \frac{V_{ab}}{I} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \tag{9.45}$$

例 9.6 给出了式 (9.45) 的具体应用。

例 9.6　正弦电压源的两端串联有 90 Ω 的电阻，32 mH 的电感，和一个 5 μF 的电容，电路如图 9.15 所示，电源电压 v_s 为 750 cos (5000t + 30°) V。

(a) 求频域下的等效电路。

(b) 用相量法求稳态电流 i。

解：

(a) 由 v_s 的表达式已知，ω = 5000 rad/s，因此，32 mH 电感的阻抗为：

$$Z_L = j\omega L = j(5000)(32 \times 10^{-3}) = j160\ \Omega$$

电容阻抗为：

$$Z_C = j\frac{-1}{\omega C} = -j\frac{10^6}{(5000)(5)} = -j40\ \Omega$$

v_s 的相量为：

$$V_s = 750\,\underline{/30^\circ}\ \text{V}$$

图 9.16 为图 9.15 所示电路频域下的等效电路。

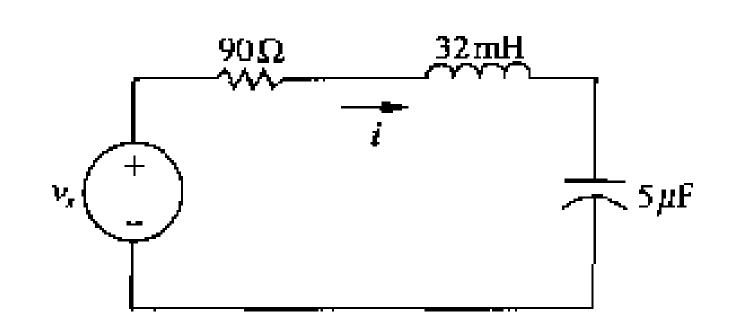


图 9.15　例 9.6 的电路图

(b) 电流相量可以通过用电压源的电压除以 a,b 两端的等效阻抗求出。由式 (9.45) 得：

$$Z_{ab} = 90 + j160 - j40$$
$$= 90 + j120 = 150\,\underline{/53.13^\circ}\ \Omega$$

所以：

$$I = \frac{750\,\underline{/30^\circ}}{150\,\underline{/53.13^\circ}} = 5\,\underline{/-23.13^\circ}\ \text{A}$$

直接写出 i 的稳态表达式：

$$i = 5\cos(5000t - 23.13°)\ \text{A}$$

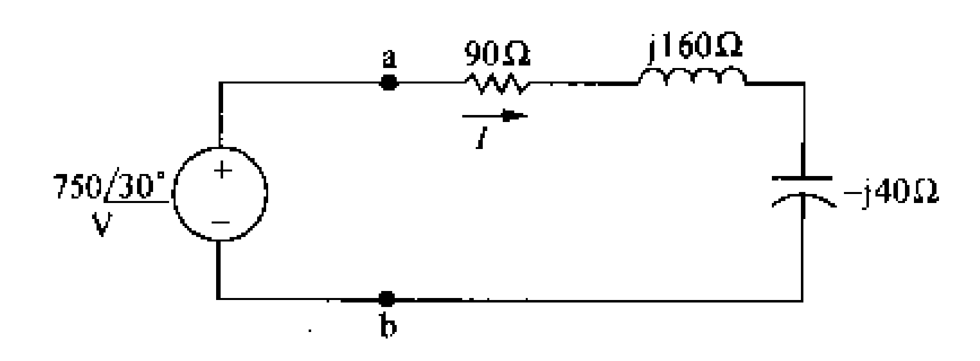


图 9.16 图 9.15 所示电路的频域等效电路

练习题

9.9 图 9.15 所示电路，$V_s = 125\angle -60°\text{V}$，$\omega = 5000\ \text{rad/s}$，求：

(a) 使稳态输出电流 i 的相位角为 −105°时的电容值。

(b) 稳态输出电流 i 的幅值。

答：(a) 2.86 μF，(b) 0.982 A。

并联阻抗可以通过下面的关系式等效为一个阻抗：

$$\frac{1}{Z_{ab}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n} \tag{9.46}$$

图 9.17 为阻抗并联连接图，可以看出当阻抗并联时，各阻抗具有相同的端电压。由基尔霍夫电流定律和频域下的欧姆定律可以很容易地推导出式 (9.46)，由图 9.17 得：

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

或者：

$$\frac{V}{Z_{ab}} = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \cdots + \frac{V}{Z_n} \tag{9.47}$$

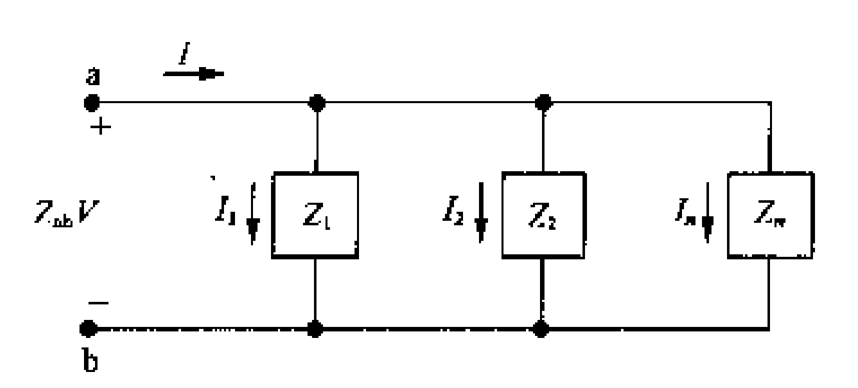


图 9.17 并联阻抗

消去(9.47)中相同的电压，即可得到式 (9.46)。

由式 (9.46)，可知对于两个阻抗并联的特殊情况：

$$Z_{ab} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{9.48}$$

式 (9.46) 也可以表示成导纳的形式，导纳定义为阻抗的倒数，记为 Y，因此有：

$$Y = \frac{1}{Z} = G + \text{j}B\ (\text{S}) \tag{9.49}$$

显然，导纳也是一个复数。其中实部 G 称为电导，虚部 B 称为电纳。导纳、电导、电纳的单位均为西门子(S)。将式 (9.49) 代入到(9.46)中可得：

$$Y_{ab} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \tag{9.50}$$

无源电路元件的导纳也是值得注意的，归纳如表 9.2 所示。

表 9.2　导纳和电纳

电路参数	导　纳	电　纳
电阻	G(电导)	—
电感	$j(-1/\omega L)$	$-1/\omega L$
电容	$j\omega C$	ωC

例 9.7 给出了公式 (9.49) 和(9.50)的具体应用。

例 9.7　图 9.18 所示电路，正弦电流源 $i_s = 8\cos 200000t$ A。

(a) 求频域下的等效电路。

(b) 求 i_1, i_2, i_3 和 v 的稳态表达式。

解：

(a) 电流源的相量为 $8\underline{/0°}$；频域下电阻的阻抗为 10 Ω 和 6 Ω，在给定频率 200 000 rad/s 下 40 μH 电感的阻抗为 j8 Ω，1 μF 电容的阻抗为 − j5 Ω。图 9.19 为频域下的等效电路，图上标的电流表示未知量。

(b) 如图 9.19 所示，只要求出三条并联支路的等效阻抗，就可方便求出电流源两端的电压，一旦知道了电压 V，由式 (9.35) 就可求出三个电流相量 I_1, I_2, I_3。为了求出三条支路的等效阻抗，可以通过三条支路的导纳相加，求等效导纳，再求其等效阻抗。第一条支路的导纳为：

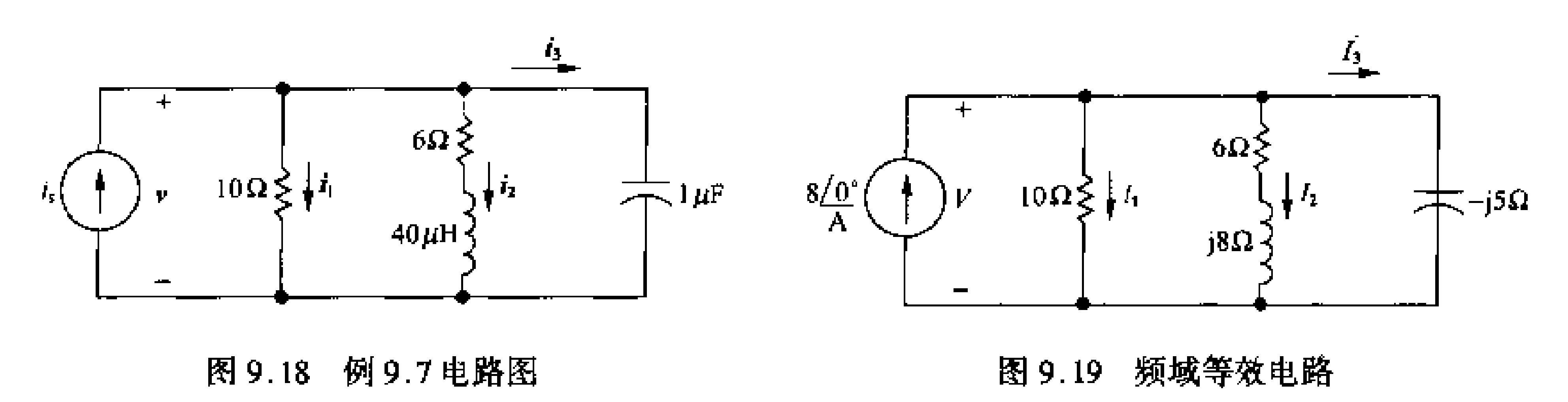


图 9.18　例 9.7 电路图　　　　图 9.19　频域等效电路

$$Y_1 = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ S}$$

第二条支路的导纳为：

$$Y_2 = \frac{1}{6 + j8} = \frac{6 - j8}{100} = 0.06 - j0.08 \text{ S}$$

第三条支路的导纳为：

$$Y_3 = \frac{1}{-j5} = j0.2 \text{ S}$$

三条支路的等效导纳为：

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

$$= 0.16 + j0.12$$
$$= 0.2\angle 36.87^\circ\ S$$

电流源上的阻抗为：

$$Z = \frac{1}{Y} = 5\angle -36.87^\circ\ \Omega$$

电压为：

$$V = ZI = 40\angle -36.87^\circ\ V$$

因此：

$$I_1 = \frac{40\angle -36.87^\circ}{10} = 4\angle -36.87^\circ = 3.2 - j2.4\ A$$

$$I_2 = \frac{40\angle -36.87^\circ}{6 + j8} = 4\angle -90^\circ = -j4\ A$$

$$I_3 = \frac{40\angle -36.87^\circ}{5\angle -90^\circ} = 8\angle 53.13^\circ = 4.8 + j6.4\ A$$

为了证明结果的正确性，下面进行验证：

$$I_1 + I_2 + I_3 = I$$

代入数值：

$$3.2 - j2.4 - j4 + 4.8 + j6.4 = 8 + j0$$

稳态响应的时域表达式为

$$v = 40\cos(200000t - 36.87^\circ)\ V$$
$$i_1 = 4\cos(200000t - 36.87^\circ)\ A$$
$$i_2 = 4\cos(200000t - 90^\circ)\ A$$
$$i_3 = 8\cos(200000t + 53.13^\circ)\ A$$

练习题

9.10 20 Ω 的电阻与 5 mH 的电感并联，再与一个 5 Ω 的电阻和一个 25 μF 的电容串联。

(a) 如果频率是 2 krad/s，求电路的等效阻抗。

(b) 如果频率是 8 krad/s，求电路的等效阻抗。

(c) 在哪个频率点上，电路的阻抗为纯电阻性？

(d) 在(c)所求出的频率处，电路的阻抗是多少？

答：(a) 9 − j12 Ω，(b) 21 + j3 Ω，(c) 4 krad/s，(d) 15Ω。

9.11 将练习题 9.10 中的电路接到一个电压为 $v = 150\cos 4000t$ V 电压源的两端。求 5 mH电感上电流的最大值。

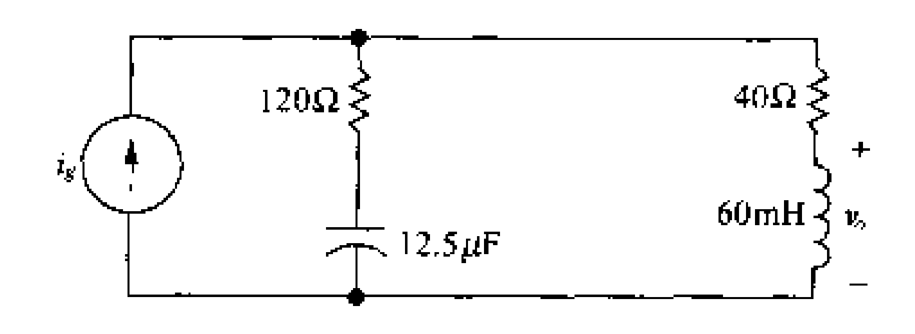
答：7.07 A。

9.12 三条并联支路的阻抗分别为 3 + j4 Ω，16 − j12 Ω，− j4 Ω。求(a) 等效导纳，(b) 等效电导，(c) 以 mS 为单位的等效导纳，(d) 给电路施加一个电流为 $i = 8\cos\omega t$ A 的正弦电流源，求纯电容支路上电流的最大幅值。

答：(a) $200\angle 36.87^\circ$ mS，(b) 160 mS，(c) 120 mS，(d) 10 A。

9.13　如图示电路，若 $i_g = 0.5\cos 2000t$ A，求 v_o 的稳态表达式。

答：$v_o = 30\sqrt{2}\cos(2000t + 45°)$ V。



9.6.2　三角形-星形变换

在 3.7 节中，讨论的电阻电路 Δ－Y 变换仍然适用于阻抗电路。图 9.20 给出一个三角形连接的阻抗电路及其星形等效电路。星形连接的阻抗用三角形连接的阻抗表示为：

$$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c} \tag{9.51}$$

$$Z_2 = \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c} \tag{9.52}$$

$$Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c} \tag{9.53}$$

上述变换也可以倒过来，也就是说，可以将星形电路替换为三角形电路。三角形连接的阻抗用星形连接阻抗表示为：

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \tag{9.54}$$

$$Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \tag{9.55}$$

$$Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \tag{9.56}$$

式 (9.51) ~ (9.53) 及式 (9.54) ~ (9.56) 的推导过程同纯电阻电路公式的推导过程一样。实际上，将式 (3.40) ~ (3.42) 与式 (9.51) ~ (9.53)，式 (3.43) ~ (3.45) 与式 (9.54) ~ (9.56) 比较可以看出，它们的区别仅在于用字母 Z 代替了字母 R。回忆习题 3.57，复习三角形向星形变换的推导过程。

例 9.8 说明了三角形向星形变换，将有助于理解电路的相量分析法。

例 9.8　采用三角形到星形的阻抗变换，求图 9.21 所示电路的 I_0，I_1，I_2，I_3，I_4，I_5，V_1 和 V_2。

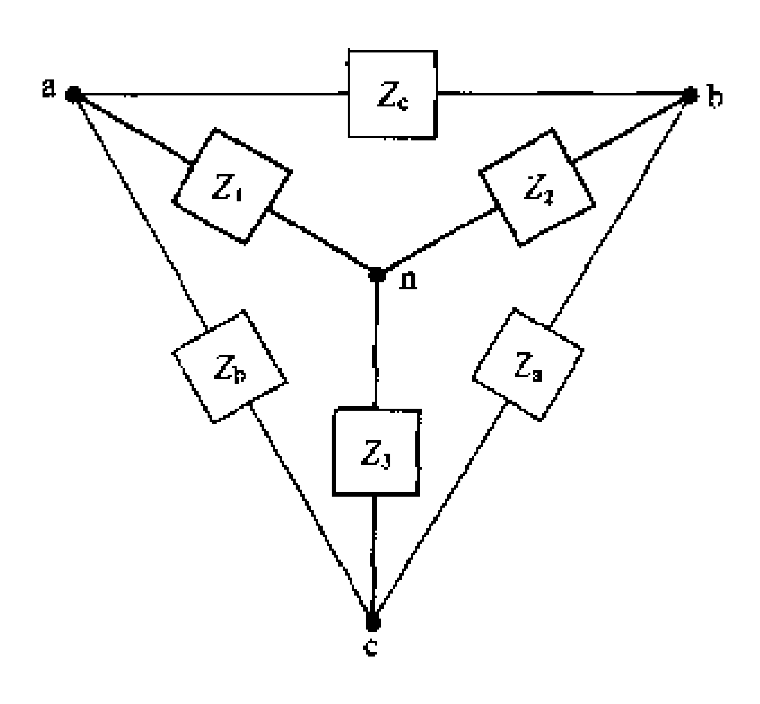


图 9.20　三角形向星形变换

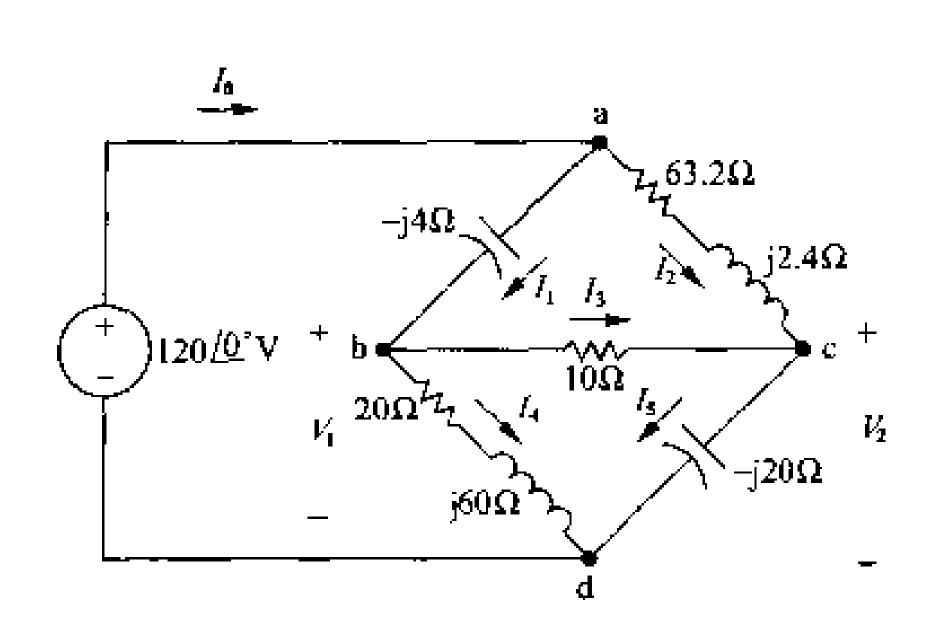


图 9.21　例 9.8 电路图

解:

首先应当注意到,该电路不能直接变换为串联或并联的形式。将三角形阻抗变换为星形阻抗,就可以不用节点电压法或网孔电流法求解每条支路的电流。将上三角形(abc)或下三角形(bcd)替换为等效星形阻抗,可得到串-并联组合电路,并能继续简化。在决定替换哪一个三角形之前,需要注意三角形的阻抗之和,因为这个值是等效星形阻抗的分母,下三角形的阻抗和为 30+j40,因此,选择将其从电路中替换。与端子 b 相连的星形阻抗为:

$$Z_1=\frac{(20+j60)(10)}{30+j40}=12+j4\ \Omega$$

与端子 c 相连的星形阻抗为:

$$Z_2=\frac{10(-j20)}{30+j40}=-3.2-j2.4\ \Omega$$

与端子 d 相连的星形阻抗为:

$$Z_3=\frac{(20+j60)(-j20)}{30+j40}=8-j24\ \Omega$$

将星形等效阻抗代入电路,得到图 9.22 所示电路。继续对电路进行简化,abn 支路上的阻抗为:

$$Z_{abn}=12+j4-j4=12\ \Omega$$

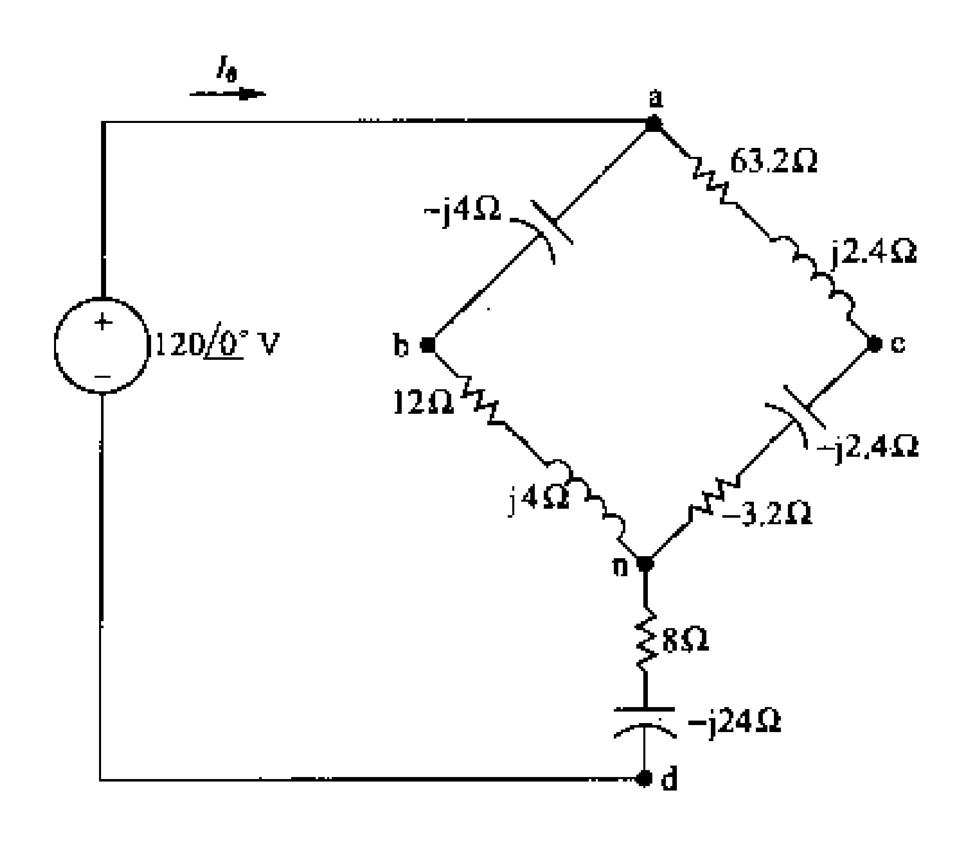


图 9.22　图 9.21 电路中的下三角形用等效星形电阻代替后的电路

acn 支路上的阻抗为:

$$Z_{acn}=63.2+j2.4-j2.4-3.2=60\ \Omega$$

注意:abn 支路和 can 支路并联,等效为一个阻抗:

$$Z_{an}=\frac{(60)(12)}{72}=10\ \Omega$$

将 10 Ω 电阻与 n,d 之间的阻抗合并,可将图 9.22 简化为图 9.23 所示的电路,由 9.23 电路得:

$$I_0=\frac{120\angle 0^\circ}{18-j24}=4\angle 53.13^\circ=2.4+j3.2\ \text{A}$$

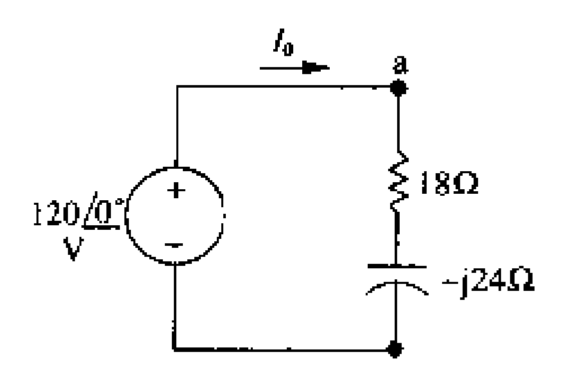


图 9.23　图 9.22 电路的简化电路

一旦知道了 I_0，就可以通过等效电路求原电路上的各支路电流。首先 I_0 是图 9.22 所示电路 nd 支路上的电流，因此：

$$V_{nd} = (8 - j24)I_0 = 96 - j32 \text{ V}$$

求电压 V_{an}，因为：

$$V = V_{an} + V_{nd}$$

而 V 和 V_{nd} 已知，所以：

$$V_{an} = 120 - 96 + j32 = 24 + j32 \text{ V}$$

计算支路电流 I_{abn} 和 I_{acn}：

$$I_{abn} = \frac{24 + j32}{12} = 2 + j\frac{8}{3} \text{ A}$$

$$I_{acn} = \frac{24 + j32}{60} = \frac{4}{10} + j\frac{8}{15} \text{ A}$$

由图 9.21 所示参数知：

$$I_1 = I_{abn} = 2 + j\frac{8}{3} \text{ A}$$

$$I_2 = I_{acn} = \frac{4}{10} + j\frac{8}{15} \text{ A}$$

利用下式检查 I_1 和 I_2 的结果：

$$I_1 + I_2 = 2.4 + j3.2 = I_0$$

要求出支路电流 I_3，I_4 和 I_5，必须先计算电压 V_1 和 V_2。由图 9.21 可知：

$$V_1 = 120\underline{/0^\circ} - (-j4)I_1 = \frac{328}{3} + j8 \text{ V}$$

$$V_2 = 120\underline{/0^\circ} - (63.2 + j2.4)I_2 = 96 - j\frac{104}{3} \text{ V}$$

下面计算支路电流 I_3，I_4 和 I_5：

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2}{10} = \frac{4}{3} + j\frac{12.8}{3} \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{V_1}{20 + j60} = \frac{2}{3} - j1.6 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{V_2}{-j20} = \frac{26}{15} + j4.8 \text{ A}$$

通过下式验证结果：

$$I_4 + I_5 = \frac{2}{3} + \frac{26}{15} - j1.6 + j4.8 = 2.4 + j3.2 = I_0$$

$$\mathbf{I}_3+\mathbf{I}_4=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\mathrm{j}\,\frac{12.8}{3}-\mathrm{j}1.6=2+\mathrm{j}\,\frac{8}{3}=\mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{I}_3+\mathbf{I}_2=\frac{4}{3}+\frac{4}{10}+\mathrm{j}\,\frac{12.8}{3}+\mathrm{j}\,\frac{8}{15}=\frac{26}{15}+\mathrm{j}4.8=\mathbf{I}_5$$

练习题

9.14 利用 Δ - Y 变换求图示电路的电流 $\mathbf{I}$。
答:$\mathbf{I}=4\,\underline{/28.07^\circ}$ A。

9.7 电源变换以及戴维南-诺顿等效电路

4.9 节介绍的电源变换以及 4.10 节中介绍的戴维南-诺顿等效电路的分析方法仍然适用于频域下的电路。采用与 4.9 节和 4.10 节相同的证明过程可以证明这些方法的适用性,惟一的区别在于用阻抗(Z)代替了电阻(R)。图 9.24 给出频域参数电路的电源变换等效电路。

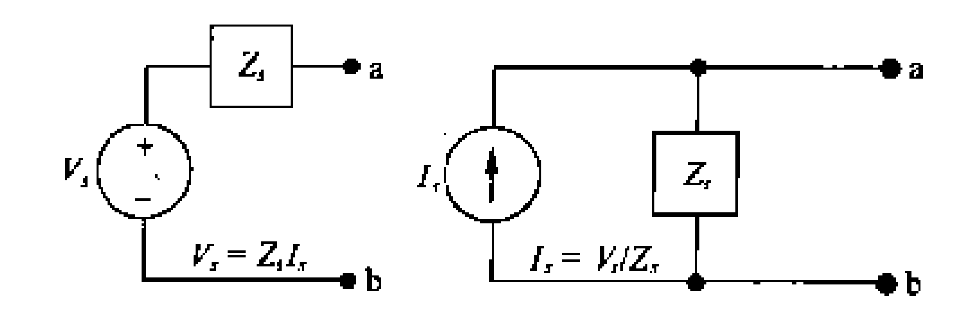


图 9.24 频域下的电源变换

图 9.25 是频域下的戴维南等效电路,图 9.26 是频域下的诺顿等效电路。求解戴维南等效电压和等效阻抗的方法与电阻电路的求解方法一样,区别在于频域下等效电路的求解需要复数的熟练运算,诺顿等效电流和等效电阻的求解也是一样的。

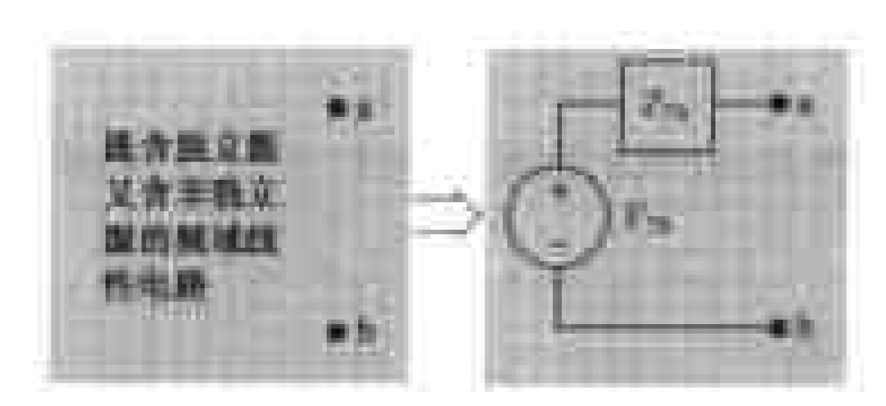


图 9.25 频域下的戴维南等效电路

例 9.9 说明了频域分析中电源变换等效电路的应用。例 9.10 说明了求解频域下戴维南等效电路的具体步骤。

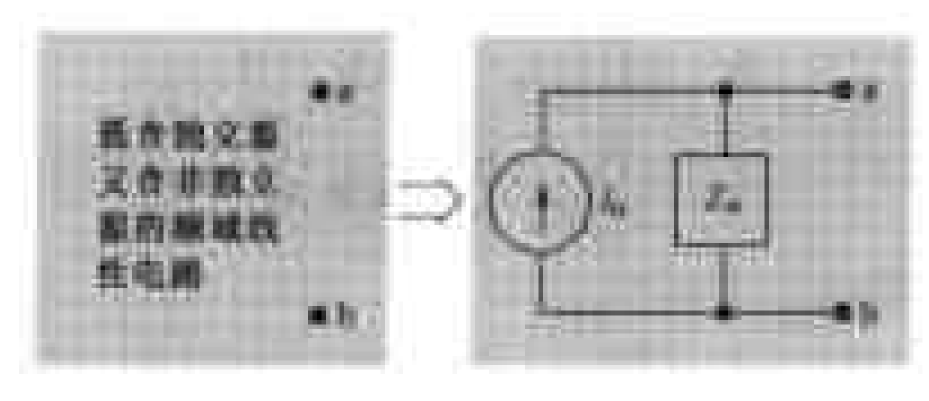


图 9.26 频域下的诺顿等效电路

例 9.9　利用电源变换的概念求图 9.27 所示电路的电压相量 V_o。

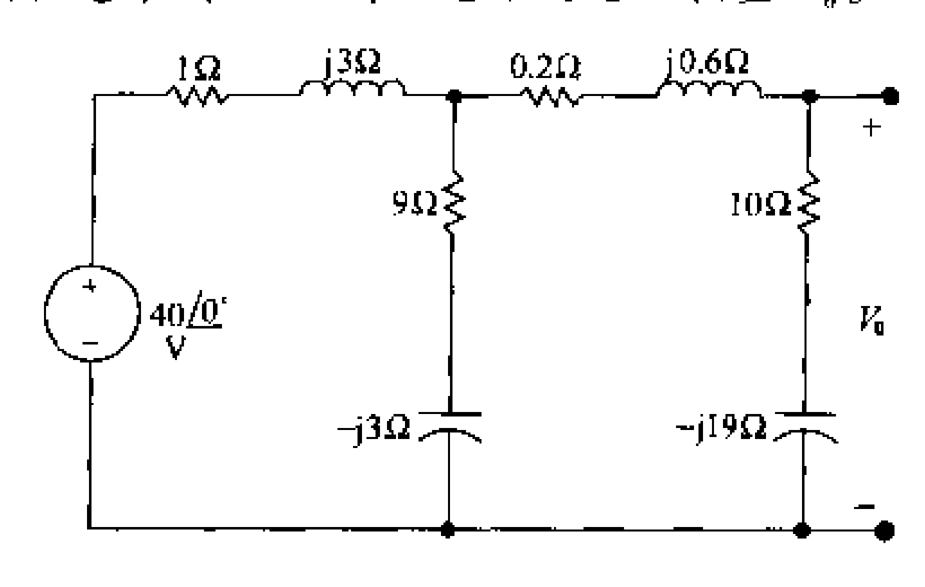


图 9.27　例 9.9 电路图

解：

将电压源 $40\underline{/0°}$ 与阻抗 $1+j3\ \Omega$ 的串联电路用一个电流源与阻抗 $1+j3\ \Omega$ 的并联电路来代替，电流源为：

$$I=\frac{40}{1+j3}=\frac{40}{10}(1-j3)=4-j12\ \text{A}$$

电路由图 9.27 变换为图 9.28 的形式，需要注意的是 40 V 电压源的参考方向决定了电流源 I 的参考方向。

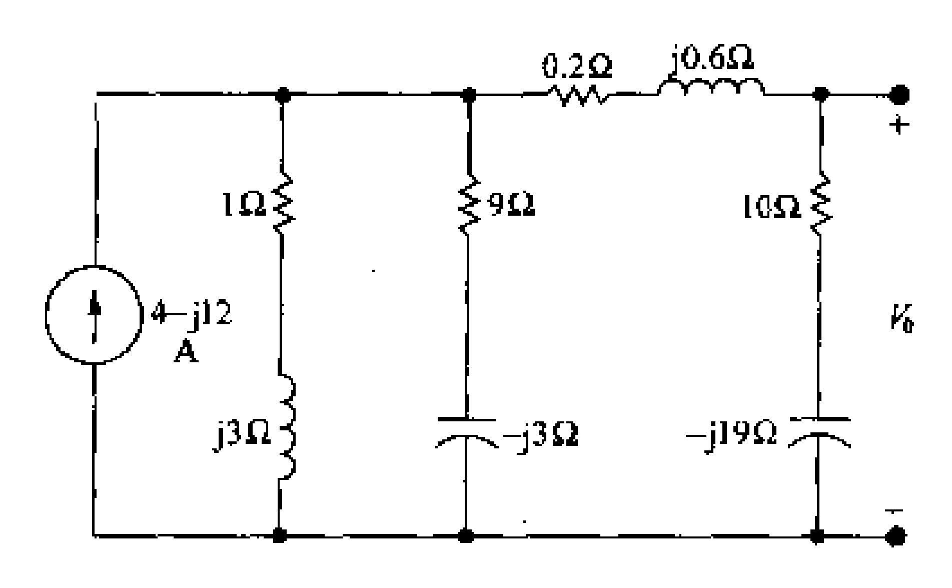


图 9.28　图 9.27 电路化简的第一步

将两条并联支路等效为一个阻抗：

$$Z=\frac{(1+j3)(9-j3)}{10}=1.8+j2.4\ \Omega$$

该阻抗与 $4-j12$ A 的电流源并联。再次运用电源变换，将并联网络替换为电压源与阻抗 $1.8+j2.4\ \Omega$ 串联的电路，电压源的电压为：

$$V=(4-j12)(1.8+j2.4)=36-j12\ \text{V}$$

电路变为图 9.29 所示电路的形式。同样需要注意电压源的极性。为了求解 V_0，在电路图上标出电流 I_0。

现在电路已化简为一个简单串联电路的形式，电压源的电压除以串联阻抗之和即得电流 I_0：

$$\begin{aligned}I_0&=\frac{36-j12}{12-j16}=\frac{12(3-j1)}{4(3-j4)}\\&=\frac{39+j27}{25}=1.56+j1.08\ \text{A}\end{aligned}$$

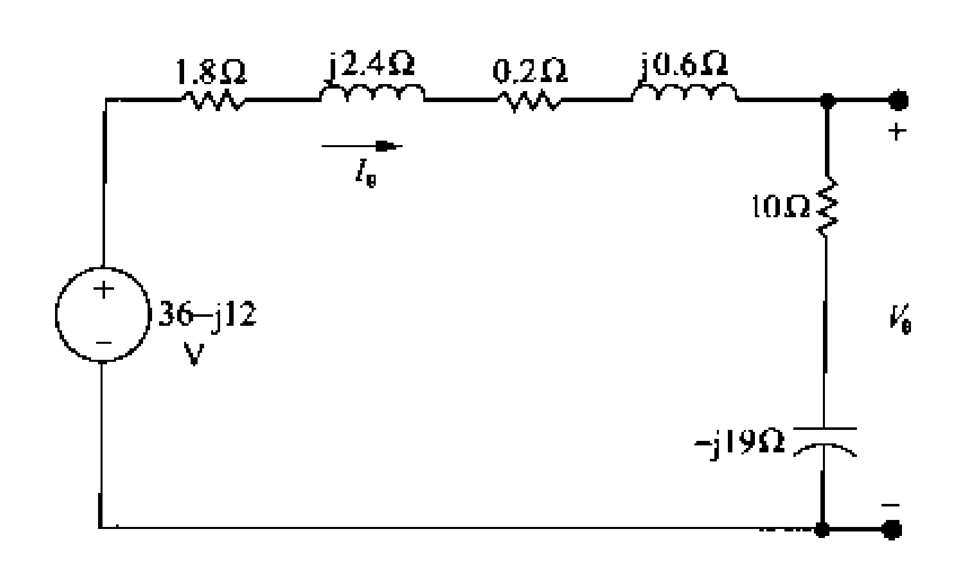


图 9.29 图 9.27 电路化简的第二步

将 I_0 与阻抗 10 - j19 Ω 相乘即得电压 V_0:

$$V_0=(1.56+\mathrm{j}1.08)(10-\mathrm{j}19)=36.12-\mathrm{j}18.84\ \mathrm{V}$$

例 9.10 求图 9.30 所示电路 a,b 两端间的戴维南等效电路。

解:

首先求戴维南等效电压,即求 a,b 两点间的开路电压,选择 a 端为正,作为戴维南电压的参考方向。对于 120 V,12 Ω 和 60 Ω 的电路元件组成的电路,可以通过两次电源变换等效。在进行电源变换的同时,应特别注意,由于受控源的存在,控制电压 V_x 必须保留。

电源变换的第一步是将 120 V 的电压源与 12 Ω 电阻串联的网络用一个 10 A 的电流源和 12 Ω 的电阻并联来替换,第二步是将 12 Ω 和 60 Ω 电阻的并联等效为一个 10 Ω 电阻,最后,再将 10A 电流源与 10 Ω 电阻的并联网络替换为 100 V 电压源与 10 Ω 电阻串联,得到图 9.31 所示电路。在图 9.31 上标出电流 I,如果知道电路 I,就可以求出戴维南等效电压。通过求图 9.31 中闭合回路的电压代数和计算 I:

$$100=10I-\mathrm{j}40I+120I+10V_x=(130-\mathrm{j}40)I+10V_x$$

图 9.31 中控制电压 V_x 与电流 I 具有如下关系式:

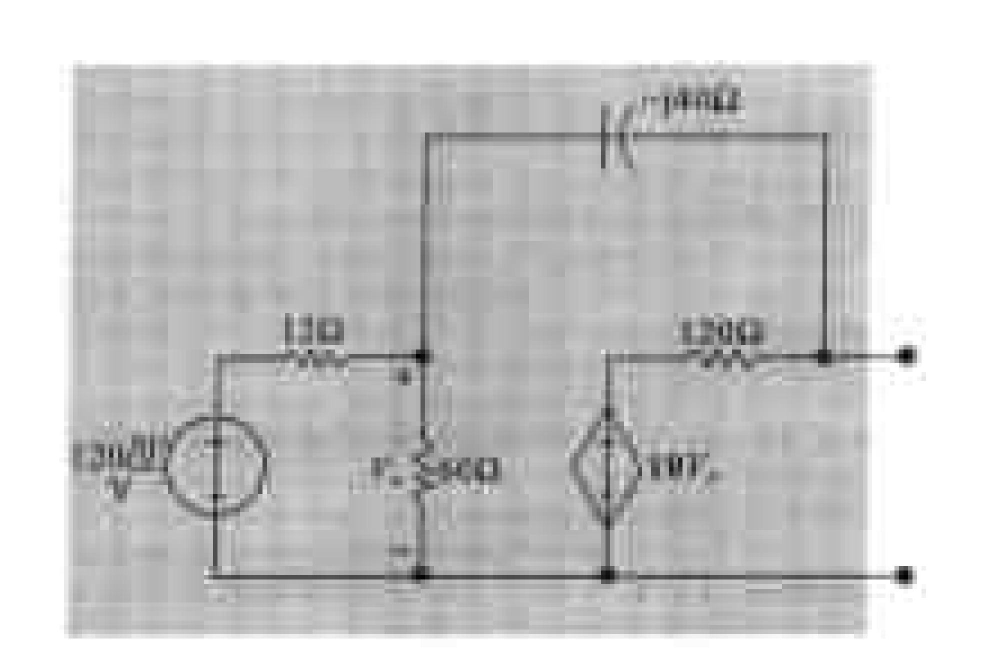


图 9.30 例 9.10 电路图

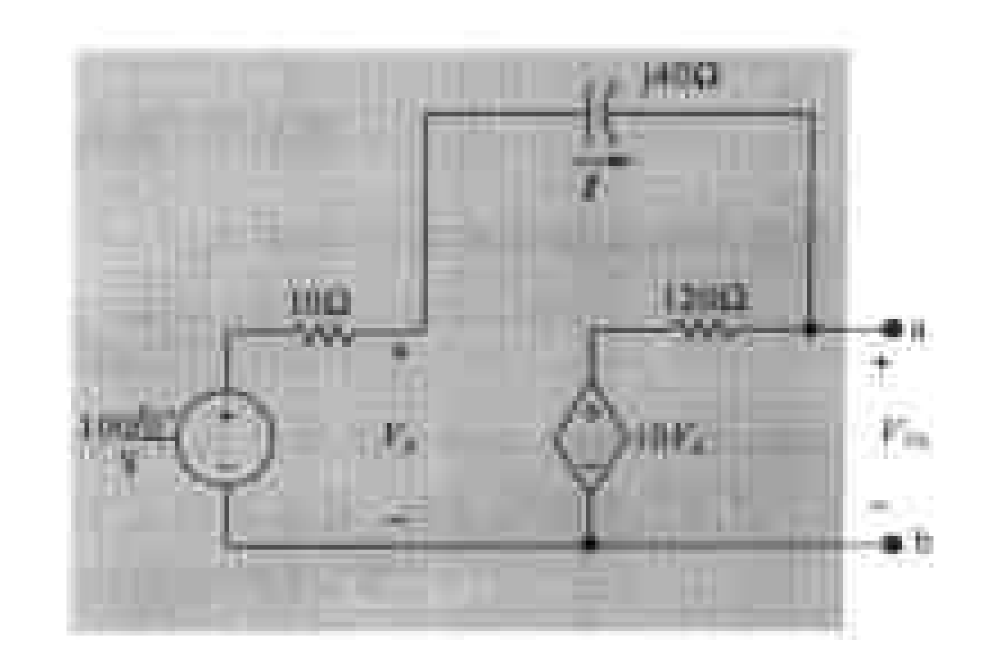


图 9.31 图 9.30 化简后的电路

$$V_x=100-10I$$

因此,得到:

$$I=\frac{-900}{30-\mathrm{j}40}=18\angle-126.87^\circ\ \mathrm{A}$$

下面计算 V_x：

$$V_x = 100 - 180\angle -126.87^\circ = 208 + j144\ \text{V}$$

最后得出：

$$\begin{aligned} V_{Th} &= 10V_x + 120I \\ &= 2080 + j1440 + 120(18)\angle -126.87^\circ \\ &= 784 - j288 = 835.22\angle -20.17^\circ\ \text{V} \end{aligned}$$

下面求戴维南等效阻抗。前面介绍的求戴维南等效电阻的方法在这里仍然适用。本例中采用测试电源的方法，这种方法是将电路中所有的独立源去掉，再在要研究的两端点间加上测试电压源或测试电流源，这个电源两端电压和电流的比值即为戴维南阻抗。图 9.32 是图 9.30 运用上述方法后得到的电路。这里采用的是测试电压源 V_T，独立电压源短路，并且保留了受控电压 V_x。为了便于计算电流 I_T，在图上标出支路电流 I_a 和 I_b。由基尔霍夫电流定律可得以下关系式：

$$I_a = \frac{V_T}{10 - j40},\ V_x = 10I_a$$

$$\begin{aligned} I_b &= \frac{V_T - 10V_x}{120} \\ &= \frac{-V_T(9 + j4)}{120(1 - j4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_T &= I_a + I_b \\ &= \frac{V_T}{10 - j40}\left(1 - \frac{9 + j4}{12}\right) \\ &= \frac{V_T(3 - j4)}{12(10 - j40)} \end{aligned}$$

$$Z_{Th} = \frac{V_T}{I_T} = 91.2 - j38.4\ \Omega$$

图 9.33 即为戴维南等效电路。

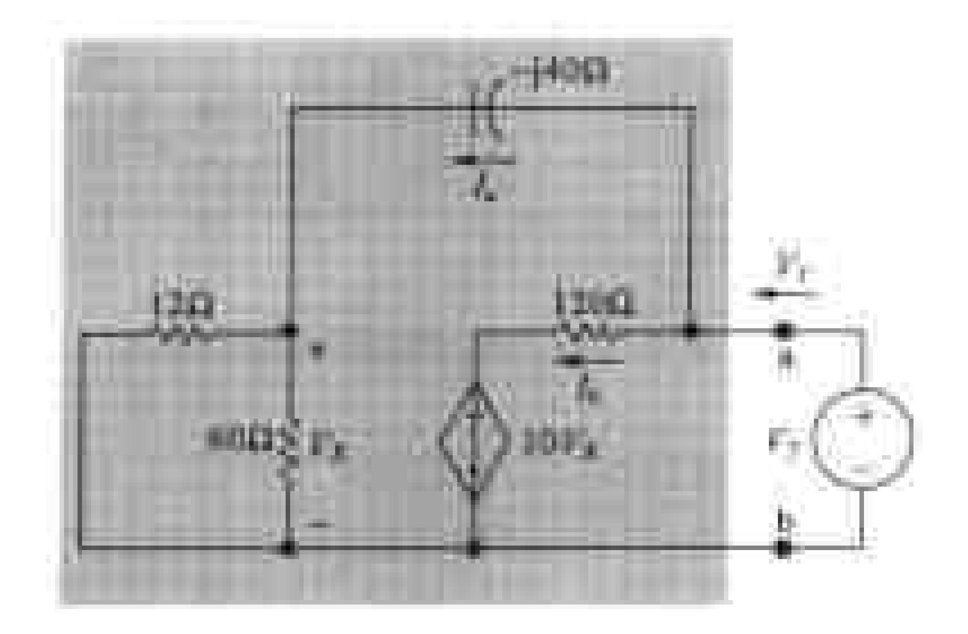


图 9.32　求戴维南等效阻抗的电路

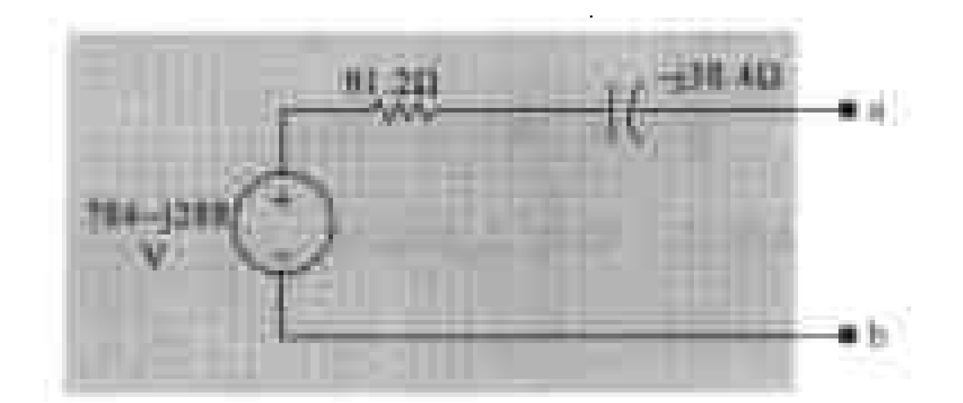
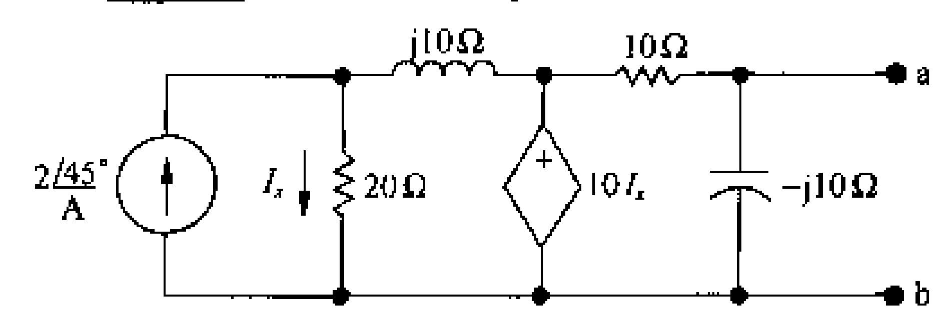


图 9.33　图 9.30 的戴维南等效电路

练习题

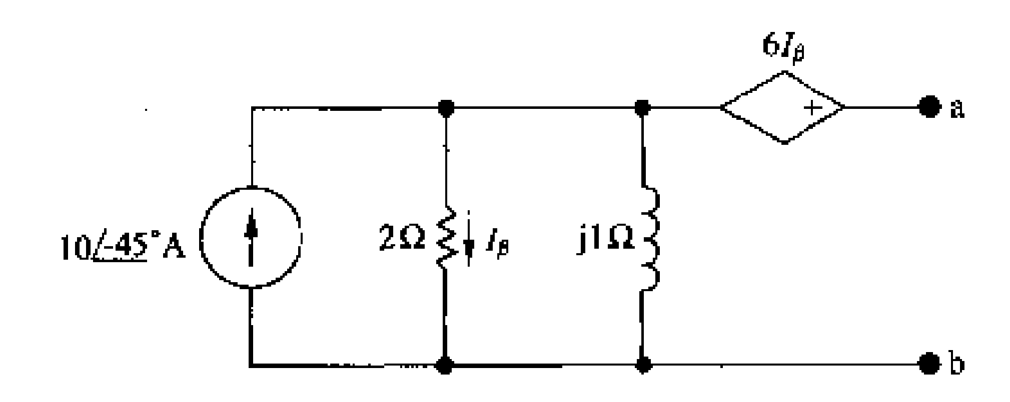
9.15　求图示 a，b 两点间的戴维南等效电路。

答：$V_{Th} = V_{ab} = 10\angle -45°$ V，$Z_{Th} = 5 - j5\ \Omega$。



9.16 求图示 a,b 两点间诺顿等效电路。

答：$I_N = 10\angle -45°$A；$Z_{Th} = 1.6 + j3.2\ \Omega$



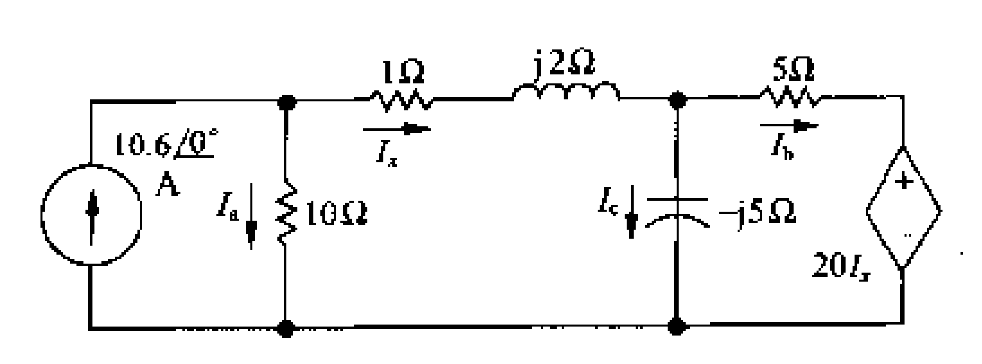
9.8 节点电压法

在 4.2 至 4.4 节中，已经介绍了节点电压法的基本概念，对于频域下的节点电压，分析这些概念同样适用。例 9.11 给出了用节点电压分析电路的方法。练习题 9.17 和其他章节里的许多习题都可以运用节点电压法求电路的正弦稳态响应。

例 9.11 用节点电压法求图 9.34 所示电路的支路电流 I_a，I_b 和 I_c。

解：

电路包含三个独立节点，所以，可用两个节点电压来描述电路。选下端节点为参考节点，另两个独立节点记为节点 1 和节点 2，相应节点电压为 V_1 和 V_2，如图 9.35 所示。



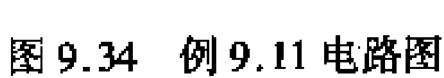


图 9.34 例 9.11 电路图

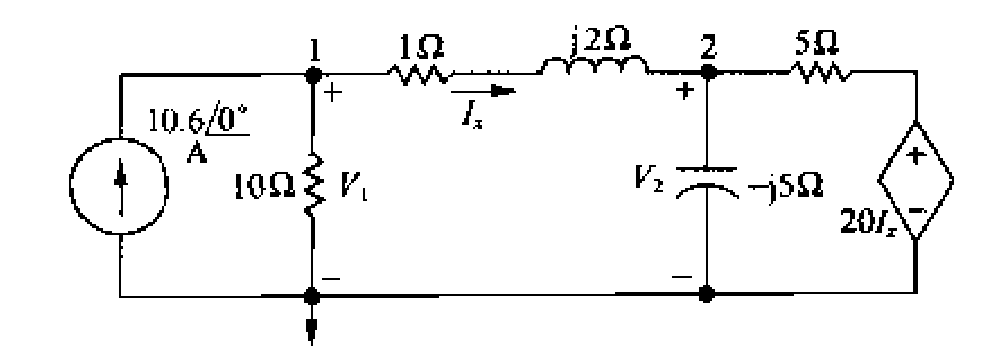


图 9.35 定义了节点电压的图 9.34 的电路

流出节点 1 的电流方程为：

$$-10.6 + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - V_2}{1 + j2} = 0$$

乘以 1 + j2，并且整理得：

$$V_1(1.1 + j0.2) - V_2 = 10.6 + j21.2$$

流出节点 2 的电流方程为：

$$\frac{V_2 - V_1}{1 + j2} + \frac{V_2}{-j5} + \frac{V_2 - 20I_x}{5} = 0$$

控制电流 I_x 为：

$$I_x=\frac{V_1-V_2}{1+j2}$$

将 I_x 代入到节点 2 方程中，方程两边乘以 1 + j2，并且整理得：

$$-5V_1+(4.8+j0.6)V_2=0$$

V_1 和 V_2 的解为：

$$V_1=68.40-j16.80\ \text{V}$$
$$V_2=68-j26\ \text{V}$$

则支路电流为：

$$I_a=\frac{V_1}{10}=6.84-j1.68\ \text{A}$$
$$I_x=\frac{V_1-V_2}{1+j2}=3.76+j1.68\ \text{A}$$
$$I_b=\frac{V_2-20I_x}{5}=-1.44-j11.92\ \text{A}$$
$$I_c=\frac{V_2}{-j5}=5.2+j13.6\ \text{A}$$

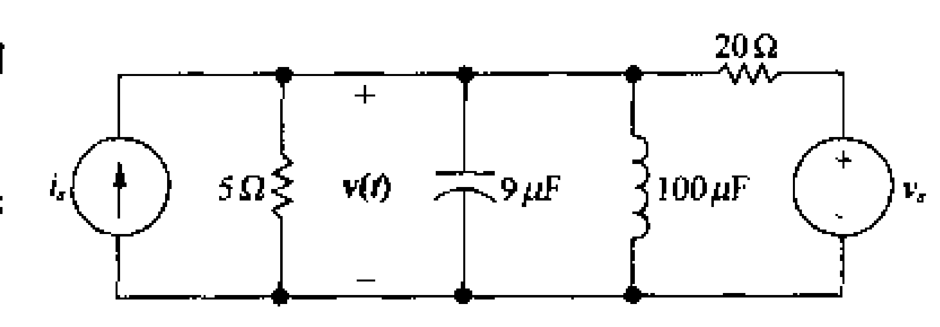
检验结果的正确性：

$$\begin{aligned}I_a+I_x&=6.84-j1.68+3.76+j1.68\\&=10.6\ \text{A}\\I_x&=I_b+I_c=-1.44-j11.92+5.2+j13.6\\&=3.76+j1.68\ \text{A}\end{aligned}$$

练习题

9.17 用节点电压法求图示电路 $v(t)$ 的表达式。正弦电源分别为 $i_s=10\cos\omega t$ A，$v_s=100\sin\omega t$ V，其中 $\omega=50$ krad/s。

答：$v(t)=31.62\cos(50000t-71.57°)$ V。



9.9 网孔电流法

可以用网孔电流法来分析频域下的电路，分析过程同电阻电路的分析完全一样。在 4.5 至 4.7 节中，已经介绍了网孔电流法的基本技巧，下面通过例 9.12 说明这种方法在频域电路分析中的运用。

例 9.12 用网孔分析法求图 9.36 所示电路的电压 V_1，V_2 和 V_3。

解：

由于电路有两个网孔和一个受控电压源，所以，需要列出两个网孔方程和一个约束方程。设网孔电流 I_1 和 I_2 的方向为顺时针方向，如图 9.37 所示。一旦有了 I_1 和 I_2，就可以方

便地求出未知电压。网孔 1 的电压方程为:

$$150=(1+j2)I_1+(12-j16)(I_1-I_2)$$

或者:

$$150=(13-j14)I_1-(12-j16)I_2$$

网孔 2 的电压方程为:

$$0=(12-j16)(I_2-I_1)+(1+j3)I_2+39I_x$$

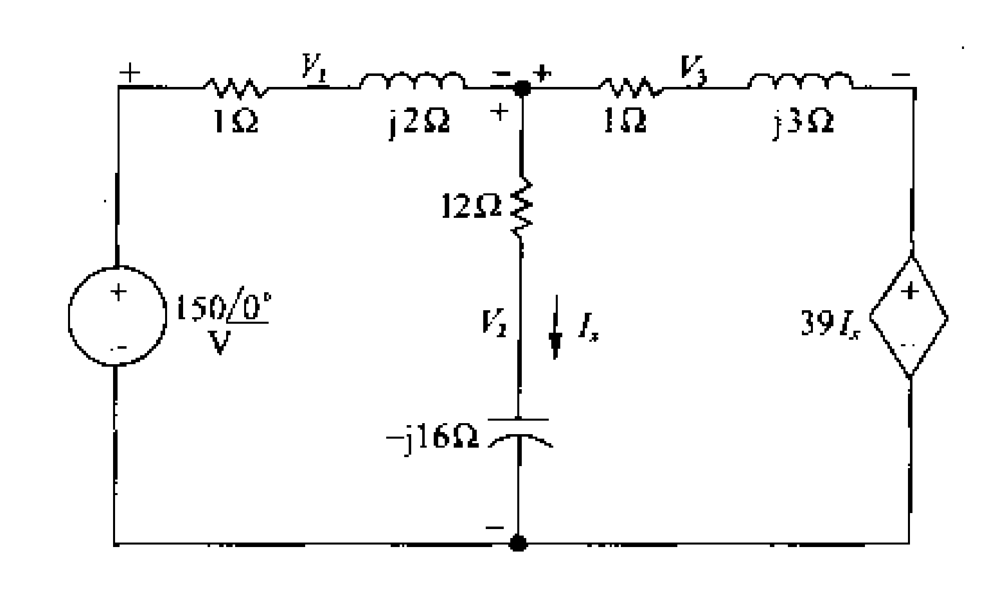


图 9.36 例 9.12 电路图

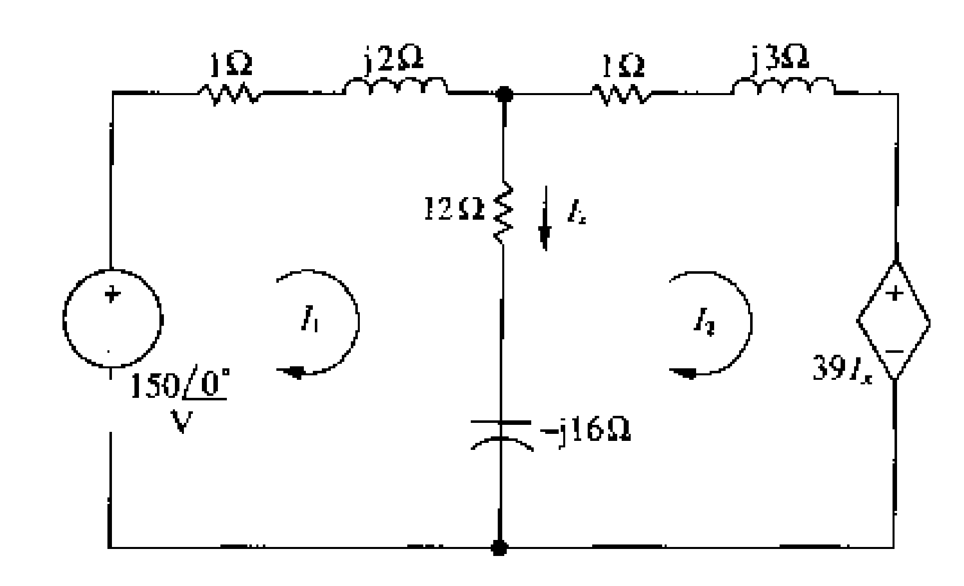


图 9.37 图 9.36 电路的网孔电流

由图 9.37 可以看出控制电流 I_x 为 I_1 和 I_2 的差,因此,控制方程为:

$$I_x=I_1-I_2$$

将控制方程代入到网孔 2 方程中,并且整理得:

$$0=(27+j16)I_1-(26+j13)I_2$$

解 I_1 和 I_2 得:

$$I_1=-26-j52\ \text{A}$$

$$I_2=-24-j58\ \text{A}$$

$$I_x=-2+j6\ \text{A}$$

三个电压分别为:

$$V_1=(1+j2)I_1=78-j104\ \text{V}$$

$$V_2=(12-j16)I_x=72+j104\ \text{V}$$

$$V_3=(1+j3)I_2=150-j130\ \text{V}$$

$$39I_x=-78+j234\ \text{V}$$

求闭合回路电压的代数和,验证结果的正确性:

$$-150+V_1+V_2=-150+78-j104+72+j104=0$$

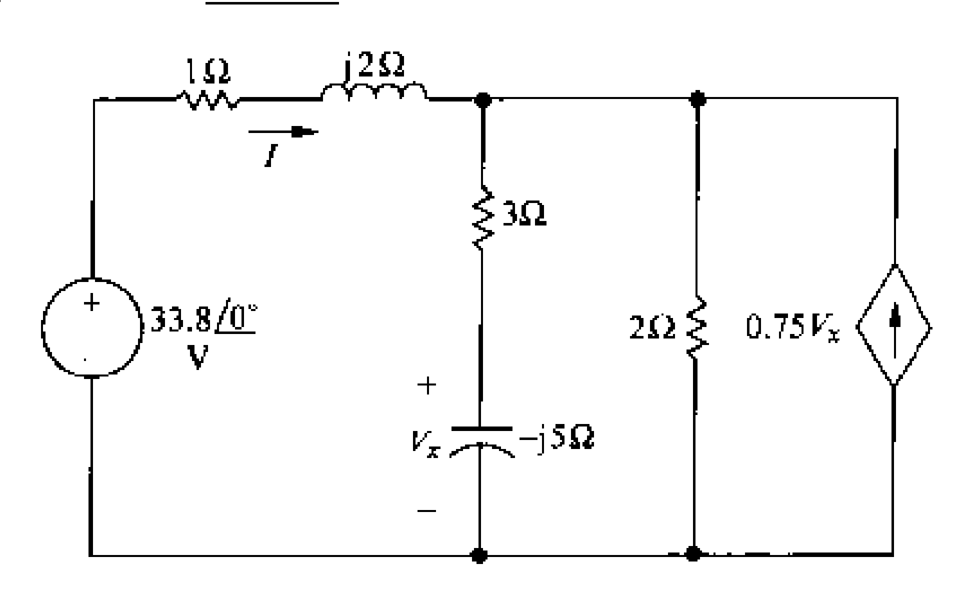
$$-V_2+V_3+39I_x=-72-j104+150-j130-78+j234=0$$

$$-150+V_1+V_3+39I_x=-150+78-j104+150-j130-78+j234=0$$

练习题

9.18 用网孔电流法求图示电路的参考电流 I。

答： $I = 29 + \mathrm{j}2 = 29.07\angle 3.95^\circ$ A。



9.10 变压器

变压器是一个基于磁耦合的电路，主要应用于通信和电源电路中。在通信电路中，变压器用来进行阻抗匹配以及隔离系统中的直流信号；在电源系统中，变压器用来确定交流电压以利于电信号的传输、分配以及使用。对通信系统和电源系统的分析都需要了解变压器的正弦稳态行为特性。在这一节，将讨论线性变压器的正弦稳态行为特性，线性变压器主要用于通信电路。在 9.11 节，将研究理想变压器的特性，理想变压器常用来模拟电源系统中的铁磁变压器。

在分析之前，先进行一个有用的观察。如果所分析的电路中含有互感线圈，则应该采用网孔法或回路电流法列写电路方程，若采用节点电压法则会显得有些复杂，这是因为在不同线圈上的电流不能写成节电电压的函数。

9.10.1 线性变压器电路分析

在磁芯上绕两个线圈，确保磁耦合，即可构成一个简单的变压器。图 9.38 为一系统的频域电路模型，这个系统通过变压器将负载连到电源上。将与电源相连的线圈称为初级线圈，与负载相连的线圈称为次级线圈，基于这个称呼，变压器的参数为：

R_1 = 初级线圈的电阻

R_2 = 次级线圈的电阻

L_1 = 初级线圈上的自感

L_2 = 次级线圈上的自感

M = 互感

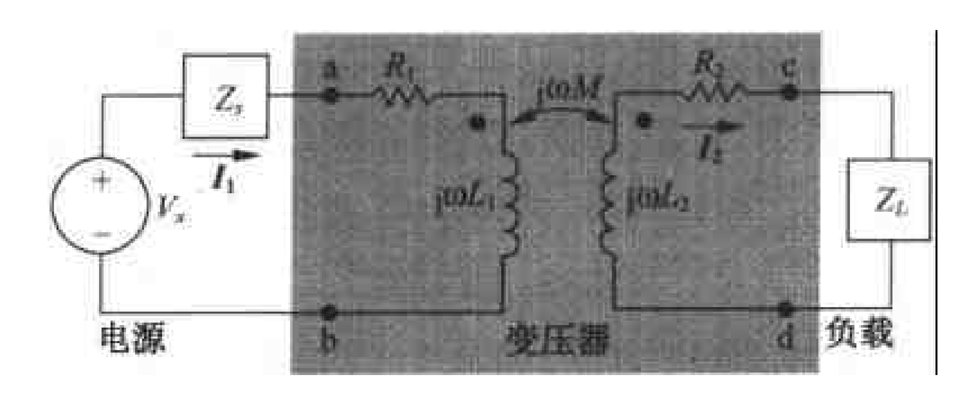


图 9.38 连接电源与负载的变压器频域电路模型

正弦电压源的内部电压为 V_s,内部电阻为 Z_s,与次级线圈相连的负载阻抗为 Z_L,变压器初级线圈和次级线圈的电流相量分别为 I_1 和 I_2。

对图 9.38 电路进行分析,包括求取 I_1,I_2 在电路参数 V_s,Z_s,R_1,L_1,L_2,R_2,M,Z_L 和 ω 下的表达式,以及从 a,b 两端点看进去的变压器的阻抗。为了求得 I_1,I_2,先写出电路的网孔方程:

$$V_s = (Z_s + R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_2 \tag{9.57}$$

$$0 = -j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)I_2 \tag{9.58}$$

为了便于式(9.57)和(9.58)的代数运算,令:

$$Z_{11} = Z_s + R_1 + j\omega L_1 \tag{9.59}$$

$$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L \tag{9.60}$$

其中 Z_{11} 为变压器初级线圈电路的自阻抗,Z_{22} 是变压器次级线圈电路的自阻抗。将式(9.59),(9.60)代入到式(9.57)和(9.58)中,得 I_1 和 I_2 的解为:

$$I_1 = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} + \omega^2 M^2} V_s \tag{9.61}$$

$$I_2 = \frac{j\omega M}{Z_{11}Z_{22} + \omega^2 M^2} V_s = \frac{j\omega M}{Z_{22}} I_1 \tag{9.62}$$

电源内部电压为 V_s,电路阻抗则为 V_s/I_1,即:

$$\frac{V_s}{I_1} = Z_{\text{int}} = \frac{Z_{11}Z_{22} + \omega^2 M^2}{Z_{22}} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \tag{9.63}$$

电源两端的阻抗则为 $Z_{\text{int}} - Z_s$,即:

$$Z_{ab} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} - Z_s$$

$$= R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + j\omega L_2 + Z_L)} \tag{9.64}$$

由于式(9.64)中互感是以平方量的形式出现,所以,阻抗 Z_{ab} 与变压器的磁极性无关。之所以关心这个阻抗,是为了说明从电源两端看进去,变压器是如何影响负载阻抗的。没有变压器,负载直接加到电源上,对电源来说,负载阻抗为 Z_L,加上变压器,对电源而言,负载阻抗将变为式(9.64)所示的结果。

9.10.2 反映阻抗

式(9.64)的第三部分称为反映阻抗(Z_r),因为它是次级线圈和负载阻抗传递或者说是反映到变压器初级电路上的等效阻抗。注意:只有互感存在时,才有反映阻抗;也就是说,如果两个线圈间没有耦合,$M = 0$,Z_r 将为 0,Z_{ab} 即为初级线圈的自阻抗。

为了更详细地研究反映阻抗,用矩阵形式表示负载阻抗:

$$Z_L = R_L + jX_L \tag{9.65}$$

其中负载电抗有自己的代数符号,换句话说,如果负载是感性的,则 X_L 是正数;如果负载是容性的,则 X_L 是负数。利用式(9.65)将反映阻抗表示成矩阵形式:

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L)}$$

$$= \frac{\omega^2 M^2[(R_2 + R_L) - \mathrm{j}(\omega L_2 + X_L)]}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 + X_L)^2}$$

$$= \frac{\omega^2 M^2}{|Z_{22}|^2}[(R_2 + R_L) - \mathrm{j}(\omega L_2 + X_L)] \tag{9.66}$$

如果将 Z_L 表示成矩阵形式,则包含有次级线圈网孔的自阻抗为:

$$Z_{22} = R_2 + R_L + \mathrm{j}(\omega L_2 + X_L) \tag{9.67}$$

式(9.66)就是在它的基础上推导出来的。

观察式(9.66),可以看出次级线圈电路的自阻抗以水平因子$(\omega M/|Z_{22}|)^2$映射到初级线圈电路上,并且电抗分量$(\omega L_2 + X_L)$的符号取反。因此,线性变压器可以将次级电路的自阻抗的共轭复数(Z_{22}^*)以一定的倍数关系映射到初级电路上。例 9.13 给出一个含有线性变压器电路的网孔电流分析法。

例 9.13　某一线性变压器的参数如下:$R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $L_1 = 9\ \mathrm{H}$, $L_2 = 4\ \mathrm{H}$, $k = 0.5$,变压器将 400 Ω 的电阻和 1 μF 的电容以串联的形式耦合到正弦电压源上。电压源的方均根为 300 V,内部阻抗为 500 + j100 Ω,频率为 400 rad/s。

(a) 求系统的频域等效电路。

(b) 求初级电路的自阻抗。

(c) 求次级电路的自阻抗。

(d) 求映射到初级电路的反映阻抗。

(e) 求反映阻抗的水平因子。

(f) 求从变压器初级线圈看过去的等效阻抗。

(g) 求 c,d 两端的戴维南等效电路。

解:

(a) 图 9.39 为频域等效电路,其中以电源的内部电压作为参考电压,V_1 和 V_2 表示变压器的端电压。

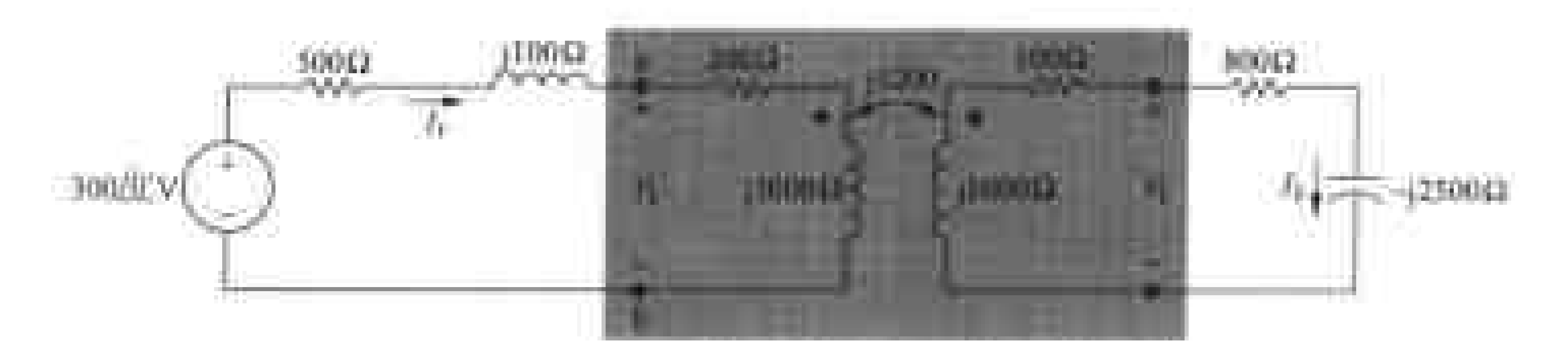


图 9.39　例 9.13 的频域等效电路

在建立图 9.39 所示电路时,进行如下计算:

$$\mathrm{j}\omega L_1 = \mathrm{j}(400)(9) = \mathrm{j}3600\ \Omega$$

$$\mathrm{j}\omega L_2 = \mathrm{j}(400)(4) = \mathrm{j}1600\ \Omega$$

$$M = 0.5\sqrt{(9)(4)} = 3\ \mathrm{H}$$

$$\mathrm{j}\omega M = \mathrm{j}(400)(3) = \mathrm{j}1200\ \Omega$$

$$\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{10^6}{\mathrm{j}400} = -\mathrm{j}2500\ \Omega$$

(b) 主电路的自阻抗为：

$$Z_{11} = 500 + j100 + 200 + j3600 = 700 + j3700\ \Omega$$

(c) 次级电路的自阻抗为：

$$Z_{22} = 100 + j1600 + 800 - j2500 = 900 - j900\ \Omega$$

(d) 映射到初级线圈的阻抗为：

$$Z_r = \left(\frac{1200}{|900 - j900|}\right)^2(900 + j900)$$

$$= \frac{8}{9}(900 + j900) = 800 + j800\ \Omega$$

(e) Z_{22}^* 以水平因子 8/9 映射。

(f) 从变压器初级线圈的两端看进去的等效阻抗为初级线圈的阻抗加上反映阻抗，即：

$$Z_{ab} = 200 + j3600 + 800 + j800 = 1000 + j4400\ \Omega$$

(g) 戴维南等效电压应等于开路电压 V_{cd}。而开路电压 V_{cd} 等于 j1200 乘以开路时的电流 I_1，I_1 为：

$$I_1 = \frac{300\,\underline{/0^\circ}}{700 + j3700}$$

$$= 76.67\,\underline{/-79.29^\circ}\ \text{mA}$$

因此：

$$V_{Th} = j1200(79.67\,\underline{/-79.29^\circ}) \times 10^{-3}$$

$$= 95.60\,\underline{/10.71^\circ}\ \text{V}$$

戴维南阻抗等于次级线圈的阻抗加上当电压源短路时由初级线圈反映过来的阻抗，即：

$$Z_{Th} = 100 + j1600 + \left(\frac{1200}{|700 + j3700|}\right)^2(700 - j3700)$$

$$= 171.09 + j1224.26\ \Omega$$

戴维南等效电路如图 9.40 所示。

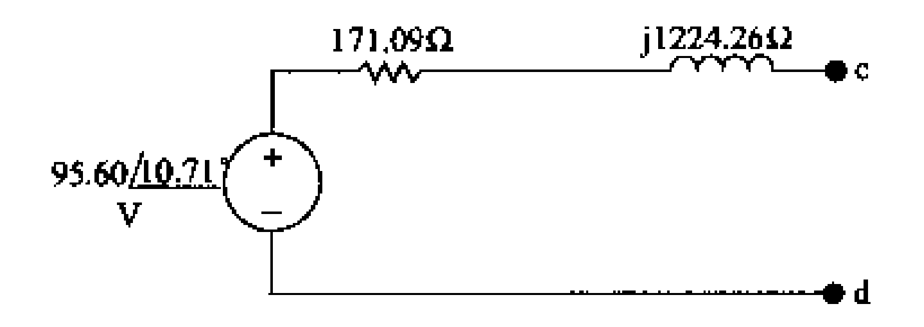
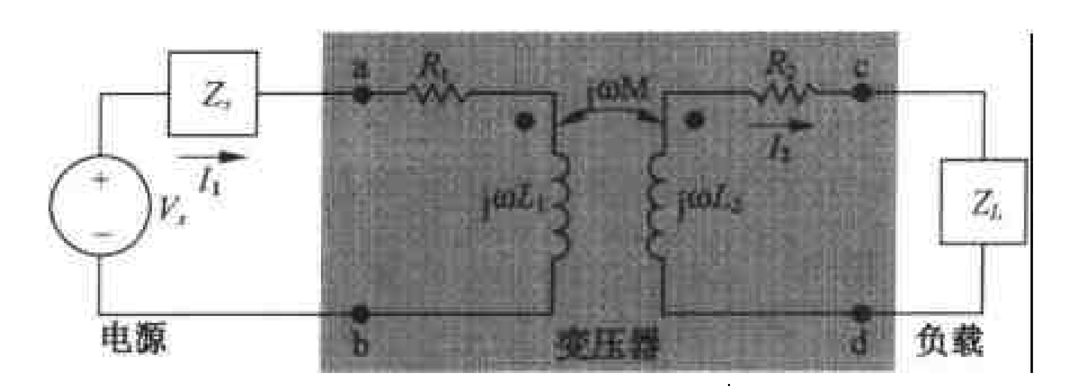


图 9.40 例 9.13 的戴维南等效电路

练习题

9.19 线性变压器将 360 Ω 电阻和 0.25 H 电感串联的负载耦合到电压源上，如图所示。电压源的内部阻抗为 184 + j0 Ω，最大电压为 245.20 V，工作频率为 800 rad/s。变压器的参数为：$R_1 = 100\ \Omega$，$L_1 = 0.5$ H，$R_2 = 40\ \Omega$，$L_2 = 0.125$ H，$k = 0.4$。求(a)反映阻抗，(b)初级线圈电流，(c)次级线圈电流。

答:(a) 10.24 - j7.68 Ω,(b) 0.5 cos (800t - 53.13°) A,(c) 0.08 cos 800t A。



9.11 理想变压器

理想变压器由两个匝数分别为 N_1 和 N_2 的磁耦合线圈构成,具有以下性质:

1.耦合系数为 1($k = 1$)。
2.每个线圈的自感都是无穷大($L_1 = L_2 = \infty$)。
3.由寄生电阻造成的线圈损失,可以忽略不计。

式 (9.64) 描述了与线性变压器相连的电源两端的阻抗,我们根据这个等式来理解理想变压器的特性。将公式重新叙述如下,并做进一步的研究。

9.11.1 探索极限值

当 L_1 和 L_2 无限大,同时耦合系数为 1 时,式 (9.68) 关于 Z_{ab}的表达式将给出输入阻抗与负载阻抗间的一个非常有用的关系式:

$$Z_{ab} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} - Z_s$$

$$= R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + j\omega L_2 + Z_L)} \tag{9.68}$$

铁芯变压器可以满足上述条件。虽然此时的变压器是非线性的,仍然可以通过忽略非线性,建立一个理想变压器得到一些有用信息。

为了说明当 $k = 1$, L_1 和 L_2 趋于无穷大时,Z_{ab}如何变化,先介绍:

$$Z_{22} = R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L) = R_{22} + jX_{22}$$

整理式 (9.68):

$$Z_{ab} = R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + j\left(\omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}\right)$$

$$= R_{ab} + jX_{ab} \tag{9.69}$$

此时,应注意式 (9.69) 中 j 的系数,因为当 L_1 和 L_2 趋于无穷大时,该系数将为两个无限大量的差。因此,在 L_1 和 L_2 增大之前,应将系数改写为:

$$X_{ab} = \omega L_1 - \frac{(\omega L_1)(\omega L_2)X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = \omega L_1\left(1 - \frac{\omega L_2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}\right) \tag{9.70}$$

当 $k = 1$ 时,$M^2 = L_1 L_2$。分母有理化得:

$$X_{ab} = \omega L_1\left(\frac{R_{22}^2 + \omega L_2 X_L + X_L^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2}\right) \tag{9.71}$$

分子分母同除以 ωL_2 得：

$$X_{ab}=\frac{L_1}{L_2}\frac{X_L+(R_{22}^2+X_L^2)/\omega L_2}{(R_{22}/\omega L_2)^2+[1+(X_L/\omega L_2)]^2} \tag{9.72}$$

由式(6.54)和(6.55)可知，当 k 近似为 1.0 时，比值 L_1/L_2 近似常数$(N_1/N_2)^2$。原因是当耦合为紧耦合时，两磁通 P_1 和 P_2 相等。当 $L_1\to\infty$，$L_2\to\infty$，$k\to1.0$ 时，式 (9.72) 简化为：

$$X_{ab}=\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2X_L \tag{9.73}$$

同样的原因，也可以简化式 (9.69) 的反映阻抗：

$$\frac{\omega^2M^2R_{22}}{R_{22}^2+X_{22}^2}=\frac{L_1}{L_2}R_{22}=\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2R_{22} \tag{9.74}$$

将式 (9.73) 和式 (9.74) 应用于式 (9.69) 得：

$$Z_{ab}=R_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2R_2+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2(R_L+\mathrm{j}X_L) \tag{9.75}$$

将结果与式 (9.68) 比较，可以看出，当耦合系数近似于 1，耦合线圈的自感趋于无穷大时，变压器将次级线圈阻抗和负载阻抗反映到初级，其比例系数等于线圈匝数比(N_1/N_2)的平方。可以用两个特性来描述理想变压器特性。首先，两线圈每匝电压的绝对值相等，即：

$$\left|\frac{v_1}{N_1}\right|=\left|\frac{v_2}{N_2}\right| \tag{9.76}$$

其次，每个线圈上安培匝数积的绝对值相等，即：

$$|i_1N_1|=|i_2N_2| \tag{9.77}$$

式 (9.76) 和式 (9.77) 中使用了绝对值符号，因为电压和电流都没有考虑参考方向。下面讨论如何去掉绝对值。

图 9.41 所示为两个无损耗($R_1=R_2=0$)的磁耦合线圈，图 9.41 说明式 (9.76) 和式 (9.77) 的正确性。在图 9.41(a)中，线圈 2 开路；在图 9.41(b)中，线圈 2 短路。虽然下面所做的分析基于正弦稳态的操作，但所得结果对瞬态电压 v 和电流 I 同样适用。

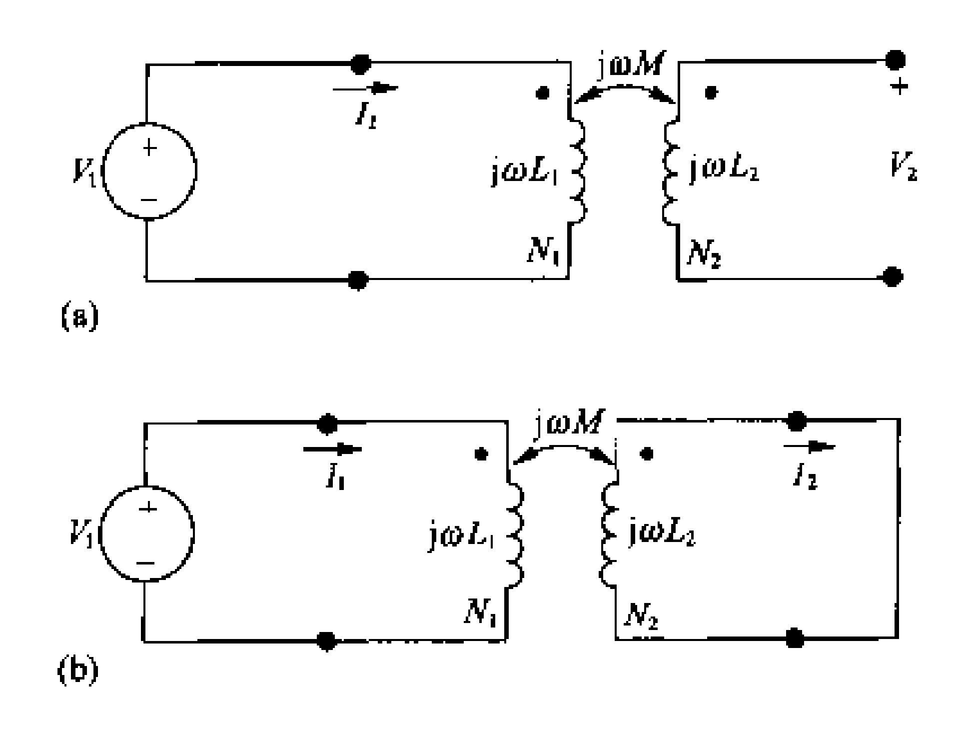


图 9.41 验证理想变压器伏特-匝数和安培-匝数关系的电路

9.11.2 确定电压和电流比

注意：图 9.41(a)中开路线圈的端电压完全是由线圈 1 的电流引起，因此有：

$$V_2 = \mathrm{j}\omega M I_1 \tag{9.78}$$

线圈 1 中的电流为：

$$I_1 = \frac{V_1}{\mathrm{j}\omega L_1} \tag{9.79}$$

由式 (9.78) 和式 (9.79) 得：

$$V_2 = \frac{M}{L_1} V_1 \tag{9.80}$$

对全耦合来说，互感等于$\sqrt{L_1 L_2}$，因此，式 (9.80) 变为：

$$V_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} V_1 \tag{9.81}$$

全耦合时，线圈 1 与线圈 2 的磁通相同。因此，只需要一个磁通描述每个线圈的自感。由此，式 (9.81) 变为：

$$V_2 = \sqrt{\frac{N_2^2 p}{N_1^2 p}} V_1 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \tag{9.82}$$

或者：

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} \tag{9.83}$$

由图 9.41(b)闭合线圈电压代数和，得：

$$0 = -\mathrm{j}\omega M I_1 + \mathrm{j}\omega L_2 I_2 \tag{9.84}$$

因为 $k = 1$，则有：

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2}{M} = \frac{L_2}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1} \tag{9.85}$$

式 (9.85) 与下面的公式等效：

$$I_1 N_1 = I_2 N_2 \tag{9.86}$$

图 9.42 为理想变压器的图形符号，符号中的竖线表示磁性物质的层，铁芯通常在这里。这个表示符号提醒读者，铁芯线圈近似于理想变压器。

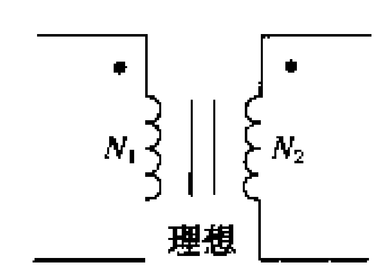


图 9.42　理想变压器的图形符号

铁芯线圈近似于理想变压器，有几方面的原因。铁磁材料能够产生一个高磁通的空间，因此，大部分的磁通量被吸引到了铁芯材料的内部，在共享同一个铁芯的线圈之间建立起紧耦合。高磁通同时意味着高自感，因为 $L = N^2 P$。铁芯耦合线圈能够有效地将电压从一个线圈传递到另一个线圈，有效率通常可以达到 95%，因此，大多数情况下忽略损耗是没有影响的。

9.11.3　确定电压和电流比的极性

再回到式 (9.67) 和式 (9.77) 的绝对值符号消除的问题上。读者已经注意到，在式

(9.83) 和式 (9.86) 的推导中没有用绝对值符号,这是因为已经设定了电压和电流的参考方向,所以,不需要绝对值符号。另外,也知道了两线圈的耦合极性。

在式 (9.76) 和式 (9.77) 中设置合理的代数符号的规则如下:

1. 在黑点标记的那一端上,如果线圈电压 v_1 和 v_2 均为正或者均为负,那么式 (9.76) 中使用正号,否则用负号。
2. 如果线圈电流均流向或者流出黑点标记的端子,那么公式 (9.77) 中使用负号,否则用正号。

图 9.43 所示的四个电路说明了以上这些规则。

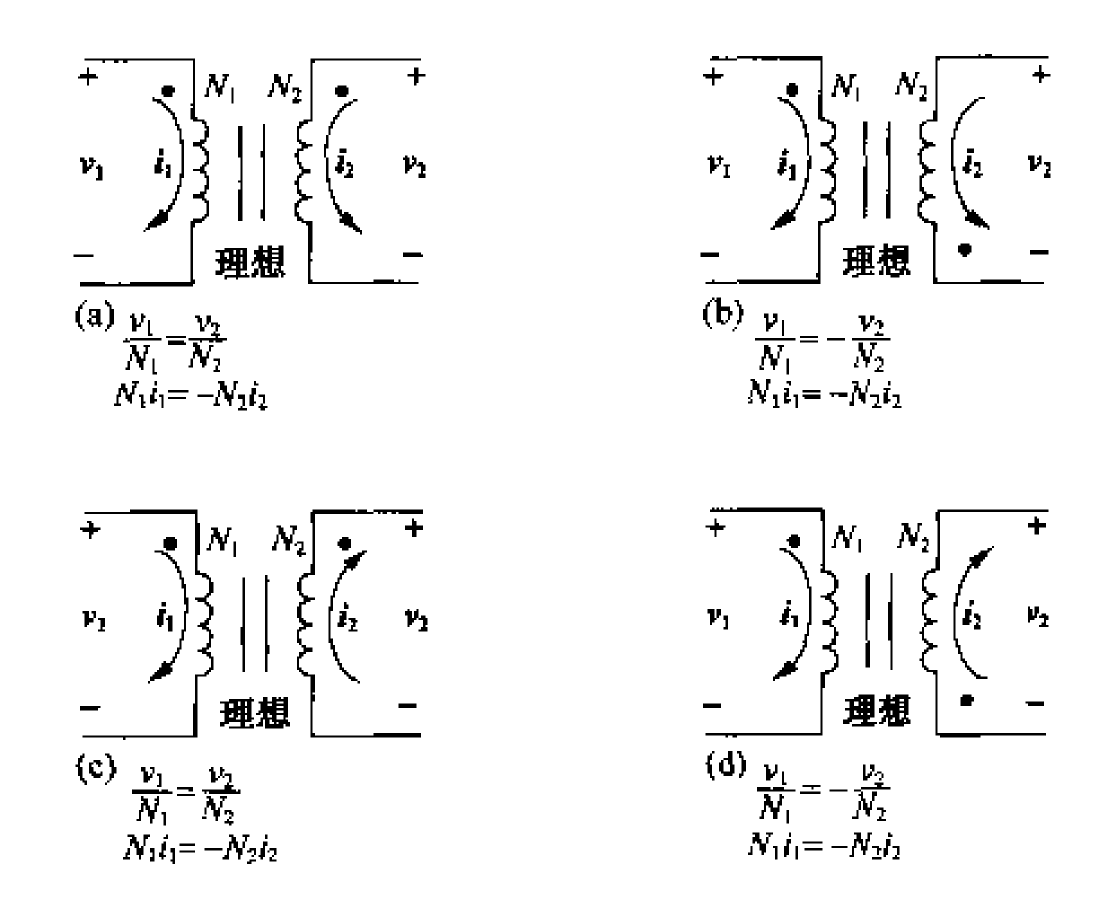


图 9.43 理想变压器端电压和电流的正确的代数符号表示

两线圈的匝数比是理想变压器的重要参数。匝数比定义为 N_1/N_2 或者是 N_2/N_1,这两个比值在不同的文献中都出现过,在这本书中,采用 a 来表示 N_2/N_1,即:

$$a=\frac{N_2}{N_1} \tag{9.87}$$

图 9.44 给出三种表示变压器匝数比的方法。图 9.44(a)指出了每个线圈的匝数,图 9.44(b)指出匝数比 N_2/N_1 为 5 比 1,图 9.44(c)指出匝数比 N_2/N_1 为 1 比$\frac{1}{5}$。

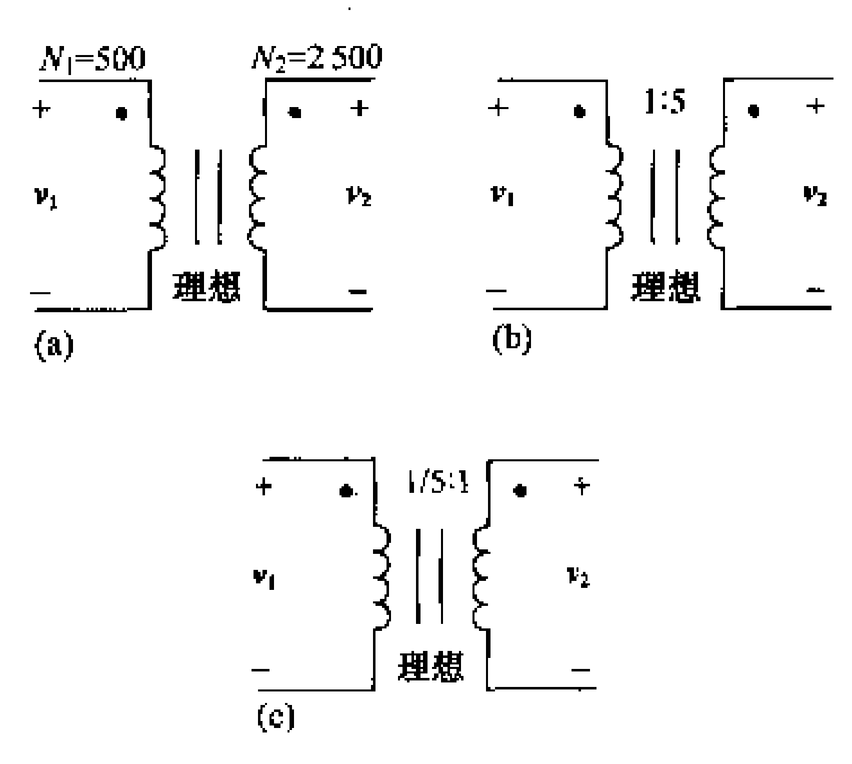


图 9.44 三种表示变压器匝数比的方法

例 9.14 给出了含有理想变压器电路的分析方法。

例 9.14　理想变压器次级线圈上的阻抗如图 9.45 所示，为 237.5 mΩ 的电阻和 125 μH 电感串联电路。若正弦电压源(v_g)为 2500 cos 400t V，求各稳定表达式：(a) i_1，(b) v_1，(c) i_2，(d) v_2。

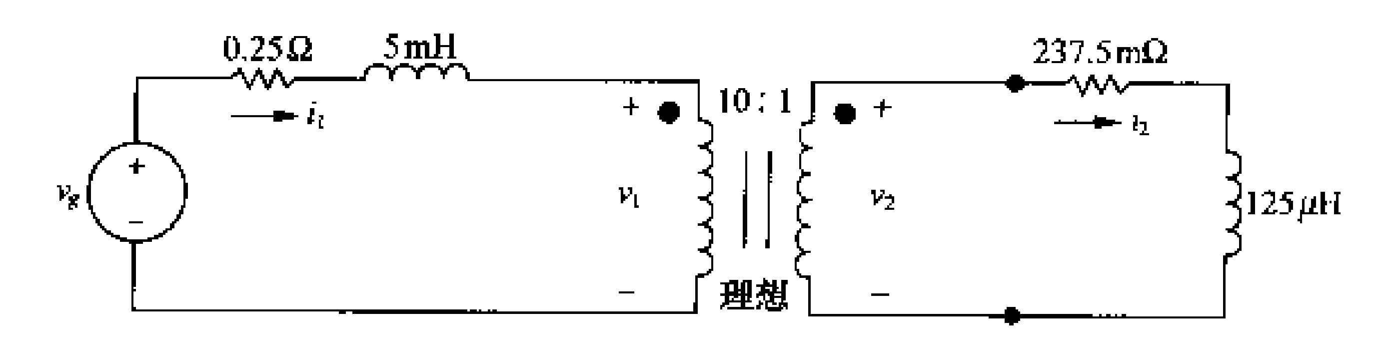


图 9.45　例 9.14 电路图

解：

(a) 建立电路的等效相量电路。电压源为 $2500\underline{/0^\circ}$ V，5 mH 电感的阻抗为 j2 Ω，125 μF 电感的阻抗为 j0.05 Ω。等效相量电路如图 9.46 所示。

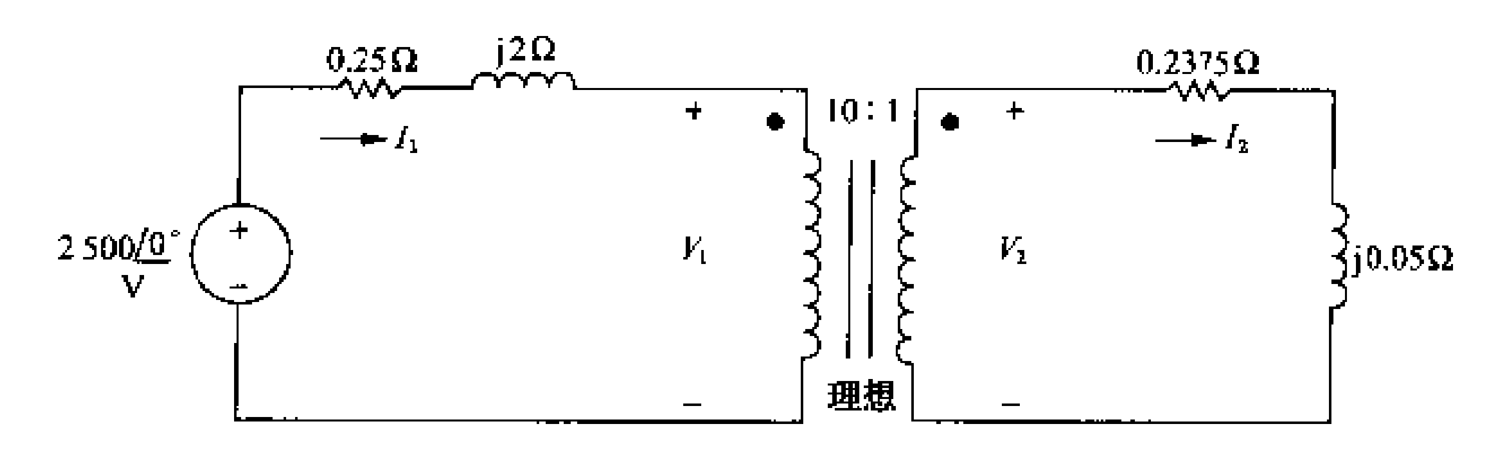


图 9.46　例 9.14 的相频电路

由图 9.46 可得：

$$2500\underline{/0^\circ} = (0.25 + j2)I_1 + V_1$$

和

$$V_1 = 10V_2 = 10[(0.2375 + j0.05)I_2]$$

因为：

$$I_2 = 10I_1$$

则有：

$$V_1 = 10(0.2375 + j0.05)10I_1$$
$$= (23.75 + j5)I_1$$

因此：

$$2\,500\underline{/0^\circ} = (24 + j7)I_1$$

即：

$$I_1 = 100\underline{/-16.26^\circ}\ \text{A}$$

则 i_1 的稳态表达式为：

$$i_1 = 100\cos(400t - 16.26^\circ)\ \text{A}$$

(b) 因为：

$$V_1 = 2\,500\underline{/0^\circ} - (100\underline{/-16.26^\circ})(0.25 + j2)$$

$$= 2500 - 80 - j185$$
$$= 2420 - j185 = 2427.06\,\underline{/-4.37^\circ}\ \text{V}$$

因此:

$$v_1 = 2427.06\cos(400t - 4.37^\circ)\ \text{V}$$

(c) 因为:

$$I_2 = 10I_1 = 1000\,\underline{/-16.26^\circ}\ \text{A}$$

因此:

$$i_2 = 1000\cos(400t - 16.26^\circ)\ \text{A}$$

(d) 因为:

$$V_2 = 0.1V_1 = 242.71\,\underline{/-4.37^\circ}\ \text{V}$$

因此:

$$v_2 = 242.71\cos(400t - 4.37^\circ)\ \text{V}$$

9.11.4 理想变压器的阻抗匹配

理想变压器可以用来增加或者降低负载阻抗。图 9.47 所示的电路可以说明这一点。由实际电压源(V_s 与 Z_s 串联)看过去的阻抗为 V_1/I_1。负载阻抗两端的电压和电流(V_2 和 I_2)与 V_1 和 I_1 之间具有如下关系:

$$V_1 = \frac{V_2}{a} \tag{9.88}$$

和

$$I_1 = aI_2 \tag{9.89}$$

因此,从实际电源端看过去的阻抗为:

$$Z_{IN} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{a^2}\frac{V_2}{I_2} \tag{9.90}$$

由于比值 V_2/I_2 为负载阻抗,所以,式(9.90)变为:

$$Z_{IN} = \frac{1}{a^2}Z_L \tag{9.91}$$

因此,理想变压器的次级线圈将负载阻抗以反射系数 $1/a^2$ 倍反映到初级线圈上。

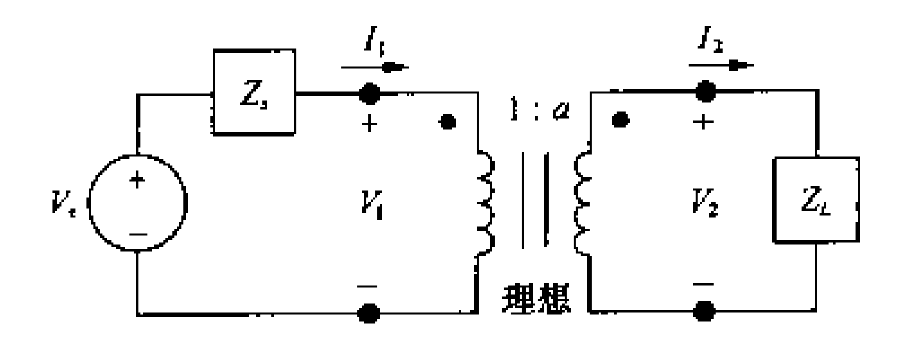


图 9.47 连接电源与负载的理想变压器

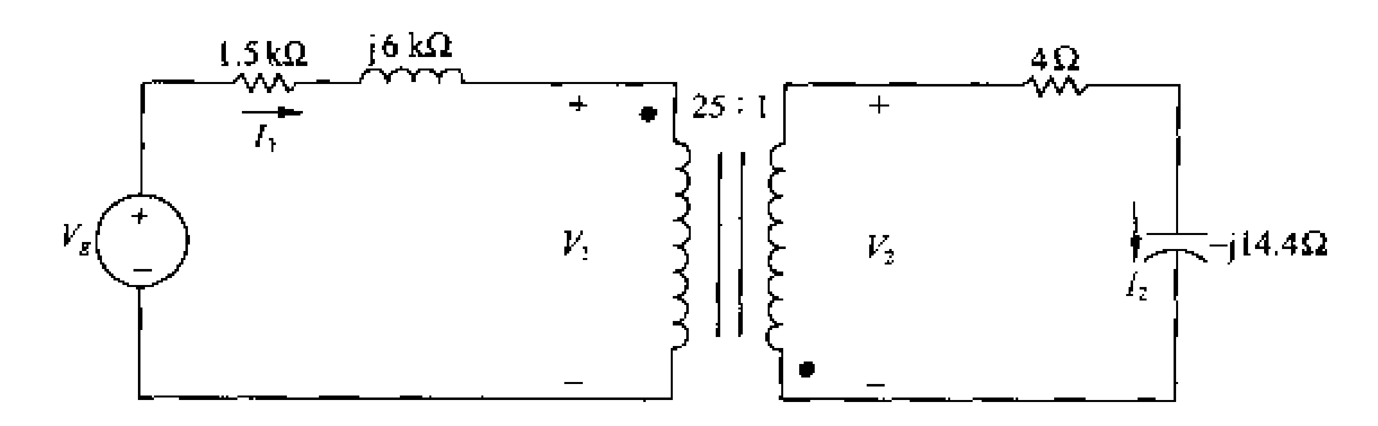
理想变压器虽然改变了 Z_L 的大小,但是没有改变它的相位角。Z_{IN} 比 Z_L 大还是小取决于匝数比 a。

通过理想变压器,或者它的实际对应物,铁芯变压器可以将阻抗 Z_L 匹配为 Z_s 的大小。在第 10 章将介绍为什么希望这样做。

练习题

9.20　下图所示频域下电路的电源电压为 $25\angle 0°$ kV。求 V_2 和 I_2 的幅值以及相位角。

答： $V_2 = 1868.15\angle 142.39°$ V，$I_2 = 125\angle 216.87°$ A。



理想变压器可以增大或者减小给负载供电的电源电压。因此，理想变压器被广泛应用于供电系统中，将电源线上的电压降至安全的居民用电水平上。

9.12　相量图

用相量法分析电路的正弦稳态响应时，电流相量和电压相量图将会提供更多电路特性的信息。相量图在复平面上给出了相量的幅值以及相位角信息。相位角从正实轴的方向顺时针测量，幅值从坐标轴的原点处测量。例如，图9.48所示相量分别为 $10\angle 30°$，$12\angle 150°$，$5\angle -45°$和 $8\angle -170°$。

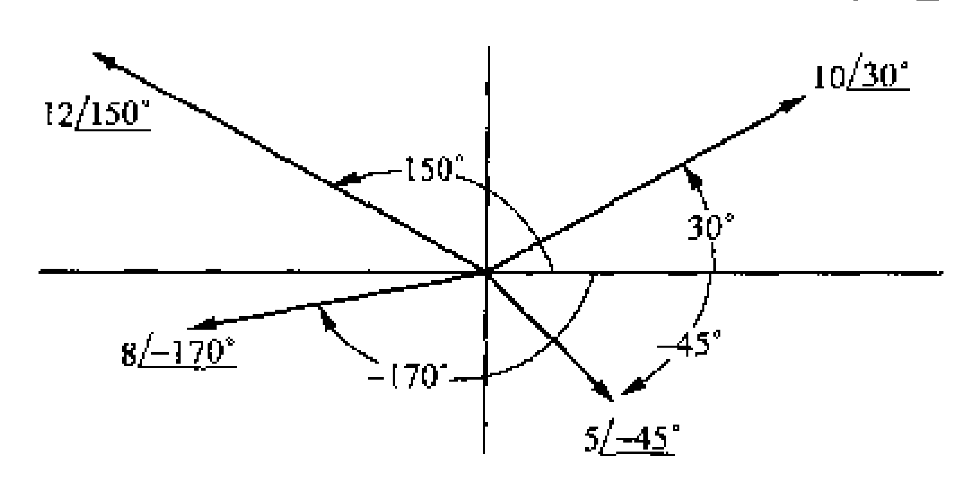


图9.48　相量的图形表示

电路参数的相量图的建立通常包括电流和电压。因此，提供两套不同的衡量标准是必要的，一个用于电流，一个用于电压。在复平面上将相量画出来有利于检查便携机的计算结果。输入数据时，标准的便携机不能提供打印资料。但是当计算的角度显示出来，可以将计算结果与想像的结果比较以确定相量值是否正确。例如，假设要计算 $-7-j3$ 的极坐标形式，不需要通过任何计算，就可以预想出一个幅值大于7，相位角在第三平面，介于 $-135°$和 $+225°$之间的相量，如图9.49所示。

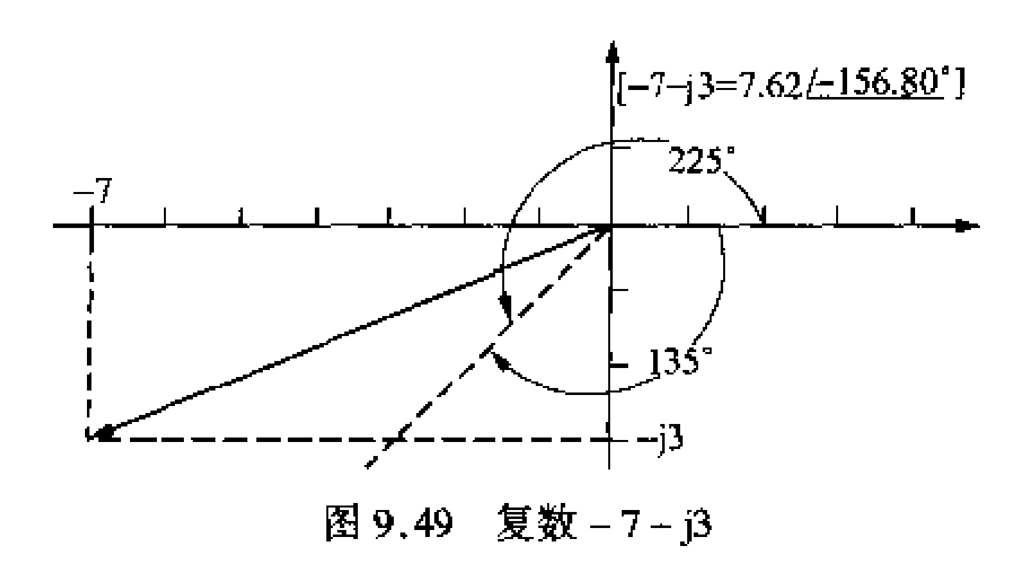


图9.49　复数 $-7-j3$

例 9.15 和 9.16 展示了相量图的建立及使用。在后面的章节中,将采用相量图对电路的正弦稳态响应做进一步的研究。习题 9.69 给出了如何使用相量法说明电路的相移问题。

例 9.15 图 9.50 所示电路,用相量图求:使电阻电流 I_R 滞后于电源电流 I_s 45°的电阻值 R,其中 $\omega = 5$ krad/s。

解:

由基尔霍夫电流定律知,电流 I_R,I_L 和 I_C 之和等于电源电流 I_s。假设电压 V_m 的相位角为零,可以画出每一个元件的电流相量。电感的电流相量为:

$$I_L = \frac{V_m \angle 0^\circ}{j(5\,000)(0.2 \times 10^{-3})} = V_m \angle -90^\circ$$

电容的电流相量为:

$$I_C = \frac{V_m \angle 0^\circ}{-j/(5\,000)(800 \times 10^{-6})} = 4V_m \angle 90^\circ$$

电阻的电流相量为:

$$I_R = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R} = \frac{V_m}{R} \angle 0^\circ$$

这些相量如图 9.51 所示。相量图中也画出了电源的电流相量,如图中虚线所示,一定是三个电路元件的电流相量之和,并且相位角比电阻的电流相量的相位角多 45°。可以看出,相量和为等边三角形。因此,电阻的电流相量的长度为 $3V_m$,所以,电阻值应为 1/3 Ω。

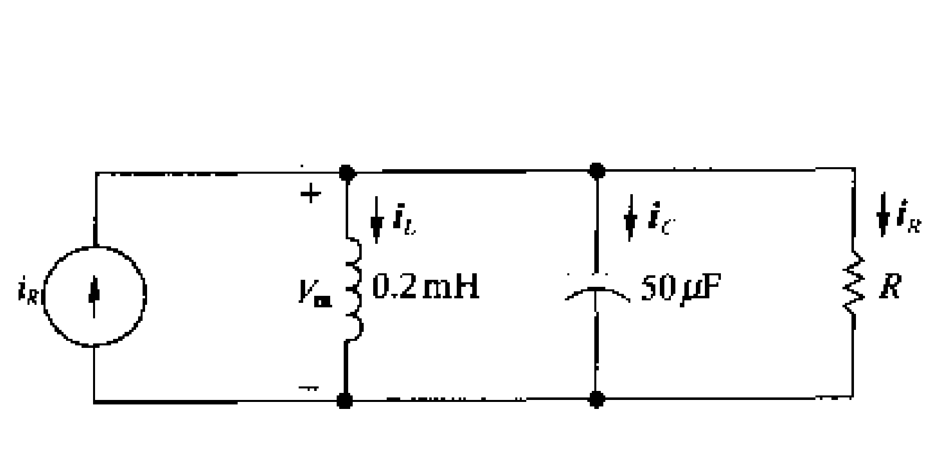


图 9.50 例 9.15 电路图

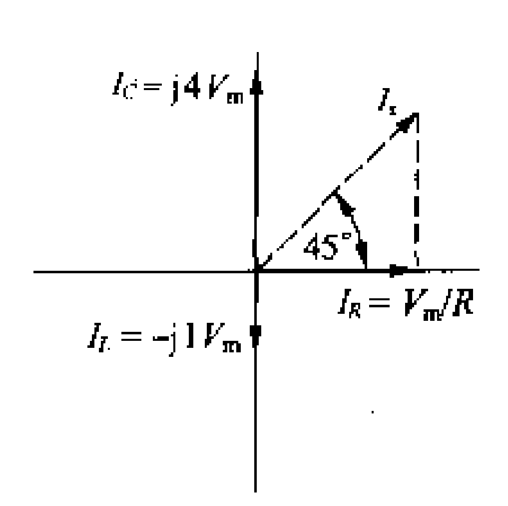


图 9.51 图 9.50 的电流相量

例 9.16 图 9.52 所示电路的负载为电阻与电感的并联。用相量图分析,调整 V_s 使 V_L 保持为常数的前提下,在负载两端加上一个电容会对 V_s 的幅值产生什么影响?电力公司常常采用这种技术控制线路上的压降。

解:

假设负载两端的电容为零,先建立零电容情况的相量图,再添加电容,在保持 V_L 为常数的情况下,研究它对电压幅值 V_s 的影响。图 9.53 为图 9.52 的频域等效电路。为便于讨论,设支路电流相量为 I,I_a 和 I_b。

图 9.54 给出相量图求解的步骤。要注意在本例中,不关心具体的相量值及其位置,而是关心在负载两端加上电容之后对电路产生的影响。因此,需要得出电容加上之前以及之后的相量的相对位置。

将相量图以及图 9.53 所示电路联系起来,可以得出以下几点:

1. 因为负载电压的幅值保持常数,所以选 V_L 作为参考。为方便起见,将这个相量放在正

实轴上。

2. I_a 与 V_L 同相，且幅值为 $|V_L|/R_2$。（在相量图中，电流相量的标尺与电压相量的标尺是相互独立的。）

3. I_b 滞后于 V_L 90°，并且幅值为 $|V_L|/\omega L_2$。

4. 电流 I 为 I_a 和 I_b 之和。

5. R_1 上的压降与电流 I 同相，$j\omega L_1$ 上的压降超前电流 I 90°。

6. 电源电压为负载电压和线路上的压降之和，即 $V_s = V_L + (R_1 + j\omega L_1)I$。

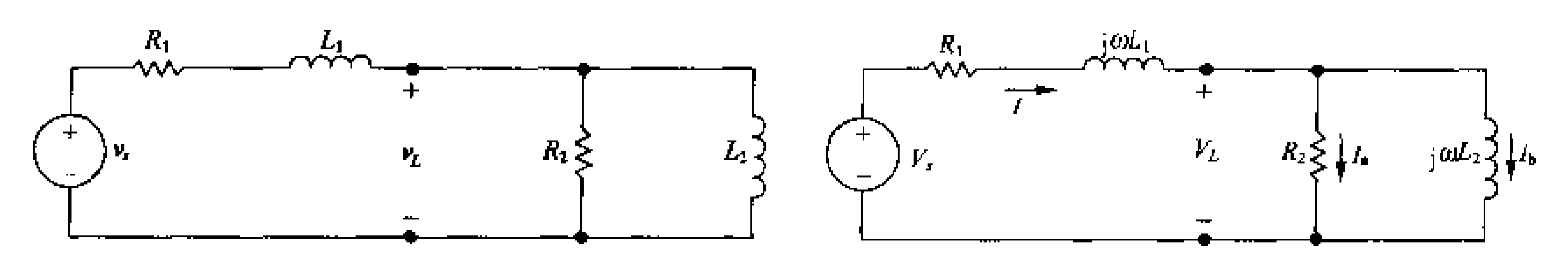


图 9.52 例 9.16 电路图

图 9.53 图 9.52 的频域等效电路图

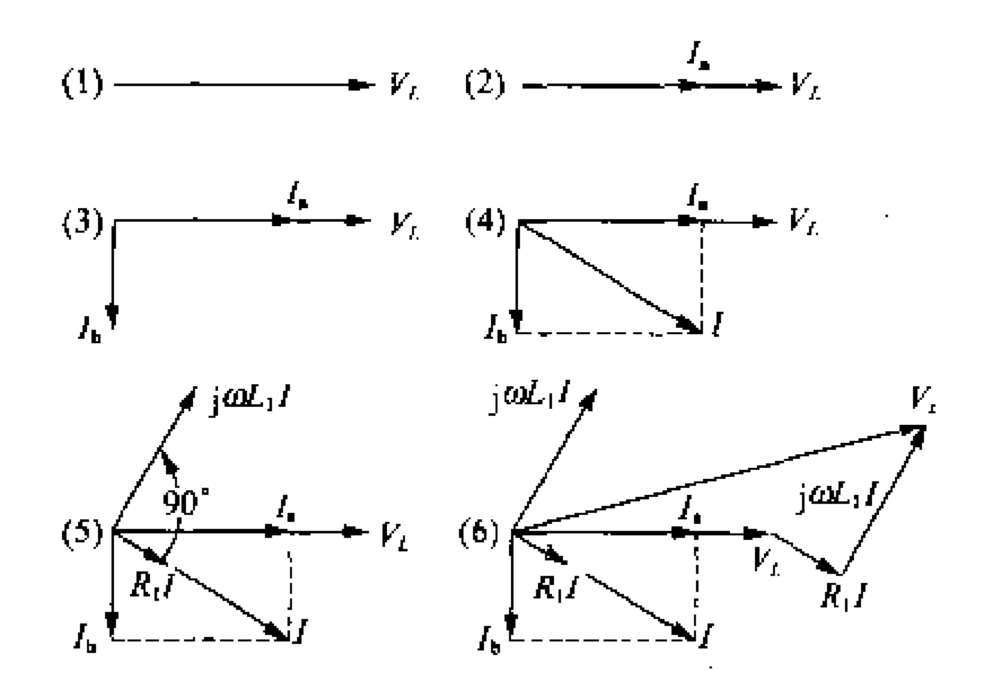


图 9.54 图 9.53 所示电路相量图的求解步骤

图 9.54 第六步所示的完整的相位图表示了所有电压和电流幅值以及相位间的关系。

现在加入电容支路，得到图 9.55 所示电路。保持 V_L 为常数，用图 9.54 相同的步骤构造图 9.55 电路的相量图，另外，在第 4 步中，在相量图上加入电容电流 I_c，I_c 超前于 V_L 90°，且其幅值为 $|V_L\omega C|$。图 9.56 说明了 I_c 对线路电流 I 的影响：线路电流 I 的幅值和相位随着 I_c 的幅值的改变而改变。当 I 改变时，线路上压降的幅值和相位也将发生变化。随着压降的变化，V_s 的幅值和相位会跟着改变。图 9.57 所示的相量图描述了这些情况。虚线所示的相量表示是加入电容之前的电流和电压。

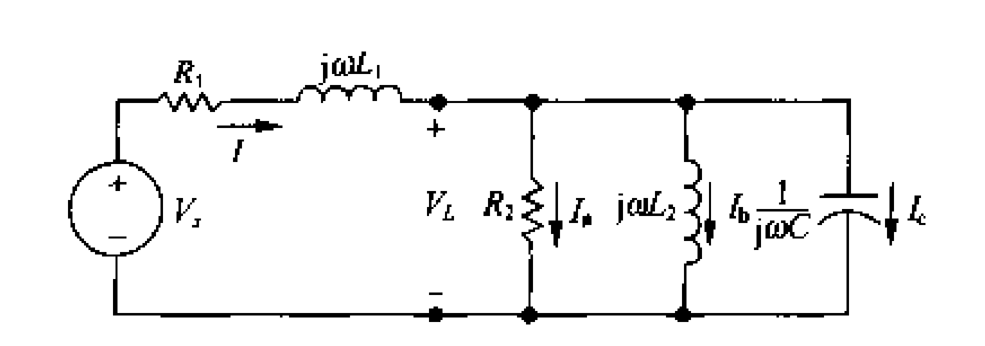


图 9.55 图 9.53 增加电容之后的电路图

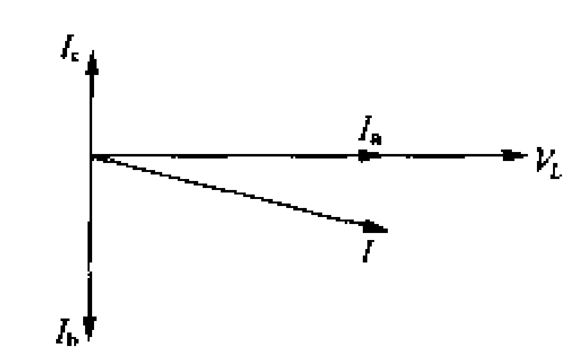


图 9.56 电容电流 I_c 对线路电流 I 的影响

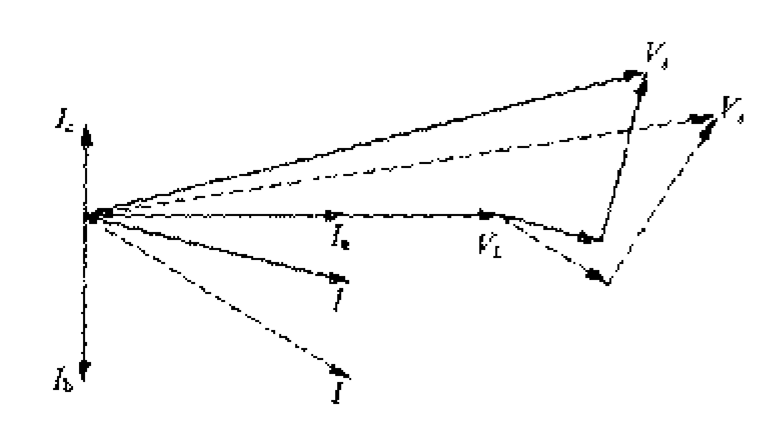


图 9.57 若 V_L 保持常数,增加负载旁路电容后对图 9.53 所示电路的影响

比较虚线相量 I,R_1I,$j\omega L_1I$ 和 V_s 与相应的实线相量,可以清楚地看到加入电容 C 对电路的影响。尤其需要注意的是,减小了电源电压的幅值,同时保持了负载电压的幅值。实际上,这个结果意味着当负载增加(例如 I_a 和 I_b 增加)时,可以通过对系统增加一个电容,而使重负荷情况下 V_L 保持不变,并不需要加大电源电压。

练习题

9.21 图 9.53 所示电路的参数为 $R_1=0.1\ \Omega$, $\omega L_1=0.8\ \Omega$, $R_2=24\ \Omega$, $\omega L_2=32\ \Omega$, $V_L=240+j0\ \text{V}$

(a) 求电压相量 V_s。

(b) 在电感两端并联一个电容,使 V_L 保持常数,调整电容大小,使 I 最小,求此时电容的电抗为多少?

(c) 求使 $|V_s|=|V_L|=240\ \text{V}$,并且使 I 尽可能小的容抗。

答:(a) $247.11\angle 1.68^\circ$ V,(b) $-32\ \Omega$,$241.13\angle 1.90^\circ$ V,(c) $-26.90\ \Omega$。

实例

常见供电系统二

继续讨论在本章开头介绍过的常见供电电路,通过在变压器次级线圈的每一个电感上增加一个电阻的方法更精确地仿真用户线上的电容,修改后的电路如图 9.58 所示。在该例中,计算供电变压器副边上六条支路的电流,并且说明如何计算初级线圈上的电流。

例: (a) 求图 9.58 所示电路的支路电流 $I_1 \sim I_6$。

(b) 求初级线圈电流 I_p。

解:

(a) 由于分析的电路为磁场耦合电路,用网孔电流法列写电路方程,网孔电流 I_a,I_b,I_c 如图 9.59 所示。

三个网孔方程为:

$$120\angle 0^\circ = 23I_a - 2I_b - 20I_c$$
$$120\angle 0^\circ = -2I_a + 43I_b - 40I_c$$
$$0 = -20I_a - 40I_b + 70I_c$$

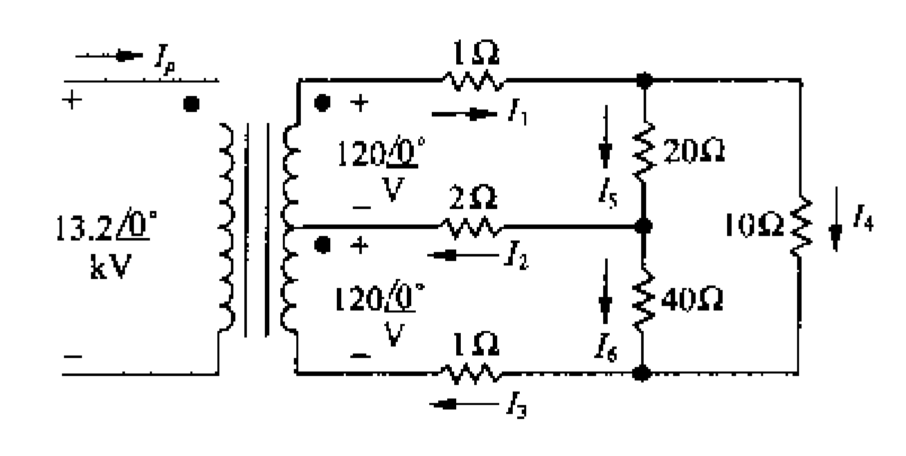


图 9.58　输电线路

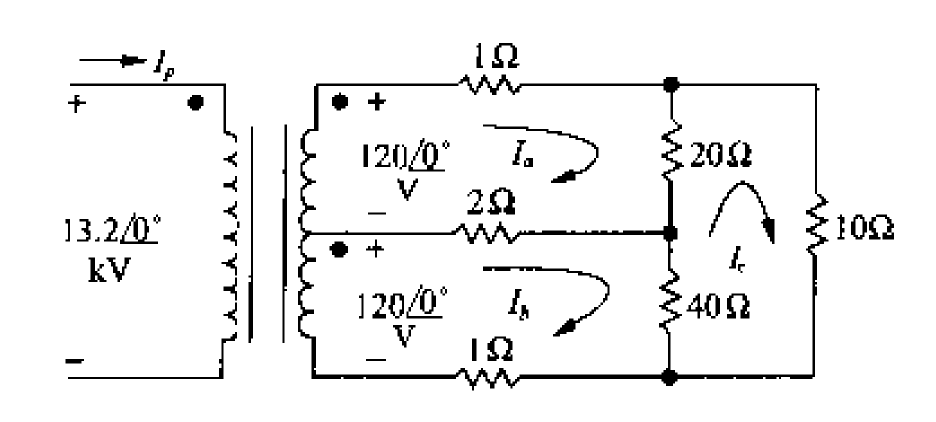


图 9.59　分析图 9.58 所示电路的网孔电流

I_a, I_b 和 I_c 的解为：

$$I_a = 24\angle 0^\circ \text{ A}$$
$$I_b = 21.96\angle 0^\circ \text{ A}$$
$$I_c = 19.40\angle 0^\circ \text{ A}$$

支路电流为：

$$I_1 = I_a = 24\angle 0^\circ \text{ A}$$
$$I_2 = I_a - I_b = 2.04\angle 0^\circ \text{ A}$$
$$I_3 = I_b = 21.96\angle 0^\circ \text{ A}$$
$$I_4 = I_c = 19.40\angle 0^\circ \text{ A}$$
$$I_5 = I_a - I_c = 4.6\angle 0^\circ \text{ A}$$
$$I_6 = I_b - I_c = 2.55\angle 0^\circ \text{ A}$$

(b) 通过初级线圈上的安培匝数积等于次级线圈上的安培匝数积来求初级线圈电流，设初级线圈匝数为 N_1，由于次级线圈具有中间抽头，所以，设次级线圈的匝数为 $2N_2$，由图 9.58 为：

$$\frac{13200}{N_1} = \frac{240}{2N_2}$$

或者：

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{110}$$

由安培匝数积守恒得：

$$N_1 I_p = N_2 I_1 + N_2 I_3$$

因此：

$$I_p = \frac{N_2}{N_1}(I_1 + I_3)$$
$$= \frac{1}{110}(24 + 21.96)$$
$$= 0.42\angle 0^\circ \text{ A}$$

小结

- 正弦电源的一般表达式为：

$$v = V_m\cos(\omega t + \phi)\ (电压源)$$

或者:

$$i = I_m\cos(\omega t + \phi)\ (电流源)$$

其中 V_m(或者 I_m)为最大幅值,ω 为频率,ϕ 为相位角。

- 正弦响应的频率 ω 与正弦电源的频率相同,而幅值和相位角通常与电源的不同。
- 求解正弦电路的稳态电压和电流的最好方法是采用频域分析法。时域和频域间的相互变换需要用到下面的数学变换:
  - 相量变换(从时域到频域):

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = p\{V_m\cos(\omega t + \phi)\}$$

  - 反相量变换(从频域到时域):

$$p^{-1}\{V_m e^{j\phi}\} = \text{Re}\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}$$

- 在处理正弦变化的信号时,要记住电感两端的电压超前电流 90°,电容两端的电流超前电压 90°。
- 频域阻抗与时域电阻、电感和电容一样,对电阻、电感、电容来说,电流相量和电压相量间具有如下关系式:

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$$

其中 $\mathbf{I}$ 的参考方向按习惯规定,阻抗的倒数称为导纳(Y),因此,频域下另一个描述电阻、电感、电容的电流电压关系式为:

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}/Y$$

- 线性变压器是两个线圈缠绕在同一个非磁性物质上构成的耦合器件,线圈的次级电路在初级上产生的阻抗成为反映阻抗,反之亦然。从线性变压器的初级看过去的反映阻抗为次级电路的自阻抗,经过变换得到,即$(\omega M/|Z_{22}|)^2$。
- 理想变压器是线性变压器,具有如下特性,最佳耦合($k = 1$),每个线圈的自感均为无穷大($L_1 = L_2 = \infty$),线圈损耗为零($R_1 = R_2 = 0$),电路的特性由变压器的匝数比 $a = N_2/N_1$ 决定,对每个线圈来说每匝的电压相等,即:

$$\frac{v_1}{N_1} = \pm\frac{v_2}{N_2}$$

且每个线圈上的安培匝数积相等,即:

$$N_1 i_1 = \pm N_2 i_2$$

表 9.3 阻抗及相关参数值

元　件	阻　抗	电　抗	导　纳	电　纳
电阻	R(电阻)	—	G(电导)	—
电容	$j(-1/\omega C)$	$-1/\omega C$	$j\omega C$	ωC
电感	$j\omega L$	ωL	$j(-1/\omega L)$	$-1/\omega L$

习题

9.1 正弦电流在 $t = 150\ \mu s$ 时为零,并且以 $2\times10^4\pi$ A/s 的速率上升,最大值为 10 A。

(a) 求 i 的频率。单位为 rad/s。

(b) 求 i 的表达式。

9.2 在同一张图上,画出 $\phi = -60°, -30°, 0°, +30°$ 和 $60°$ 时,$v = 60\cos(\omega t + \phi)$ 的曲线,其横坐标为 ωt。

(a) 说明随着 ϕ 的逐渐增大,电压函数将向右还是向左移动。

(b) 如果 ϕ 由 0 变到 $-30°$,电压朝哪个方向移动?

9.3 对于正弦电压:

$$v = 170\cos(120\pi t - 60°)\ \text{V}$$

(a) 电压的最大幅值?

(b) 以赫兹为单位的频率值?

(c) 以 rad/s 为单位的频率值?

(d) 以弧度为单位的相位角?

(e) 以度为单位的相位角?

(f) 以毫秒为单位的周期?

(g) $t = 0$ 后,第一次到达 $v = 170$ V 的时间?

(h) 正弦函数沿着时间轴左移 125/18 ms,求 $v(t)$的表达式?

(i) 要使 $v(t) = 170\sin 120\pi t$ V,函数最少右移多少毫秒?

(j) 要使 $v(t) = 170\cos 120\pi t$ V,函数最少必须左移多少毫秒?

9.4 在 $t = -250/6\ \mu\text{s}$ 时,正弦电压为零,且有往正向增大的趋势,电压下一个为 0 的时间点为 $1250/6\ \mu\text{s}$,并且知道 $t = 0$ 时,电压值为 75 V。

(a) 求 v 的频率,单位为赫兹。

(b) 求 v 的表达式。

9.5 (a) 证明等式 (9.9) 为式 (9.8) 的解,可以通过将式 (9.9) 代入到式 (9.8) 的左边,证明对于任何 $t > 0$ 的值,左边都等于右边。在 $t = 0$ 时刻,式 (9.9) 的值为初始电流值。

(b) 由于暂态分量随着时间的推移而消失,又由于其解在任何时间 t 都必须满足微分方程,因此,稳态分量也必须满足微分方程。通过证明式 (9.9) 的稳态分量满足式 (9.8) 来验证这一点。

9.6 用相量的概念将下列的正弦函数写成三角函数的形式。

(a) $y = 100\cos(300t + 45°) + 500\cos(300t - 60°)$。

(b) $y = 250\cos(377t + 30°) - 150\sin(377t + 140°)$。

(c) $y = 60\cos(100t + 60°) - 120\sin(100t - 125°) + 100\cos(100t + 90°)$。

(d) $y = 100\cos(\omega t + 40°) + 100\cos(\omega t + 160°) + 100\cos(\omega t - 80°)$。

9.7 证明:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2\cos^2(\omega t + \phi)\,\mathrm{d}t = \frac{V_m^2 T}{2}$$

9.8 供给美国家庭使用的正弦电压的方均根值为 120 V,求这个电压的最大值?

P9.9 一个 20 Ω 的电阻与一个 1 μF 的电容并联,再与 1 Ω 电阻与 40 μH 电感串联的电路并联,三条支路的驱动源为正弦电流源 $20\cos(50000t - 20°)$A。

(a) 画出电路的频率等效电路。

(b) 以电流源的方向作为电流源两端电压升的参考方向,求电压相量。

(c) 求 $v(t)$的稳态表达式。

P9.10 400 Ω 电阻、87.5 mH 的电感和 312.5 nF 的电容串联,接在正弦电压源 $500\cos(8000t+60°)$ V 的两端。

(a) 画出电路的频率等效电路。

(b) 以电源电压升的方向作为电流的参考方向,求电流相量。

(c) 求 $i(t)$的表达式。

9.11 50 Hz 的正弦电压,最大幅值为 340 V,在 $t=0$ 时刻,加到电感的两端,电感上的稳态电流的最大幅值为 8.5 A。

(a) 求电感电流的频率。

(b) 求电压的相位角。

(c) 求电流的相位角。

(d) 求电感的感抗。

(e) 求电感值,单位为微亨。

(f) 求电感的阻抗。

9.12 正弦电压,频率 40 kHz,相位角 0,幅值 2.9 mV,将此电压加到电容两端,稳态电流的幅值 125.67 μA。

(a) 求电流的频率,单位为 rad/s

(b) 求电流的相位角。

(c) 求电容的容抗。

(d) 求电容值,单位为微法。

(e) 求电容的阻抗。

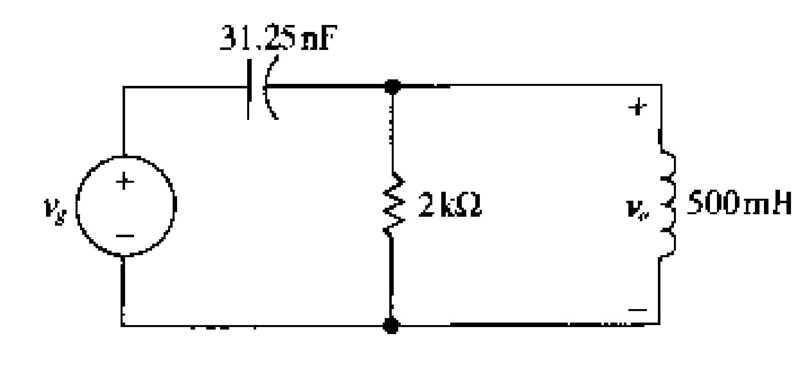


图 P9.13

P9.13 图 P9.13 所示电路工作于稳态。若 $v_g = 64\cos 8000t$ V,求 $v_o(t)$的稳态表达式。

P M9.14 若 $v_s = 750\cos 5000t$ mV,求图 P9.14 电路 $v_o(t)$的稳态表达式。

P9.15 图 P9.15 所示电路工作在正弦稳态,调整电容 C,以使电流 i_g 与电压 v_g 同相。

(a) 若 $v_g = 250\cos 1000t$ V,求电容的容量,单位为微法。

(b) 当 C 为(a)中所求值时,求 i_g 的稳态表达式。

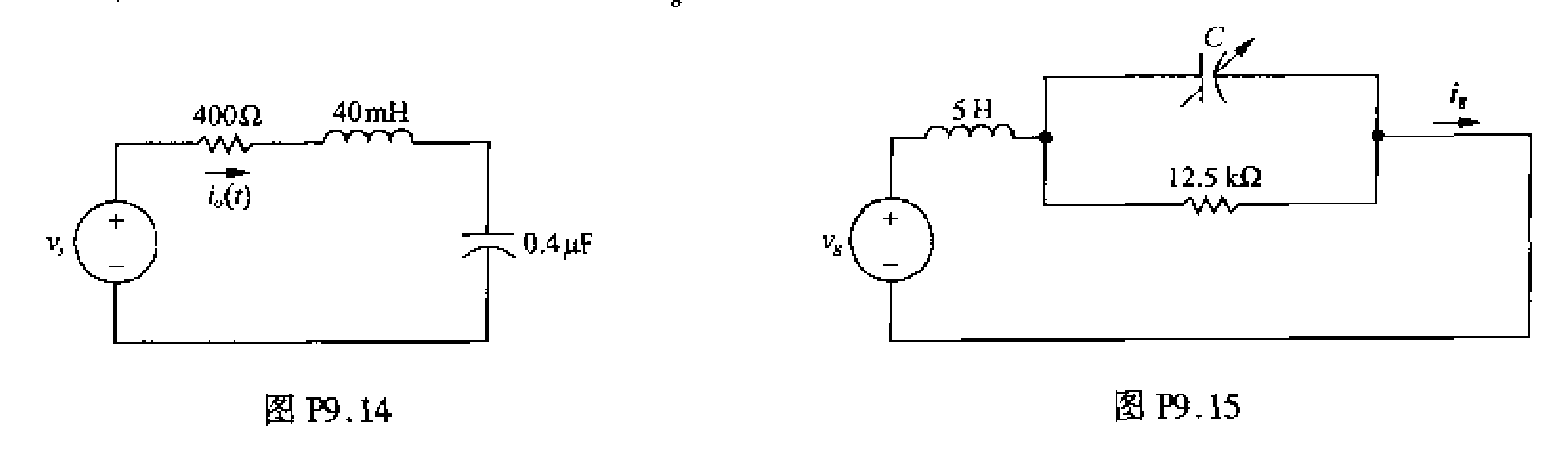


图 P9.14　　图 P9.15

P9.16 调整图 P9.16 所示电路的正弦电压源的频率以使电流 i_o 与 v_g 同相。

(a) 求电压源的频率,单位为 Hz。

(b) 在(a)的频率下，若 $v_g = 10\cos\omega t$ V，求 i_o 的稳态表达式。

9.17 图 P9.17 所示电路工作于正弦稳态，求满足下式的 ω 值：

$$i_o = 100\sin(\omega t + 81.87°)\ \text{mA}$$

$$v_g = 50\cos(\omega t - 45°)\ \text{V}$$

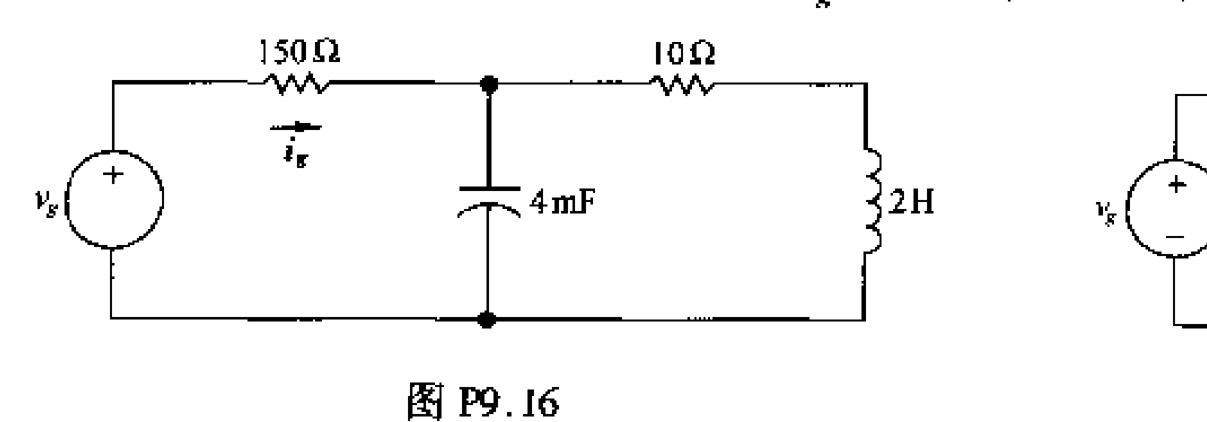


图 P9.16

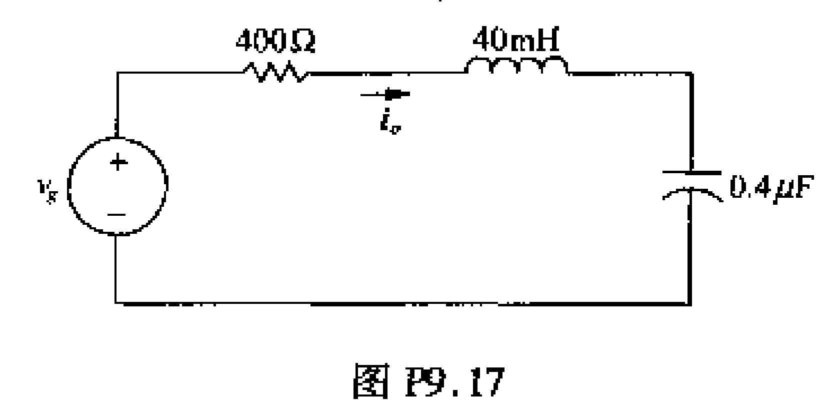


图 P9.17

9.18 图 P9.18 当电路的工作频率为 1.6 Mrad/s 时，求 Z_{ab}。

9.19 求图 P9.19 电路的导纳 Y_{ab}，分别用极坐标和三角函数的形式表示，Y_{ab}单位为 ms。

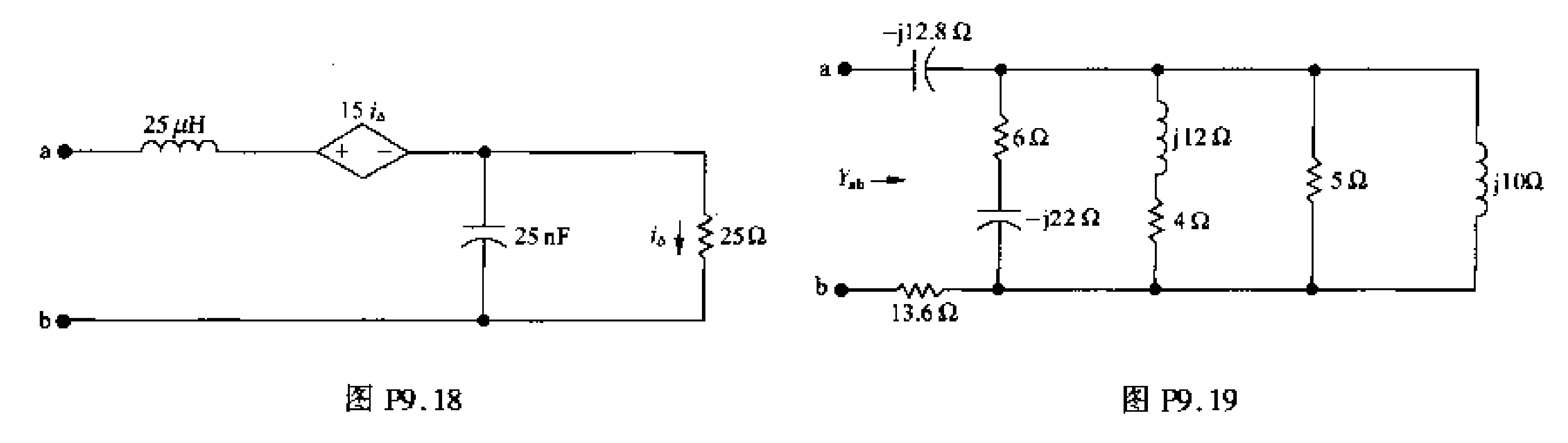


图 P9.18　　　　图 P9.19

P9.20 (a) 调整图 P9.20 所示电路电压源的频率，以使 i_g 与 v_g 同相，求此时的 ω，单位为 rad/s。

(b) 若 $v_g = 45\cos\omega t$ V(ω 的值为(a)中计算所得)，求 v_o 的稳态表达式。

P9.21 (a) 图 P9.21 电压源为 $v_g = 96\cos 10000t$ V，求当电路工作于稳态时，使 v_g 与 i_g 同相位的 L。

(b) 用(a)中求出的 L，求 v_g 的稳态表达式。

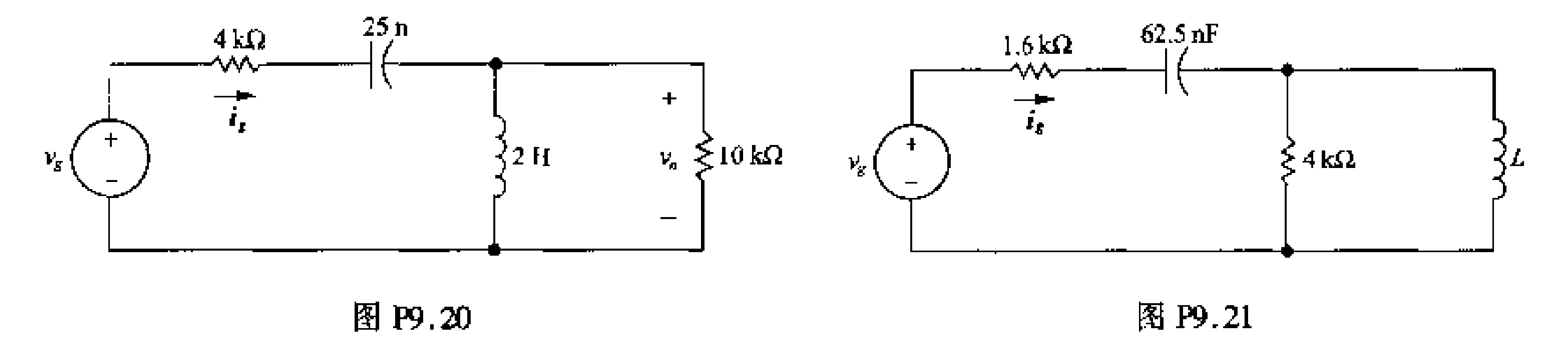


图 P9.20　　　　图 P9.21

P M9.22 (a) 图 P9.22 所示电路，当 Z_{ab}为纯电阻时，求电路的频率(单位 rad/s)。

(b) 求在(a)频率下 Z_{ab}的值。

9.23 求图 P9.23 所示电路的阻抗 Z_{ab}，分别用极坐标和三角函数的形式表示。

P M9.24 调整图 P9.24 所示电路正弦电流源的频率，以使 v_o 与 i_g 同相。

(a) 求 ω 的值，单位 rad/s。

(b) 若 $i_g = 2.5\cos\omega t$ mA(其 ω 为(a)所求),求 v_o 的稳态表达式。

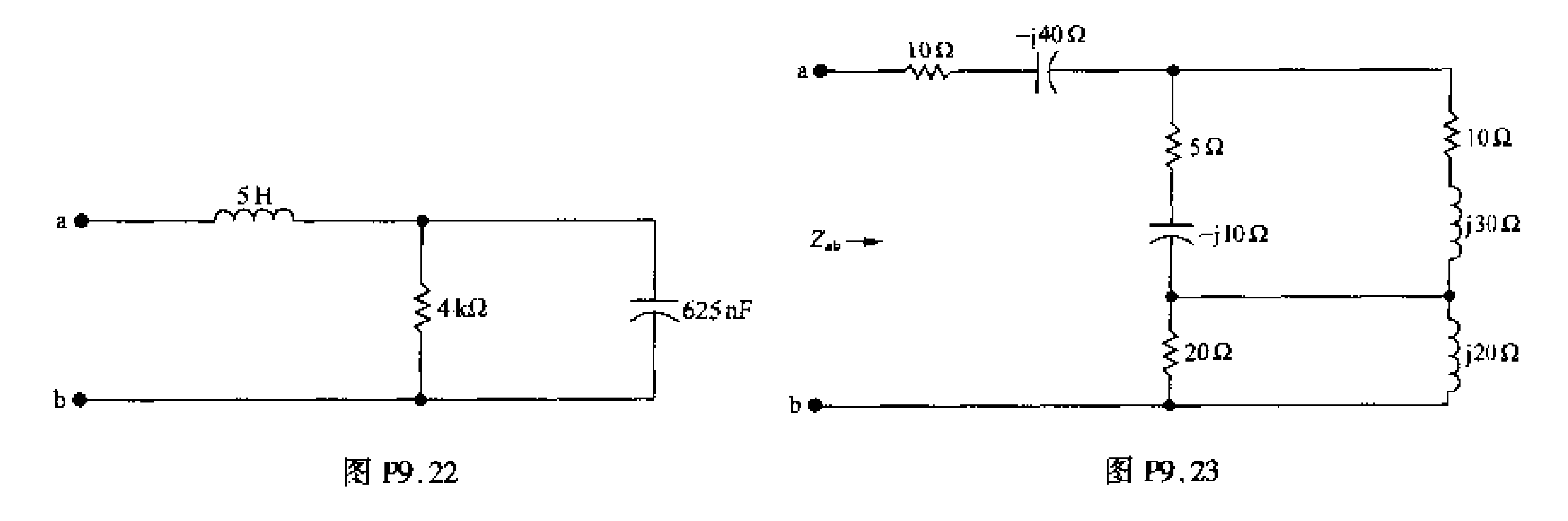


图 P9.22　　图 P9.23

9.25 (a) 证明:对于给定的频率 ω。若:

$$R_1 = \frac{\omega^2 L_2^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}$$

$$L_1 = \frac{R_2^2 L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}$$

图 P9.25(a)和(b)所示电路的阻抗相同。

(b) 若并联电路的电阻和电感值分别为 50 kΩ 和 2.5 H,频率 20 krad/s,求与它有相同阻抗的串联电路的电阻和电感值。

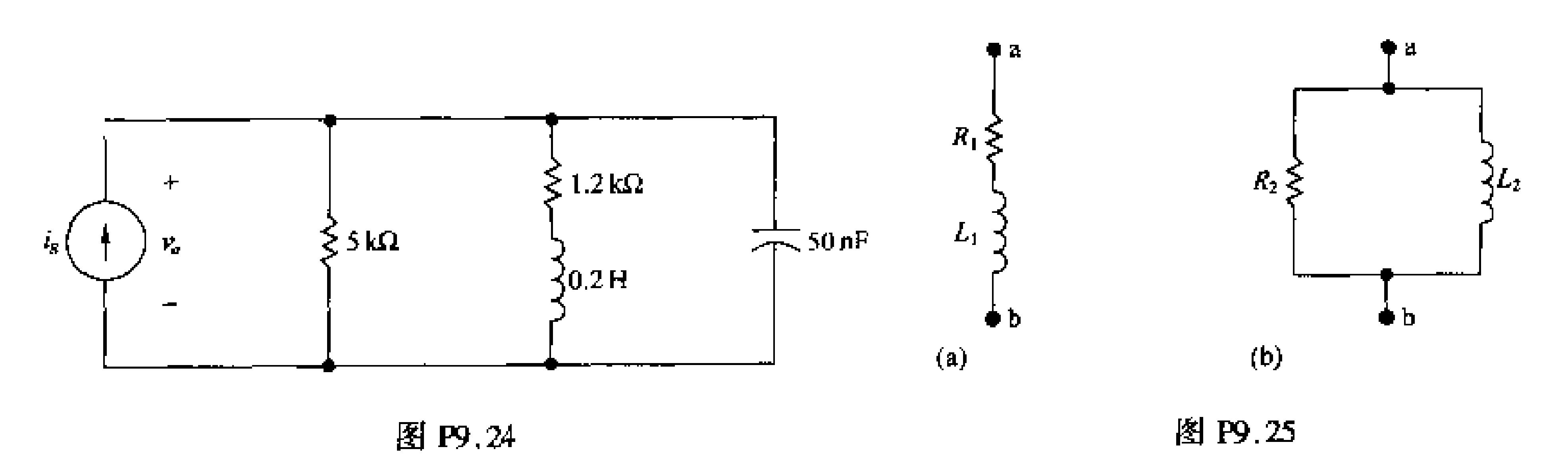


图 P9.24　　图 P9.25

9.26 (a) 证明:对于给定频率 ω。若:

$$R_2 = \frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{R_1}$$

$$L_2 = \frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{\omega^2 L_1}$$

图 P9.25(a)和(b)所示电路阻抗相同(提示:如果两电路的导纳相同,则它们的阻抗相同)。

(b) 若并联电路的电阻和电感值分别为 50 kΩ 和 0.5 H,频率 10 krad/s,求与它具有相同阻抗的并联电路的电阻和电感值。

9.27 (a) 证明:对于给定频率 ω。若:

$$R_1 = \frac{R_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}$$

$$C_1 = \frac{1+\omega^2 R_2^2 C_2^2}{\omega^2 R_2^2 C_2}$$

图 P9.27(a)和(b)所示电路阻抗相同。

(b) 若串联电路 $R = 500\ \Omega$, $C = 25$ nF, $\omega = 80$ krad/s,求与并联电路具有相同阻抗的并联电路的电阻和电容值。

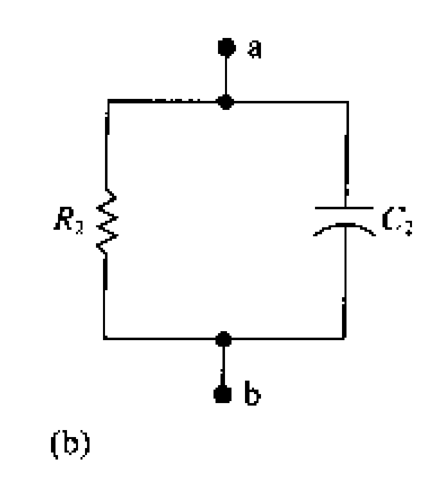


图 P9.27

9.28 (a) 证明:对于给定频率 ω。若:

$$R_2 = \frac{1+\omega^2 R_1^2 C_1^2}{\omega^2 R_1 C_1^2}$$

$$C_2 = \frac{C_1}{1+\omega^2 R_1^2 C_1^2}$$

图 P9.27(a)和(b)所示电路阻抗相同(提示:如果两电路的导纳相同,则它们的阻抗相同)。

(b) 若串联电路 $R = 2$ kΩ, $C = 50$ nF, $\omega = 20$ krad/s,求与串联电路具有相同阻抗的并联电路的电阻和电容值。

9.29 图 P9.29 所示电路两端点的稳态电压和电流的表达式为:

$$v_g = 150\cos(8000\pi t + 20°)\ \text{V}$$

$$i_g = 30\sin(8000\pi t + 38°)\ \text{A}$$

(a) 求从电源看进去的等效阻抗。

(b) 多少毫秒之后,电流与电压相位不同?

P M9.30 图 P9.30,若 $i_g = 125\cos 500t$ mA,运用分流的概念求 i_o 的稳态表达式。

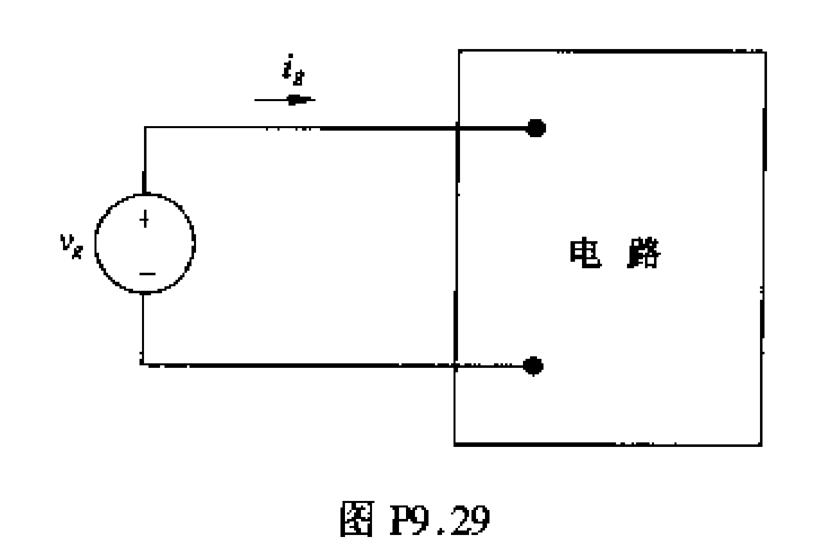


图 P9.29

图 P9.30

P M9.31 图 P9.31,若 $v_g = 75\cos 5000t$ V,运用分压的概念求 $v_o(t)$的表达式。

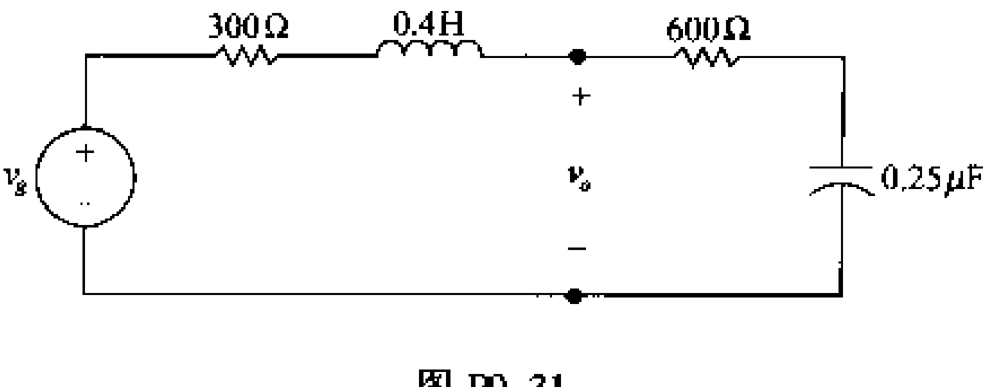


图 P9.31

P9.32 用电源变换的方法求图 P9.32 所示电路 $v_o(t)$的稳态表达式。正弦电压源为:

$$v_1 = 240\cos(4000t + 53.13°)\ \text{V}$$

$$v_2 = 96\ \sin 4000t\ \text{V}$$

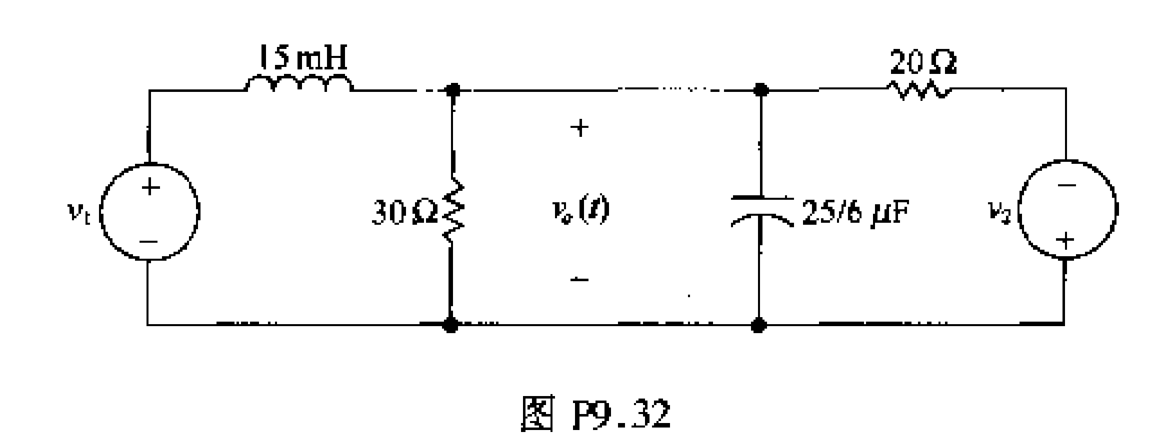


图 P9.32

P9.33 图 P9.33 的电流相量 I_b 为 $5\,\underline{/45^\circ}$A。

(a) 求 I_a,I_c 和 V_g。

(b) 若 $\omega = 800$ rad/s,求 $i_a(t)$,$i_c(t)$和 $v_g(t)$的稳态表达式。

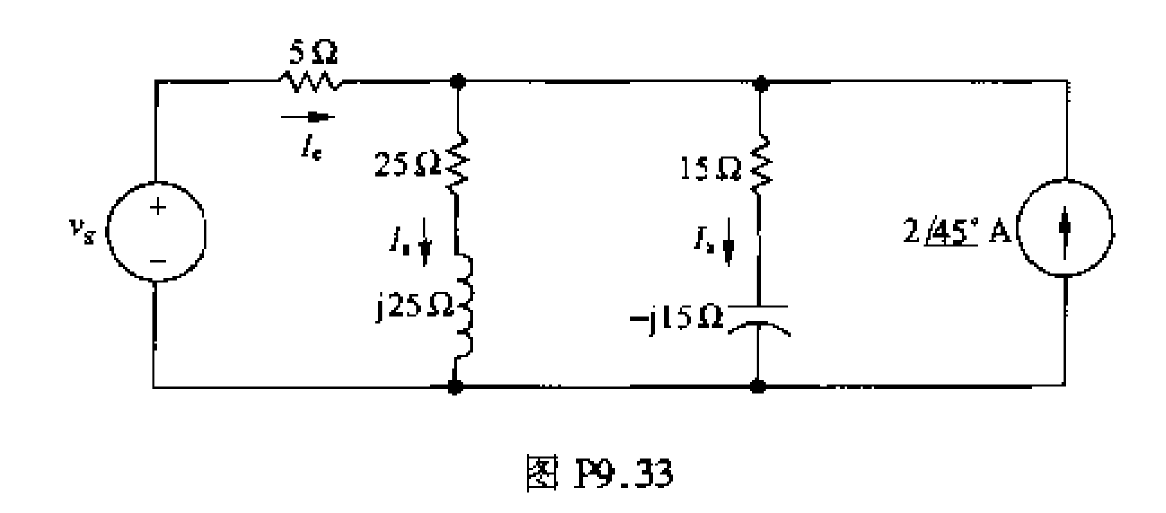


图 P9.33

P M9.34 图 P9.34 所示电路工作于正弦稳态,若 $i_s(t) = 15\ \cos 8000t$ mA,求 $v_o(t)$。

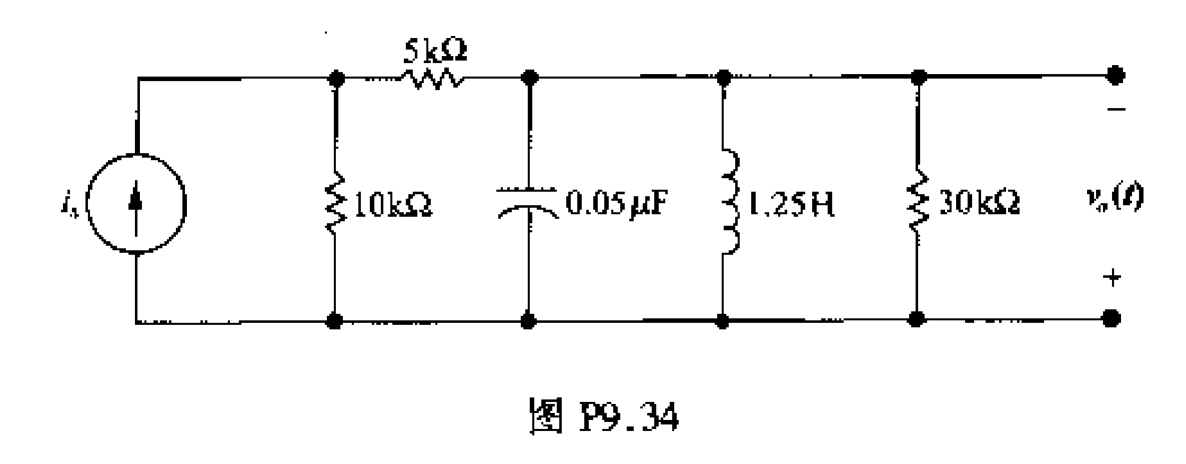


图 P9.34

9.35 若 $V_g = 60\,\underline{/0^\circ}$ V,$I_a = 5\,\underline{/90^\circ}$ A,求图 P9.35 所示电路的 I_b 和 Z。

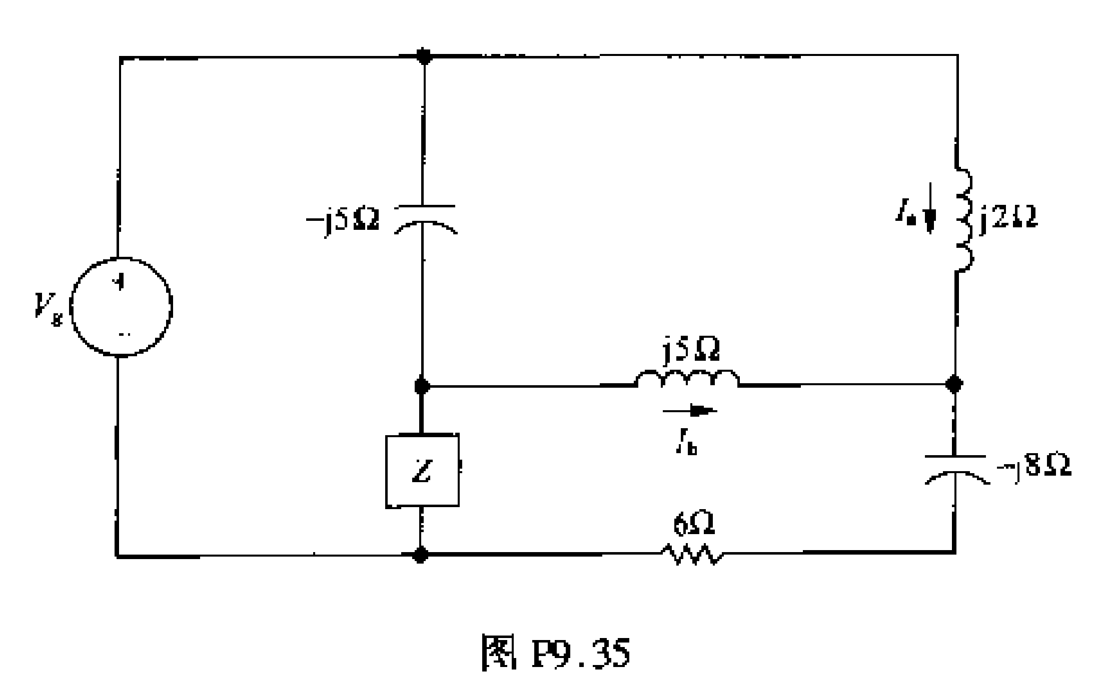


图 P9.35

9.36 图 P9.36,若工作频率为 25 krad/s,求从 a,b 两端看进去的戴维南等效阻抗。

9.37 图 P9.37 所示电路的正弦电压为 247.49 cos(1000t + 45°) V。

(a) 求 a,b 两点间的戴维南等效电压。

(b) 求 a,b 两点间的戴维南等效阻抗。

(c) 画出戴维南等效电路。

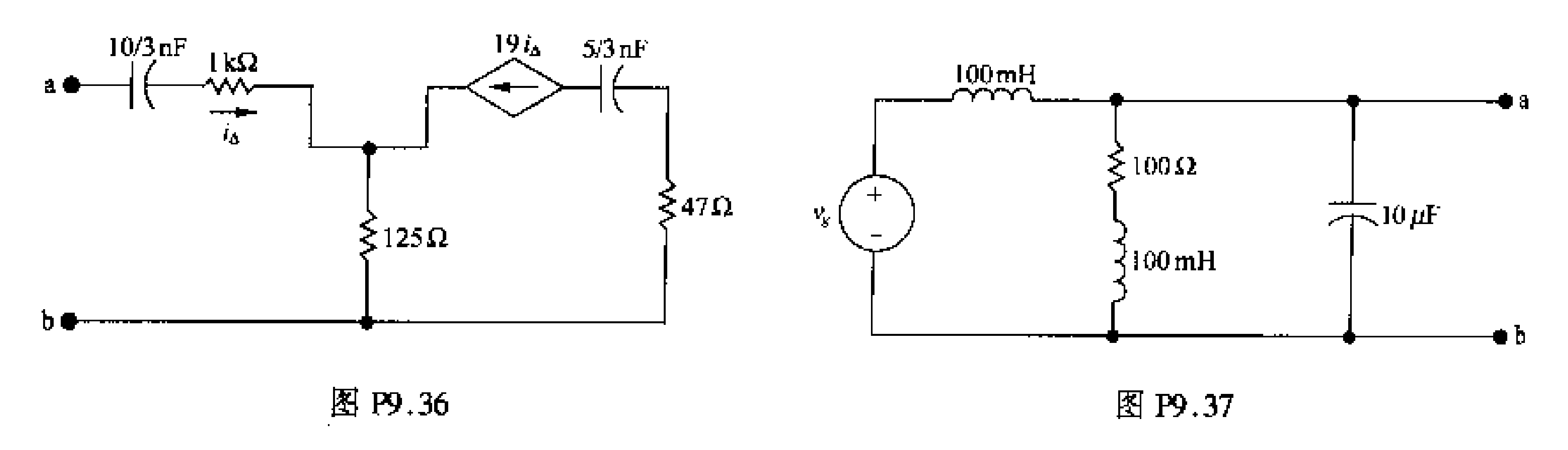


图 P9.36　　图 P9.37

9.38 图 P9.38, $V_s = 25\,\underline{/0°}$ V,求 a,b 两点间的诺顿等效电路。

9.39 如图 P9.39 所示,求 a,b 两点间的诺顿等效电路。

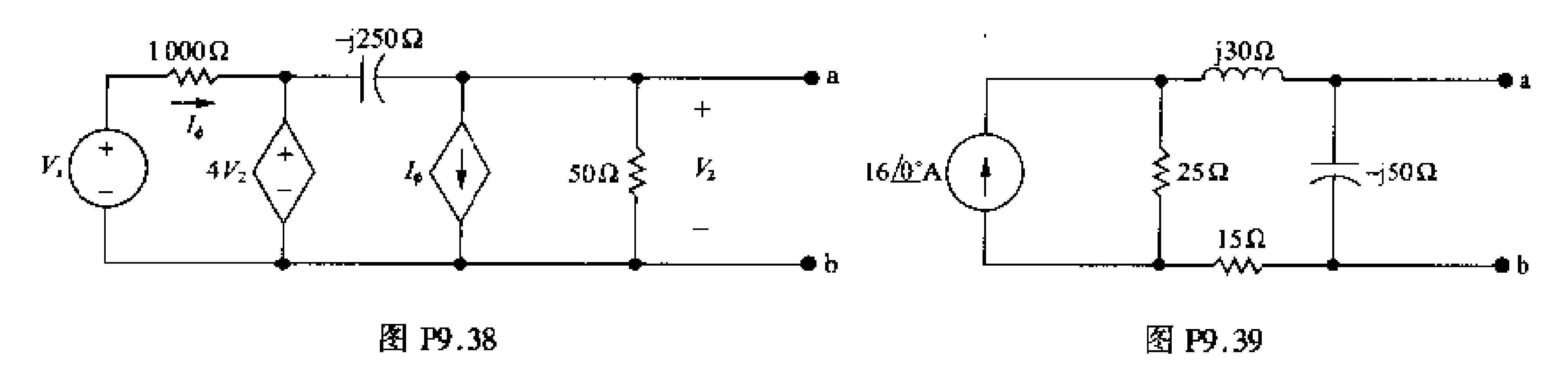


图 P9.38　　图 P9.39

9.40 图 P9.40 所示的设备可用频域下的诺顿等效电路来表示。将阻抗为 j100 Ω 的电感连到设备上时, $V_0 = 100\,\underline{/120°}$ mV,将一阻抗为 − j100 Ω 的电容连到设备上时, $I_0 = -3\,\underline{/210°}$ mA,求诺顿电流 I_N 和诺顿阻抗 Z_N。

9.41 求图 P9.41 所示电路 a,b 两点间的戴维南等效电路。

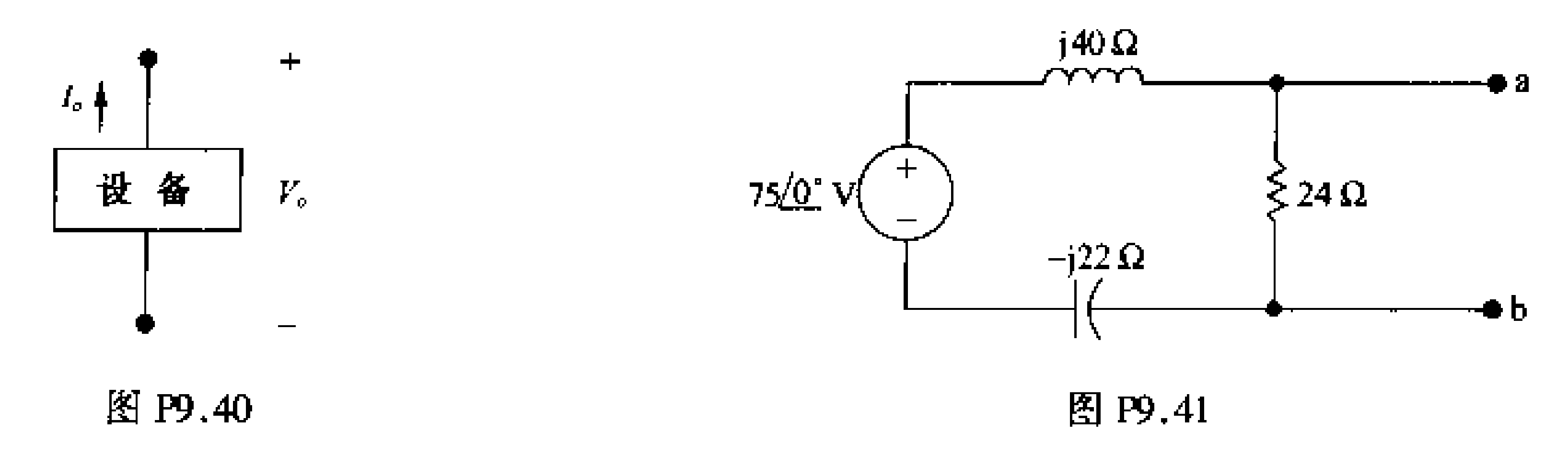


图 P9.40　　图 P9.41

9.42 求图 P9.42 所示电路 a,b 两点间的戴维南等效电路。

9.43 求图 P9.43 所示电路 a,b 两点间的戴维南等效电路。

9.44 图 P9.44 所示电路,工作频率为 10 krad/s,假设 β 是一个介于 − 50 和 + 50 之间的实数,即, $-50 \leqslant \beta \leqslant 50$。

(a) 求使 a,b 两点间的戴维南等效阻抗为纯电阻时的 β 值。

(b) 在(a)求得的 β 值下,戴维南阻抗为多少?

(c) β 值能否调整至使戴维南阻抗等于 5 + j5 Ω?,如果可以,求此时的 β。

(d) β 为何值时,戴维南阻抗为容性的。

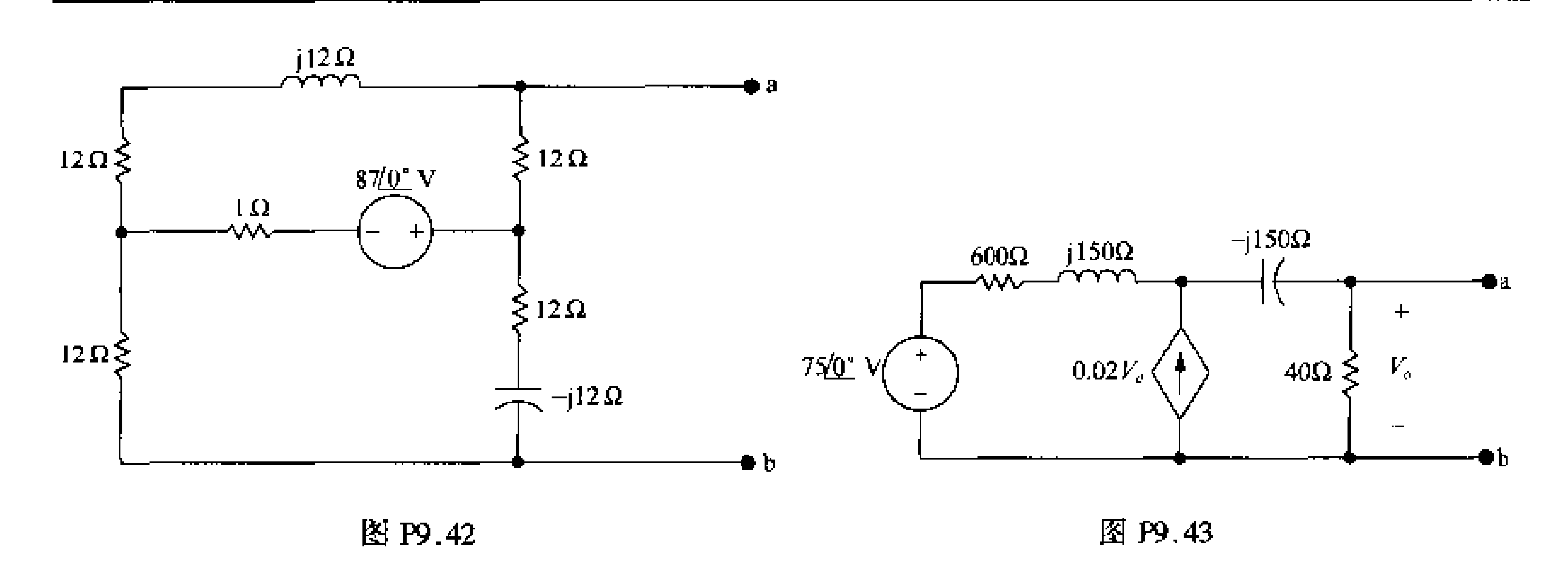


图 P9.42　　　　图 P9.43

9.45 用网孔电流法求图 P9.45 所示电路的电流相量 I_g。

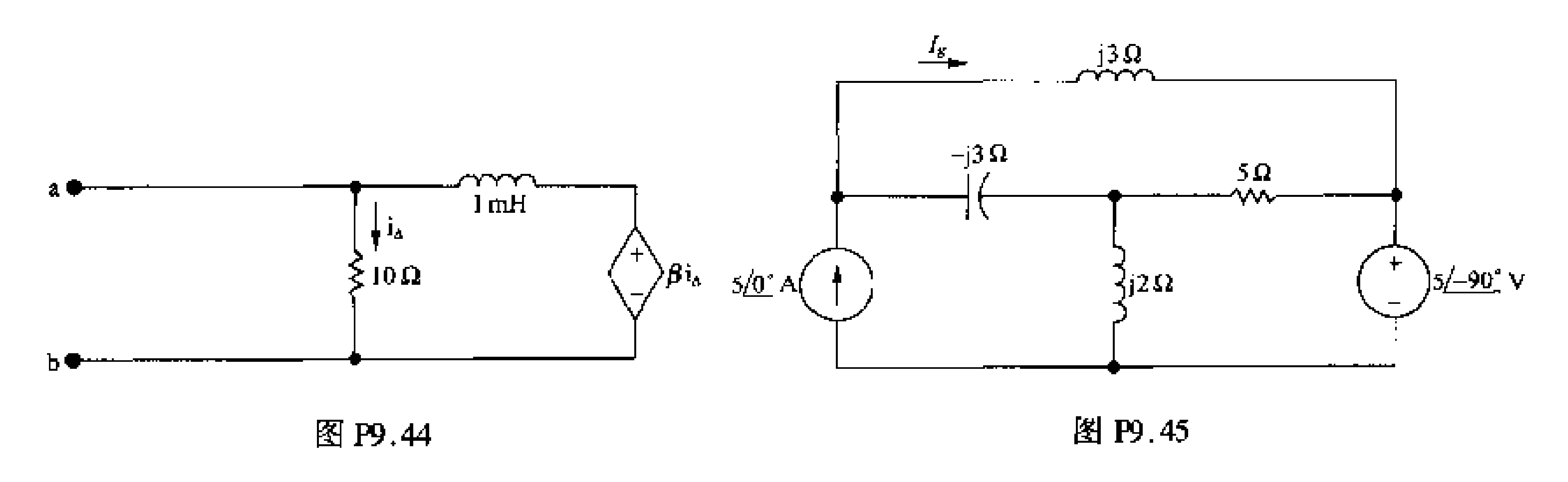


图 P9.44　　　　图 P9.45

9.46 图 P9.45 所示电路,用节点电压法求电容两端的电压相量,假设电容左端的电压为正。

9.47 用节点电压法求图 P9.47 所示电路的 V_o。

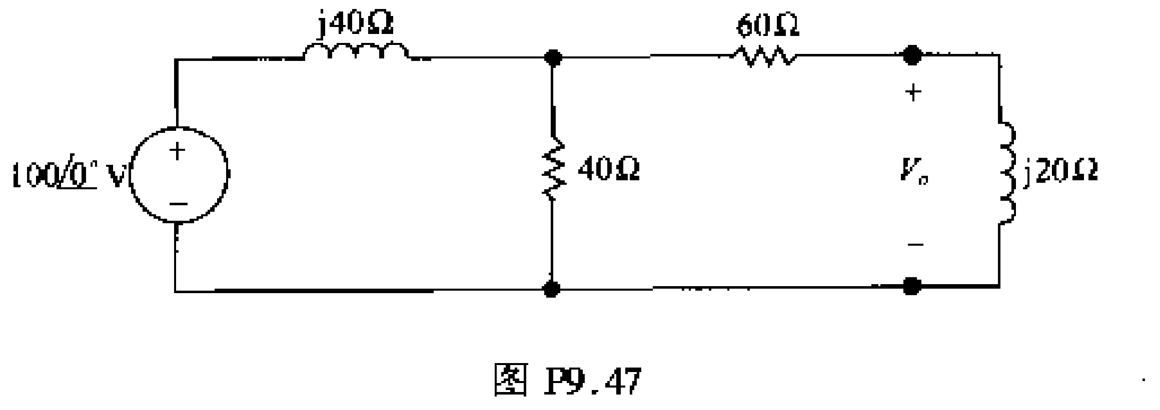


图 P9.47

P9.48 图 P9.48 所示电路,若 $v_g = 72\cos 5000t$ V,用网孔电流法求 v_o 的稳态表达式。

P9.49 图 P9.49 所示电路,若:

$$v_{g1} = 10\cos(5000t + 53.13°)\text{V}$$

$$v_{g2} = 8\sin 5000t\ \text{V}$$

用节点电压法求 $v_o(t)$的稳态表达式。

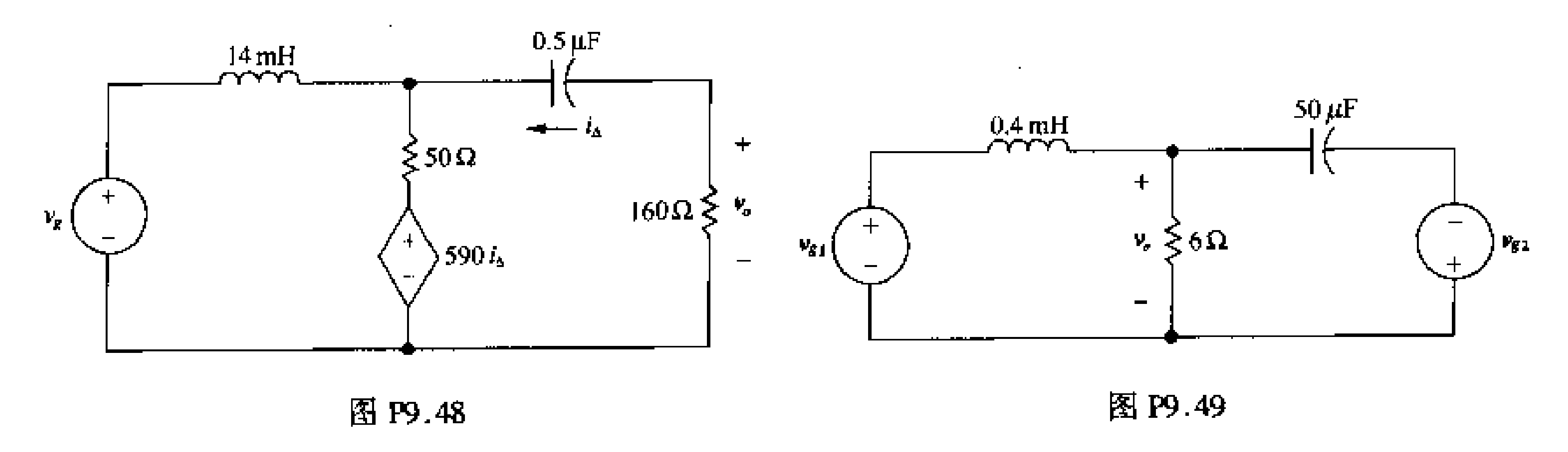


图 P9.48　　　　图 P9.49

9.50 用电源变换法求图 P9.49 所示电压 $v_o(t)$的稳态表达式。

9.51 用网孔电流法求图 P9.49 所示电压 $v_o(t)$的稳态表达式。

9.52 图 P9.52 所示电路,用网孔电流法求各支路电流 I_a, I_b, I_c, I_d。

9.53 图 P9.53 所示电路,若 $V_g = 100 - j50$ V, $I_g = 20 + j30$ A, $V_1 = 40 + j30$ V,求 Z 值。

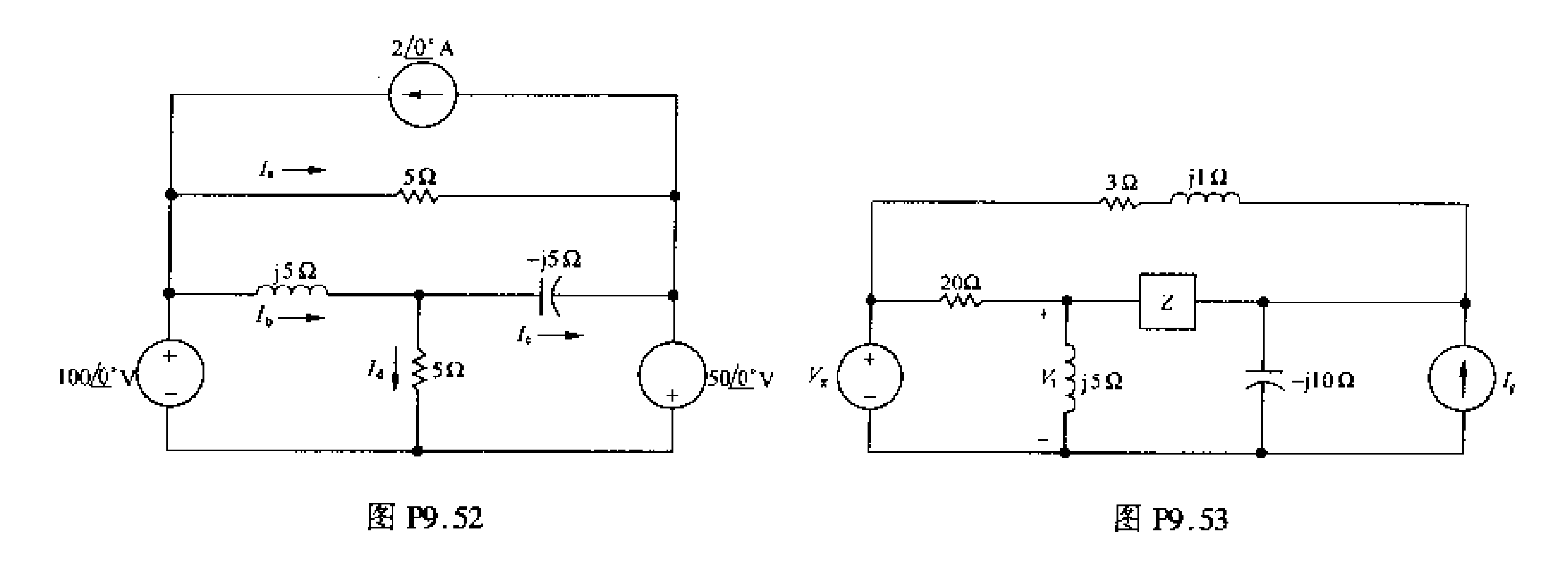


图 P9.52　　图 P9.53

9.54 电路如图 P9.54 所示,若:

$$v_a = 60\cos 40000t\ \text{V}$$

$$v_b = 90\sin(40000t + 180°)\ \text{V}$$

求 $i_o(t)$的稳态表达式。

P9.55 (a) 电路如图 P9.55 所示,若 $i_g = 5\cos(8\times10^5 t)$ A,求 $v_o(t)$的稳态表达式。

(b) v_o 滞后于 i_g 多少纳秒?

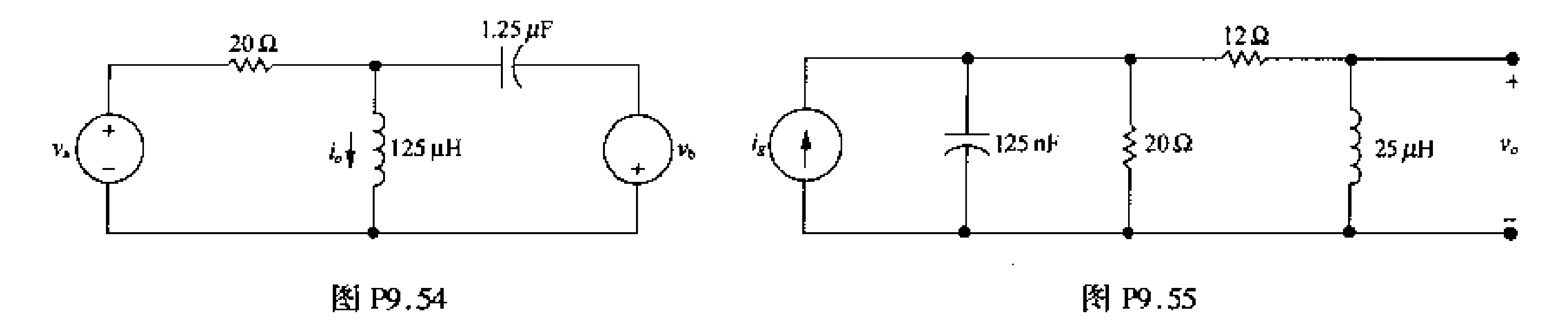


图 P9.54　　图 P9.55

9.56 用节点电压法求图 P9.56 所示电路的 V_o, I_o。

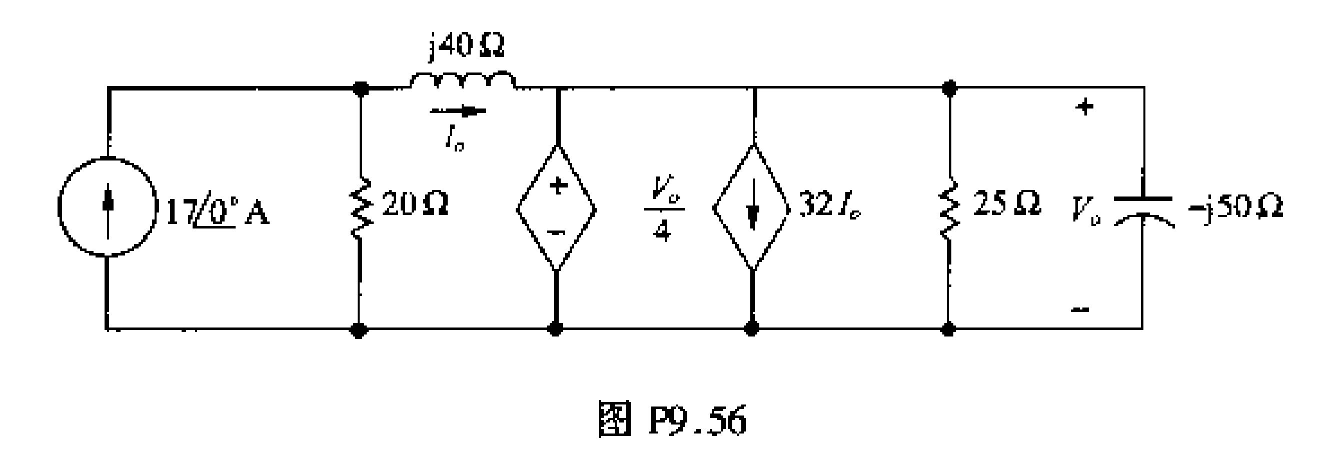


图 P9.56

9.57 用节点电压法求图 P9.57 所示电路的电压相量 V_c,分别用极坐标和三角函数的形式表示。

P9.58 图 P9.58,若 $v_a = 100\sin 10000t$ V, $v_b = 500\cos 10000t$ V,求支路电流 i_a 和 i_b 的稳态

表达式。

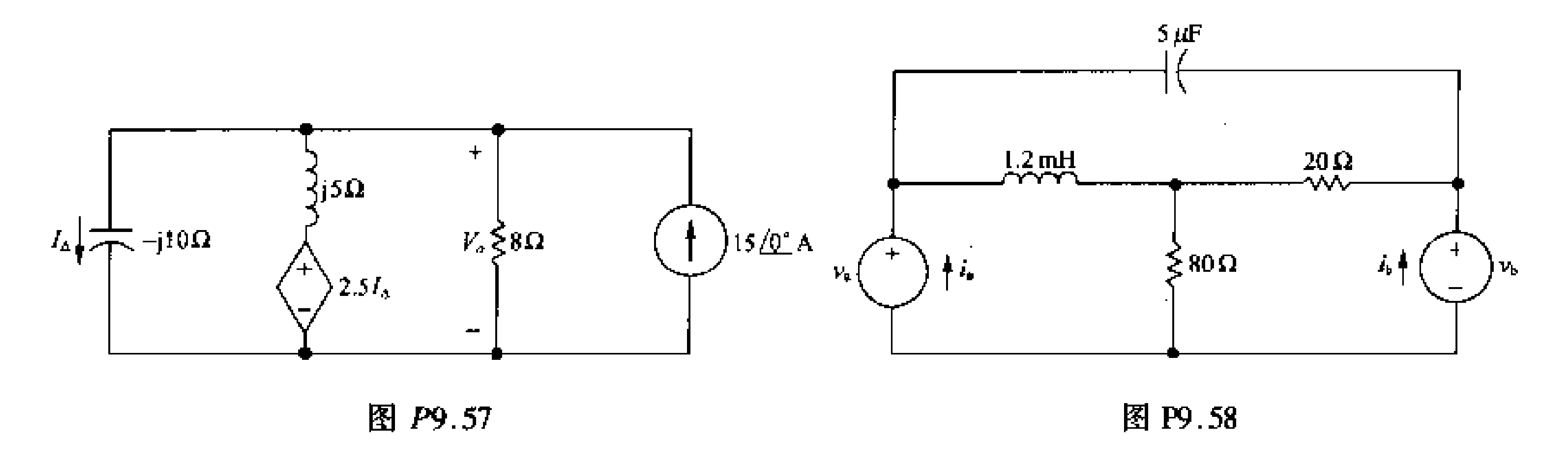


图 P9.57　　　　图 P9.58

9.59 运用叠加原理求图 P9.49 所示电路电压 $v_o(t)$的稳态表达式。

P9.60 图 P9.60,正弦电压源的工作频率为 50 krad/s,调整耦合系数使 i_1 的幅值达到最大。

(a) 求 k 值。

(b) 若 $v_g = 369\cos(5\times10^4 t)$ V, i_1 的峰值为多少?

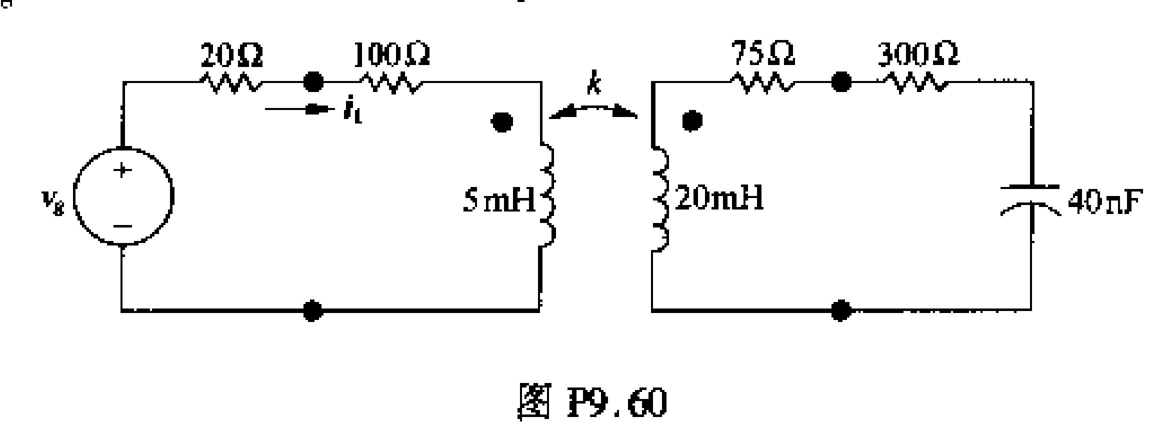


图 P9.60

P9.61 (a) 电路如图 P9.61 所示,当 $v_g = 70\cos 5000t$ V 时,求 i_g 和 i_L 的稳态表达式。

(b) 求耦合系数。

(c) 求 $t = 100\pi$ μs 和 $t = 200\pi$ μs 时,存贮于磁耦合线圈中的能量。

9.62 150 Ω 电阻和 20 nF 电容串联,通过线性变压器与一正弦电压源相连,电源的工作频率为 500 krad/s,电源的内部阻抗为 5 + j16 Ω,无负载时,电源两端电压的方均根值为 125 V,线性变压器的参数为 R_1 = 12 Ω, L_1 = 80 μH, R_2 = 50 Ω, L_2 = 500 μH, M = 100 μH。

(a) 求反映到初级线圈的阻抗值。

(b) 求从实际电源的两端看过去的等效阻抗。

9.63 电路如图 P9.63 所示,ω = 25 krad/s,调整 k 值使 Z_{ab}为纯电阻,求此时的 Z_{ab}。

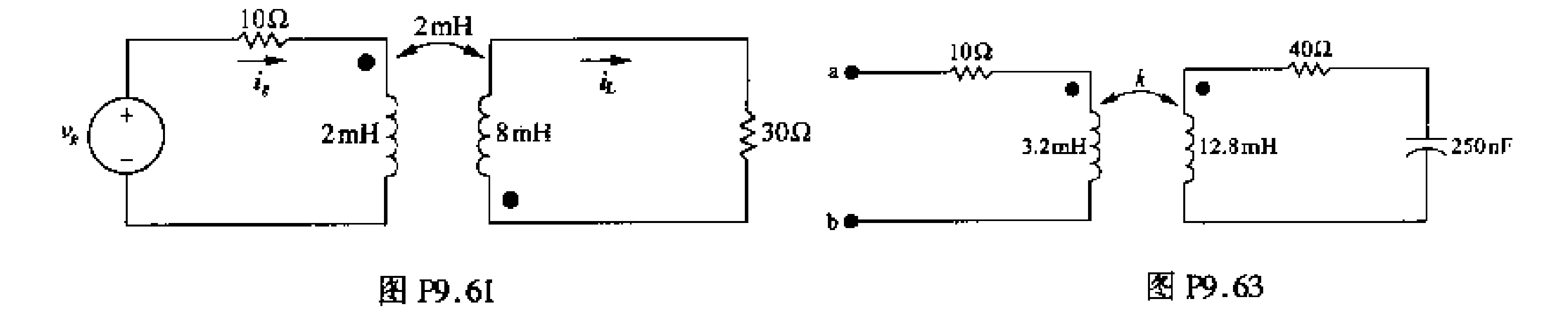


图 P9.61　　　　图 P9.63

9.64 图 9.64 所示电路,求 c,d 两点间的戴维南等效电路。

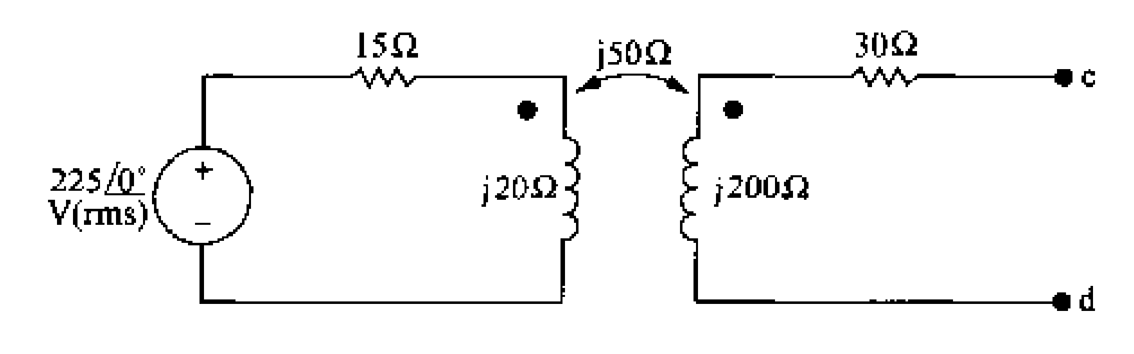


图 P9.64

9.65 (a) 证明:图 P9.65 所示电路,从 a,b 端口看进去的等效阻抗为:

$$Z_{ab} = \frac{Z_L}{\left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)^2}$$

(b) 证明:如果将两线圈的同名端变为异名端,则:

$$Z_{ab} = \frac{Z_L}{\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)^2}$$

9.66 (a) 证明:图 P9.66 所示电路,从 a,b 端口看进去的等效阻抗为:

$$Z_{ab} = \left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L$$

(b) 证明:如果将两线圈的同名端变为异名端,则:

$$Z_{ab} = \left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L$$

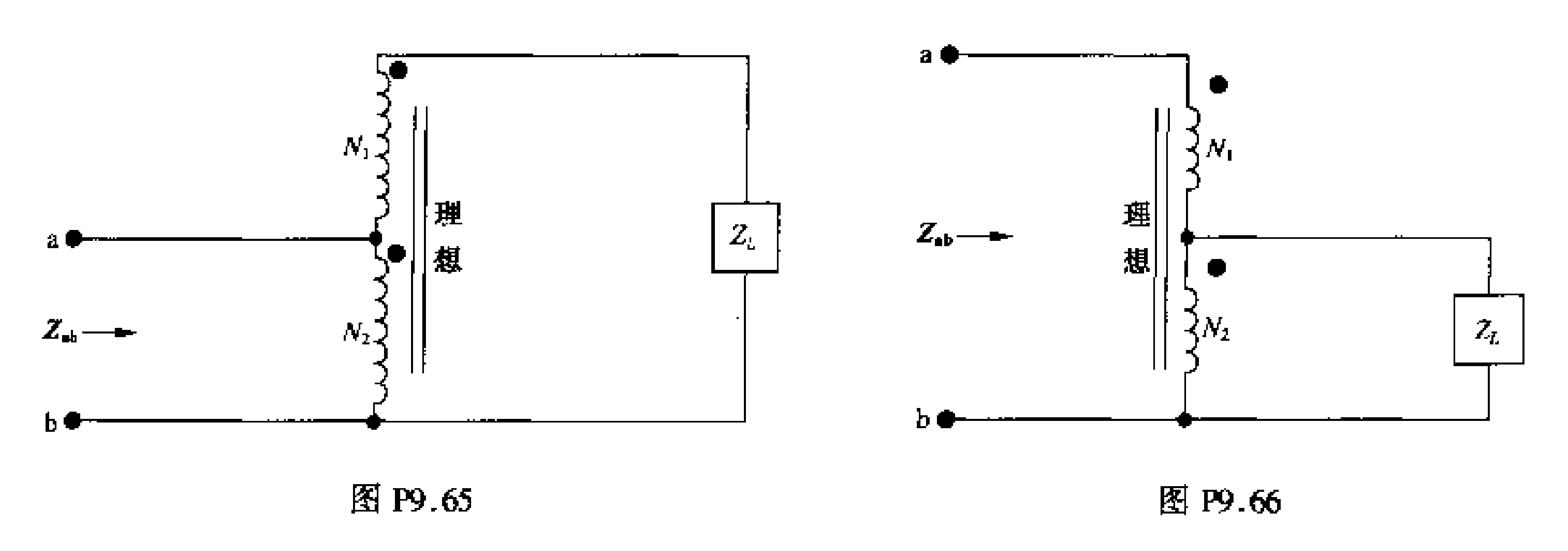


图 P9.65　　　图 P9.66

9.67 公式(9.69)容易让人产生错觉,以为感性负载会使从初级端看进去的阻抗(例如,X_{ab})呈容性,事实上,这是不可能的。试证明:若 X_{ab}是感性的电抗,则 X_{ab}不能为负。

9.68 若 $Z_L = 200 + j150\ \Omega$,求图 P9.68 所示电路的 Z_{ab}。

P9.69 图 P9.69 所示电路,当 R_x 由 0 变为无穷大时,用相量图说明电压 v_o 的幅值和相位角将如何变化。R_x 变化时,电源电压的幅值和相位角保持不变。

9.70 (a) 求图 P9.70 电路的 V_s 和 V_l。

(b) 画出描述 V_s 和 V_l 关系以及负载电压 $440\underline{/0°}$ V 的相量图。

(c) 将容抗为 $-22\ \Omega$ 的电容跨接于负载的两端,负载电压保持不变,为 $440\underline{/0°}$ V,重复(a),(b)两个要求。

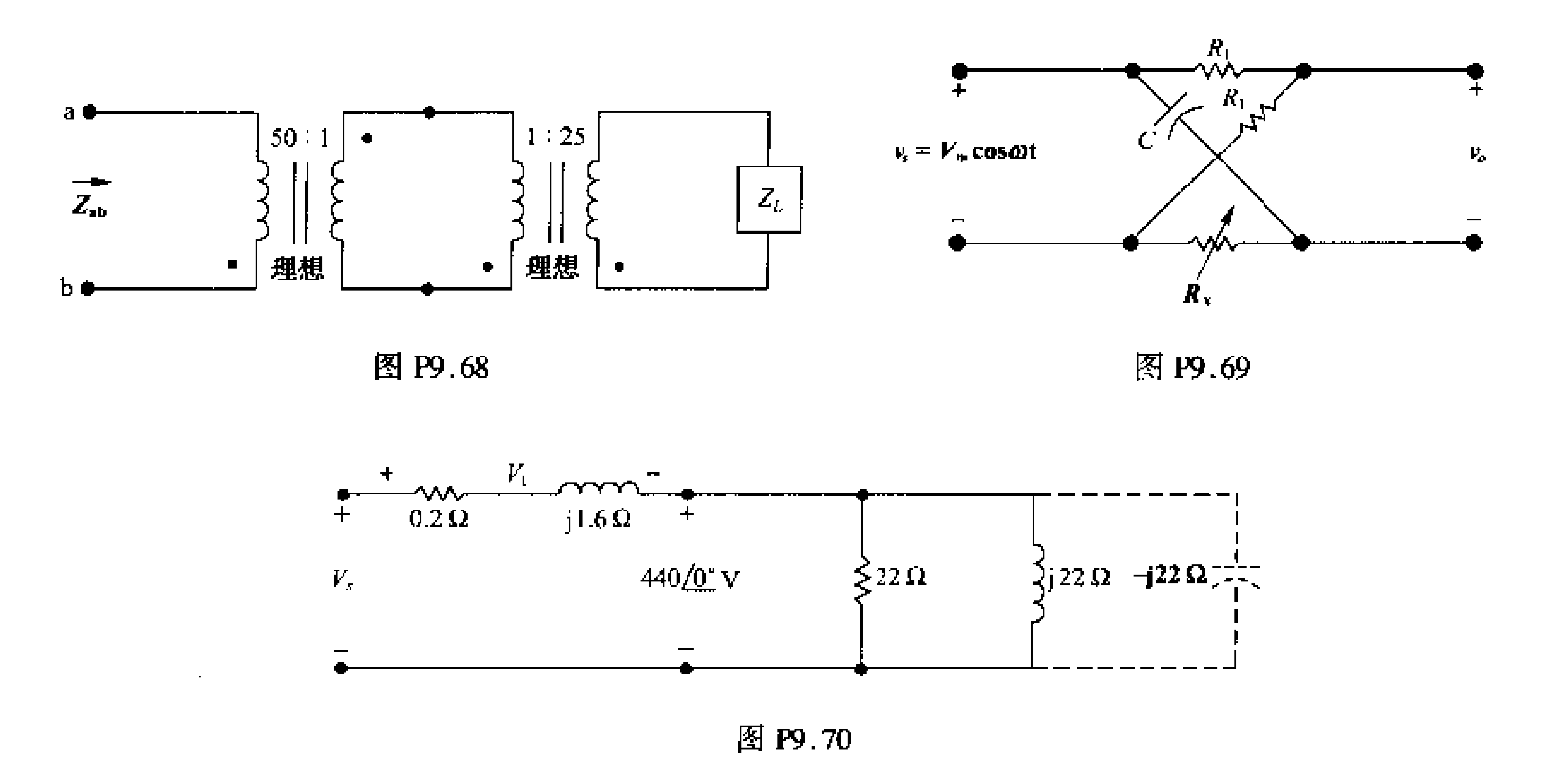


图 P9.68

图 P9.69

图 P9.70

P9.71 图 P9.71 所示为理想运算放大器,理想电压源的电压为 $v_g = 10 \cos 2\times10^5 t$ V。

(a) 要使稳态输出电压为纯正弦波,C_o 的最小值是多少?

(b) 根据(a)中求出的 C_o 值,求 v_o 的稳态表达式。

P M9.72 图 P9.72 所示为理想运放。

(a) 求 $v_o(t)$的稳态表达式。

(b) 在放大器饱和之前,v_g 的最大幅值为多少?

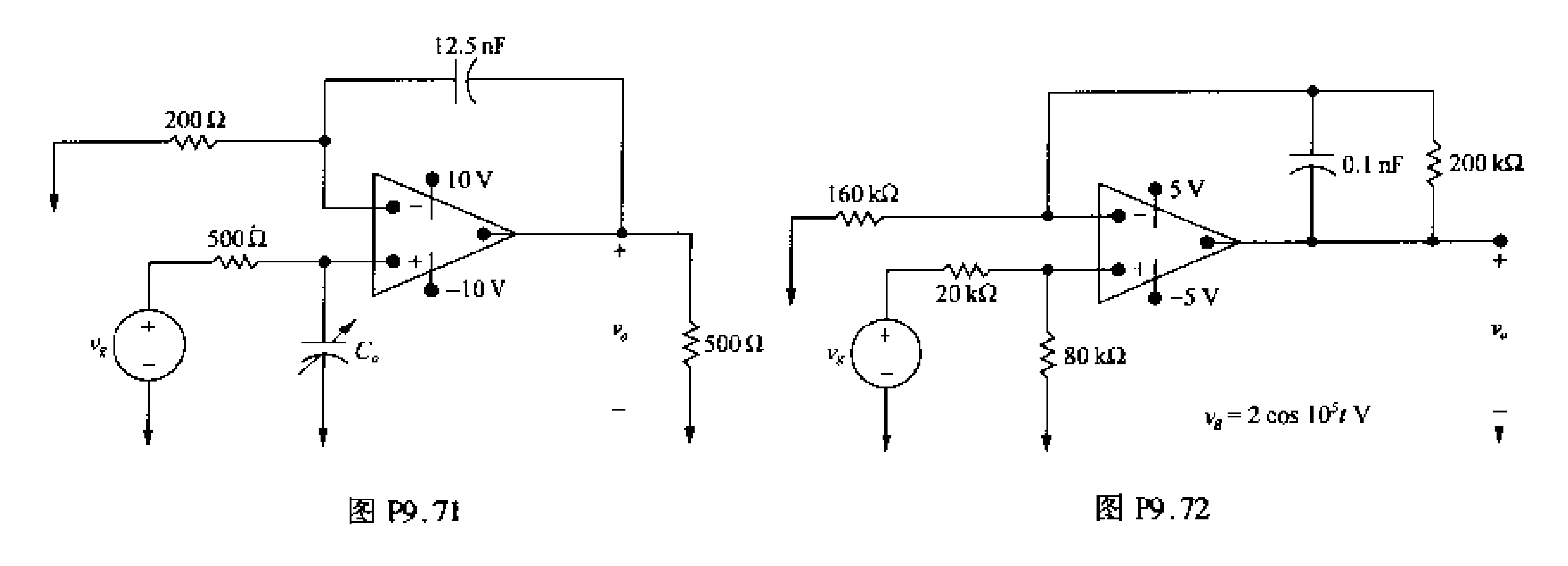


图 P9.71

图 P9.72

P M9.73 图 P9.73 所示正弦电压为 $v_g = 1.2 \cos 100t$ V,若运放为理想运放,求 $v_o(t)$的稳态表达式。

P9.74 将图 P9.73 所示电路中的 1 μF 电容用一可变电容代替,调整电容使输出电压超前输入电压 120°。

(a) 求 C 的值,单位 μF。

(b) 在(a)所求的 C 取值下,求 $v_o(t)$的稳态表达式。

P9.75 图 P9.75,$v_g = 20 \cos 10^6 t$ V,运放为理想运放,求 $v_o(t)$的稳态表达式。

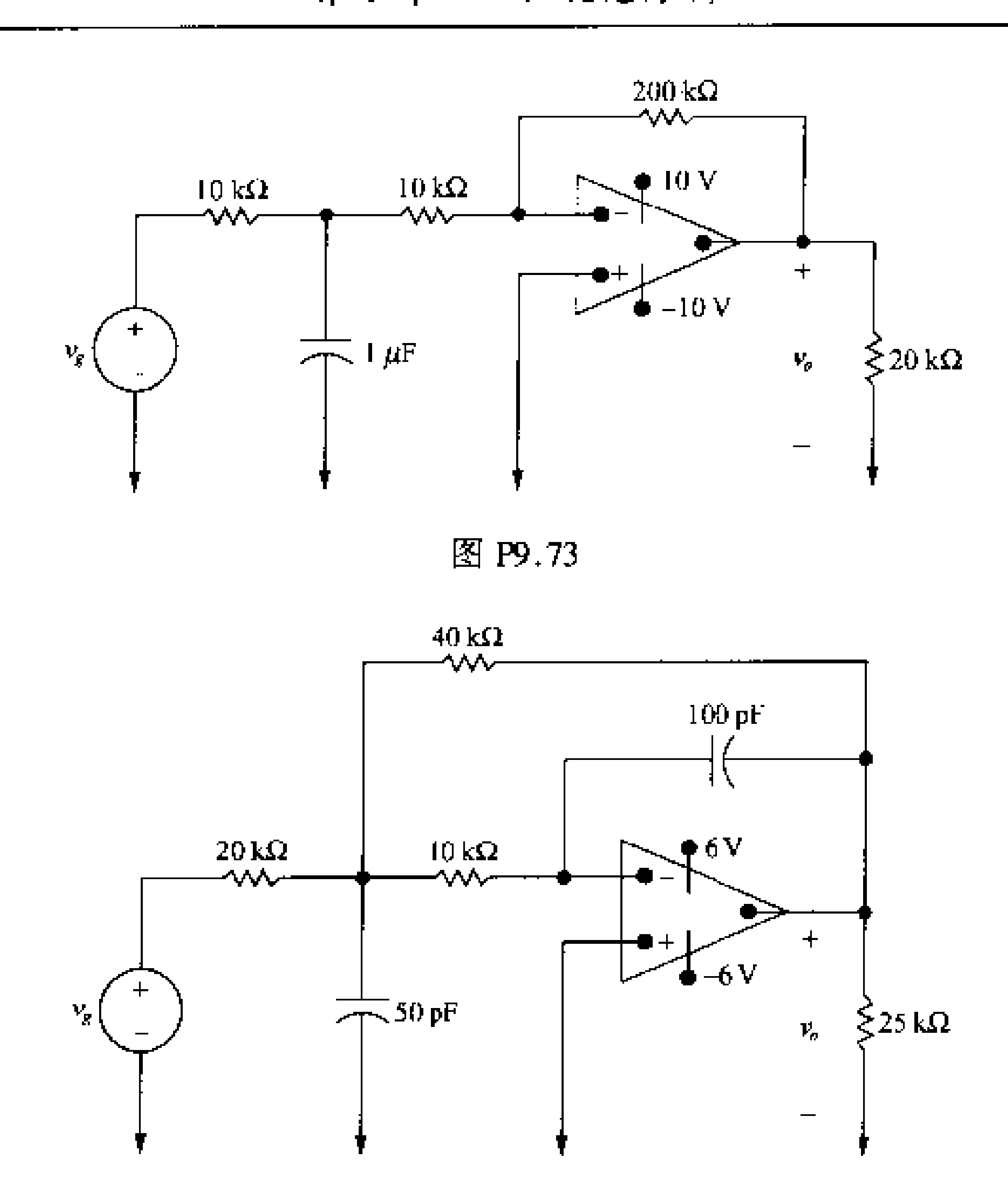


图 P9.73

图 P9.75

9.76 (a) 求图 P9.76 所示电路的输入阻抗 Z_{ab}，将 Z_{ab} 表示为 Z 和 K 的函数，其中 $K=(R_2/R_1)$。

(b) 若 Z 是一个纯电阻元件，由 a，b 两端看进去的电容为多少？

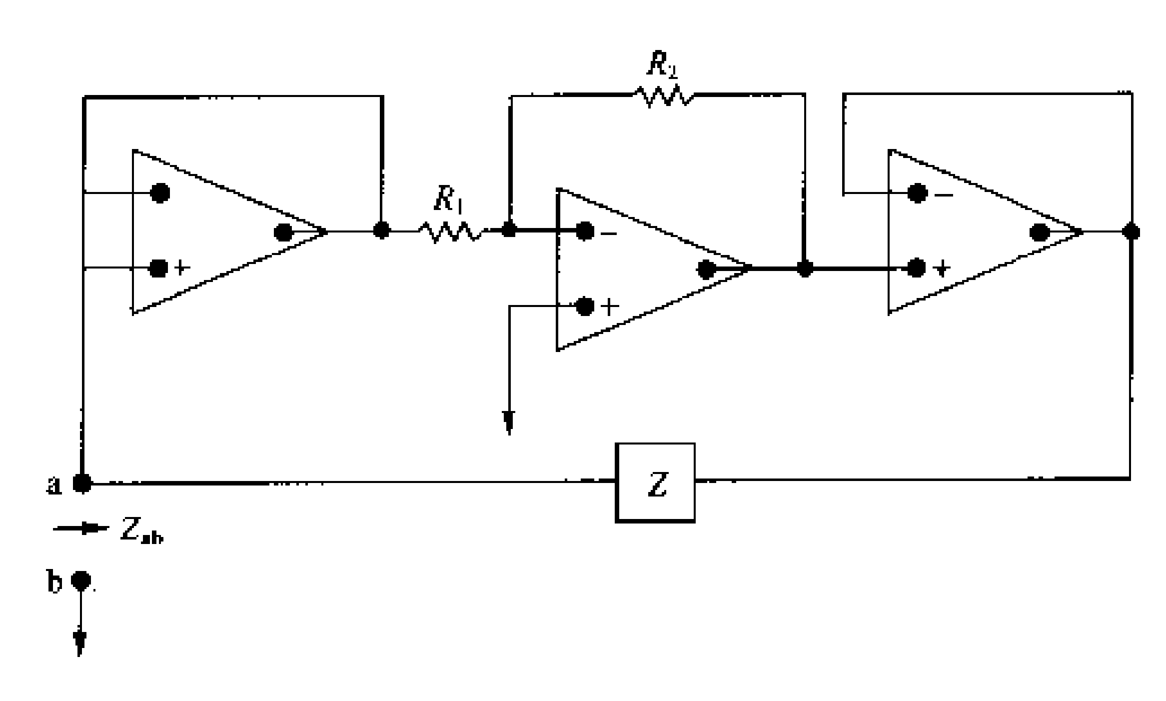


图 P9.76

9.77 读者也许会有这样一个机会，作为一名工程学毕业的学生，为一桩牵涉他人受伤案或者财产损失的法律事件做专家鉴证，会被要求提出一些观点，作为这类问题的一个例子，考虑下面的事件。一天，在野外工作后，农场主回到自己的农场，检查养的猪，让他震惊的是他的猪都死了，原因是由于电阻丝被烧断导致 240 V 的风扇停止工作，空气的不流通导致了猪的死亡，烧断的电阻丝位于农场与供电系统之间，在保

险公司处理这个事件之前,要先弄清楚农场的供电线路连接是否合理。令保险公司的律师疑惑的是,在事件发生的当天,农场主的妻子,刚做过手术,在家修养,整个下午都在看电视,在她去厨房准备晚餐的时候,电表显示正确的时间。律师请读者解决以下问题:(1)为什么厨房里的表以及卧室中的电视在主开关的电阻丝烧断后仍然工作,(2)为什么主开关的第二个电阻丝在风扇停止工作时没被烧断。电阻丝 A 断开之前,可以建立图 P9.77 所示的三相电路接负载后的电路模型,线路上的电容以及互感电容的阻抗忽略不计。

(a) 求电阻丝 A 断开之前的支路电流 I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 和 I_6

(b) 若风扇停止,相当于短路,求电阻丝 A 熔断后的各支路电流。

(c) 电阻丝 A 熔断时将产生瞬间短路电流,解释钟表和电视为什么不受短路电流的影响。

(d) 假设风扇电机上安装有热切换开关,当电机电流过大时,会切断电机电路,解释一下热切换开关应该如何工作。

(e) 解释为什么风扇电机停止后,电阻丝 B 不会烧断。

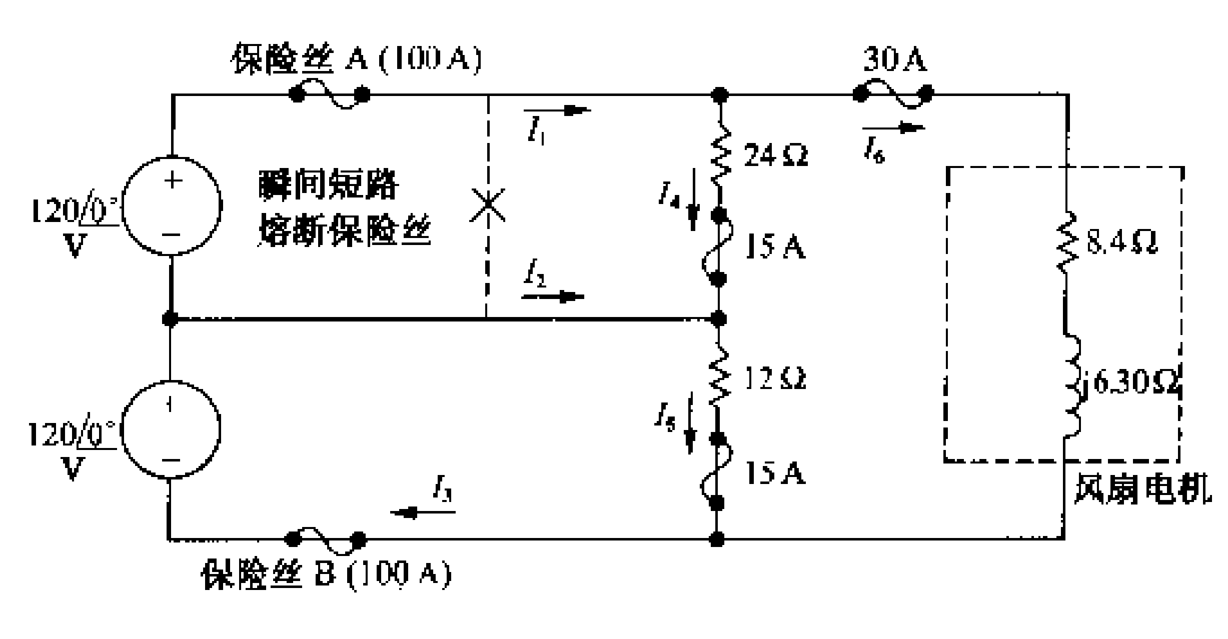


图 P9.77

◆**9.78** 将图 9.58 电路中的 40 Ω 电阻用一个 20 Ω 电阻代替。

(a) 重新计算 2 Ω 电阻支路的电流 I_2。

(b) 重新计算主边电流 I_p。

(c) 在计算前两项的基础上,说明两个 120 V 负载是否需要大小一样。

◆**9.79** 一个供电线路如图 P9.79 所示,在这个模型中,R_3 用来表示 240 V 的设备,电阻 R_1 和 R_2 用来表示 120 V 的设备(如电灯、烤箱和熨斗),电流 I_1 和 I_2 的支路表示火线,电流 I_n 的支路表示零线。分析的目的是要说明零线对电路性能的重要性,分析方法自定。

(a) 若 $R_1 = R_2$,则 $I_n = 0$。

(b) 若 $R_1 = R_2$,则 $V_1 = V_2$。

(c) 若 $R_1 = 60\ \Omega, R_2 = 600\ \Omega, R_3 = 10\ \Omega$,断开零线,求 V_1 和 V_2。

(d) 将零线接上,重复(c)。

(e) 在上述计算的基础上,说明为什么零线上不加保险丝。

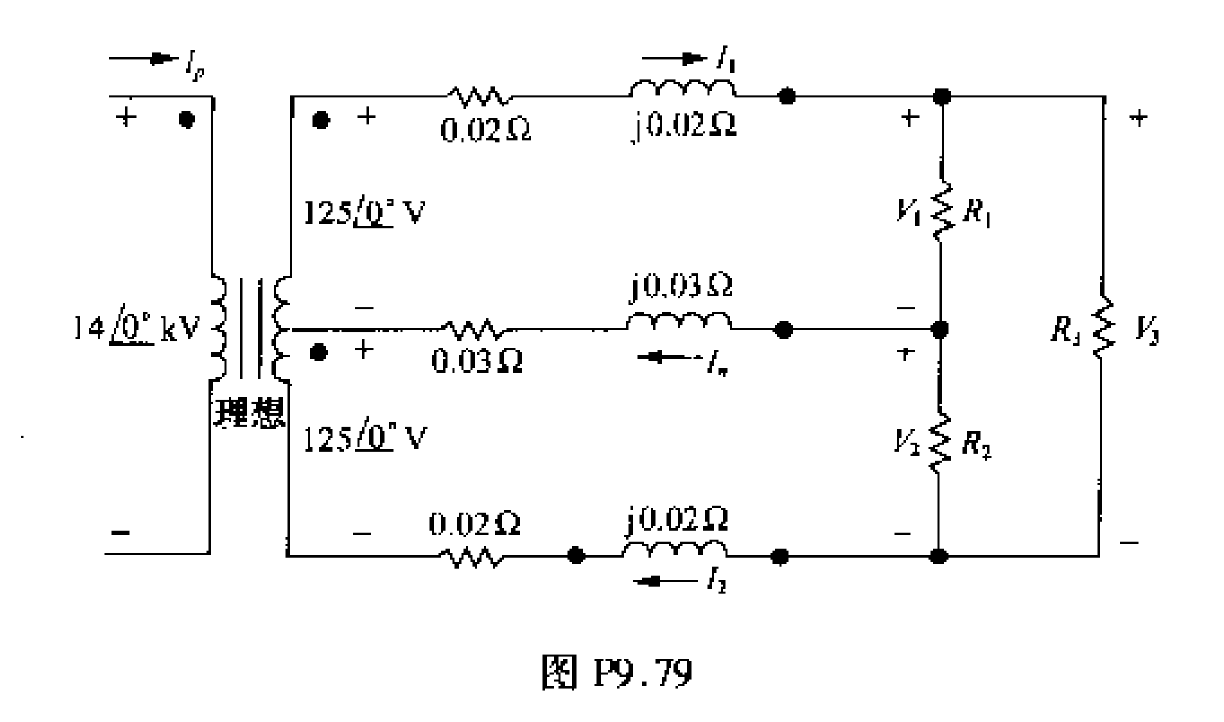


图 P9.79

9.80 (a) 求题 9.79 (c)和(d)的初级线圈电流 I_p。

(b) 根据已知电路特性分析答案的合理性。

第 10 章　正弦稳态功率计算

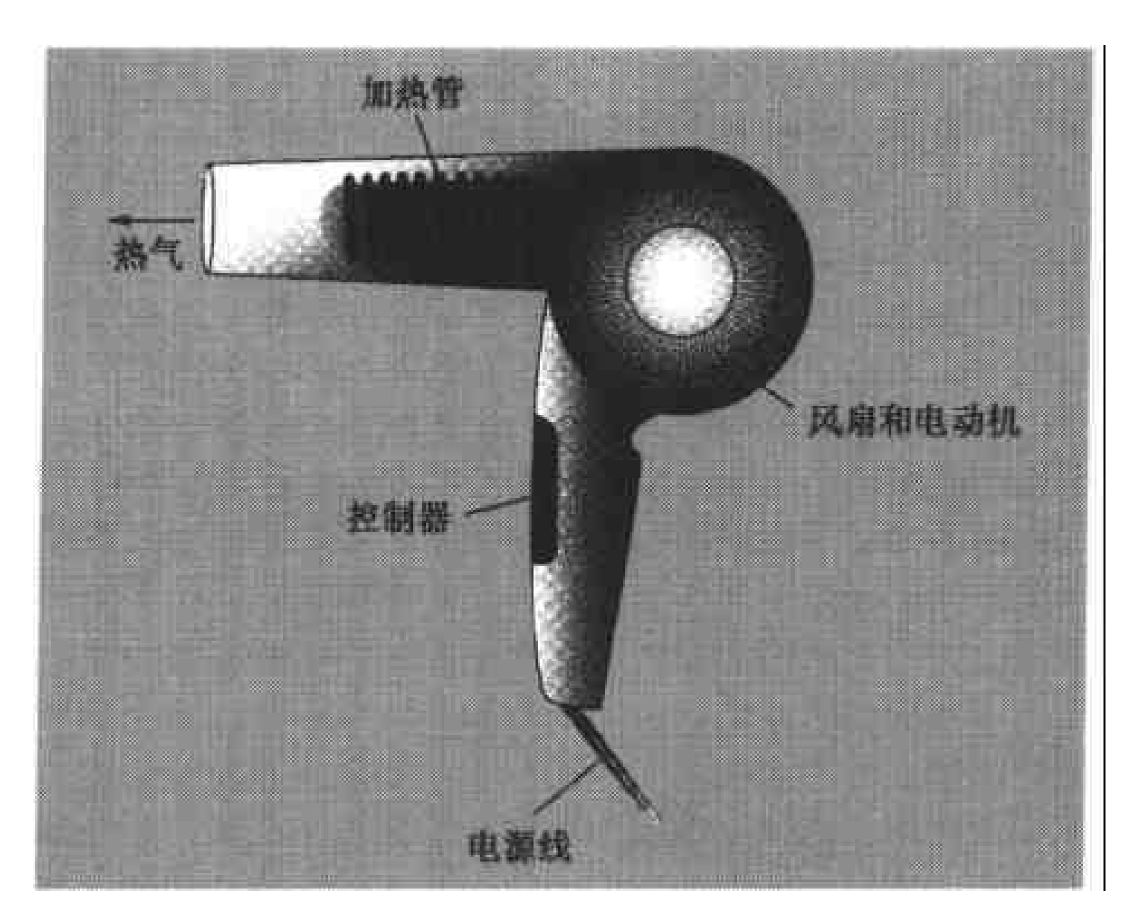
实例

加热器一

第 9 章中，计算了正弦电路的稳态电压和稳态电流。在下一章里将讨论正弦电路的功率，在家中、学校以及商业中使用的设备都是由正弦电源驱动，因此这里研究的方法适用于对日常生活中所接触的大多数电器设备的分析。例如，吹风机是一个常用的电气设备，能将电能转变为热能。其他的实例如电炉、电锅、烤箱、熨斗、热水器、热风机、烘干机等都属于常用设备。设计加热器时，最关心的是功耗，有两方面的原因：加热器的功率越大，则耗电就越多，产生的热量也越大。

不同的电加热器根据所提供的热量的不同有不同的功率输出，读者可能会奇怪为什么电气设备可以输出不同的热量，在这一章的结束时，在应用实例中，举了一个例子，研究了具有三种工作方式的手柄式电吹风机的设计问题，如图所示。

读者将看到这种设计是如何提供三种不同功率从而产生三种不同热量输出的。



正弦稳态功率计算电力工程是电子工程的一个重要分支，能量传输问题的涉及范围非常广，从确定能使设备安全有效运行的功率范围，一直到设计一个机组、变压器以及向居民和工业消费者提供电能都属于电力工程的范围。

几乎所有的电能都是以正弦电压和电流的形式供给的，因此，在学完第 9 章正弦稳态电路

的分析后，在第 10 章讨论正弦稳态的计算非常合理。人们感兴趣的主要是两端子间的平均功率，其他参数，诸如有功功率、复功率和视在功率等也将提到。

我们用前几章中读者已非常熟悉的两个概念来开始和结束这一章的学习：功率守恒(10.1 节)和最大功率传输(10.6 节)。读者会注意到，虽然相对于直流信号来说，正弦函数的计算需要一些额外的数学技巧，功率分析的过程与第 1 章至第 4 章中学习的电路分析方法有许多相似之处。

10.1　瞬时功率

用图 10.1 开始对正弦功率的分析，v 和 i 是正弦稳态信号，在图示参考方向下，任一时刻功率为：

$$p = vi \tag{10.1}$$

这就是瞬时功率。如果电流的参考方向是电压升的方向，则式(10.1)前要加负号，当电压单位为伏特，电流单位为安培时，瞬时功率的单位为瓦特，v 和 i 的表达式为：

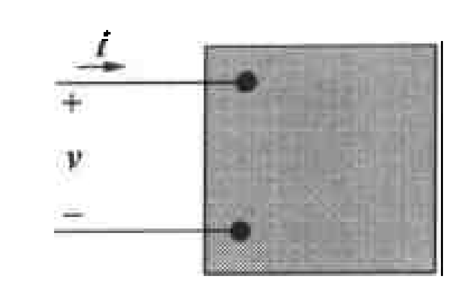


图 10.1　功率计算中表示电路的黑盒子

$$v = V_m\cos(\omega t + \theta_v) \tag{10.2}$$

$$i = I_m\cos(\omega t + \theta_i) \tag{10.3}$$

其中，θ_v 是电压的相位角，θ_i 是电流的相位角。

由于所有的分析都是在正弦稳态下进行的，所以，可以选择一个合适的参考点作为零时刻，工程师发现对于大功率的传输，选择正弦电流为正的最大值时的时间 D 作为零时刻最为方便，因此，对式(10.2)和式(10.3)进行适当变换得：

$$v = V_m\cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \tag{10.4}$$

$$i = I_m\cos\omega t \tag{10.5}$$

将式(104)和式(10.5)代入到式(10.1)，得到瞬态功率表达式：

$$p = V_m I_m\cos(\omega t + \theta_v - \theta_i)\cos\omega t \tag{10.6}$$

由式(10.6)可以直接求得平均功率，但是，如果对式(10.6)简单地运用一下三角变换，可以变成更有用的形式。

由三角函数：

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

将式(10.6)展开，令 $\alpha = \omega t + \theta_v - \theta_i$，$\beta = \omega t$，可得：

$$p = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \theta_v - \theta_i) \tag{10.7}$$

由三角函数：

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

将式(10.7)的第二个分量展开得：

$$p = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)\cos2\omega t - \frac{V_m I_m}{2}\sin(\theta_v - \theta_i)\sin2\omega t \tag{10.8}$$

图 10.2 画出了当 $\theta_v = 60°$，$\theta_i = 0°$时的 v，i 以及 p 间的关系。可以看出瞬时功率的频率是

电压和电流频率的 2 倍，即电压或者电流完成一个周期，则瞬时功率完成两个周期，同时还可以注意到即使网络是无源网络，瞬时功率在一个周期的某一时间段里也是负的，对于一个完全无源网络，负功率意味着存贮于电容或者电感中能量的释放。正弦稳态电路瞬时功率随时间变化，可以用来解释某些马达驱动的设备(如电冰箱)的振动，这些设备需要使用减震马达来防止过大的振动。

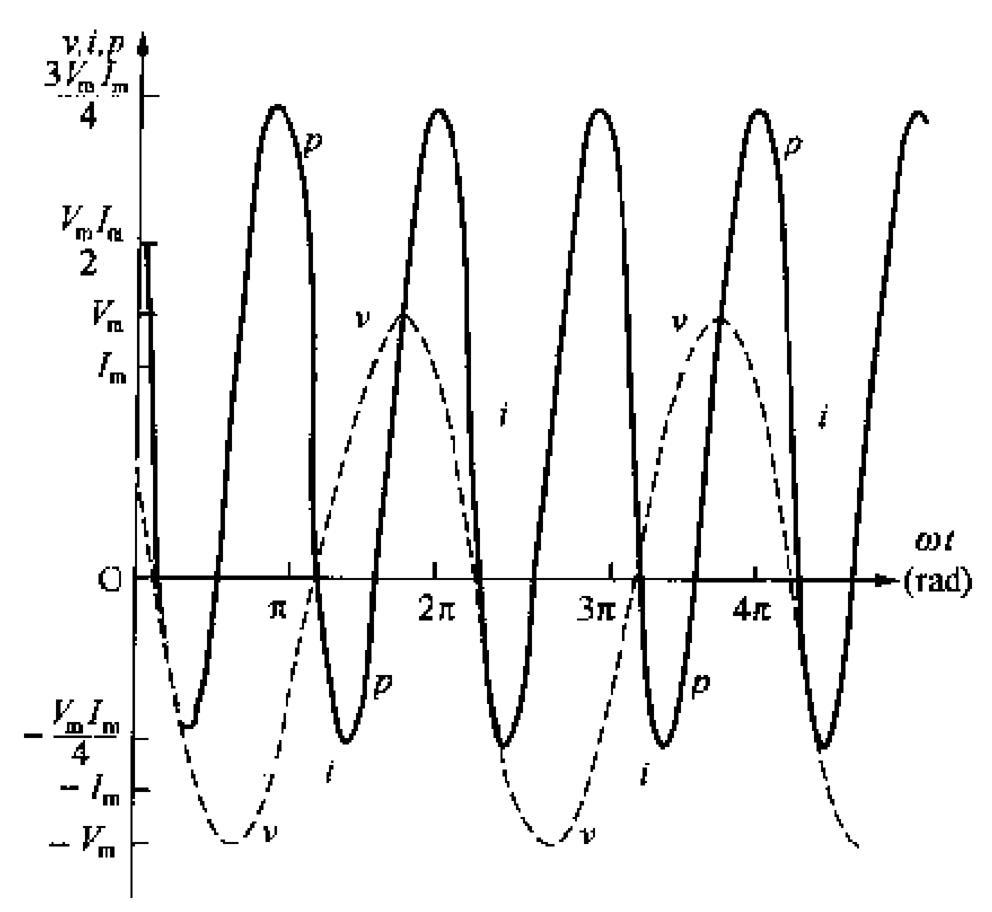


图 10.2 正弦稳态下的瞬时功率、电压和电流与 ωt 的关系曲线

下面用式(10.8)求图 10.1 所示电路两端的平均功率，同时引出无功功率的概念。

10.2 平均功率和无功功率

式(10.8)具有三个分量，重写为：

$$p = P + P\cos 2\omega t - Q\sin 2\omega t \tag{10.9}$$

其中：

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i) \tag{10.10}$$

$$Q = \frac{V_m I_m}{2}\sin(\theta_v - \theta_i) \tag{10.11}$$

P 称为平均功率，Q 称为无功功率，平均功率有时又称为实功率，因为它描述了电路将电能转变为其他形式能量的功率，由于这两个参数可以相互变换，所以，这里主要采用平均功率。

P 被称为平均功率的原因很简单，用公式表示为：

$$p = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p\,\mathrm{d}t \tag{10.12}$$

其中，T 为正弦信号的周期，积分上下限表明，可以在任意时刻 t_0 开始积分，但必须是在一个周期上积分(也可以在 n 个周期内积分，其中 n 为整数，此时的分母应变为 $1/nT$)。

将式(10.9)代入到式(10.12)中，计算即可求得平均功率，$\cos 2\omega t$ 和 $\sin 2\omega t$ 在一个周期上

的积分为零,所以,平均功率为式(10.9)右边的第一个分量,因此,平均功率即为式(10.10)。

也可以通过将电路设为纯电阻、纯电感、纯电容的电路,可以更好地理解式(10.9)中各功率参数的含义及其相互关系。

10.2.1　纯电阻电路的功率

若两端点间的电路为纯电阻电路,则电压和电流相同,即 $\theta_v=\theta_i$,式(10.9)变为:

$$p = P + P\cos 2\omega t \tag{10.13}$$

式(10.13)描述的瞬时功率又称为瞬时实功率,图 10.3 描述了当 $\omega=377$ rad/s 时的纯电阻电路的瞬时功率。由定义知,平均功率 P 为一个周期的平均值,因此,由图可以直接看出平均功率为 $P=1$,同时,由图 10.3 和式(10.13)也可以看到瞬时功率不可能为负。换句话说,能量不可能从一个纯电阻电路中输出,即所有的电能都以热能的形式消耗掉了。

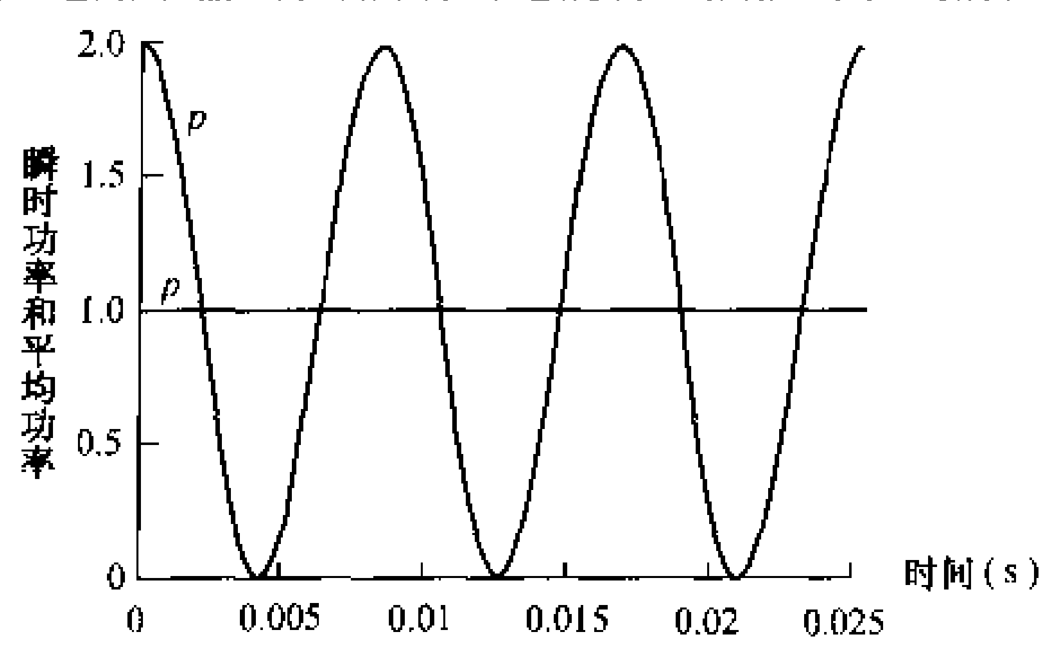


图 10.3　纯电阻电路的瞬时实功率和平均功率

10.2.2　纯电感电路的功率

若两端间的电路为纯电感电路,则电压和电流的相位差 90°,确切地说,电流滞后电压 90°(即 $\theta_i=\theta_v-90°$),因此,$\theta_v-\theta_i=90°$,瞬时功率的表达式为:

$$p = -Q\sin 2\omega t \tag{10.14}$$

对于纯电感电路,平均功率为零,因此,电能没有转变为其他形式的能量,纯电感电路上的瞬时功率始终是以 2ω 的频率在电路以及驱动源电路之间转换。换句话说,当 p 为正时,能量存贮于电感元件的磁场中,当 p 为负时,能量从磁场中释放。

与纯电感电路相关的功率是无功功率 Q,无功功率名称的由来是由电感的无功特性得出的,电感的阻抗为纯虚数。由于平均功率 P 和无功功率 Q 具有相同的量纲,为了区分,用瓦特(W)作为平均功率的单位,乏(Var)作为无功功率的单位。图 10.4 画出了 $\omega=377$ rad/s时,纯电感单口网络的瞬时功率。

10.2.3　纯电容电路的功率

若单口网络为纯电容性,则电压和电流的相位差 90°,电流超前电压 90°(即 $\theta_i=\theta_v+90°$),因此,$\theta_v-\theta_i=-90°$,瞬时功率的表示式为:

$$p = Q\sin 2\omega t \tag{10.15}$$

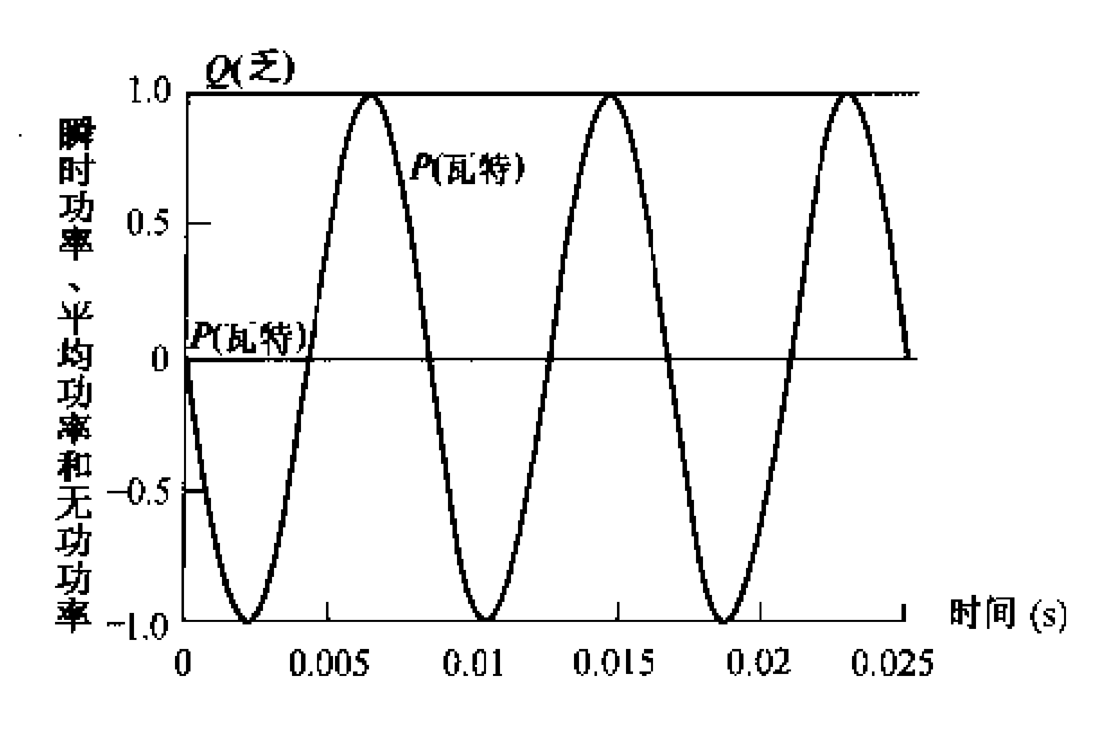


图 10.4 纯电感网络的瞬时实功率、平均功率和无功功率

平均功率为零,因此,没有发生电能与其他形式能量间的转换。纯电容电路中,能量始终是在驱动电源以及容性元件的电场间相互移动,图 10.5 画出了 $\omega = 377$ rad/s 时,纯电容单口网络的瞬时功率。

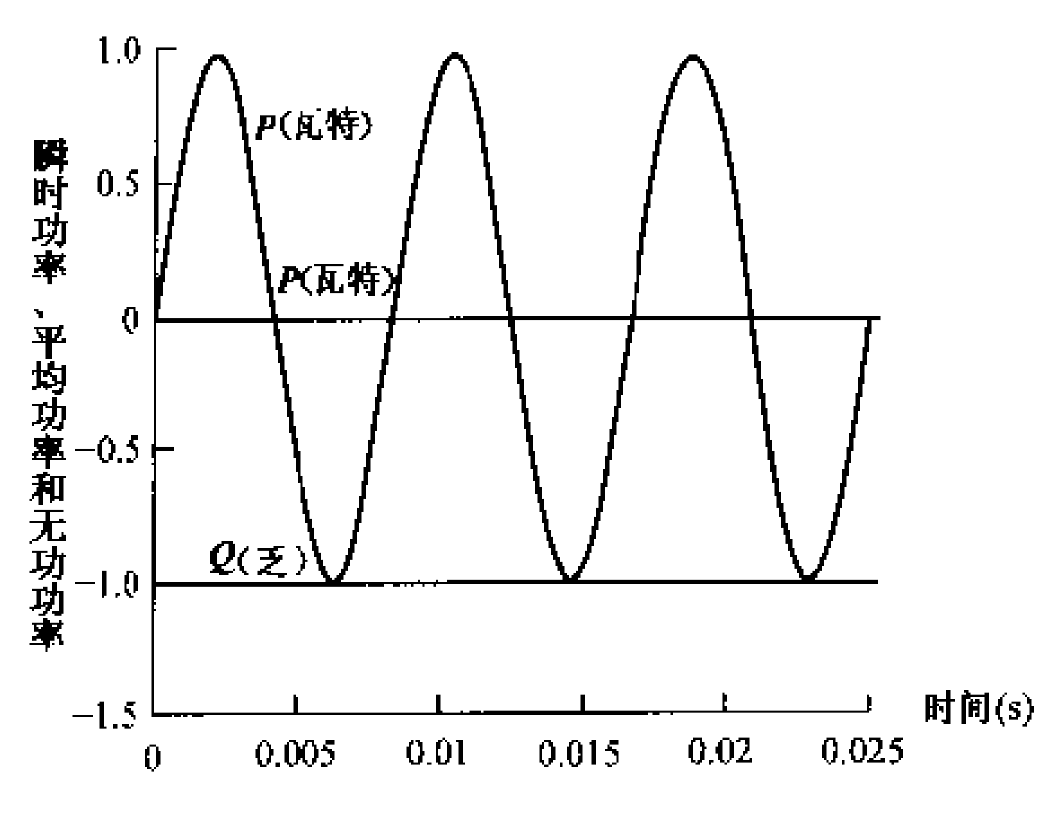


图 10.5 纯电容网络的瞬时实功率、平均功率

应当注意的是,以电流作为参考得出的电感的无功功率为正($\theta_v - \theta_i = 90°$),电容的无功功率为负($\theta_v - \theta_i = -90°$)。电力工程师用 θ 的代数符号来表明这一不同,目的是为了说明电感吸收无功功率而电容释放无功功率,在后面的章节中将继续讨论这一特性。

10.2.4 功率因数

在计算平均功率和无功功率时用到的角 $\theta_v - \theta_i$ 称为功率因数角,这个角的余弦函数称为功率因数,简写为 pf,正弦函数称为无功因数,简写为 rf,因此:

$$\mathrm{pf} = \cos(\theta_v - \theta_i) \tag{10.16}$$

$$\mathrm{rf} = \sin(\theta_v - \theta_i) \tag{10.17}$$

注意:由功率因数并不能确定功率因数角的大小,因为 $\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(\theta_i - \theta_v)$,为了完整地描述功率因数角,用相位滞后功率因数和超前功率因数来描述,滞后功率因数表示电流滞

后电压——是感性负载，超前功率因数表示电流超前电压——是容性负载，功率因数和无功因数都是描述电路负载的有用的参数。

例 10.1 在数学计算的基础上，说明 P 和 Q 的物理含义。

例 10.1 (a) 计算图 10.6 所示单口网络平均功率和无功功率，若：

$$v = 100\cos(\omega t + 15°)\ \text{V}$$

$$i = 4\sin(\omega t - 15°)\ \text{A}$$

(b) 说明单口网络是吸收还是释放平均功率？

(c) 说明单口网络是吸收还是释放无功功率？

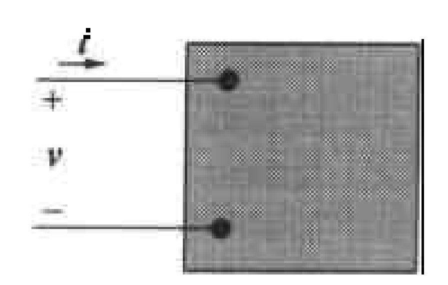


图 10.6 计算平均功率的两端子

解：

(a) 因为 i 为正弦函数，所以，在计算 P 和 Q 之前，先将 i 表示为余弦函数：

$$i = 4\cos(\omega t - 105°)\ \text{A}$$

由式(10.10)和式(10.11)直接计算 P, Q 得：

$$P = \frac{1}{2}(100)(4)\cos[15 - (-105)] = -100\ \text{W}$$
$$Q = \frac{1}{2}100(4)\sin[15 - (-105)] = 173.21\ \text{VAR} \quad (3)$$

(b) 由于图 10.6 中采用的是有源符号表示方法，因此，-100 W 意味着平均功率是从单口网络释放出来的。

(c) 因为 Q 为正数，所以，单口网络吸收无功功率。

练习题

10.1 对于下列给出的电压和电流值，计算如图所示的单口网络 A 和 B 的实功率以及无功功率，并且说明实功率和无功功率是从 A 流入 B 还是从 B 流入 A。

a) $v = 100\cos(\omega t - 45°)$ V, $i = 20\cos(\omega t + 15°)$A。

b) $v = 100\cos(\omega t - 45°)$ V, $i = 20\cos(\omega t + 165°)$A。

c) $v = 100\cos(\omega t - 45°)$ V, $i = 20\cos(\omega t - 105°)$A。

d) $v = 100\cos\omega t$ V, $i = 20\cos(\omega t + 120°)$A。

答：(a) $P = 500$ W(A 到 B)，$Q = -866.03$ VAR(B 到 A)，(b) $P = -866.03$ W (B 到 A)，$Q = 500$ VAR (A 到 B)，(c) $P = 500$ W(A 到 B)，$Q = 866.03$ VAR(A 到 B)，(d) $P = -500$ W(B 到 A)，$Q = -866.03$VAR (B 到 A)。

10.2 计算图 10.6 所示单口网络的功率因数和无功因数，其中，电压和电流值如例 10.1 所示。提示：用 $-i$ 来计算功率因数和无功因数。

答：pf = 0.5, rf = 0.886。

10.2.5 应用范围

平均功率常常用来表示家用电器的功率，表 10.1 列出了一些常用家用电器的平均功率以及大约每年的耗电量。耗电量是通过估算每年的使用时间得出的。例如，估计咖啡壶每年工作 140/1.2(或 116.67)小时，大约每天使用 19 分钟。

表 10.1 家用电器每年需要的电能

电器	平均功率	估算的每年耗电量(kWh)[a]
厨房用具		
咖啡机	1 200	140
洗碗机	1 201	165
蛋锅	516	14
煎锅	1 196	100
搅拌器	127	2
微波炉	1 450	190
带灶的烤炉	12 200	596
烤箱	1 146	39
洗熨		
烘干机	4 856	993
自动洗衣机	512	103
热水器	2 475	4 219
安全型	4 474	4 811
室内环境调节		
空调(房间)	860	860[b]
除湿器	257	377
电扇(循环)	88	43
加热器(便携式)	1 322	176
保健和美容		
吹风机	600	25
剃须刀	15	0.5
日光灯	279	16
家庭娱乐		
收音机	71	86
彩色电视(电子管式)	240	528
彩色电视(晶体管式)	145	320
家用器皿		
电表	2	17
吸尘器	630	46

a 正常使用。在用这些数据做计划时,诸如特殊器具的尺寸、使用的地理面积以及是否单独使用等因素都必须考虑进去,因为在同一时刻不是所有的设备都工作,因此,瓦特没有相加性。

b 每年 1000 小时的使用。面积和器件的尺寸不同,数据会发生很大的变化,见 EEI - Pub # 76 - 2"空调使用的研究"作为估算的标准。

例 10.2 在表 10.1 的基础上,说明了在不增加居民电流负载能力的条件下是否可以同时使用 4 个常用电器。

例 10.2 典型的厨房开关是由 12 # 导线以及 20 A 的电阻丝或者 20 A 的熔断器构成。假设 120 V 的设备,如:咖啡壶、蛋锅、煎锅和烤箱在同一时间工作,电路会因为负荷太高而断开吗?

解:

由表 10.1 得到四个电器的总平均功率为:

$$P = 1\ 200 + 516 + 1\ 196 + 1\ 146 = 4\ 058\ \text{W}$$

线路上的电流为：

$$I_{\text{eff}} = \frac{4\ 058}{120} \approx 33.82\ \text{A}$$

所以，线路会断开。

练习题

10.3 (a) 一个大学生坐在日光灯下，边用吹风机吹头发边看足球赛，与此同时，她的室友正在装有空调的卧室里用吸尘器清理地毯，如果所有的设备都是由 120 V 的支路供电，且熔断器为 15 A，问熔断器会烧断，从而中断比赛的观看吗？

(b) 如果这个学生将日光灯熄灭，同时她的室友不使用吸尘器，她可以继续看比赛吗？

答：(a) 是的，因为熔断器上要流过的电流为 22 A；(b) 是的。因为这时的电流为 14 A。

10.4 (a) 一个带有显示器和键盘的计算机在 115 V(方均根值)电压下工作，功率为 40 W。计算此时电流的有效值。

(b) 激光打印机在 115 V(方均根值)电压下的功率为 90 W，若(a)中计算机上的磁盘驱动器也插在同一个的开关上，计算此时开关上电流的有效值。

答：(a) 0.35A，(b)1.13 A。

10.3 方均根值及功率计算

在 9.1 节介绍正弦电压(或者电流)的方均根时，说明方均根在功率计算中担任着重要的角色，现在就让我们分析一下。假设电阻两端的电压为正弦电压，如图 10.7 所示，求电阻上的平均功率。由式(10.12)得：

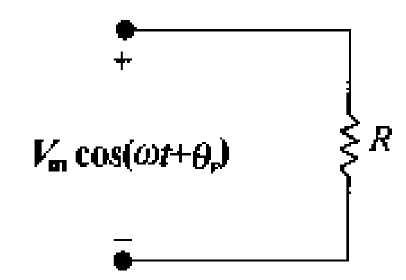


图 10.7　加在电阻两端的正弦电压

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{V_m^2\cos^2(\omega t+\phi_v)}{R}\,dt = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}V_m^2\cos^2(\omega t+\phi_v)\,dt\right] \tag{10.18}$$

比较式(10.18)和式(9.5)可知，电阻 R 上的平均功率就是电压方均根值的平方除以 R，即：

$$P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \tag{10.19}$$

如果电阻上的电流为正弦电流 $I_m\cos(\omega_t+\varphi_i)$，则 R 的平均功率为：

$$P = I_{\text{rms}}^2 R \tag{10.20}$$

方均根值也称电压(或者电流)的有效值。方均根值有一个有趣的特性，对于给定的等效电阻负载 R 和时间周期 T，正弦电源供给电阻的能量等于与正弦电源方均根相同的直流电源供给电阻 R 的能量。例如，假设负载相同，则 100 V 的直流电源在 T 秒内提供的能量与方均根为 100 V 的正弦电源提供的能量相同(见习题 10.3)。

图 10.8 说明了这一等效性，也就是说两个电源产生的影响相同，因此，方均根值也称为有效值(用 eff 表示)。

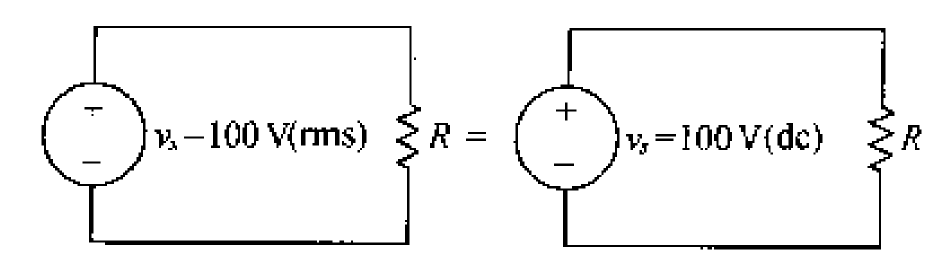


图 10.8　有效值为 v_s 的电压对电阻 R 提供的功率与直流电压 V_s 的相同

式(10.10)给出的平均功率和式(10.11)给出的无功功率可以用有效值表示：

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{eff} I_{eff}\cos(\theta_v - \theta_i) \tag{10.21}$$

和

$$Q = V_{eff} I_{eff}\sin(\theta_v - \theta_i) \tag{10.22}$$

有效值在正弦信号的功率计算中非常有用，因此，一般电路中的电压、电流以及各种功率设备都是以有效值的形式给出的。例如，居住区线路上的电压一般是 240 V/120 V，这个电压值就是指电力公司供给的正弦电压的方均根值，其中两种电压值分别给低压电器(如电视)和高压电器(如电炉)供电；各种电器，如电灯、熨斗、烤箱等在标识牌上标识的也都是方均根值，例如，一个 120 V，100 W 的灯泡电阻为 $120^2/100$，或者说 144 Ω，产生一个方均根值为 120/144，即 0.833 A 的电流，电流的峰值为 $0.833\sqrt{2}$，即 1.18 A。

正弦函数的相量变换也可用方均根的形式给出，方均根相量的幅值等于正弦函数的方均根，如果一个相量是方均根相量，会明确地予以说明，或者在向量上加一个下脚标 rms 或者是 eff，如式(10.21)所示。

例 10.3 给出方均根值在功率计算中的应用。

例 10.3　(a) 正弦电压的幅值为 625 V，加到 50 Ω 电阻两端，求电阻的平均功率。

(b) 通过先求电阻电流，重复(a)。

解：

(a) 正弦电压的方均根值为 $625/\sqrt{2}$，即大约 441.94 V，由式(10.19)，50 Ω 电阻上的平均功率为：

$$P = \frac{(441.94)^2}{50} = 3906.25 \text{ W}$$

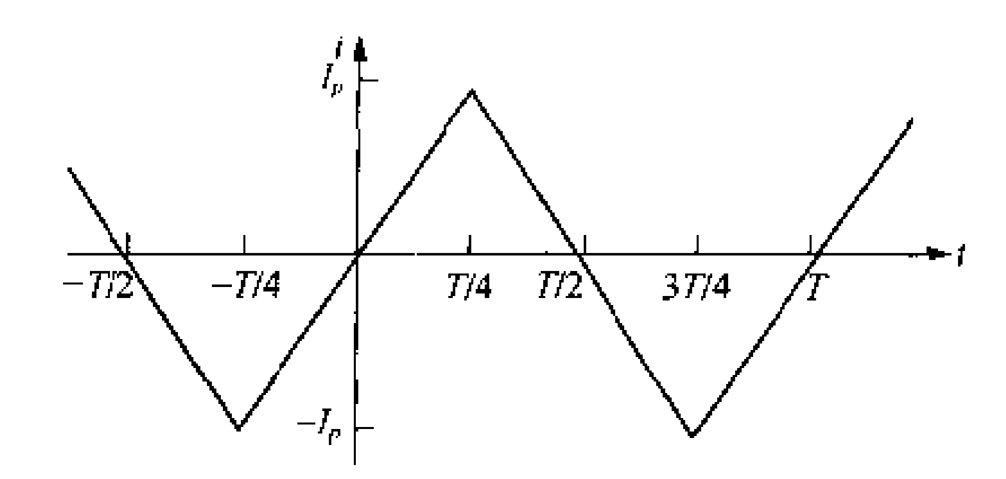
(b) 电阻电流的幅值为 625/50，即 12.5 A，方均根值为 $12.5/\sqrt{2}$，即大约 88.4 A，因此，电阻的平均功率为：

$$P = (8.84)^2 50 = 3906.25 \text{ W}$$

练习题

10.5　例 9.4 中的周期三角波，如图所示，峰值为 180 mA，加在 5 kΩ 的电阻上，求平均功率。

答：54 W。



10.4　复功率

在介绍正弦稳态电路的实功率和无功功率的其他计算方法之前，有必要介绍一下复功率。复功率是实功率和无功功率的复数和，即：

$$S = P + \mathrm{j}Q \tag{10.23}$$

可以直接利用电路的电压相量和电流相量来计算复功率，因此，式(10.23)可以用来计算平均功率和无功功率，因为，$P = \mathrm{Re}\{S\}$ 和 $Q = \mathrm{Im}\{S\}$。

复功率与平均功率和无功功率的量纲相同，为了将复功率与之区分开，复功率的单位为伏－安(VA)，因此，用伏－安表示复功率，瓦特表示平均功率，乏表示无功功率，总结如表 10.2 所示。

表 10.2　三种功率及其单位

功率	单位
复功率	伏－安
平均功率	瓦特
无功功率	乏

使用复功率的另一个优点是由它的几何特性决定的。当用式(10.23)计算时，可以将 P，Q 和 $|S|$ 作为直角三角形的三个边，如图 10.9 所示。可以非常容易地推出功率三角形的角 θ 是功率因数 $\theta_v - \theta_i$，由图 10.9 可知：

$$\tan\theta = \frac{Q}{P} \tag{10.24}$$

又由 P 和 Q 的定义式(分别见式(10.10)和(10.11))得：

$$\begin{aligned}\frac{Q}{P} &= \frac{(V_m I_m/2)\sin(\theta_v - \theta_i)}{(V_m I_m/2)\cos(\theta_v - \theta_i)} \\ &= \tan(\theta_v - \theta_i)\end{aligned} \tag{10.25}$$

|S|=视在功率
Q=无功功率
θ
P=平均功率

图 10.9　功率三角形

所以，$\theta=\theta_v-\theta_i$。由直角三角形的几何关系可知，功率三角形的四维(三个边和一个功率因数角)，如果知道了其中的两个值，就可以确定其余的两个值。

复功率的模称为视在功率，即：

$$|S|=\sqrt{P^2+Q^2} \tag{10.26}$$

同复功率一样，视在功率的单位为 VA，设计一个将电能转变为其他形式能量的设备，其对视在功率的需求比对平均功率的需求还要重要。平均功率表示能量转换设备的有用输出，视在功率表示提供这样的平均功率需要多大的伏－安容量。由图 10.9 的功率三角形可以看出，除非功率因数角为 0°(即设备为纯电阻性，pf = 1，$Q=0$)，否则设备的视在功率大于平均功率。由例 10.6 可以看出，当功率因数接近于 1 时，无功功率趋近于零。

许多有用的电器设备(诸如冰箱、电扇、空调、荧光灯和洗衣机)和大多数工业负载都是工作在滞后的功率因数情况下，通常需要通过在设备上增加一个电容或者在线路上增加电容来修正功率因数，后一种方法常用在大工业负载上。本章的许多题目要求读者计算修正功率因数，以提高电路的性能。

例 10.4　给出了用功率三角形来计算负载参数的例子。

例 10.4　负载工作在 240 Vrms 下，吸收的平均功率为 8 kW，滞后功率因数为 0.8。

(a) 求负载的复功率。

(b) 求负载阻抗。

解：

(a) 由于功率因数滞后，所以，负载为感性负载，无功功率为正。由图 10.10 功率三角形得：

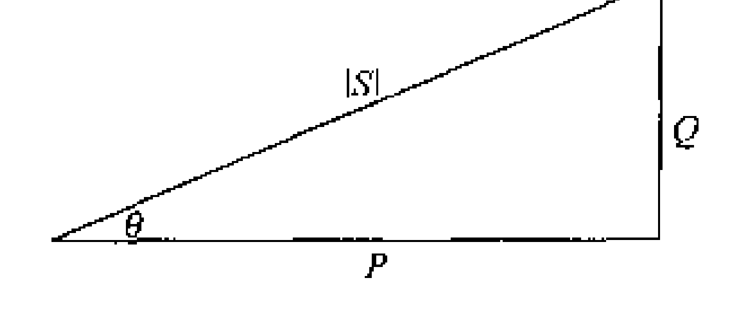


图 10.10　功率三角形

$$P=|S|\cos\theta$$
$$Q=|S|\sin\theta$$

因为 $\cos\theta=0.8$，$\sin\theta=0.6$，所以：

$$|S|=\frac{P}{\cos\theta}=\frac{8\text{kW}}{0.8}=10\text{ kVA}$$

$$Q=10\sin\theta=6\text{ kVAR}$$

和

$$S=8+\text{j}6\text{ kVA}.$$

(a) 由负载复功率的计算可知 $P=8$ kW，由式(10.21)可知：

$$\begin{aligned}P&=V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos(\theta_v-\theta_i)\\&=(240)I_{\text{eff}}(0.8)\\&=8000\text{ W}\end{aligned}$$

解 I_{eff} 得：

$$I_{\text{eff}}=41.67\text{ A}$$

负载阻抗角即为功率因数角：

$$\theta=\cos^{-1}(0.8)=36.87°$$

由于功率因数滞后，负载为感性，则 θ 为正。负载阻抗的幅值由电压幅值与电流幅值之比得到：

$$|Z|=\frac{|V_{eff}|}{|I_{eff}|}=\frac{240}{41.67}=5.76$$

因此：

$$Z=5.76\underline{/36.87°}\Omega=4.608+j3.456\ \Omega$$

10.5 功率计算

下面推导求实功率、无功功率和复功率的公式。将式(10.10)、式(10.11)和式(10.23)合并得：

$$\begin{aligned}S&=\frac{V_mI_m}{2}\cos(\theta_v-\theta_i)+j\frac{V_mI_m}{2}\sin(\theta_v-\theta_i)\\&=\frac{V_mI_m}{2}[\cos(\theta_v-\theta_i)+j\sin(\theta_v-\theta_i)]\\&=\frac{V_mI_m}{2}e^{j(\theta_v-\theta_i)}=\frac{1}{2}V_mI_m\underline{/(\theta_v-\theta_i)}\end{aligned}\qquad(10.27)$$

采用正弦电压和电流的有效值，式(10.27)变为：

$$S=V_{eff}I_{eff}\underline{/(\theta_v-\theta_i)}\qquad(10.28)$$

式(10.27)和式(10.28)是功率计算中的重要关系式，这些关系式表明，若已知单口网络两端的电压相量和电流相量，则复功率可以由电压相量和电流相量的共轭复数乘积的一半求得，也可以由电压的均方根和电流均方根的共轭复数的乘积求得。图 10.11 所示的电压相量和电流相量可以用下式说明：

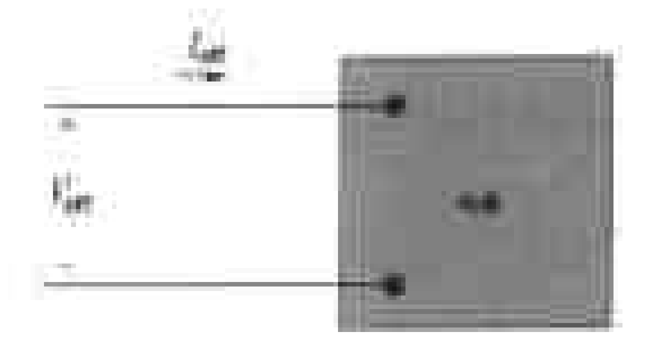


图 10.11　单口网络的电压相量和电流相量

$$\begin{aligned}S&=V_{eff}I_{eff}\underline{/(\theta_v-\theta_i)}\\&=V_{eff}I_{eff}e^{j(\theta_v-\theta_i)}\\&=V_{eff}e^{j\theta_v}I_{eff}e^{-j\theta_i}\\&=V_{eff}I_{eff}^*\end{aligned}\qquad(10.29)$$

注意：$I_{eff}^*=I_{eff}e^{-j\theta_i}$ 是由欧拉定理以及 $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ 得到：

$$\begin{aligned}I_{eff}e^{-j\theta_i}&=I_{eff}\cos(-\theta_i)+jI_{eff}\sin(-\theta_i)\\&=I_{eff}\cos(\theta_i)-jI_{eff}\sin(\theta_i)\\&=I_{eff}^*\end{aligned}$$

对式(10.27)进行同样的推导得：

$$S=\frac{1}{2}VI^*\qquad(10.30)$$

式(10.29)和式(10.30)都是基于图示有源符号参考方向的条件下得出的。若电流的参考方向是单口网络电压升的方向，则每个方程的右边都要加上一个负号。

下面，用例10.1中的电路来说明式(10.30)在功率计算中的应用。写出端电压和端电流的相量：

$$V=100\underline{/15°}\ \text{V}$$
$$I=4\underline{/-105°}\ \text{A}$$

因此:

$$S = \frac{1}{2}(100\,\underline{/15^\circ})(4\,\underline{/+105^\circ}) = 200\,\underline{/120^\circ}$$
$$= -100 + \mathrm{j}173.21\ \mathrm{VA}$$

一旦计算出复功率,就可得知实功率和无功功率。因为 $S = P + \mathrm{j}Q$,所以:

$$P = -100\ \mathrm{W}$$
$$Q = 173.21\ \mathrm{VAR}$$

其中 P 和 Q 中的代数符号的含义同例 10.1 中解的含义一致。

10.5.1 复功率的变换形式

式(10.29)和式(10.30)有多种表达方式,这里,用方均根的形式,因为方均根是功率计算中电压和电流最常见的表示方法。

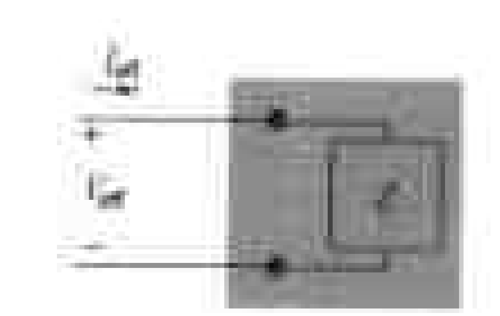


图 10.12 图 10.11 中的单口网络用一个等效阻抗代替之后的电路

式(10.29)的第一种变形是将电压用电流和阻抗的乘积代替得到的,换句话说,将图 10.11 中的单口网络用一个等效阻抗表示,则:

$$V_{\mathrm{eff}} = ZI_{\mathrm{eff}} \qquad (10.31)$$

将式(10.31)代入式(10.29)得到:

$$\begin{aligned} S &= ZI_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}}^{*} \\ &= |I_{\mathrm{eff}}|^2 Z \\ &= |I_{\mathrm{eff}}|^2(R + \mathrm{j}X) \\ &= |I_{\mathrm{eff}}|^2 R + \mathrm{j}|I_{\mathrm{eff}}|^2 X = P + \mathrm{j}Q \end{aligned} \qquad (10.32)$$

所以:

$$P = |I_{\mathrm{eff}}|^2 R = \frac{1}{2}I_{\mathrm{m}}^2 R \qquad (10.33)$$

$$Q = |I_{\mathrm{eff}}|^2 X = \frac{1}{2}I_{\mathrm{m}}^2 X \qquad (10.34)$$

式(10.34)中,X 表示电路的等效电感或者等效电容的电抗。由前面的讨论可以知道,感性电路,电抗为正,容性电路,电抗为负。

式(10.29)的另一种有用的形式是将电流用电压和阻抗的商代替得到:

$$S = V_{\mathrm{eff}}\left(\frac{|V_{\mathrm{eff}}|}{Z}\right)^{*} = \frac{|V_{\mathrm{eff}}|^2}{Z^{*}} = P + \mathrm{j}Q \qquad (10.35)$$

注意:如果 Z 是纯电阻元件,则:

$$P = \frac{|V_{\mathrm{eff}}|^2}{R} \qquad (10.36)$$

如果 Z 是纯电抗元件,则:

$$Q = \frac{|V_{\mathrm{eff}}|^2}{X} \qquad (10.37)$$

式(10.37)中,若 Z 为电感,则 X 为正,若 Z 为电容,则 X 为负。

下面的例子展示了正弦稳态电路不同的功率计算方法。

例 10.5　图 10.13 所示电路，负载阻抗为 39 + j26 Ω，线路阻抗为 1 + j4 Ω，电压源的有效值或者说方均根为 250 V。

a) 求负载电流 I_L 和电压 V_L。

b) 求负载的平均功率和无功功率。

c) 求线路的平均功率和无功功率。

d) 求电源的平均功率和无功功率。

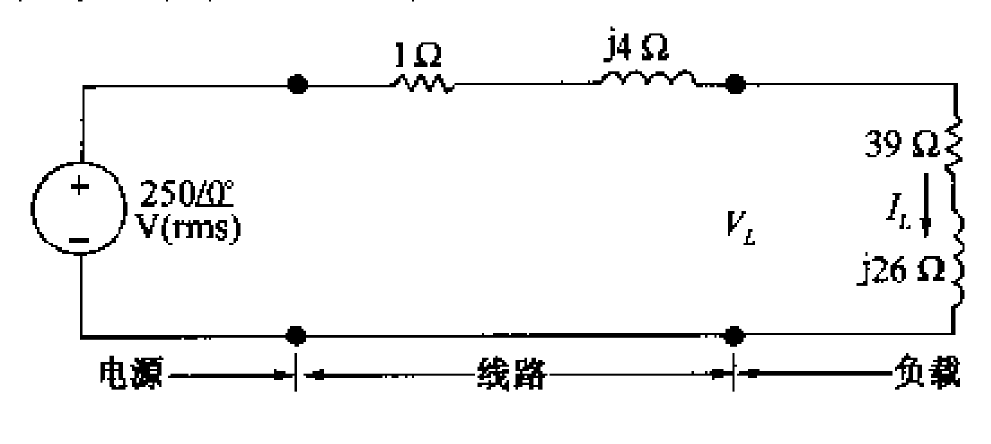


图 10.13　例 10.5 的电路图

解：

(a) 负载阻抗和线路阻抗串联，负载电流等于电压除以总阻抗，即：

$$I_L = \frac{250\,\underline{/0^\circ}}{40 + \text{j}30} = 4 - \text{j}3 = 5\,\underline{/-36.87^\circ}\ \text{A(rms)}$$

由于电压为方均根值，所以，这个电流也是方均根值，负载电压为负载电流和负载阻抗的乘积：

$$\begin{aligned} V_L &= (39 + \text{j}26) I_L = 234 - \text{j}13 \\ &= 234.36\,\underline{/-3.18^\circ}\ \text{V(rms)} \end{aligned}$$

(b) 用式子(10.29)求负载的平均功率和无功功率。因此：

$$\begin{aligned} S &= V_L I_L^* = (234 - \text{j}13)(4 + \text{j}3) \\ &= 975 + \text{j}650\ \text{VA} \end{aligned}$$

所以，负载吸收的平均功率是 975 W，无功功率是 650 VAR。

(c) 由式(10.33)和式(10.34)可以求出线路上的平均功率和无功功率，已知线路电流，则：

$$P = (5)^2(1) = 25\ \text{W}$$

$$Q = (5)^2(4) = 100\ \text{VAR}$$

由于线路的电抗是感性的，所以，线路的无功功率为正。

(d) 计算电源平均功率和无功功率的方法之一是将线路和负载上的复功率相加，即：

$$\begin{aligned} S &= 25 + \text{j}100 + 975 + \text{j}650 \\ &= 1\,000 + \text{j}750\ \text{VA} \end{aligned}$$

也可以由式(10.29)计算得到：

$$S_s = -250 I_L^*$$

当电流的参考方向与电压升的方向一致的时候，式(10.29)中要加一个负号，因此：

$$S_s = -250(4 + \text{j}3) = -(1000 + \text{j}750)\ \text{VA}$$

负号意味着平均功率和无功功率都是从电源释放出来的，这个结果与前面计算的 S 值一致，因为线路和负载的平均功率以及无功功率都由电源提供。

例 10.6 图 10.14 所示电路的两负载：负载 1 吸收 8KW 的平均功率，超前功率因数为 0.80。负载 2 吸收 20 kVA 的功率，滞后功率因数为 0.6。

(a) 求两并联负载的功率因数。

(b) 求供给负载的视在功率、电流 I_s 以及传输线上平均功率损失。

(c) 若电源频率为 60 Hz，求能将两个并联负载的功率因数修正为 1 的电容值。在修正后的功率因数下，重新计算(b)。

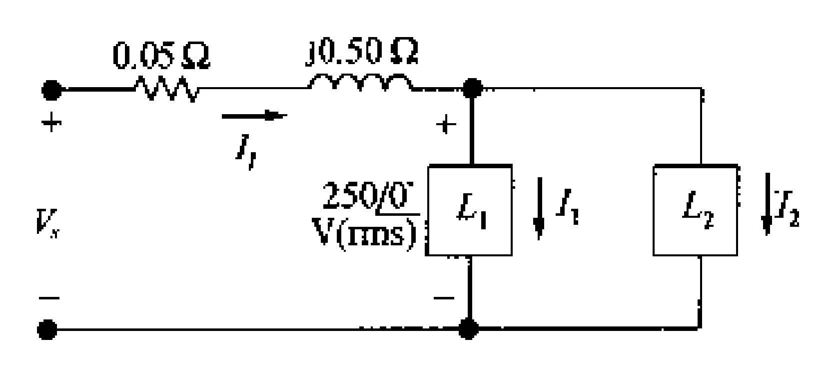


图 10.14 例 10.6 的电路图

解：

(a) 此题中所有的电压和电流相量都设为有效值。由图 10.14 知，$I_s = I_1 + I_2$，两负载吸收的总的复功率为：

$$\begin{aligned} S &= (250)I_s^* \\ &= (250)(I_1 + I_2)^* \\ &= (250)I_1^* + (250)I_2^* \\ &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

也可以通过将两个负载的复功率相加求总的复功率，由图 10.15 功率三角形得：

$$\begin{aligned} S_1 &= 8000 - \mathrm{j}\frac{8000(0.6)}{(0.8)} \\ &= 8000 - \mathrm{j}6000 \text{ VA} \\ S_2 &= 20000(0.6) + \mathrm{j}20000(0.8) \\ &= 12000 + \mathrm{j}16000 \text{ VA} \end{aligned}$$

因此：

$$S = 20000 + \mathrm{j}10000 \text{ VA}$$

则：

$$I_s^* = \frac{20000 + \mathrm{j}10000}{250} = 80 + \mathrm{j}40 \text{ A}$$

所以：

$$I_s = 80 - \mathrm{j}40 = 89.44\underline{/-26.57°} \text{ A}$$

所以，合并之后负载的功率因数为：

$$\begin{aligned} \mathrm{pf} &= \cos(0 + 26.57°) \\ &= 0.8944 \text{（滞后）} \end{aligned}$$

由于无功功率为负，所以，两个负载合并的功率因数滞后。

(b) 供给负载的视在功率为：

$$\begin{aligned} |S| &= |20 + \mathrm{j}10| \\ &= 22.36 \text{ kVA} \end{aligned}$$

提供视在功率的电流幅值为：

$$\begin{aligned} |I_s| &= |80 - \mathrm{j}40| \\ &= 89.44 \text{ A} \end{aligned}$$

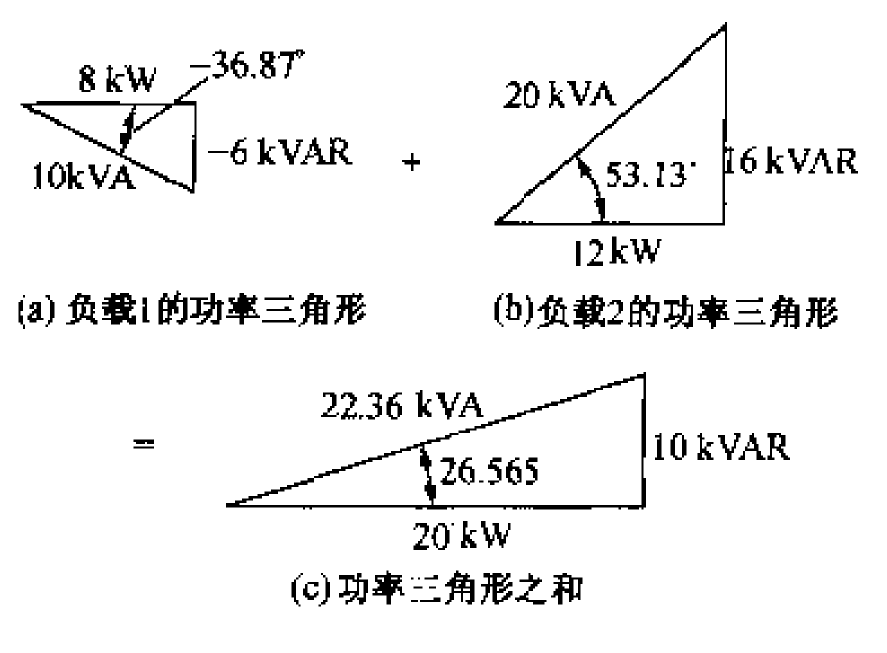


图 10.15

由线路上的电流与线路阻抗可以得线路上损失的平均功率为：

$$P_{线路} = |I_s|^2 R = (89.22)^2(0.05) = 400\ \text{W}$$

虽然负载只需要 20 000 W 的功率，电源还是要提供 20000 + 400 = 20400 W 的功率。

(c) 图 10.15(c)的功率三角形知，如果在负载上并联一个无功功率为 10 kVAR 的电容，就可以将功率因数修正为 1，电容值的计算如下。首先，由式(10.37)得容抗为：

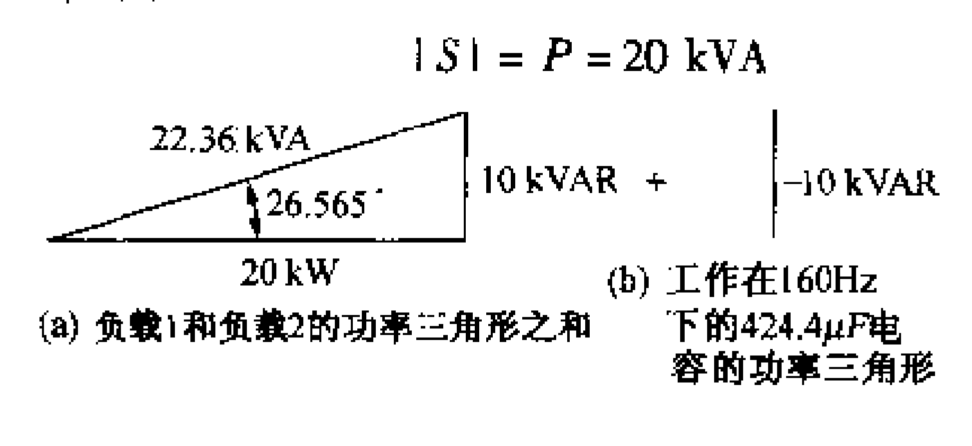
$$X = \frac{|V_{eff}|^2}{Q} = \frac{(250)^2}{-10000} = -6.25\Omega$$

由于电容的容抗为 $-1/\omega C$，若电源频率为 60 Hz，则 $\omega = 2\pi(60) = 376.99$ rad/s，所以：

$$C = \frac{-1}{\omega X} = \frac{-1}{(376.99)(-6.25)} = 424.4\ \mu\text{F}$$

电容作为第三个负载加入到电路中，所得的功率三角形如图 10.16 所示。由图 10.16 (c)的功率三角形知，当功率因数为 1 时，视在功率和平均功率相同。因此，功率因数修正后的视在功率为：

$$|S| = P = 20\ \text{kVA}$$



=
20 kW
(c) (a)和(b)的功率三角形之和

图 10.16

提供这个视在功率的电流幅值为：

$$|I_s| = \frac{20000}{250} = 80\ \text{A}$$

线路上的平均功率损耗减少为：

$$P_{line}=|I_s|^2R=(80)^2(0.05)=320\ \text{W}$$

此时，电源供给的总功率为 20000 + 320 = 20320 W，可以看到，电容的加入使线路损耗由 400 W 降至 320 W。

例 10.7 (a) 求发送到图 10.17 各支路阻抗的平均功率和无功功率。

(b) 计算电路中电源的平均功率和无功功率。

(c) 证明发送的平均功率等于吸收的平均功率，发送的无功功率等于吸收的无功功率。

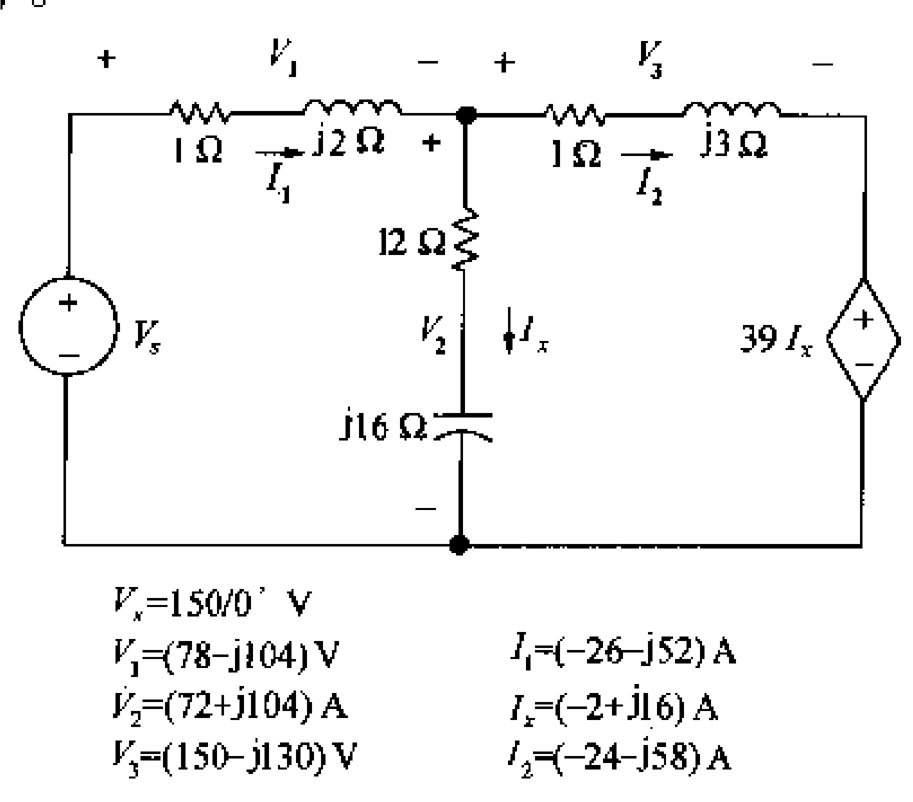


图 10.17 例 10.7 的电路图及其解

解：

(a) 发送到(1 + j2) Ω 阻抗上的复功率为：

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}V_1I_1^*=P_1+\text{j}Q_1\\&=\frac{1}{2}(78-\text{j}104)(-26+\text{j}52)\\&=\frac{1}{2}(3380+\text{j}6760)\\&=1690+\text{j}3380\ \text{VA}\end{aligned}$$

因此，这个阻抗吸收的平均功率为 1690 W，无功功率为 3380 VAR，发送到(12 − j16) Ω 阻抗上复功率为：

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}V_2I_x^*=P_2+\text{j}Q_2\\&=\frac{1}{2}(72+\text{j}104)(-2-\text{j}6)\\&=240-\text{j}320\ \text{VA}\end{aligned}$$

因此，垂直支路上阻抗吸收的平均功率为 240 W，无功功率为 320 VAR，发送到(1 + j3) Ω 阻抗上的复功率为：

$$S_3=\frac{1}{2}V_3I_2^*=P_3+\text{j}Q_3$$

$$= \frac{1}{2}(150 - j130)(-24 + j58)$$

$$= 1970 + j5910 \text{ VA}$$

这个阻抗吸收的功率分别为 1970 W 和 5910 VAR。

(b) 独立电压源的复功率为：

$$S_s = -\frac{1}{2}V_sI_1^* = P_s + jQ_s$$

$$= -\frac{1}{2}(150)(-26 + j52)$$

$$= 1950 - j3900 \text{ VA}$$

可以看出，独立电压源吸收 1950 W 的平均功率，发送 3900 VAR 的无功功率，电流控制电压源的复功率为：

$$S_x = \frac{1}{2}(39I_x)(I_2^*) = P_x + jQ_x$$

$$= \frac{1}{2}(-78 + j234)(-24 + j58)$$

$$= -5850 - j5070 \text{ VA}$$

受控源的平均功率和无功功率都是向外发送的。

(c) 无源阻抗和独立电压源吸收的总平均功率为：

$$P_{\text{absorbed}} = P_1 + P_2 + P_3 + P_S = 5850 \text{ W}$$

受控电压源是电路中惟一释放平均功率的元件，因此：

$$P_{\text{delivered}} = 5850 \text{ W}$$

两个水平支路吸收的无功功率为：

$$Q_{\text{absorbed}} = Q_1 + Q_3 = 9290 \text{ VAR}$$

独立电压源、垂直支路上的电容以及受控电压源都发送无功功率，因此：

$$Q_{\text{delivered}} = 9290 \text{ VAR}$$

练习题

10.6 如图所示电路的阻抗被一个容抗为 −52 Ω 的电容旁路，求：

(a) V_L 和 I_L 的方均根相量。

(b) (39 + j26) Ω 阻抗吸收的平均功率和无功功率。

(c) (1 + j4) Ω 线路阻抗吸收的平均功率和无功功率。

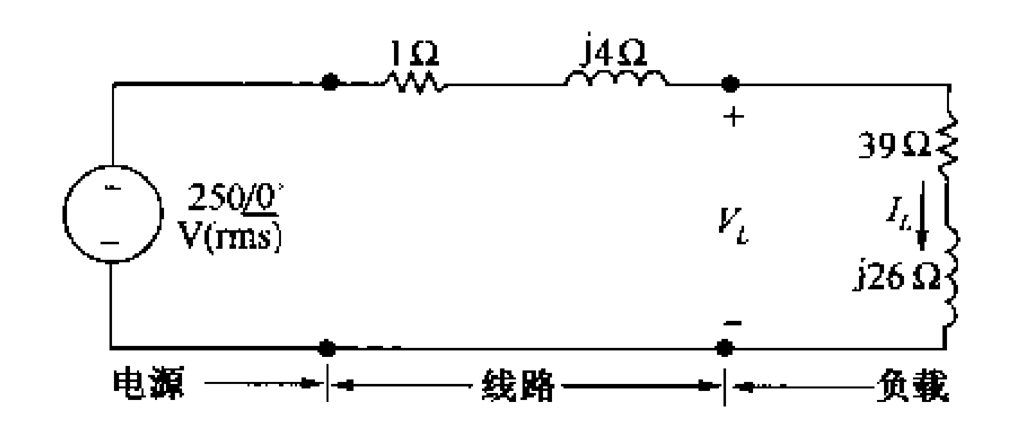
(d) 电源发送的平均功率和无功功率。

(e) 旁路电容发送的无功功率。

答：(a) $252.20\angle{-4.54^\circ}$ V(rms)，$5.38\angle{-38.23^\circ}$ A(rms)，(b) 1129.09 W，752.73 VAR，(c) 23.52 W，94.09 VAR，(d) 1152.62 W，−376.36 VAR，(e) 1223.18 VAR。

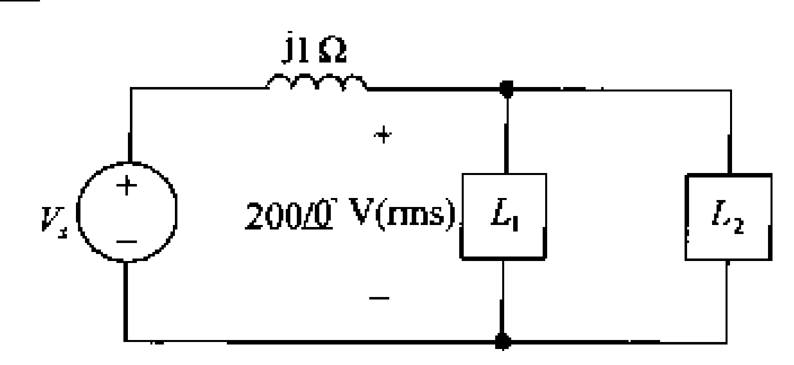
10.7 负载两端电压的方均根值为 250 V，吸收的平均功率为 40 kW，发送的无功功率为 30 kVAR，试推导负载的两个等效阻抗模型。

答：1 Ω 电阻与容抗为 0.75 Ω 的电容串联，1.5625 Ω 电阻与容抗为 2.083 Ω 的电容并联。



10.8 若负载 L_1 和 L_2 吸收的功率分别为 15 kVA 和 6 kVA,且功率因数分别为滞后 0.6 和超前 0.8,求图示电路的电压相量 V_s(VMS),用极坐标形式表示。

答:$251.64\angle 15.91°$ V。



10.6 最大功率传输定理

第 4 章中曾讨论过某些系统——例如,通过电信号传输信息的系统——能够将最大功率从电源传输到负载。对于正弦稳态系统,重新考虑一下最大功率的传输问题。如图 10.18 所示,须确定能使 a,b 两点之间的平均功率最大的负载阻抗值 Z_L。任何一个线性网络从负载两端看过去都可以等效为一个戴维南电路。这样问题就简化为求取图 10.19 的负载阻抗 Z_L,以使最大平均功率传输到 Z_L。

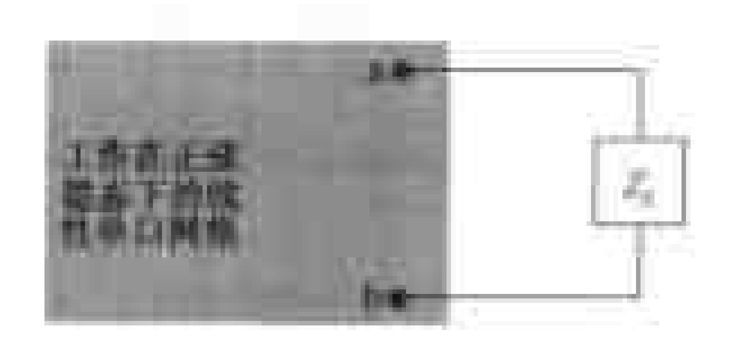


图 10.18 最大功率的传输电路图

为了传输最大平均功率,Z_L 必须等于戴维南阻抗的共轭复数,即:

$$Z_L = Z_{Th}^* \tag{10.38}$$

利用微积分原理推导式(10.38),首先将 Z_{Th}和 Z_L 表示成复数形式:

$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th} \tag{10.39}$$

$$Z_L = R_L + jX_L \tag{10.40}$$

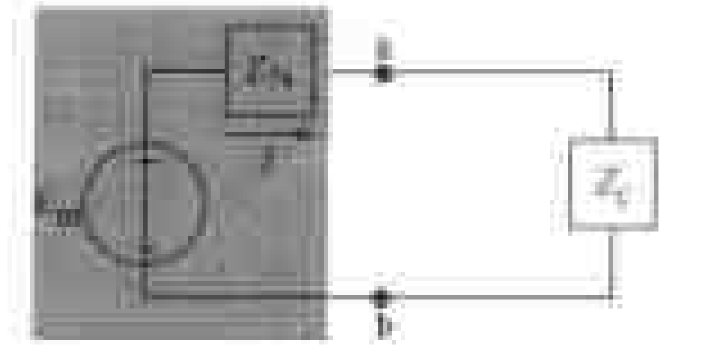


图 10.19 图 10.18 所示的电路网络用戴维南等效电路代替

式(10.39)和式(10.40)的虚数部分有自己的代数符号,正表示电感,负表示电容,因为要计算平均功率,所以,戴维南电压的幅值用方均根表示,并且把它作为参考相量,由图 10.19 可以得到负载电流的方均根值为:

$$I = \frac{V_{Th}}{(R_{Th} + R_L) + j(X_{Th} + X_L)} \tag{10.41}$$

传输到负载上的平均功率为:

$$P = |I|^2 R_L \tag{10.42}$$

将式(10.41)代入到式(10.42)中得：

$$P=\frac{|V_{Th}|^2R_L}{(R_{Th}R_L)^2+(X_{Th}+X_L)^2} \tag{10.43}$$

其中，V_{Th}，R_{Th}和 X_{Th}为固定值，而 R_L 和 X_L 是独立变量，因此，要求 P 的最大值，必须求出使$\partial P/\partial R_L$ 和$\partial P/\partial X_L$ 都为零的 R_L 和 X_L。由式(10.43)得：

$$\frac{\partial P}{\partial X_L}=\frac{-|V_{Th}|^2 2R_L(X_L+X_{Th})}{[(R_L+R_{Th})^2+(X_L+X_{Th})^2]^2} \tag{10.44}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L}=\frac{|V_{Th}|^2[(R_L+R_{Th})^2+(X_L+X_{Th})^2-2R_L(R_L+R_{Th})]}{[(R_L+R_{Th})^2+(X_L+X_{Th})^2]^2} \tag{10.45}$$

由式(10.44)，当：

$$X_L=-X_{Th} \tag{10.46}$$

则，$\partial P/\partial X_L=0$。

由式(10.45)，R_L 满足下式时，$\partial P/\partial R_L=0$：

$$R_L=\sqrt{R_{Th}^2+(X_L+X_{Th})^2} \tag{10.47}$$

读者应当注意到，当 $Z_L=Z_{Th}^*$时，将式(10.46)和式(10.47)代到两个推导式中得零。

10.6.1 吸收的最大平均功率

当 Z_L 等于 Z_{Th}的共轭复数时，最大平均功率可以传递到 Z_L 上，由图 10.19 所示电路计算其最大平均功率。当 $Z_L=Z_{Th}^*$时，负载电流的方均根值为 $V_{Th}/2R_L$，则传输到负载上的最大平均功率为：

$$P_{max}=\frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2R_L}{4R_L^2}=\frac{1}{4}\frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{R_L} \tag{10.48}$$

若戴维南等效电压是由最大幅值而非方均根值来表示，则式(10.48)变为：

$$P_{max}=\frac{1}{8}\frac{V_m^2}{R_L} \tag{10.49}$$

10.6.2 限制 Z 时的最大功率传输

只有当 Z_L 等于Z_{Th}的共轭复数时，最大平均功率才能够传输到 Z_L 上，而在有些情况下，这是不可能的。首先，R_L 和X_L 可能被限制在一定的范围内，这时，R_L 和 X_L 的最优值应是调整X_L 使其尽可能的接近 $-X_{Th}$，同时调 R_L使其尽可能的接近$\sqrt{R_{Th}^2+(X_L+X_{Th})^2}$（见习题 10.9）。

另一种情况发生在 Z_L 的幅值可以变化而其相位角固定。此时，只有当 Z_L 的模和 Z_{Th}的模相等时，最大平均功率才可以传输到负载上，也就是说，当：

$$|Z_L|=|Z_{Th}| \tag{10.50}$$

式(10.50)的证明作为习题 10.30 留给读者。

对于纯电阻网络，当负载电阻等于戴维南电阻时，传输最大功率，可以看出这是在第 4 章介绍过的最大功率传输定理。

例题 10.8～10.11 给出了在上述讨论的各种情况下如何获得最大传输功率。

例 10.8 (a) 图 10.20 所示的电路,若使 Z_L 获得最大传输功率,Z_L 应该是多少?

(b) 在(a)的基础上,求最大功率。

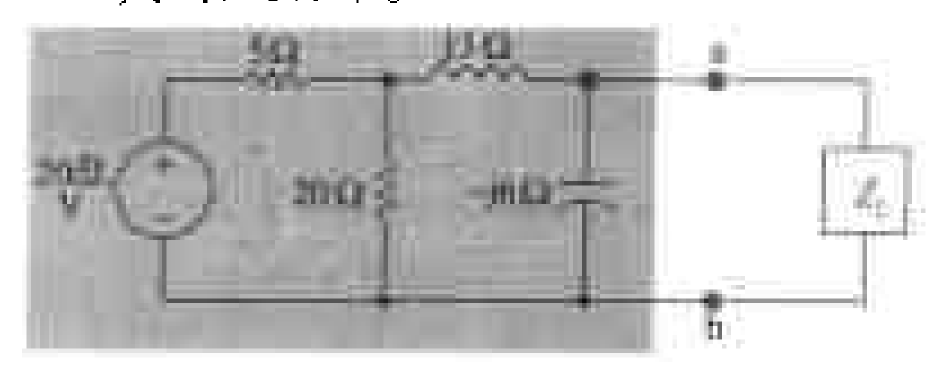


图 10.20 例 10.8 电路图

解:

(a) 首先求 a,b 两端的戴维南等效电路。通过对 20 V 电源,5 Ω 电阻和 20 Ω 电阻组成的电路进行两次电源变换,可得图 10.21 所示的简化电路。因此:

$$V_{Th} = \frac{16\angle 0^\circ}{4 + j3 - j6}(-j6)$$

$$= 19.2\angle -53.13^\circ = 11.52 - j15.36\ \text{V}$$

将独立源短路,则从 a,b 两端看进去的戴维南等效阻抗为:

$$Z_{Th} = \frac{(-j6)(4 + j3)}{4 + j3 - j6} = 5.76 - j1.68\ \Omega$$

要满足最大功率传输,则负载阻抗应为 Z_{Th} 的共轭复数,即:

$$Z_L = 5.76 + j1.68\ \Omega$$

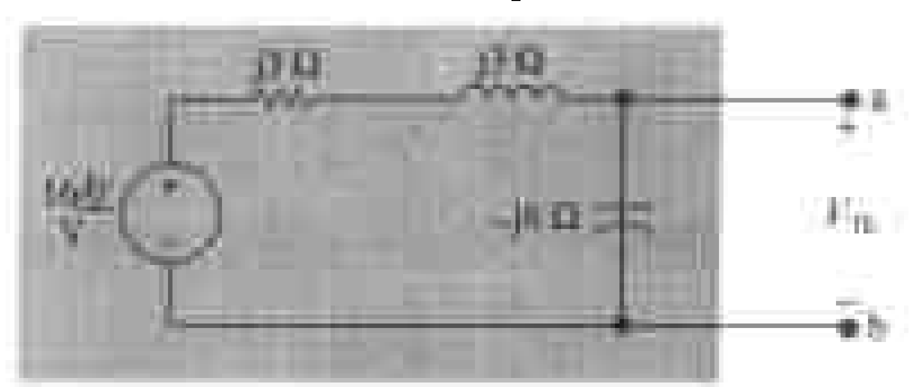


图 10.21 经过电源变换后的图 10.20 的简化电路

(b) 由图 10.22 所示电路来求传输到 Z_L 上的最大功率。

由图 10.22,负载电流幅度的方均根为:

$$I_{eff} = \frac{19.2/\sqrt{2}}{2(5.76)} = 1.1785\ \text{A}$$

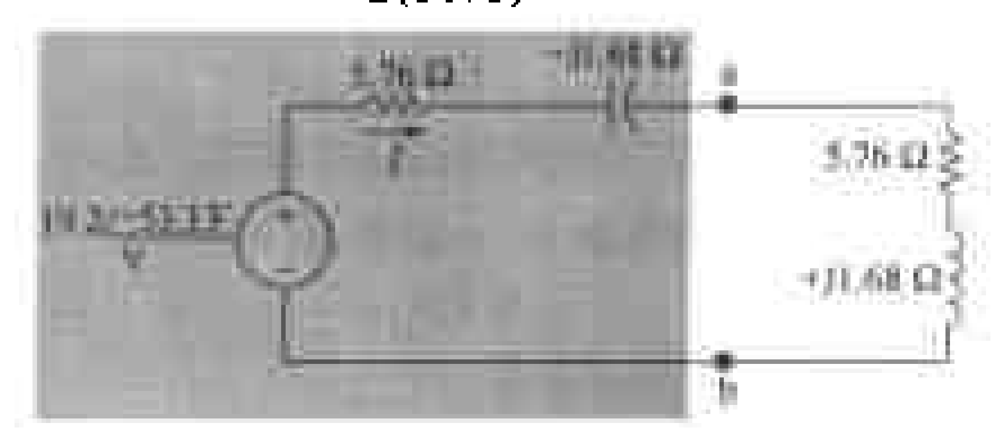


图 10.22 将网络用戴维南等效电路代替后的图 10.20 的电路

传输到负载上的平均功率为：

$$P = I_{eff}^2(5.76) = 8\ \text{W}$$

例 10.9 (a) 图 10.23 所示电路，Z_L 为何值时获得最大传输功率？此时的最大功率是多少毫瓦？

(b) 假设负载电阻可以在 0 到 4 000 Ω 之间改变，容抗可以在 0 到 −2 000 Ω 之间改变，R_L 和 X_L 分别为何值时可以获得最大传输功率？最大传输功率是多少？

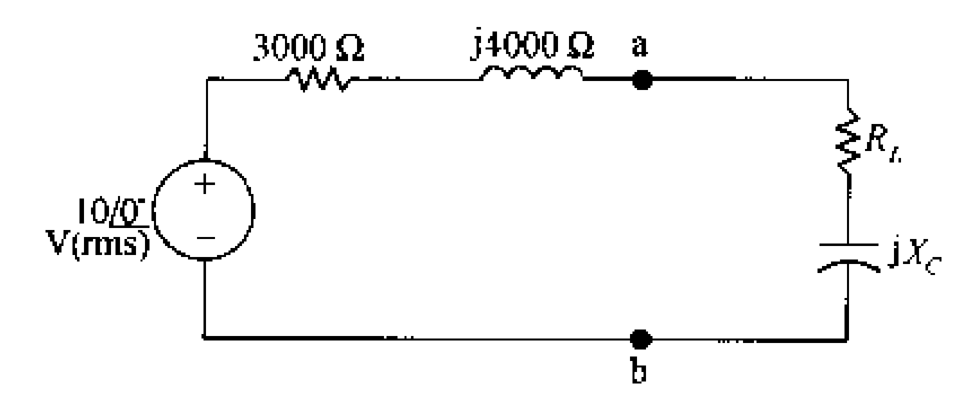


图 10.23　例 10.9 和 10.10 电路图

解：

(a) 如果和 X_L 没有任何限制，则负载阻抗应为戴维南等效阻抗的共轭复数。因此，令：

$$R_L = 3000\ \Omega \text{ 和 } X_L = -4000\ \Omega$$

或者：

$$Z_L = 3000 - \text{j}4000\ \Omega$$

由于电源电压是以方均根的形式给出，传递到 Z_L 上的平均功率为：

$$P = \frac{1}{4}\frac{10^2}{3\,000} = \frac{25}{3}\text{mW} = 8.33\ \text{mW}$$

(b) R_L 和 X_L 受到限制，所以，应使 X_L 尽可能的接近 −4000 Ω，所以，令 $X_L = -2000\ \Omega$，并且使 R_L 尽可能地接近 $\sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2}$，所以，令：

$$R_L = \sqrt{3000^2 + (-2000 + 4000)^2} = 3605.55\ \Omega$$

因为 R_L 能够在 0 至 4000 Ω 间变化，所以，可以令 R_L 为 3605.55 Ω，此时的阻抗值为：

$$Z_L = 3605.55 - \text{j}2000\ \Omega$$

负载电流为：

$$I_{eff} = \frac{10\underline{/0^\circ}}{6605.66 + \text{j}2000} = 1.4489\underline{/-16.85^\circ}\ \text{mA}$$

负载上的平均功率为：

$$P = (1.4489 \times 10^{-3})^2(3\,605.55) = 7.57\ \text{mW}$$

这个值是在给定的 R_L 和 X_L 的限制条件下能够传递到负载上的最大功率，可以看出这个值要比没有限制条件时传递的功率要小，在(a)中可以传递 8.33 mW。

例 10.10 相位角为 −36.87°的负载阻抗接于图 10.23 所示电路的 a，b 两端，在给定的限制条件下，调整 Z_L 的幅值，使得能够传递的平均功率最大。

(a) 将 Z_L 表示成复数形式。

(b) 求 Z_L 上的平均功率。

解：

(a) 由式(10.50)知，Z_L 的模应等于 Z_{Th} 的模，即：

$$|Z_L| = |Z_{Th}| = |3000 + j4000| = 5000\ \Omega$$

因为 Z_L 的相位角为 $-36.87°$，所以：

$$Z_L = 5000\underline{/-36.87°} = 4000 - j3000\ \Omega$$

(b) 由于 Z_L 等于 $4000 - j3000\ \Omega$，所以，负载电流为：

$$I_{eff} = \frac{10}{7000 + j1000} = 1.4142\underline{/-8.13°}\ \text{mA}$$

负载上的平均功率为：

$$P = 1.4142^2(4) = 8\ \text{mW}$$

这个功率是当负载阻抗的相位角固定在常数 $-36.87°$ 时，能够传递的最大功率。同样可以看出该值比没有限制条件时的最大传输功率要小。

练习题

10.9 图示电路的电流源为 $3\cos 5000t$ A。

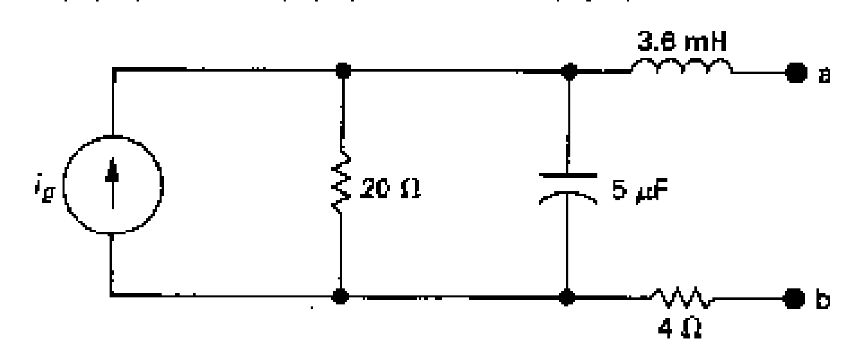
(a) 为了获得最大传输传率，a，b 两点间的阻抗应为多少。

(b) 在(a)的阻抗下，传输的平均功率是多少？

(c) 若负载为纯电阻，要使传输的平均功率最大，电阻值应为多少？

(d) 在(c)的阻值下，平均功率是多少？

答：(a) $20 - j10\ \Omega$，(b) 18 W，(c) 22.36 Ω，(d) 17.00 W



例 10.11 调整图 10.24 所示电路中的可变电阻，使 R_L 上获得最大平均功率。

(a) L 为多少欧姆？

(b) L 的最大平均功率是多少瓦特？

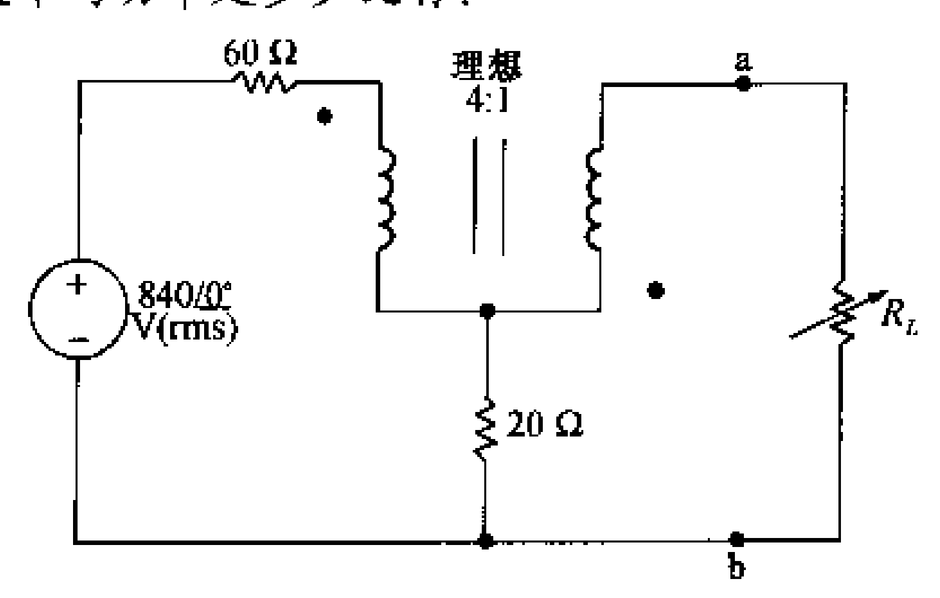


图 10.24 例 10.11 电路图

解：

(a) 求 R_L 两端的戴维南等效电路。求开路电压的电路如图 10.25 所示，为便于讨论，图中标出变量 V_1, V_2, I_1 和 I_2。理想变压器使 V_1, V_2, I_1 和 I_2 间有如下的关系：

$$V_2 = \frac{1}{4}V_1$$

$$I_1 = -\frac{1}{4}I_2$$

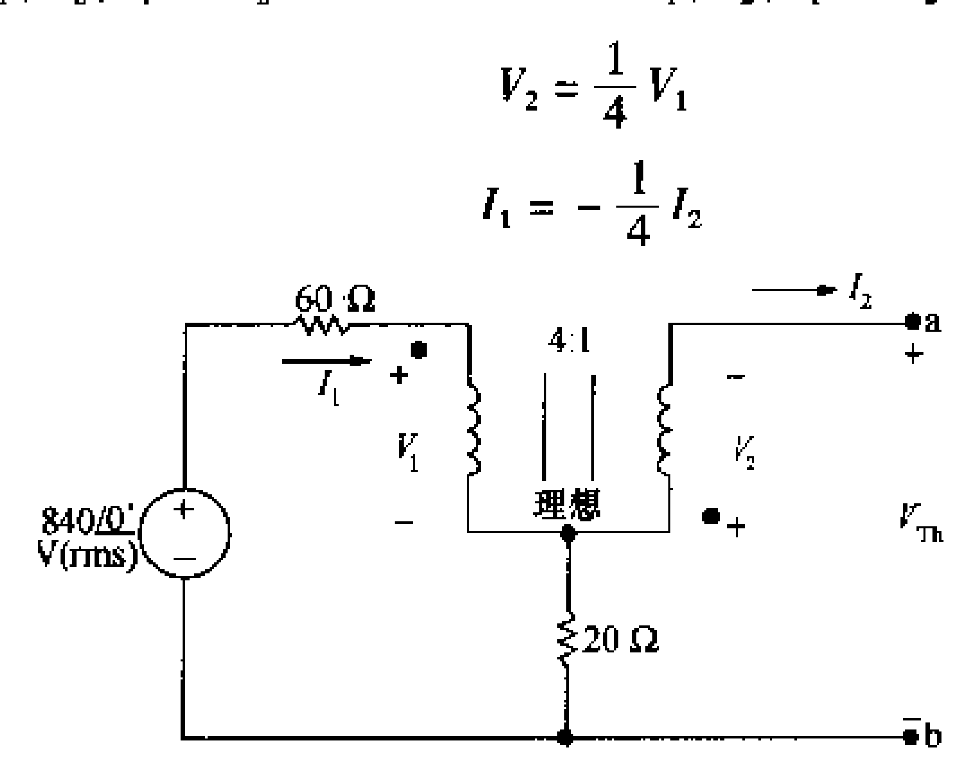


图 10.25　求戴维南电压的电路图

I_2 电压值为零，所以，I_1 为零，由此可得：

$$V_1 = 840\,\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

$$V_2 = 210\,\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

由图 10.25 可知 V_{Th} 为负的 V_2，即：

$$V_{\text{Th}} = -210\,\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

图 10.26 用来求短路电流。将 I_1 和 I_2 作为网孔电流，得两网孔方程为：

$$840\,\underline{/0^\circ} = 80I_1 - 20I_2 + V_1$$

$$0 = 20I_2 - 20I_1 + V_2$$

图 10.26　求短路电流的电路图

将约束方程代入得：

$$840\,\underline{/0^\circ} = -40I_2 + V_1$$

$$0 = 25I_2 + \frac{V_1}{4}$$

解方程得短路电流 I_2 为：

$$I_2 = -6\text{A}$$

因此,戴维南电阻为:

$$R_{Th}=\frac{-210}{-6}=35\ \Omega$$

当 R_L 等于 35 Ω 的时候,能够传递最大功率。

(b) 由戴维南等效电路可以方便地求出最大传输功率。由图 10.27 得到:

$$P_{max}=\left(\frac{-210}{70}\right)^2(35)=315\ \text{W}$$

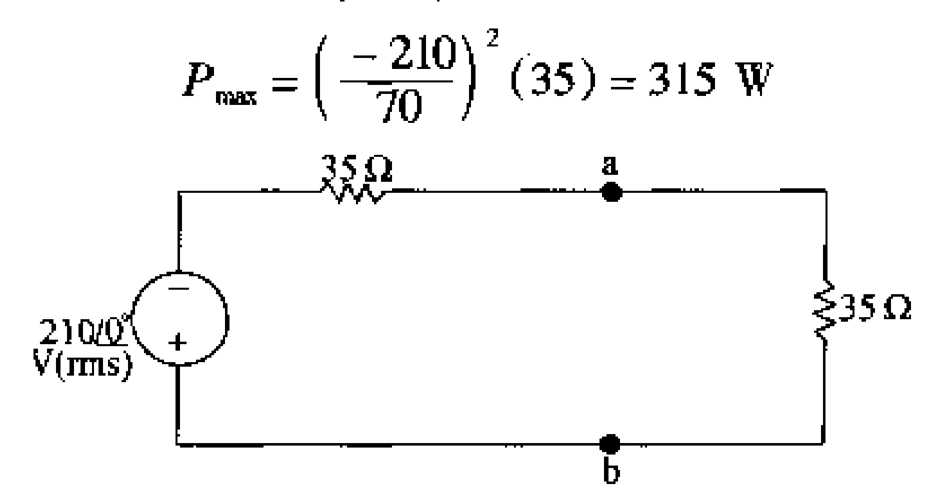


图 10.27 最大功率传输时的戴维南等效负载

练习题

10.10 例 10.11 中,若与端子 a 相连的线圈的极点位于线圈的顶部,重求例 10.11。

答:(a) 15 Ω,(b) 735 W。

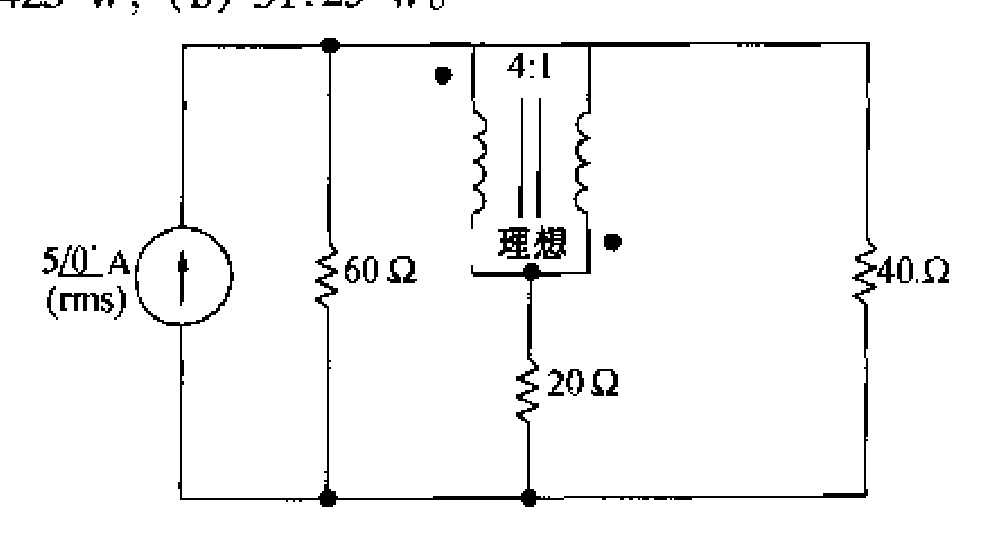
10.11 若电压源为 146 /0° V(rms),线圈的匝数比为 1:4,求例 10.10。

答:(a) 1 460 Ω,(b) 58.4 W。

10.12 (a) 如图所示电路,求正弦电流源释放的平均功率。

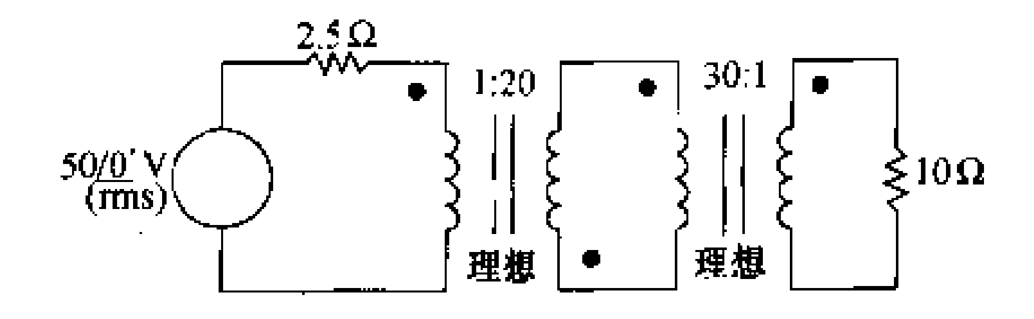
(b) 求 20 Ω 电阻的平均功率。

答:(a) 1 425 W,(b) 31.25 W。



10.13 求图示 10 Ω 电阻上的平均功率。

答:90 W。



10.14 将练习题 10.13 电路中与 10 欧电阻相连的理想变压器的匝数比改为 a:1。

(a) a 取何值时,10 Ω 电阻上获得最大平均功率?

(b) 最大平均功率是多少?

答：(a) 10，(b) 250 W。

10.15 若正弦电压源 v_g 为 $25\angle 0°$ kV(rms)，证明练习题 9.20 中 v_g 释放的实功率和无功功率分别等于变压器和副边电路的实功率和无功功率之和。

答：$S_g = S_T = 100 - j75$ kVA。

实例

加热器二

手柄式吹风机由一个加热部件和一个小风扇构成。加热部件实际上就是一个电阻，通过流过的正弦电流加热，风扇将电阻周围的热气从前端吹出。原理如图 10.28 所示。图中的加热管是由镍铬线绕成的电阻组成，镍铬是一种铁、镍和铬的合金，有两个特性使得它可以用做理想的加热器。首先，它比其他金属的电阻要高，因此，少量的材料就可以获得需要的阻值。其次，它不像其他的金属，镍铬合金在空气中加热到发红状态时也不会氧化。因此，这种加热器可以长期使用。

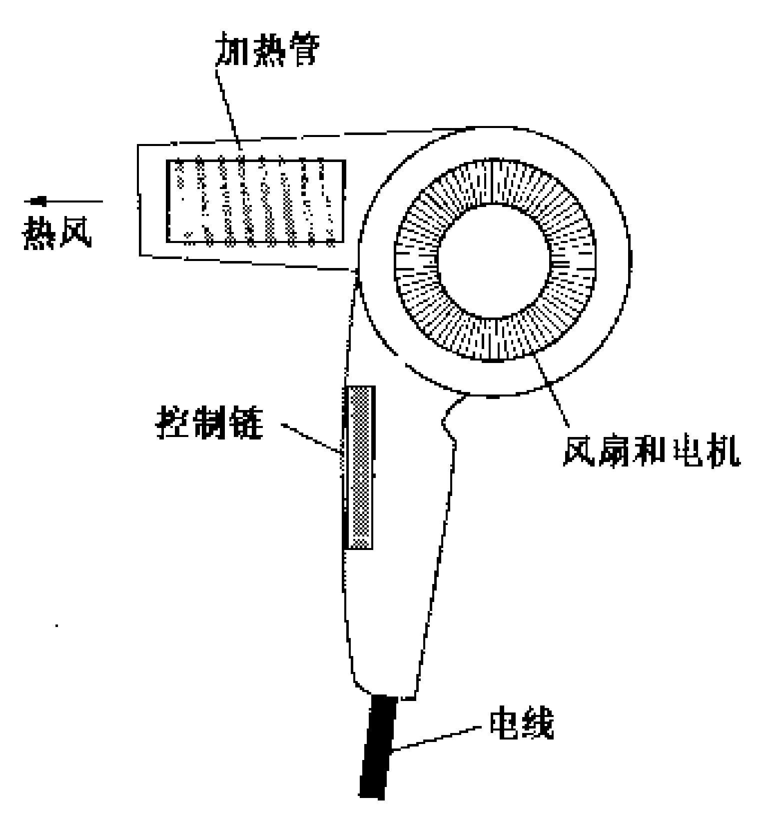


图 10.28 手柄式吹风机的原理图

吹风机的控制电路如图 10.29 所示，这是吹风机中控制加热部件惟一的电路。其余的对风扇提供能量的电路，这里不讨论。构成加热管的电阻丝是由两段构成的，图 10.29 中用两个电阻 R_1 和 R_2 来表示。吹风机的打开及加热档的选择由一个四位置开关控制，也可以通过滑动开关控制。一副金属头将电路中的两对端子短接，开关的位置决定哪对端子短接。金属头间通过绝缘体相连，因此，短接的端子间没有导电通路。

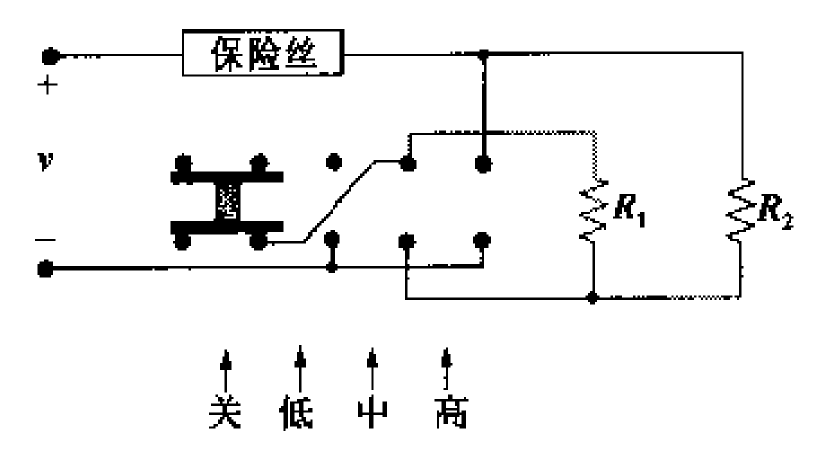


图 10.29 吹风机的控制电路图

图 10.29 电路中含有一个电热丝,起保护作用。正常时,电热丝相当于短路。但是当吹风机的温度非常高的时候,它就相当于开路,切断电流通路,从而减少火灾和其他伤害事件的发生。当电机失灵或者空气流通阻塞的时候,电热丝也会起作用。虽然保护系统的设计不是讨论问题的主要部分。但是,需要指出安全性分析对于一个电气工程师的工作来说是非常重要的。

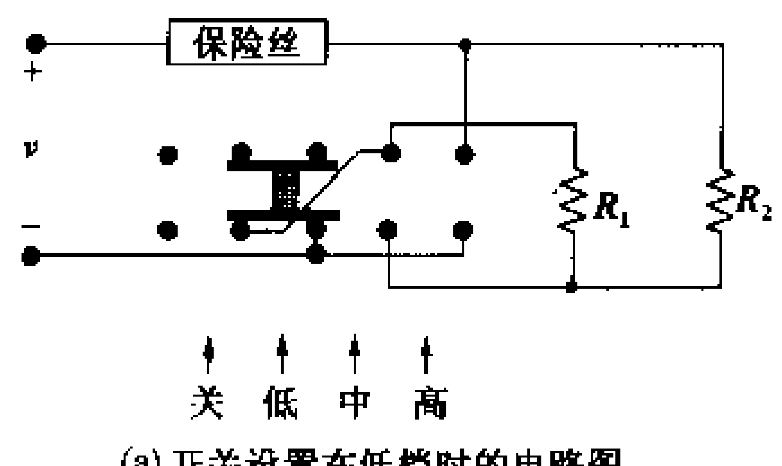
有了吹风机的控制电路模型,下面设计电路的参数。

例: (a) 由图 10.29,分别画出开关设置在低、中、高三档时的三个电路图。

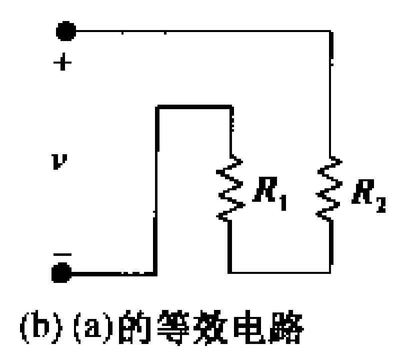
(b) 若吹风机的正弦输入电压为 60 Hz,120 V(rms)。要求加热部件在低档时的功率为 250 W,在中档时为 500W,在高档时为 1000 W,电阻 R_1 和 R_2 应为多少?

解:

(a) 图 10.30 (a)为开关设置在低档时的电路图,为清晰起见,将电路导线删掉。等效电路如图 10.30 (b)所示,中档开关以及高档开关的对应电路分别如图 10.31 和图 10.32 所示。从图中可以看出,低档设置时,电源的负载为 R_1 和 R_2 串联,中档时,负载为电阻 R_2,高档时,负载为电阻的并联。



(a) 开关设置在低档时的电路图



(b) (a)的等效电路

图 10.30

(b) 由(a)可知,三种功率要求对应有三种电路。首先考虑中档开关设置,如图 10.31 所示,只是涉及电阻 R_2,电阻跨接在 120 V(rms)的电源两端,由式(10.19)可知电阻的平均功率为:

$$P = \frac{V^2}{R_2} = \frac{120^2}{R_2} = 500\ \text{W}$$

所以:

$$R_2 = \frac{120^2}{500} = 28.8\ \Omega$$

当开关位于低档时,R_1 和 R_2 串联,由正弦电源提供的平均功率为:

$$P = \frac{V^2}{R_1 + R_2} = \frac{120^2}{R_1 + 28.8} = 250\ \text{W}$$

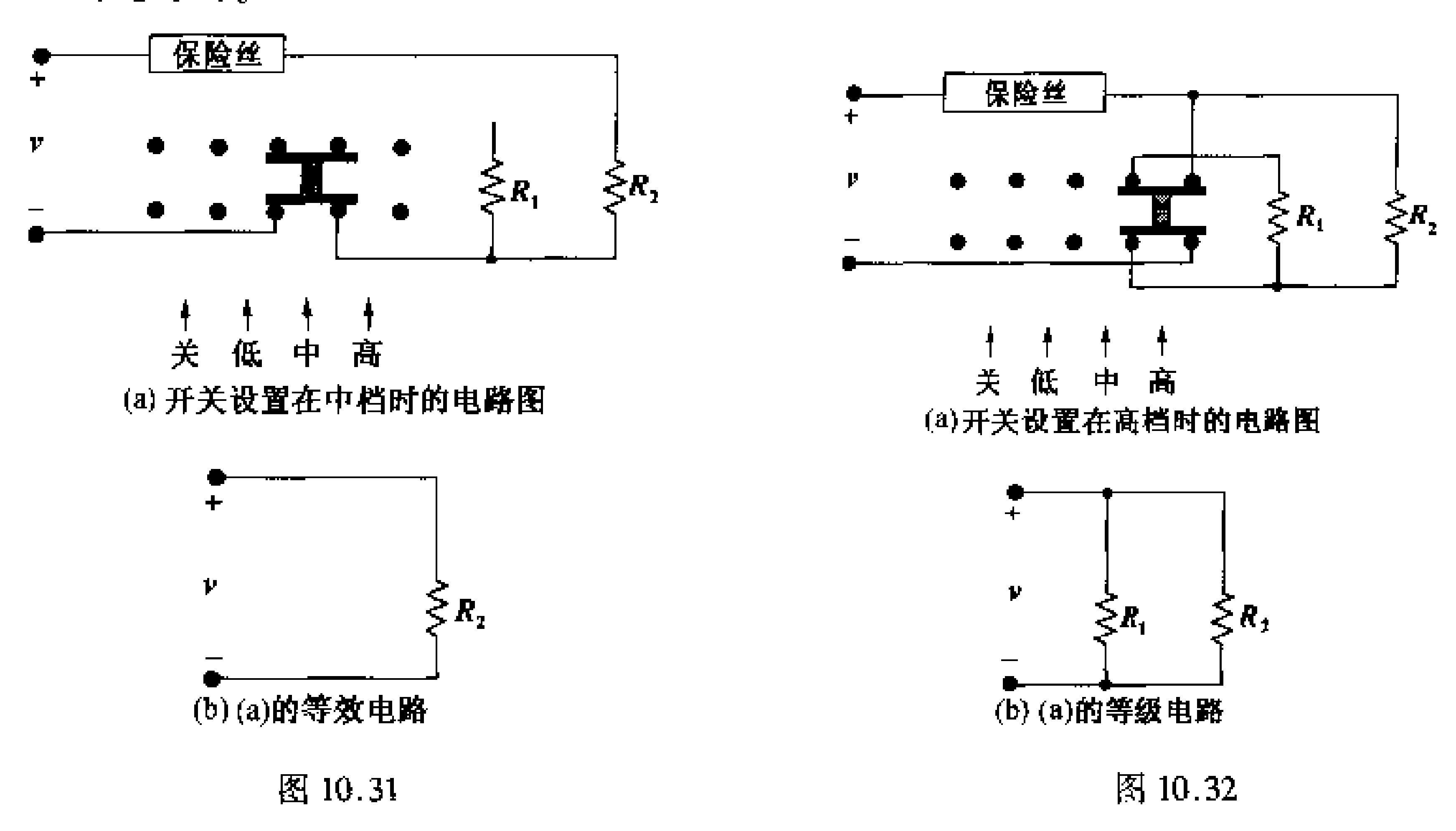
因此:

$$R_1 = \frac{120^2}{250} - 28.8 = 28.8\ \Omega$$

两个阻值的确定，已经满足了三种设计中的两种情况，对于高档设置，当电路中的所有参数都确定的时候，如何满足第三种设计的要求呢？答案是不可能。通常，对于一个两阻值的设计来说只能满足三种功率分配中的两种(见习题 10.63，10.64 和 10.65)。可以检查高档设置中的平均功率，由低档和中档设置中求出的阻值得到：

$$\begin{aligned} P &= \frac{V^2}{R_1 \parallel R_2} \\ &= \frac{120^2}{28.8 \parallel 28.8} \\ &= \frac{120^2}{14.4} = 1000\ \text{W} \end{aligned}$$

正是要求的功率值，因此，设计是完整的。对于这个两电阻的设计，三个功率的需求是精心构造好的。



(a) 开关设置在中档时的电路图

(b) (a)的等效电路

图 10.31

(a) 开关设置在高档时的电路图

(b) (a)的等级电路

图 10.32

小结

1. 瞬时功率是瞬时端电压和端电流的乘积，即 $p = \pm vi$。当电路的参考方向是从电压的正端流向负端时用正号。瞬时功率的频率是电压(或者电流)频率的两倍。

2. 平均功率是瞬时功率在一个周期上的平均值。它是由电能转变为其他形式能量或者由其他形式能量转变为电能的功率。由于这个原因，平均功率又称为实功率，在关联符号下，平均功率表示为：

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= V_{eff} I_{eff} \cos(\theta_v - \theta_i) \end{aligned}$$

3. 无功功率是在电感的磁场和电源之间，或者说电容的磁场和电源之间相互传递的电能，无功功率不会转变为其他形式的能量，在关联符号下，无功功率的表达式为：

$$Q = \frac{1}{2}V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i)$$
$$= V_{eff} I_{eff} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

平均功率和无功功率都可以用电流和电压的峰值(V_m, I_m)或者有效值(V_{eff}, I_{eff})表示。有效值广泛应用在家用电器和工业设备中,有效值和方均根值是同一物理值的不同称呼。

4. 功率因数是电压和电流相位角差的余弦函数:

$$\text{pf} = \cos(\theta_v - \theta_i)$$

为了说明电流是滞后还是超前电压,在功率因数的描述中加入滞后和超前,确定负载是感性还是容性的。

5. 无功因数是电压和电流相位角之差的正弦函数:

$$\text{rf} = \sin(\theta_v - \theta_i)$$

6. 复功率是平均功率和无功功率的复数和,即:

$$S = P + \text{j}Q$$
$$= \frac{1}{2}VI^* = V_{eff} I_{eff}^*$$
$$= I_{eff}^2 Z = \frac{V_{eff}^2}{Z^*}$$

7. 视在功率是复功率的模:

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

8. 瓦特是平均功率和瞬时功率的单位。

9. 乏(无功伏安,或者 VAR)是无功功率的单位。

10. 伏安(VA)是复功率和视在功率的单位。

11. 最大功率传输。当负载阻抗等于从负载阻抗两端看过去的等效戴维南阻抗的共轭复数时,正弦稳态电流传递给负载的平均功率最大。

习题

10.1 将下列各组 v 和 i 加到图 10.1 所示的单口网络上,分别计算 P 和 Q 的值,并说明单口网络是吸收还是释放 (1) 平均功率、(2) 无功功率。

(a) $v = 340\cos(\omega t + 15°)$V, $i = 20\cos(\omega t + 15°)$A。

(b) $v = 75\cos(\omega t - 15°)$V, $i = 16\cos(\omega t + 60°)$A。

(c) $v = 625\cos(\omega t + 40°)$V, $i = 4\sin(\omega t + 240°)$A。

(d) $v = 180\sin(\omega t + 220°)$V, $i = 10\cos(\omega t + 20°)$A。

10.2 证明式(10.9)给出的瞬时功率最大值为 $P + \sqrt{P^2 + Q^2}$,最小值为 $P - \sqrt{P^2 + Q^2}$。

10.3 V_{dc}V 的直流电压加在阻值为 R Ω的电阻两端,电压值为 v_sV 的正弦电压也加于阻值为 R Ω的电阻两端。证明在 T 秒内(T 为正弦电压的周期),直流电压和正弦电压释放的能量相同。其中 v_s 的方均根值等于 V_{dc}。(提示:释放到电阻上的能量的两表达式相等。)

P10.4　(a) 求图 P10.4 所示周期电压的方均根。

(b) 将电压加于 12 Ω 的电阻两端,求电阻上的平均功率。

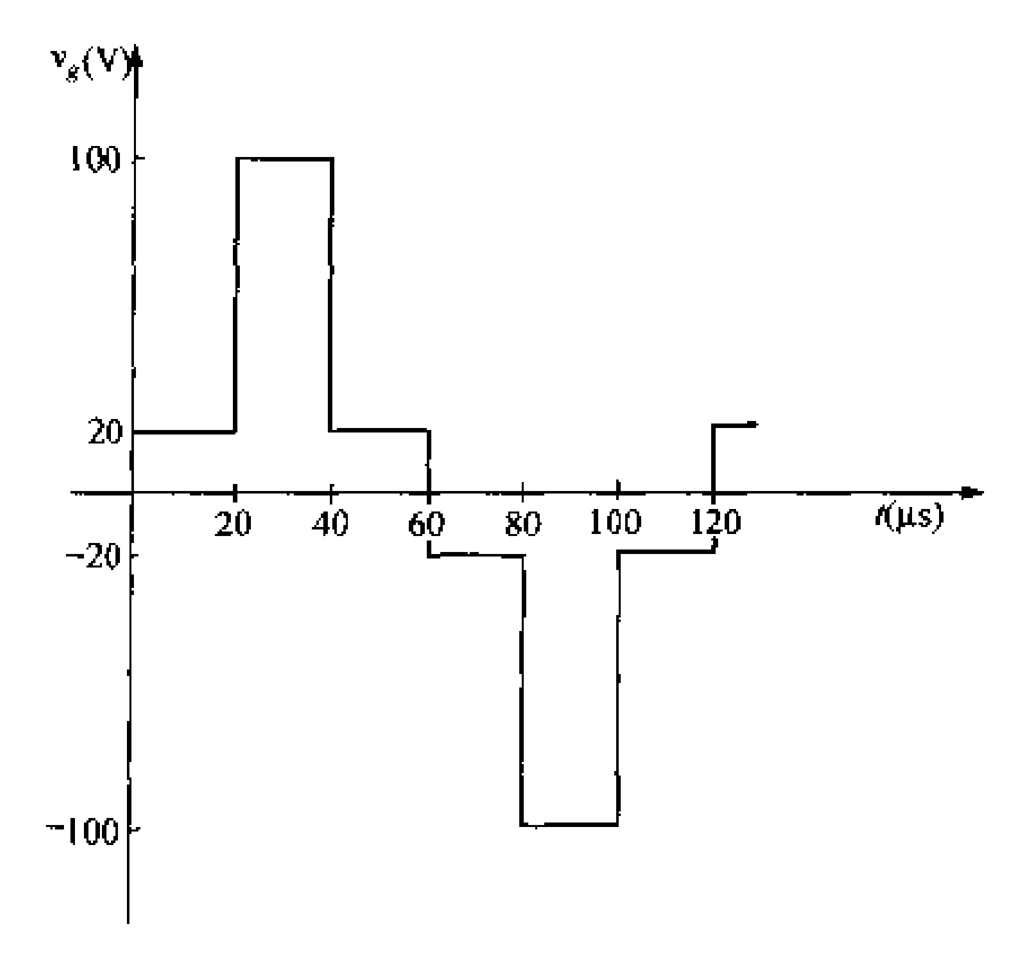


图 P10.4

M10.5　求图 P10.5 所示周期电流的方均根。

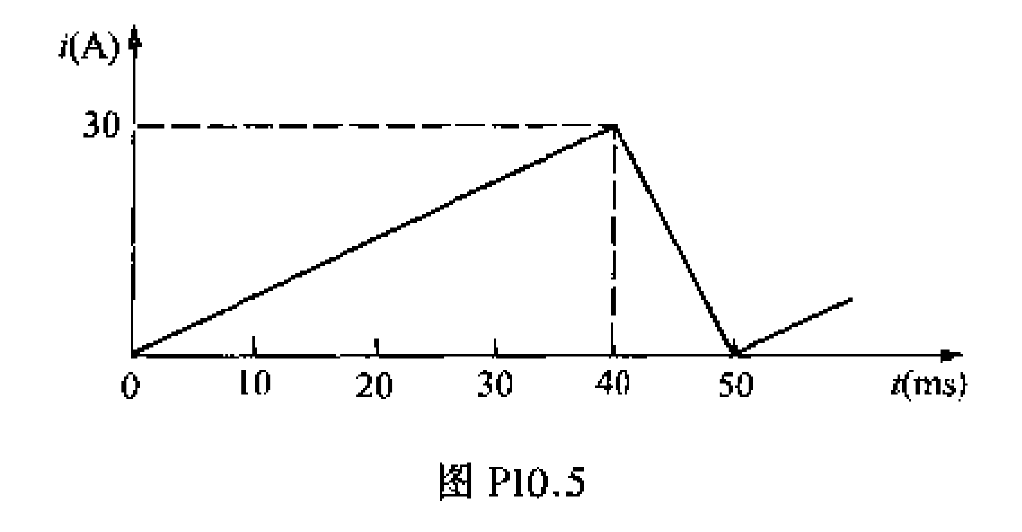


图 P10.5

10.6　若图 P10.5 所示周期电流发送到某一电阻上的平均功率为 24 kW,求电阻值。

P10.7　图 P10.7 所示为理想运算放大器电路,若 $v_g = 4\cos 5000t$ V,求发送到 1000 Ω 电阻上的平均功率。

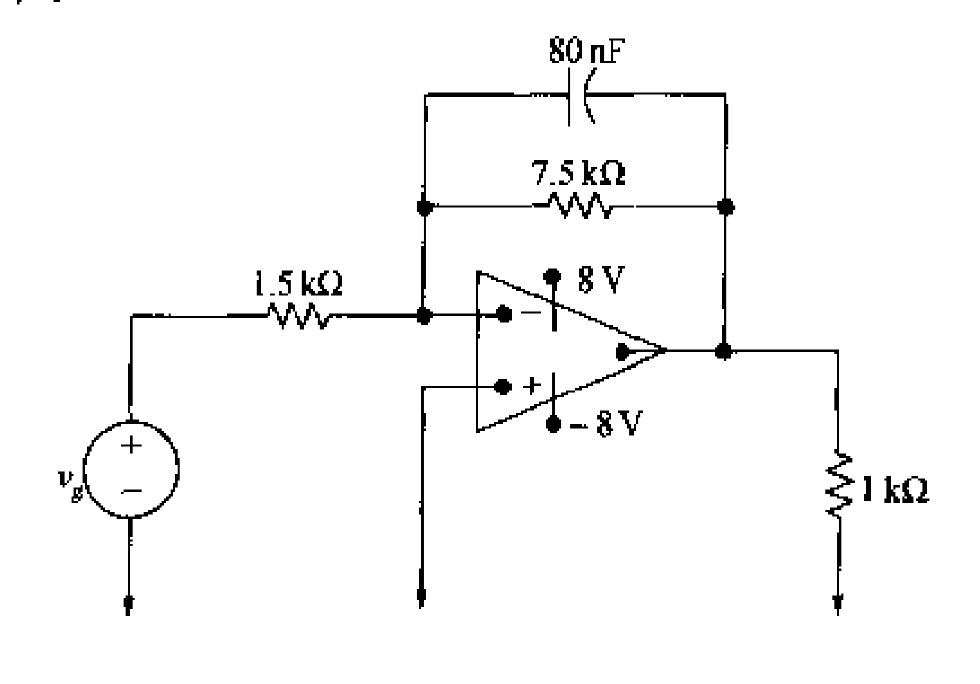


图 P10.7

P10.8 若 $i_g = 30 \cos 100t$ mA,求图 P10.8 所示单口网络两端的平均功率、无功功率以及视在功率。

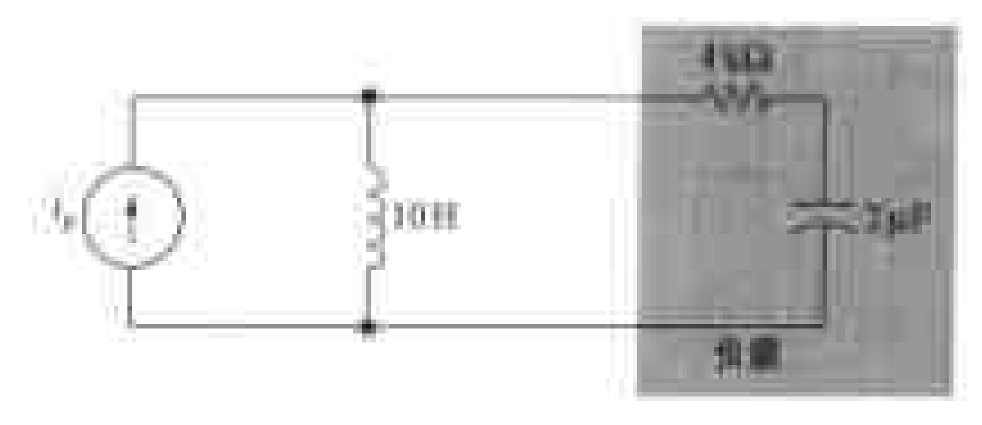


图 P10.8

P10.9 若 $i_g = 15 \cos 10\,000t$ A,求图 P10.9 所示电路 20 Ω 电阻的平均功率。

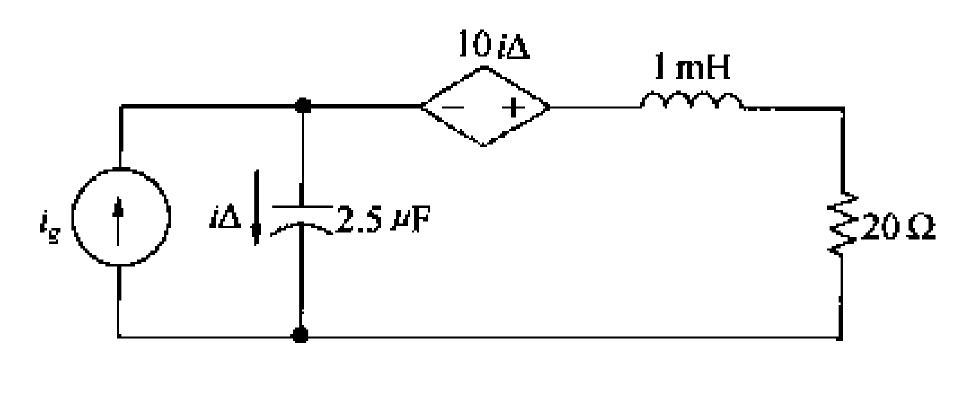


图 P10.9

10.10 图 P10.10 所示电路的三个负载描述如下:负载 1 为 240 Ω 电阻和感抗为 70 Ω 电感的串联电路,负载 2 为容抗为 120 Ω 电容和 160 Ω 电阻的串联电路,负载 3 为30 Ω 电阻和容抗为 40 Ω 电容的串联电路,电压源的频率为 60 Hz。

(a) 求每个负载的功率因数及无功因数。

(b) 求从电压源的电路看过去等效负载的功率因数及无功因数。

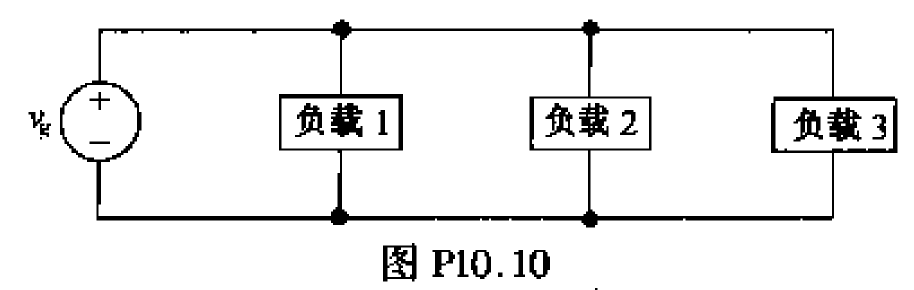


图 P10.10

10.11 图 P10.11 所示频域电路的电压 $V_g = 340 \angle 0^\circ$ V(rms)。

(a) 求电压源两端的平均功率和无功功率。

(b) 电压源是吸收还是发送平均功率?

(c) 电压源是吸收还是发送无功功率?

(d) 求电路中每个阻抗支路上的平均功率和无功功率。

(e) 验证平均功率守恒。

(f) 验证无功功率守恒。

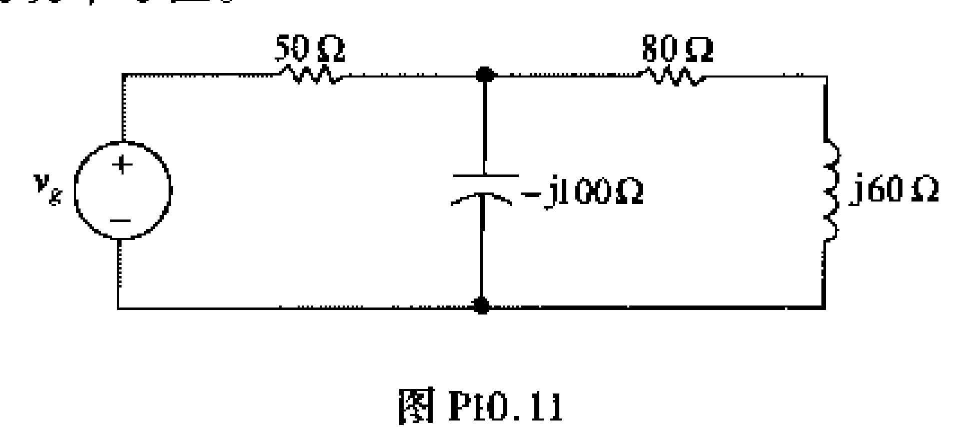


图 P10.11

P M10.12　若理想电流源 $i_g = 30\cos 25\,000t$ mA，求图 P10.12 所示电路电流源发送的平均功率。

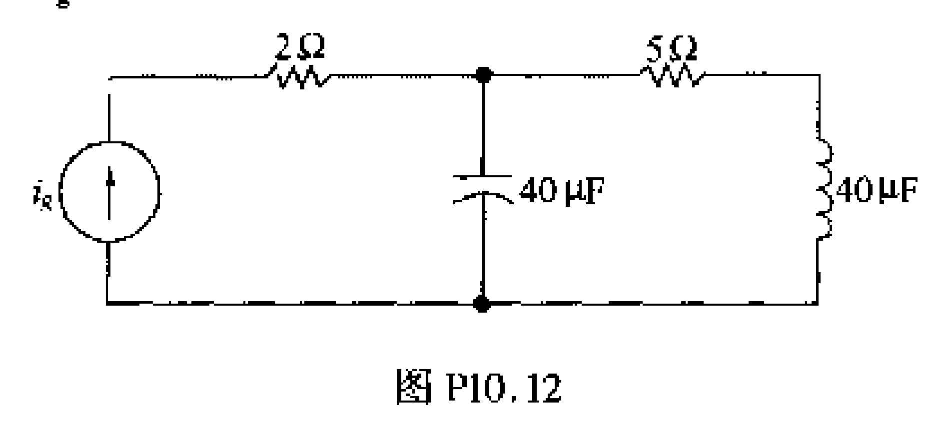


图 P10.12

10.13　若正弦电压源 $v_g = 240\cos 5000t$ V，负载为 480 Ω 电阻和 5/9 μF 的电容并联。

(a) 求电源发送的瞬时功率的最大值。

(b) 求电源吸收的瞬时功率的最大值。

(c) 求负载的平均功率。

(d) 求负载的无功功率。

(e) 负载时吸收还是产生无功功率。

(f) 负载的功率因数是多少？

(g) 负载的无功因数是多少？

10.14　图 P10.14 所示，负载吸收的平均功率为 2500 W，释放的无功功率为 5000 VAR，正弦电压源产生的功率为 7500 W。

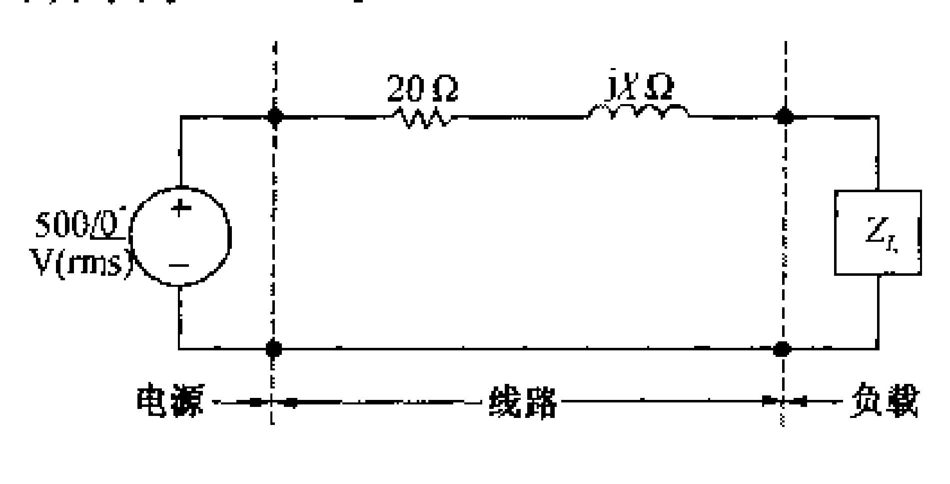


图 P10.14

(a) 求满足上述条件的感性线路的电抗。

(b) 对于(a)中求得的每一个线路电抗值，证明发送的无功功率等于吸收的无功功率。

P M10.15　(a)图 P10.15 所示电路，若 $v_g = 50\cos 105\,t$ V，求电压源的平均功率、无功功率和视在功率。

(b) 通过证明 $P_{dev} = \Sigma P_{abs}$，检验(a)中答案的正确性。

(c) 通过证明 $Q_{dev} = \Sigma Q_{abs}$，检验(a)中答案的正确性。

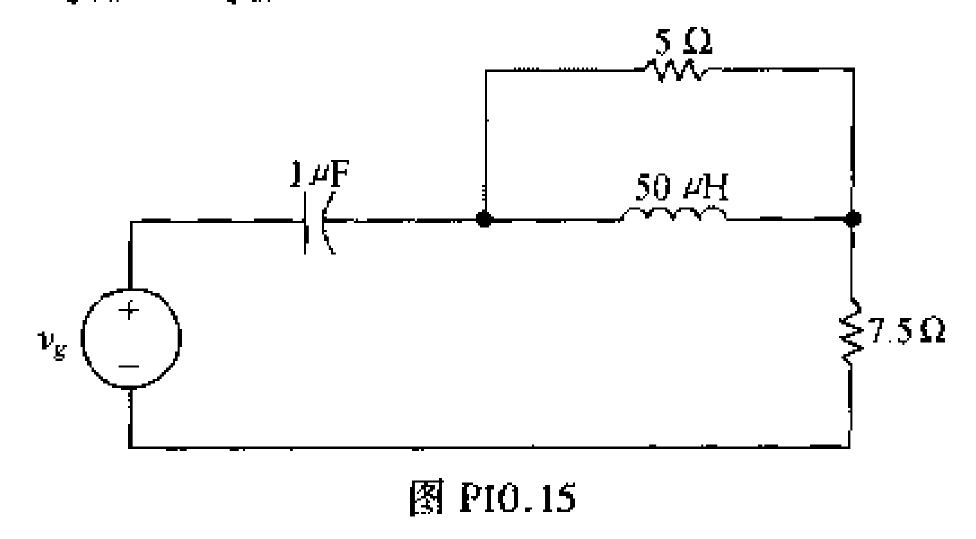


图 P10.15

10.16 图 P10.16 所示电路的两负载描述如下:负载 1 吸收 24.96 kW 的平均功率和 47.04 kVAR 的无功功率,负载 2 的阻抗为 5 - j5 Ω,负载的端电压为 $480\sqrt{2}\cos 120\pi t$ V。

(a) 求电源电压的方均根值。

(b) 经过多少毫秒,负载电压和电源电压异相?

(c) 负载电压是超前还是滞后电源电压。

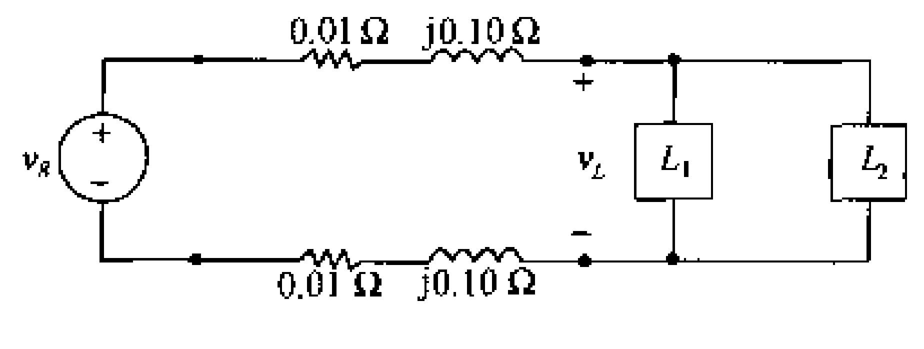


图 P10.16

10.17 (a) 图 P9.57 所示电路,计算每一个电路元件的平均功率和无功功率。

(b) 证明平均功率守恒。

(c) 证明无功功率守恒。

10.18 电路如图 P9.54 所示,重复习题 10.17 的问题。

10.19 三个负载并联接于 2 400 V(rms)电压两端,如图 10.19 所示,负载 1 吸收的功率为 18 kW 和 24 kVAR,负载 2 吸收的功率为 60 kVA,功率因数 pf 为 0.6(超前),负载 3 吸收的功率为 18 kW,功率因数为 1。

(a) 求三个并联负载的等效阻抗。

(b) 求从电路的输入端看过去的等效阻抗的功率因数。

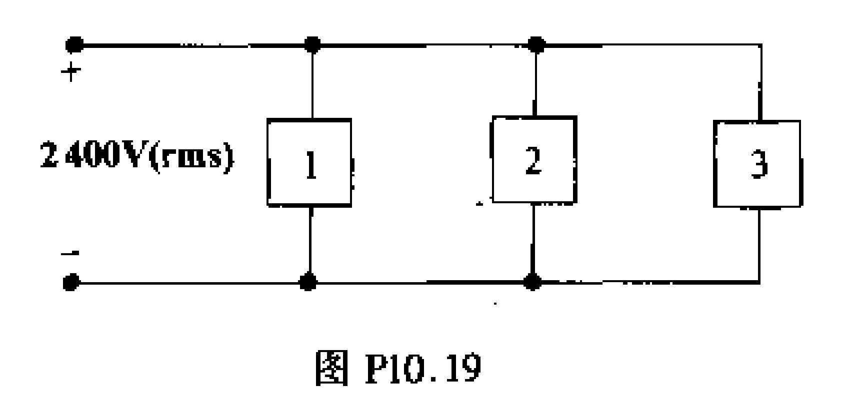


图 P10.19

10.20 如图 P10.20 所示得三负载电路,线路阻抗为 0.2 + j1.6 Ω。

(a) 计算电压 v_s 的方均根值。

(b) 计算线路上的平均功率和无功功率。

(c) 计算电路两端子间的平均功率和无功功率。

(d) 若效率定义为 $\eta = (P_{负载}/P_{产生}) \times 100\%$,求电路的效率 η。

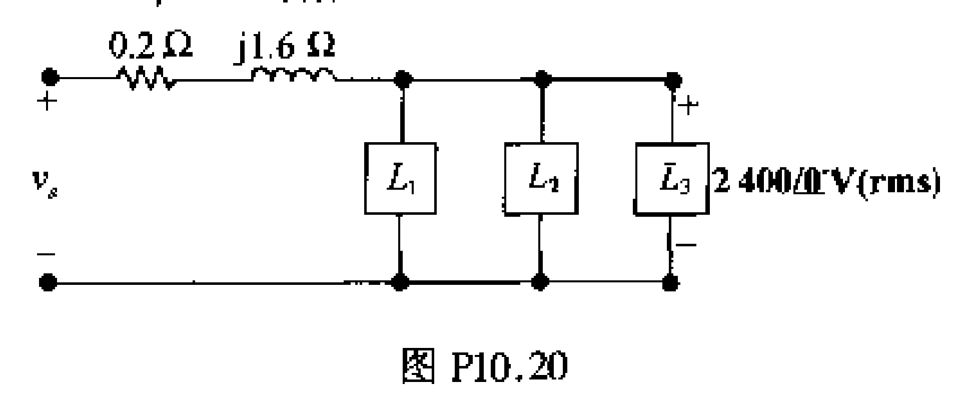


图 P10.20

10.21 图 P10.21 所示三负载描述如下:负载 1 吸收的平均功率为 48 kW,无功功率为 18 kVAR,负载 2 吸收的平均功率为 48 kW,同时释放 30 kVAR 的无功功率,负载 3

为 60 Ω 电阻与感抗为 480 Ω 的电感并联。若 $v_g = 2400\angle 0°$ V(rms)，求 v_g 的方均根和相位角。

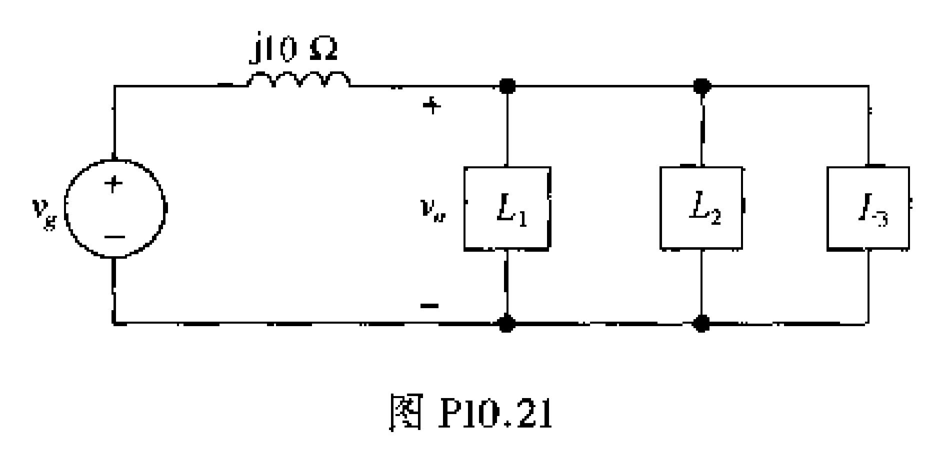


图 P10.21

10.22 两个 660 V(rms)的负载并联，负载上的总平均功率为 52800 W，且功率因数为 0.80 超前，其中一个负载的功率为 40 kVAR，功率因数为 0.96 滞后，求另一个负载的功率因数。

10.23 (a) 如图 P10.23 所示电路，若负载吸收的功率为 250 VA，功率因数为 0.6 滞后，求 V_L(rms)以及 θ。

(b) 画出(a)中各个解的相量图。

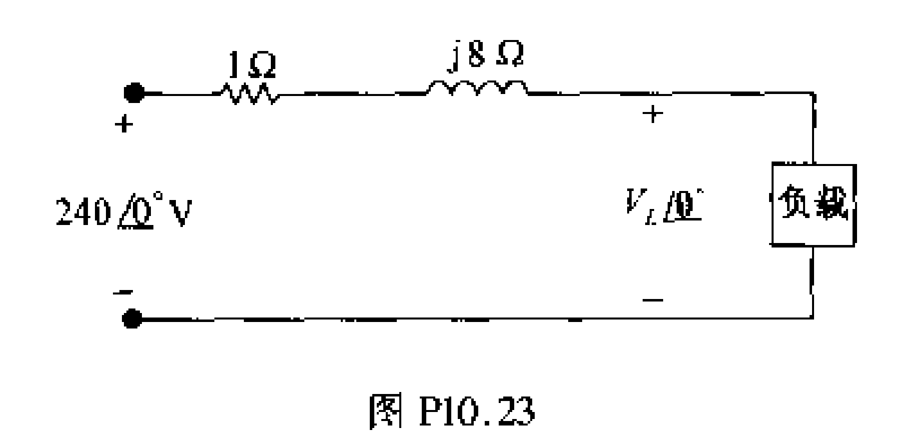


图 P10.23

10.24 (a) 求图 P10.24 线路上的平均功率。

(b) 在负载两端并联一个电容，使负载呈纯阻性，求电容的容抗。

(c) 求(b)中的负载等效阻抗。

(d) 求加上电容之后的线路的平均功率。

(e) (d)中求得的功耗为(a)中功耗的百分之几？

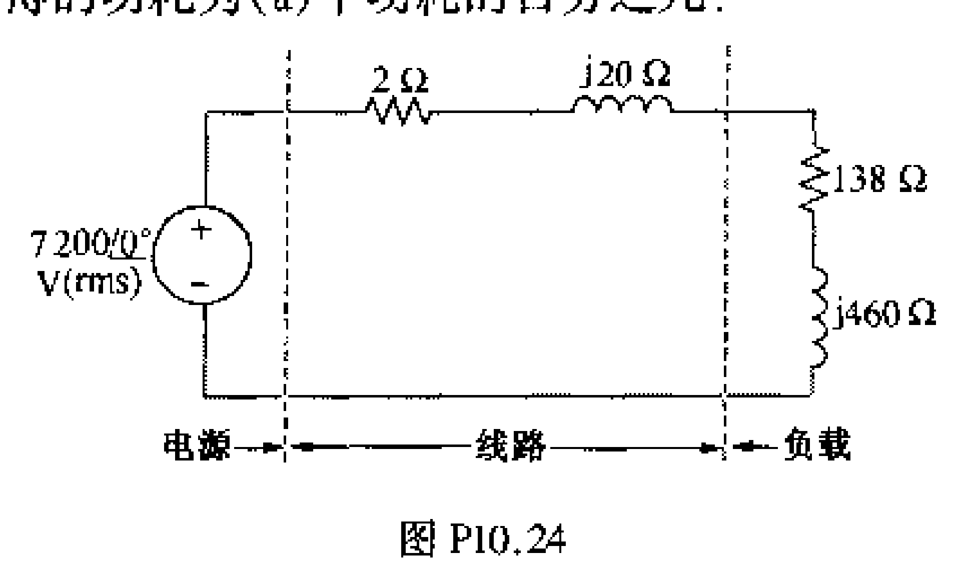


图 P10.24

10.25 图 P10.25 的三个负载分别为：$S_1 = 5 + j2$ kVA，$S_2 = 23.75 + j1.5$ kVA，$S_3 = 8 + j0$ kVA。

(a) 求电压源 V_{g1} 和 V_{g2} 上的复功率。

(b) 证明电源发送的总的实功率和无功功率等于网络吸收的总的实功率和无功功率。

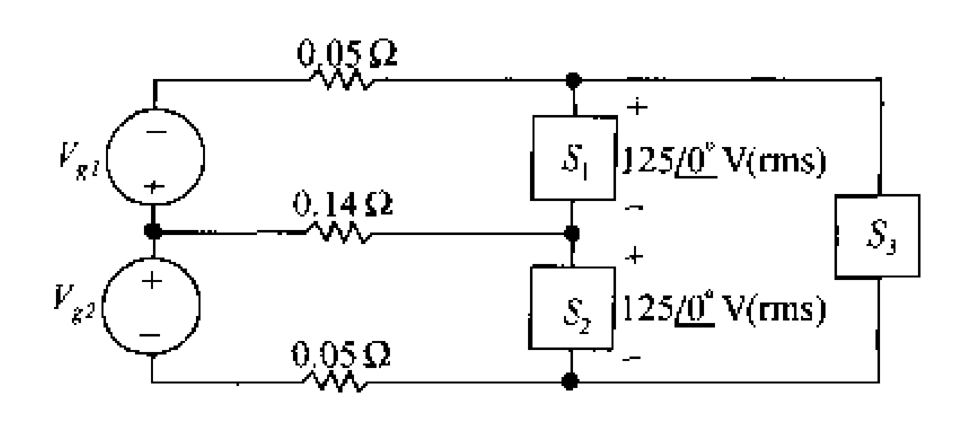


图 P10.25

10.26 图 P10.26 所示电路的三个负载描述如下：负载 1 吸收的功率 1.8 kW 和 600 VAR，负载 2 为 1.5 kVA，功率因数为 0.8 超前，负载 3 为 12 Ω 电阻与感抗为 48 Ω 的电感并联。

(a) 若 $V_{g1} = V_{g2} = 120\angle 0°$ V(rms)，求两电压源发送的平均功率和无功功率。

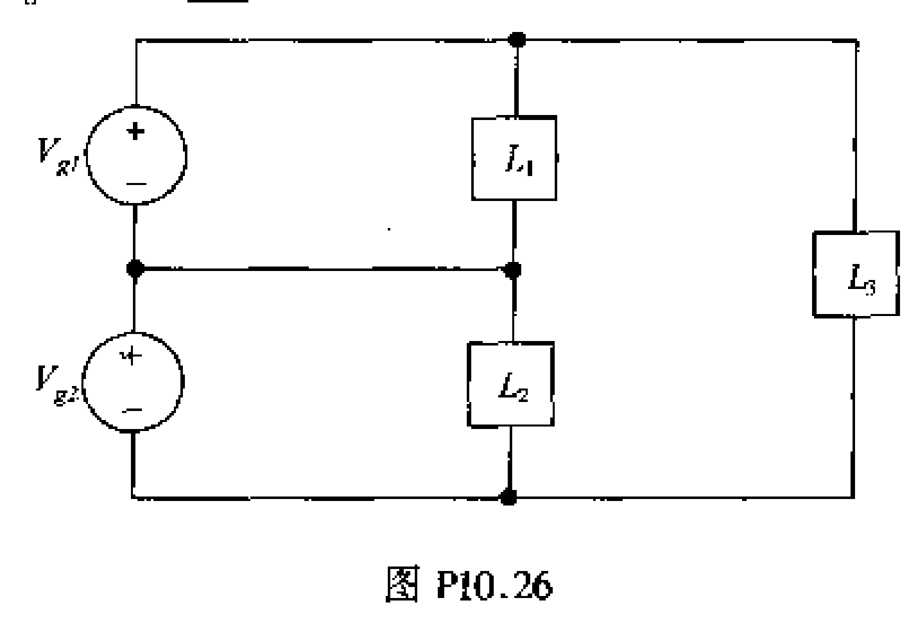


图 P10.26

(b)证明下式，验证结果的正确性：

$$\sum P_{dev} = \sum P_{abs}$$
$$\sum Q_{dev} = \sum Q_{abs}$$

10.27 图 P10.26 为一居民供电线路，当 $V_{g1} = V_{g2} = 120\angle 0°$ V(rms)时，导线的阻抗忽略不计，电路的三个负载是 L_1(咖啡壶、煎锅、煎蛋锅)，L_2(吹风机、日光灯、风扇和洗衣机)，L_3(热水器和烤箱)。假设所有的设备在同一时间使用，保护线路的熔断器为 100 A，电路会被切断吗？试解释。

10.28 一组工作在 125 V(rms)下的电器需要 25 kVA 的功率，且功率因数 0.96 滞后，线路阻抗为 0.006 + j0.048 Ω，负载端电压为 125 V。

(a) 电源电压的方均根为多少？

(b) 系统的平均功率损耗？

(c) 在负载两端需加入多大的电容(单位为 mF)，才能将功率因数提高到 1？

(d) 加入电容后，若负载端电压保持为 125 V，电源电压的方均根为多少？

(e) 求(d)的平均功率损失。

10.29 一稳态电源加于负载与传输线的两端，如图 P10.29 所示，在 250 kVA 负载上并联一个电容，使线路两端稳态电压的模等于负载两端电压的模，即 2500 V(rms)，250 kVA负载的功率因数 0.96 滞后，若电路工作在 60 Hz 频率下，计算电容值，单位为毫法。在选择电容时，时刻要记住应使线路损耗保持在一个合理范围内。

10.30 证明：若负载阻抗的幅值可变，当 $|Z_L|=|Z_{Th}|$ 时，传输的平均功率最大。（提示：在推导负载平均功率的表达式时，用 $Z_L=|Z_L|\cos\theta+\mathrm{j}|Z_L|\sin\theta$ 表示负载阻抗 Z_L，且只有 $|Z_L|$ 是可变的。）

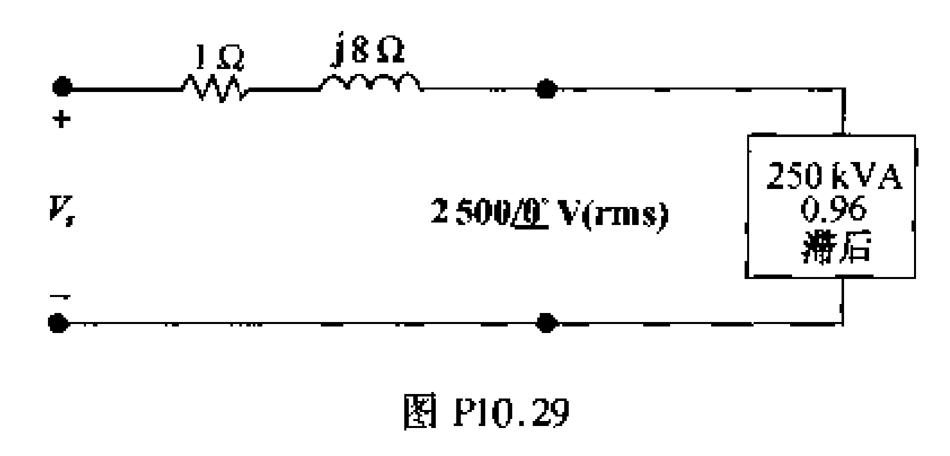


图 P10.29

P10.31 图 P10.31 所示正弦电压源的峰值为 $150\sqrt{2}$ V，周期为 200 μs，负载电阻可在 0 至 20 Ω 间变换，负载电感在 1 至 8 mH 间改变。

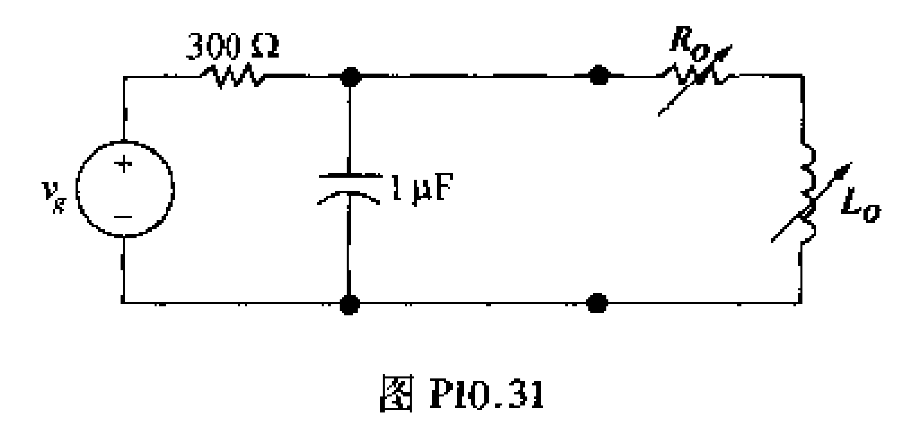


图 P10.31

(a) 当 $R_o=10\ \Omega, L_o=6$ mH 时，求负载的平均功率。

(b) 确定能将最大平均功率传递到 R_o 上的 R_o 和 L_o 的值。

(c) (b)中的最大平均功率是多少？它比(a)中求得的平均功率大吗？

(d) 若 R_o 和 L_o 不受限制，传输的最大平均功率是多少？

(e) 在(d)的条件下，R_o 和 L_o 的值为多少？

(f) (d)值求得的平均功率比(c)中的平均功率大吗？

P10.32 (a) 假设图 P10.31 电路中的 R_o 可以在 0 至 50 Ω 间变换，重复习题 10.31 中的(b)和(c)两问。

(b) (a)中求得的新的平均功率比习题 10.31(a)中求得的平均功率大吗？

(c) (a)中求得的平均功率比习题 10.31(d)中的平均功率小吗？

10.33 调整图 P10.33 中的可变电阻 R_o，使传递到 R_o 上的平均功率最大。

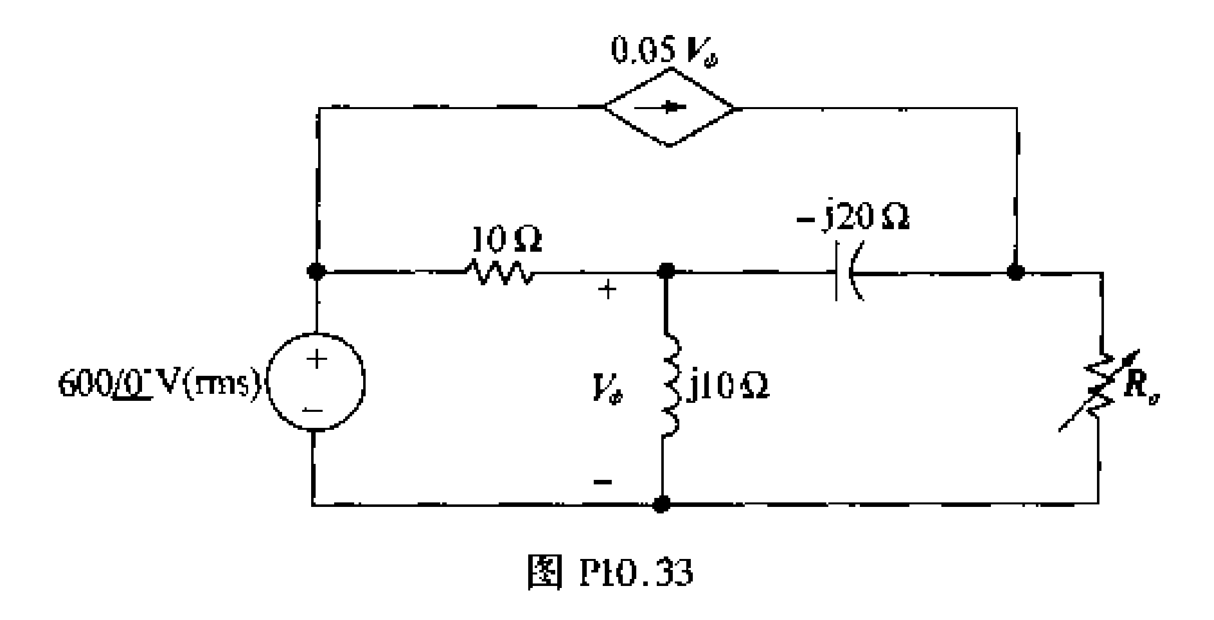


图 P10.33

(a) 求 R_o，单位为 Ω。

(b) 求 R_o 的平均功率。

(c) 若 R_o 被一可变阻抗 Z_o 代替，求 Z_o 的最大平均功率。

(d) 在(c)中电路发送的功率有百分之几传递到负载 Z_o 上?

10.34 (a) 图 P10.34，若 $\omega = 10$ krad/s，当负载阻抗为多大时，传递到负载上的平均功率最大?

(b) 若 $v_g = 90\cos 10000t$ V，求最大平均功率。

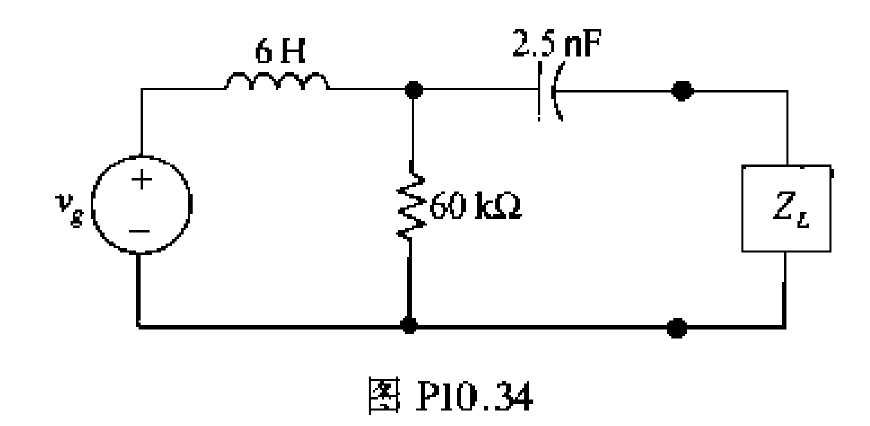


图 P10.34

10.35 调整图 P10.35 所示电路中的可变电阻，使其上的平均功率最大。

(a) 求 R_o。

(b) 求最大平均功率。

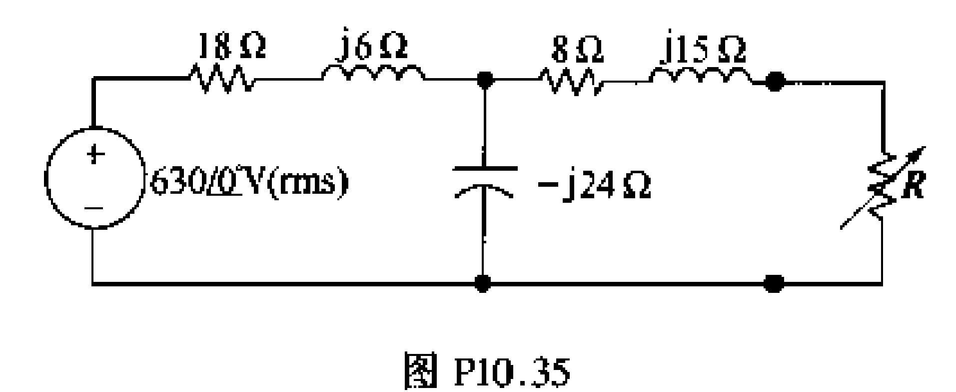


图 P10.35

10.36 图 P10.36 所示电路，当 a，b 两端间无负载时，电压相量 V_{ab} 为 $480\angle 0°$ V(rms)，当 a，b 间的负载为 100 + j0 Ω 时，V_{ab} 为 240 − j80 V(rms)。

(a) 进行最大平均功率传输时，a，b 间的阻抗为多少?

(b) 在(a)的阻抗下，求最大平均功率。

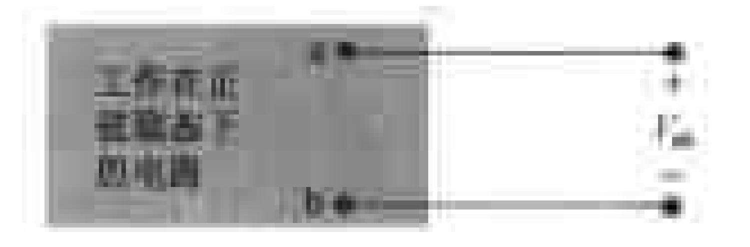


图 P10.36

10.37 调整图 P10.37 所示电路的负载阻抗 Z_L，使 Z_L 上的平均功率最大。

(a) 求 Z_L 上的最大平均功率。

(b) 总功率的百分之几传递到了负载阻抗 Z_L 上?

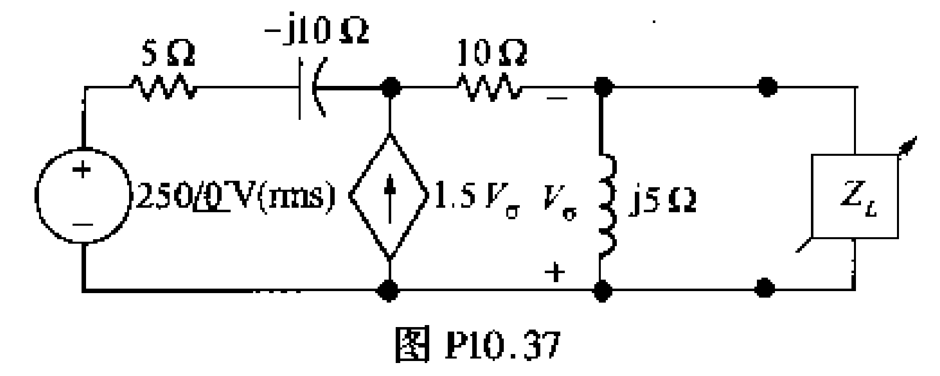


图 P10.37

10.38 调整图 P10.38 所示电路的端电压以使负载电压的方均根值保持为 4800 V，调整可变电容使线路电阻上消耗的平均功率最小。

(a) 若正弦电源的频率为 60 Hz,求电容值,单位为毫法。

(b) 若将电容从电路中移走,为保持负载电压为 4800 V,电源电压的幅值 V_s 应增加百分之多少?

(c) 若将电容从电路中移走,线路损耗将增加百分之多少?

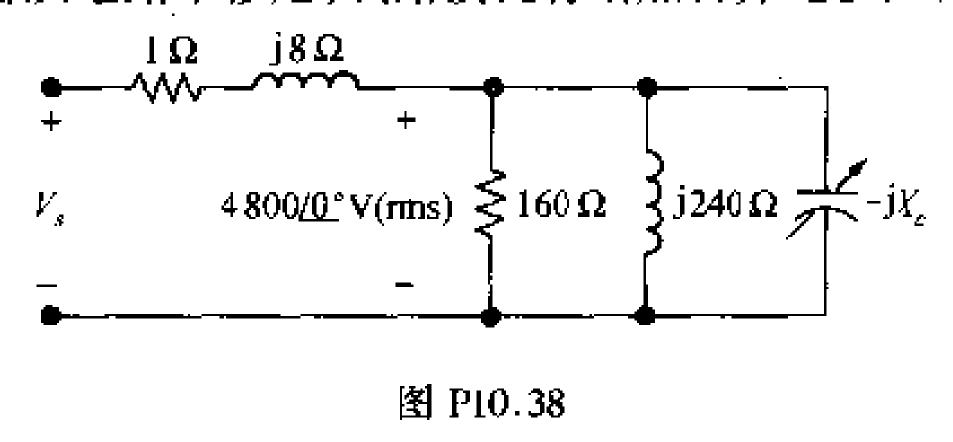


图 P10.38

10.39 某工厂有一个功率因数 0.6 滞后,功率为 1800 kW 的负载,现在要添加一个可变功率因数的负载,使工厂整体的功率因数为 0.96 滞后。

(a) 求新增负载的无功功率。

(b) 新增负载是吸收还是发送无功功率?

(c) 新增负载的功率因数是多少?

(d) 假设工厂输入电压的方均根为 4800 V,求在可变功率因数的负载加入之前,电流幅值的方均根。

(e) 可变功率因数的负载加入之后电流幅值的方均根是多少?

M10.40 假设习题 10.39 的线路阻抗为 0.02 + j0.16 Ω,工厂电压为 4800 V(rms)。

(a) 求负载加入之前和之后的线路平均功率损耗。

(b) 求负载加入之前和之后发送端的电压的幅值。

10.41 如图 P9.64 所示电路,在 c,d 端加入一阻抗,其值等于戴维南阻抗的共扼复数。

(a) 求正弦电压源总的平均功率。

(b) 电压源发送的功率百分之多少在线性变压器上损耗掉了。

10.42 习题 9.62 描述的电路。

(a) 负载阻抗端电压的有效值。

(b) 实际电源发送功率的百分之多少传递到了负载阻抗上?

P10.43 图 P10.43 所示电路,若 $v_g = 660 \cos 5000t$ V,求 100 Ω 电阻的平均功率。

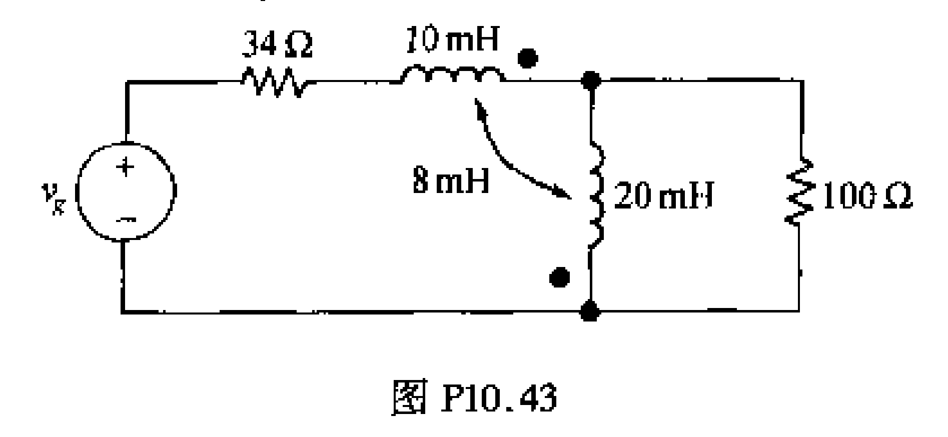


图 P10.43

10.44 调整图 P10.44 所示电路的阻抗 Z_L,使 Z_L 上的平均功率最大,正弦电压源的内部阻抗为 8 + j56 Ω。

(a) 求 Z_L 上的最大平均功率。

(b) 传递到线性变压器上的平均功率的百分之多少传递到了 Z_L 上?

P10.45 (a) 图 P10.45 所示电路，$v_g = 248\cos 10000t$ V，求 400 Ω 电阻的平均功率。

(b) 求 375 Ω 电阻的平均功率。

(c) 求理想电压源发送的平均功率。证明吸收功率等于发送功率并验证结果的正确性。

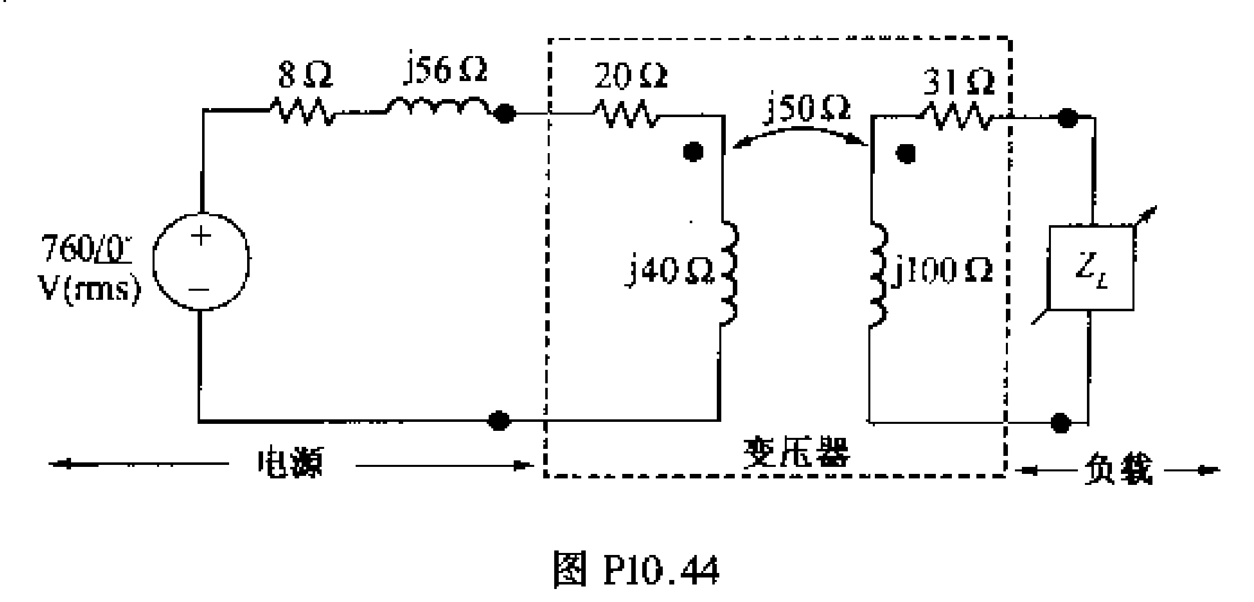


图 P10.44

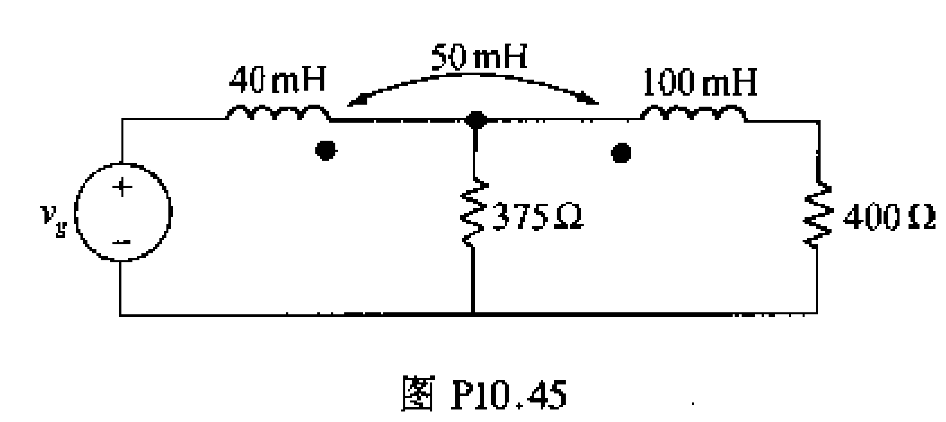


图 P10.45

10.46 由图 P10.46 所示的频域电路，求：

(a) V_o 的方均根值。

(b) 70 Ω 电阻的平均功率。

(c) 理想电压源发送的平均功率的百分之多少传递到 70 Ω 的电阻上。

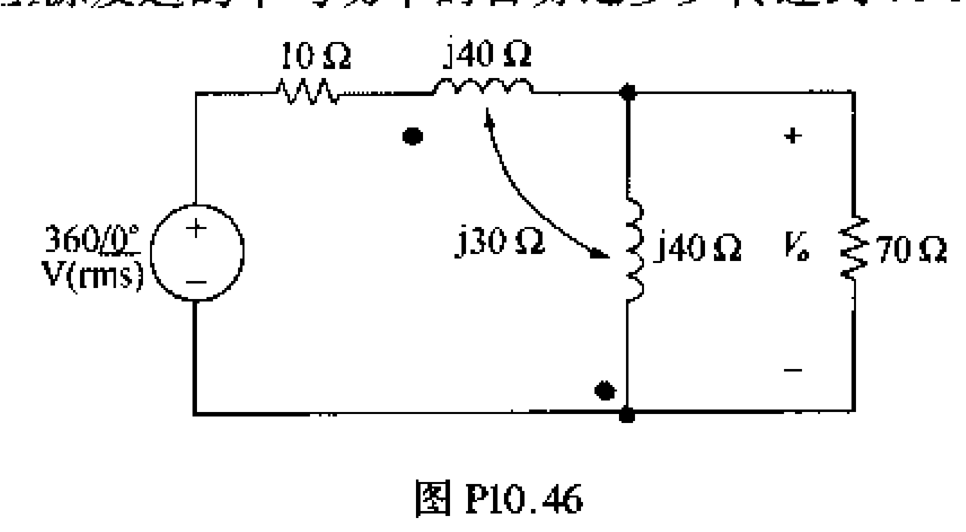


图 P10.46

10.47 将图 P10.46 中的 70 Ω 电阻替换为可变阻抗 Z_o，调整 Z_o 使 Z_o 上的平均功率最大。

(a) Z_o 的最大平均功率是多少？

(b) Z_o 的平均功率最大时，理想电压源产生的平均功率是多少？

10.48 (a) 求图 P10.48 所示电路 6 条支路的电流 $I_a \sim I_f$。

(b) 求每条支路的复功率。

(c) 通过平均功率守恒验证结果的正确性。

(d) 通过无功功率守恒验证结果的正确性。

10.49 图 P10.49 所示电路的参数如下：$L_1 = 40$ mH，$L_2 = 10$ mH，$k = 0.75$，$R_g = 20\ \Omega$，$R_L = 140\ \Omega$，若 $v_g = 240\sqrt{2}\cos 4\,000t$ V，求：

(a) v_o 的方均根值。

(b) R_L 上的平均功率。

(c) 传递到 R_L 上的平均功率是理想电压源发送的平均功率的百分之几?

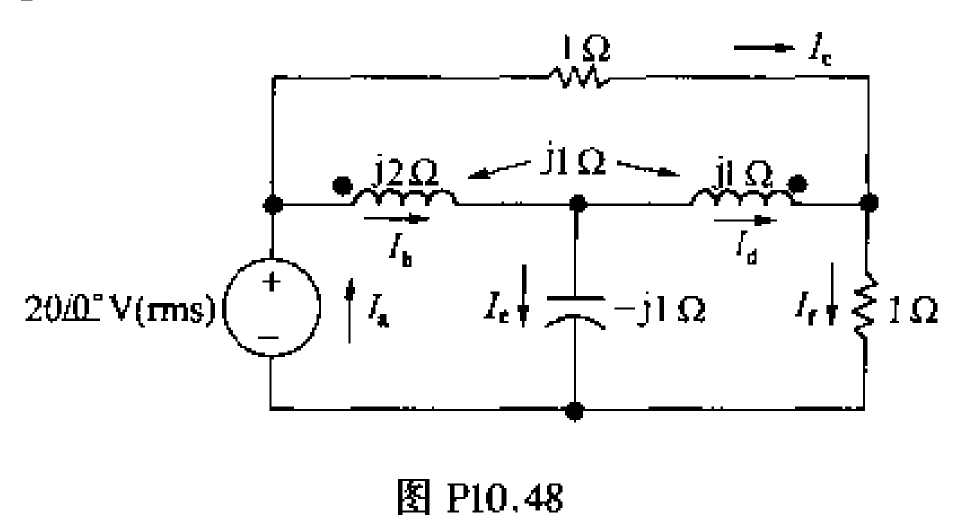


图 P10.48

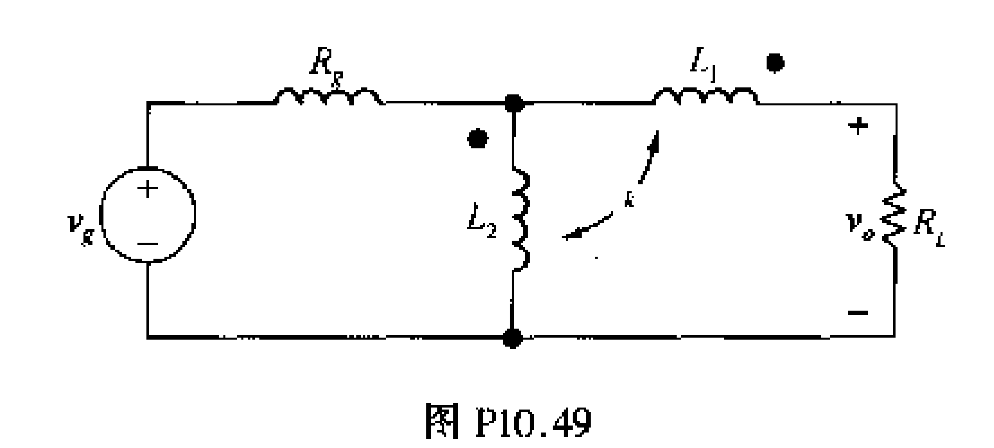


图 P10.49

10.50 若图 P10.49 电路中的负载电阻(R_L)可调。

(a) R_L 为何值时,其上平均功率最大?

(b) 传输的最大平均功率是多少?

10.51 将图 P10.49 电路中 L_1 的极点位置互换。

(a) 求使 $v_o=0$ 时的 k 值。

(b) 当 k 为(a)中计算的值时,求电源的平均功率。

P10.52 (a) 图 P10.52 所示电路,若 $v_g=70\cos 5000t$ V,求电流 i_g 和 i_L 的稳态表达式。

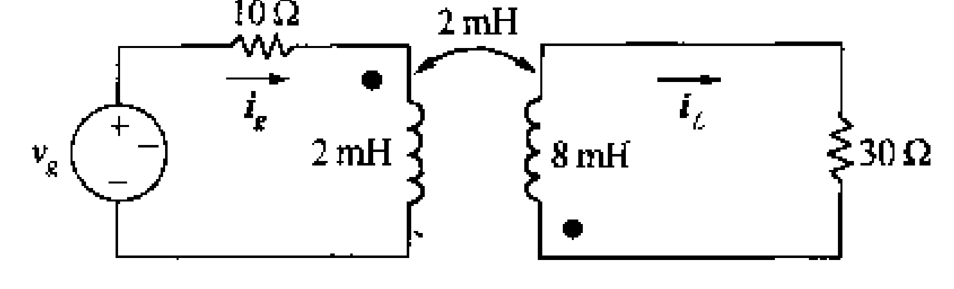


图 P10.52

(b) 求耦合系数。

(c) 当 $t=100\pi$ μs 和 $t=200\pi$ μs 时,求存贮于耦合线圈中的能量。

(d) 求 30 Ω 电阻上的功率。

(e) 将 30 Ω 的电阻替换为可变电阻 R_L,求 R_L 为何值时,其平均功率最大?

(f) 求(e)的最大平均功率。

(g) 将 30 Ω 的电阻替换为一可变阻抗 Z_L,求 Z_L 为何值时,其平均功率最大?

(h) 求(g)的最大平均功率。

10.53 (a) 求图 P10.53 电路中,40 Ω 电阻的平均功率。

(b) 求理想正弦电压源发送的平均功率。

(c) 求 Z_{ab}。

(d) 证明发送的平均功率等于吸收的平均功率。

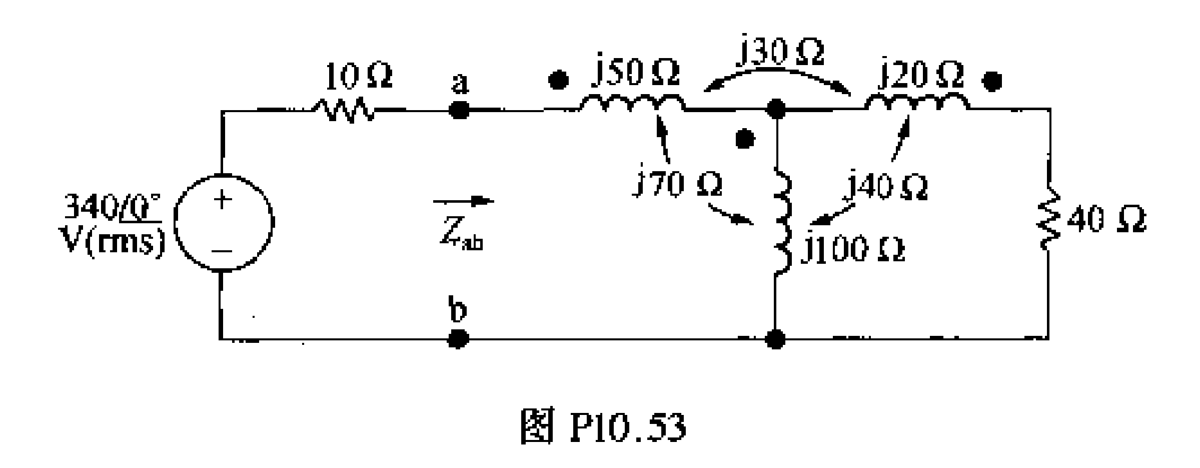


图 P10.53

10.54 图 P10.54 所示电路，调整 Z_o 的值，使其平均功率最大，求由理想电压源的两端看过去的等效阻抗。

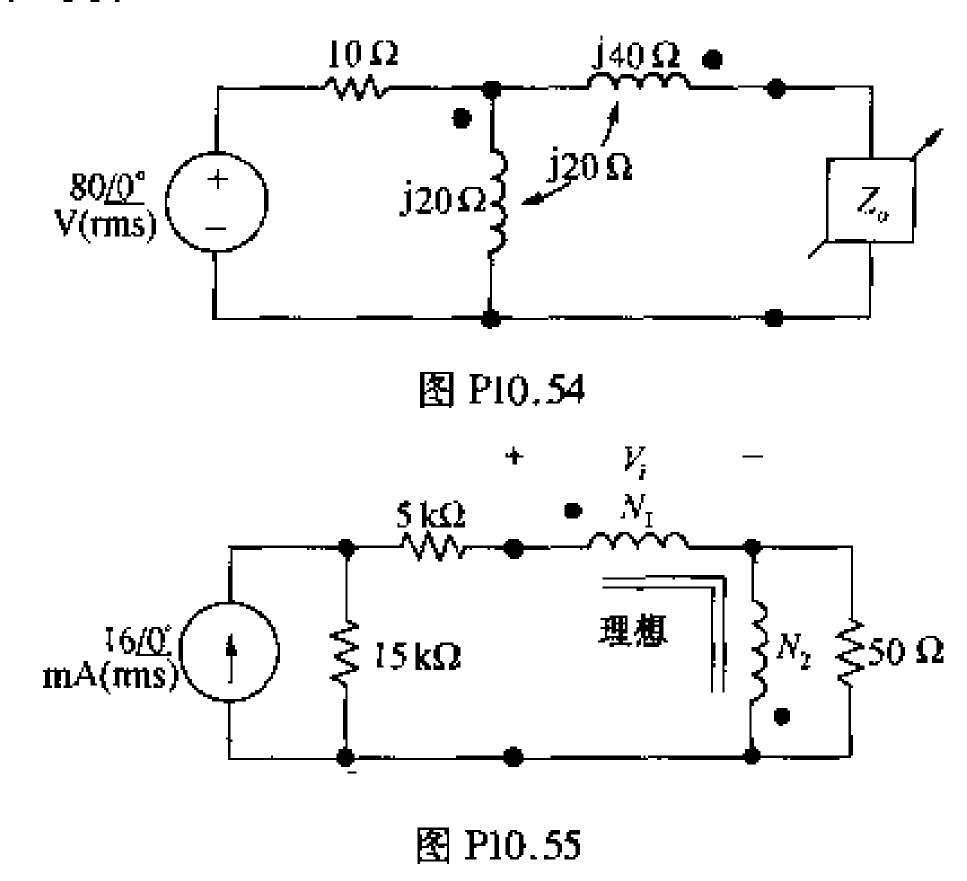


图 P10.54

图 P10.55

10.55 (a) 若理想变压器 $N_1 = 2520$ 匝，N_2 为多少匝时能使 50 Ω 负载上的平均功率最大？

(b) 求 50 Ω 负载上的平均功率。

(c) 求电压 V_i。

(d) 理想电流源发送功率的百分之几传递到了 50 Ω 电阻上。

10.56 (a) 求图 P10.56 所示电路中每个 4 Ω 电阻上的平均功率。

(b) 总发送功率是否等于总吸收功率，检验答案的正确性。

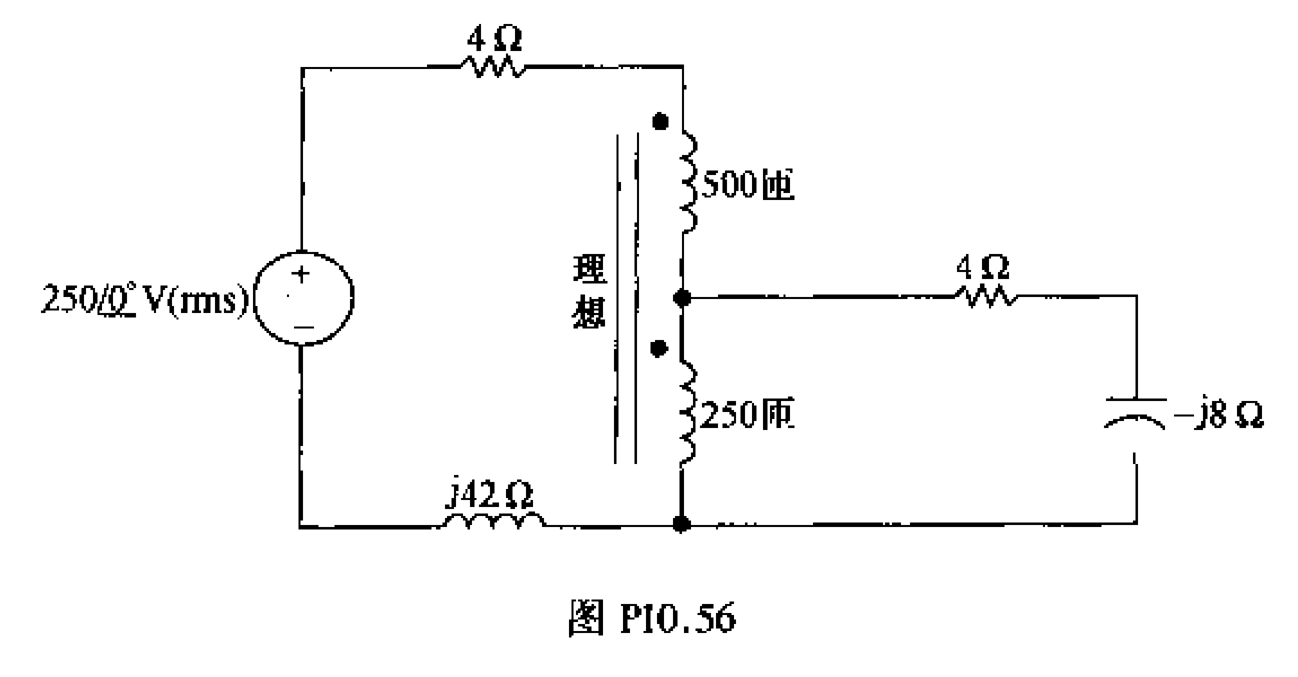


图 P10.56

P10.57 调整图 P10.57 所示可变负载电阻 R_L，使其平均功率最大。

(a) 求最大平均功率。

(b) 当 R_L 吸收的平均功率最大时，该功率是理想电压源发送的平均功率的百分之几？

(c) 证明理想电压源发送功率等于电路吸收功率，验证结果的正确性。

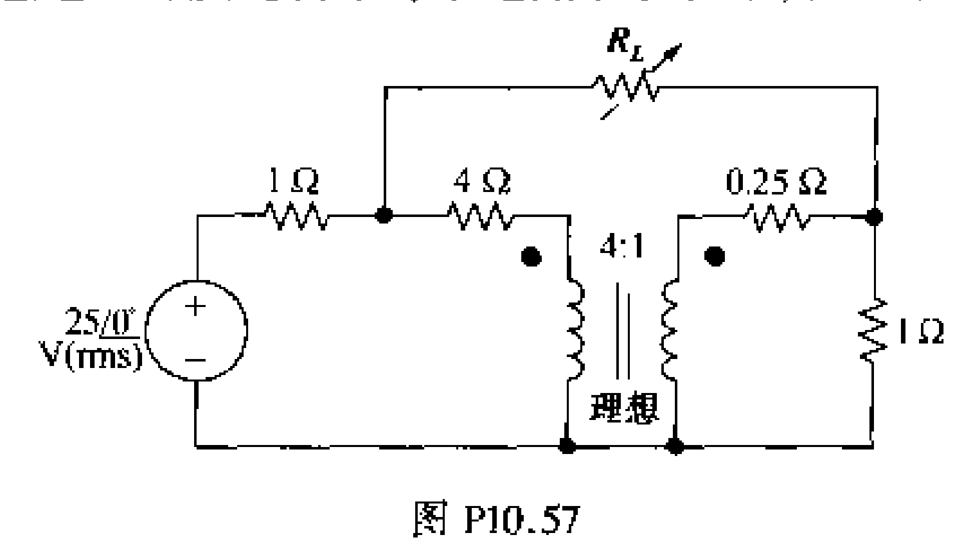


图 P10.57

P10.58 对于图 P10.58 所示电路，重复习题 10.57 中的各个问题。

10.59 (a) 图 P10.59 所示电路，若理想变压器 $N_1 = 1500$ 匝，N_2 应为多少匝才能使3600 Ω负载上的平均功率最大？

(b) 求 3600 Ω 电阻上的平均功率。

(c) 线性变压器吸收功率是理想电压源发送平均功率的百分之几？

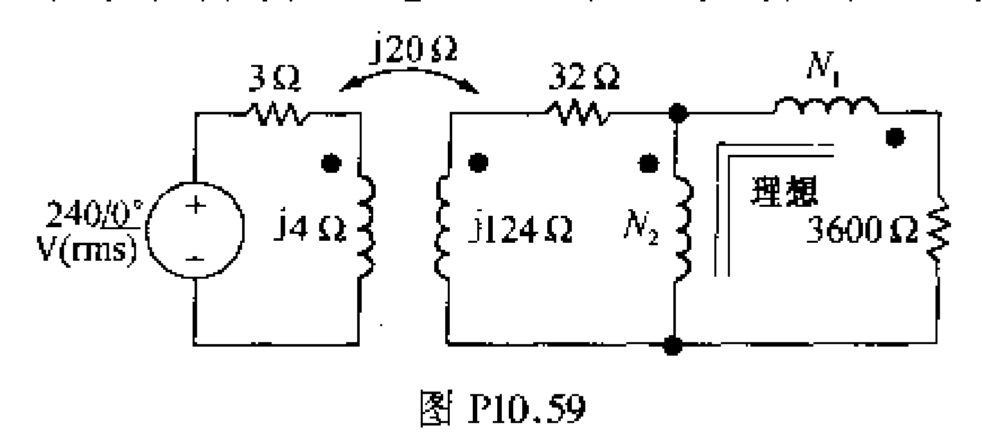


图 P10.59

10.60 图 P10.60 所示正弦电压源的方均根值电压为 680 V，80 Ω 电阻吸收的功率是320 Ω 电阻吸收功率的 16 倍，正弦电压源的内部阻抗为 136 /0° kΩ。

(a) 求 a_1 和 a_2 的值。

(b) 求 80 Ω 负载的功率。

(c) 求 320 Ω 电阻上的电压的方均根值。

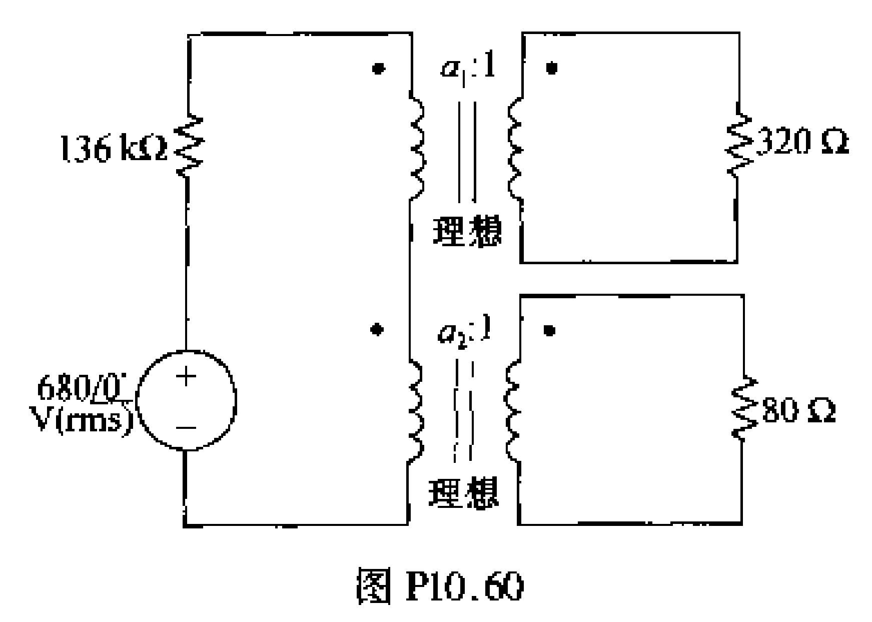


图 P10.60

10.61 调整图 P10.61 中的负载阻抗 Z_L，使 Z_L 上的平均功率最大。

(a) 若 $N_1 = 15000$ 匝，$N_2 = 5000$ 匝，求 Z_L。

(b) Z_L 吸收的平均功率最大时，求 I_L 和 V_L 的值。

10.62 图 P10.62 所示电路正弦电压源的频率为 50 krad/s，调整可变电容的容抗值，使 160 Ω 电阻上的平均功率最大。

(a) 求 C 值，单位为 mF。

(b) 若 C 为(a)中求得的值,求 160 Ω 电阻上的平均功率。

(c) 将 160 Ω 电阻用一个可变电阻 R_o 代替,R_o 为何值时,其上的平均功率最大?

(d) R_o 上的最大平均功率是多少?

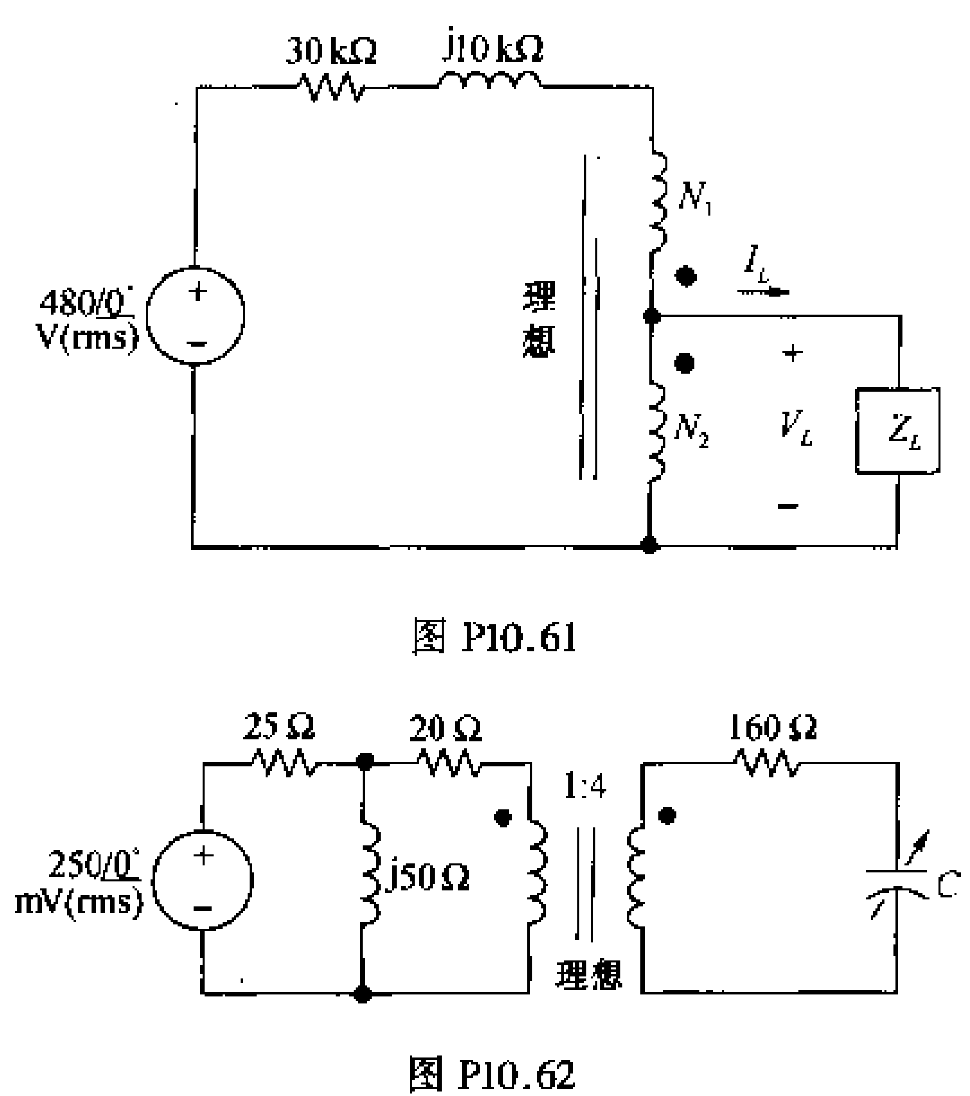


图 P10.61

图 P10.62

P◆10.63 在实例中提到,当吹风机的加热部件由两个电阻构成时,只能有两种独立的功率输出。

(a) 证明高额定功率(P_H)的表达式为:

$$P_H = \frac{P_M^2}{P_M - P_L}$$

其中 P_M = 中额定功率,P_L = 低额定功率。

(b) 若 $P_L = 250$ W,$P_M = 750$ W,则高额定功率必须为多大?

P◆10.64 图 10.29 所示的吹风机电路,若低额定功率为 240 W,高额定功率为 1000 W,求 R_1 和 R_2 的阻值。假设供电电压为 120 V(rms)(提示:首先做习题 10.63)。

P◆10.65 若在图 10.29 吹风机电路中加入第三个电阻,可以设计三种独立的功率输出,若电阻 R_3 与加热管串联,则相应的低中高三档功率输出的电路如图 P10.65 所示。如果三种功率分别为 600 W,900 W,1200 W,供电电压为 120 V(rms),求电阻的阻值。

P◆◇10.66 重新设计实例中讨论过的吹风机,使之能在英国使用。英国的标准供电电压为 220 V(rms),为了得到相同的功率输出,电阻的阻值应为多少?

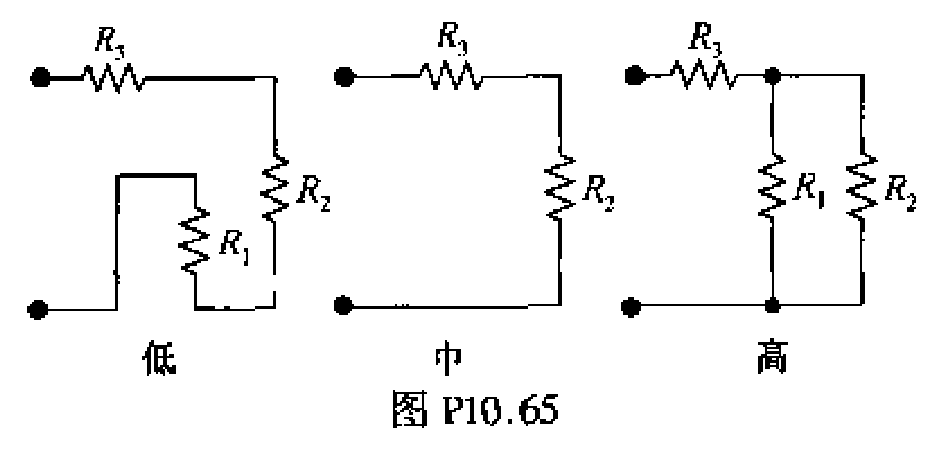


图 P10.65

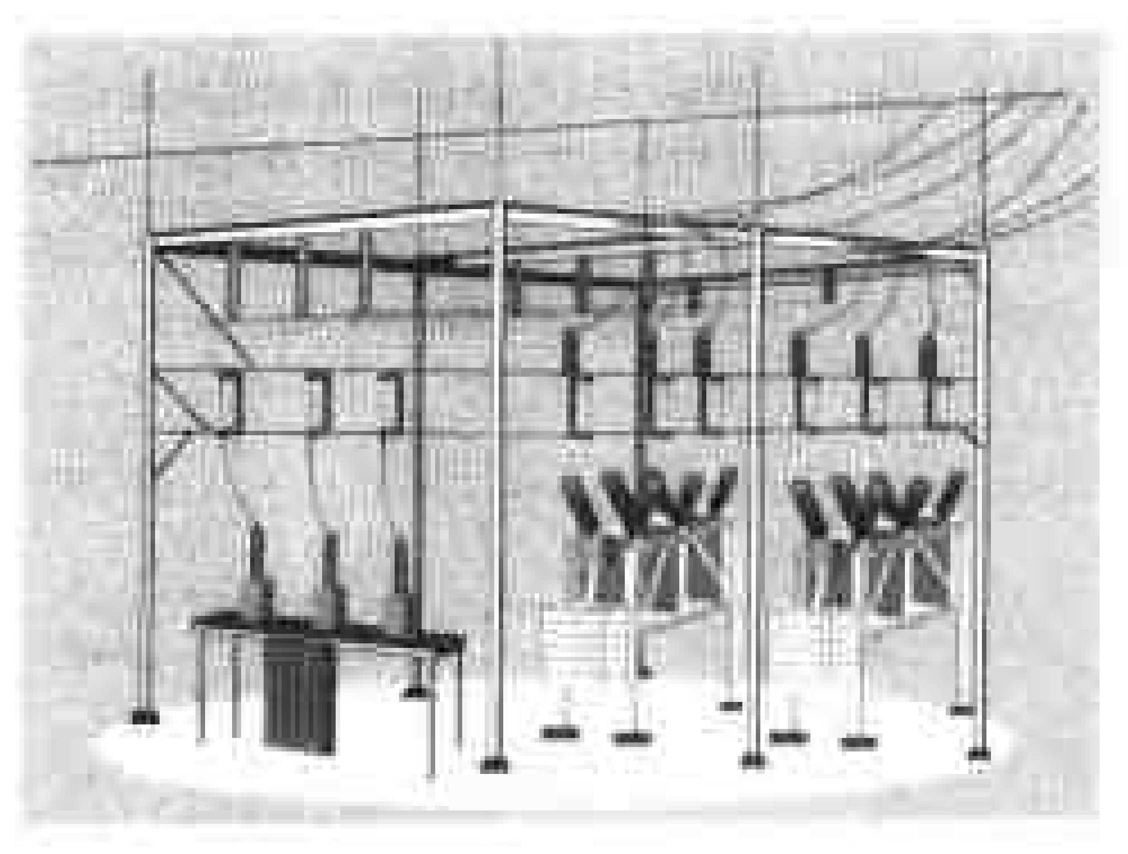
第 11 章　平衡三相电路

实例

电力的传输与分配一

第 11 章将介绍大功率电路的设计，这些电路常用来将发电厂发出的电传输给工业消费者或者居民用户。第 2 章的实例中曾经介绍过典型家庭用电线路，现在向读者介绍整个社区供电电路。

供电设备在设计和运行时需要关注的一个方面就是有效电压的维持，不论是在凌晨 3:00 的小负荷下，还是在酷热潮湿的下午，都要求设备能够提供同样大小的有效电压。由第 10 章的内容可知，电容可以看做是无功功率的发送源，因此，保证设备电压不变的一个方法就是在传输线路的关键位置上加电容。这种做法的依据是让电容产生负载需要的无功功率，作为从发电机供给的能量。在介绍完三相电路的分析之后，将会解释这个概念。



三相电路用来发电、传输和分配大功率电能，对这种系统的分析涉及的领域很宽，不可能用一章的内容来概括，不过对于一个不致力于功率研究的工程师来说，掌握平衡三相电路的正弦稳态特性就足够了，下面的分析都是在平衡电路的基础上进行的。前面章节中介绍过的电路分析方法既可以用在平衡三相电路中也可以用在非平衡三相电路中。这

里将利用读者熟悉的方法寻找平衡三相电路分析的方法。

从经济方面考虑,三相电路通常都设计并运行在平衡状态下,因此,这里只考虑平衡电路,在后面的课程学习中,可能会遇到非平衡三相电路的分析。非平衡三相电路在很大程度上依赖于对平衡电路的理解。

三相电路的基本结构包括电压源、负载、变压器以及传输线,对于这种电路的分析,可以简化为电压源与负载通过导线相连的电路,忽略变压器可以简化分析,同时也不会影响到对计算问题的理解。图 11.1 是一个基本三相电路,所谓平衡三相电路是指电路的电源为一组平衡三相电压。首先研究平衡三相电压,然后再推出 Y-Y 电路和 Y-Δ 电路的电压和电流关系,最后,总结功率和功率的测量。

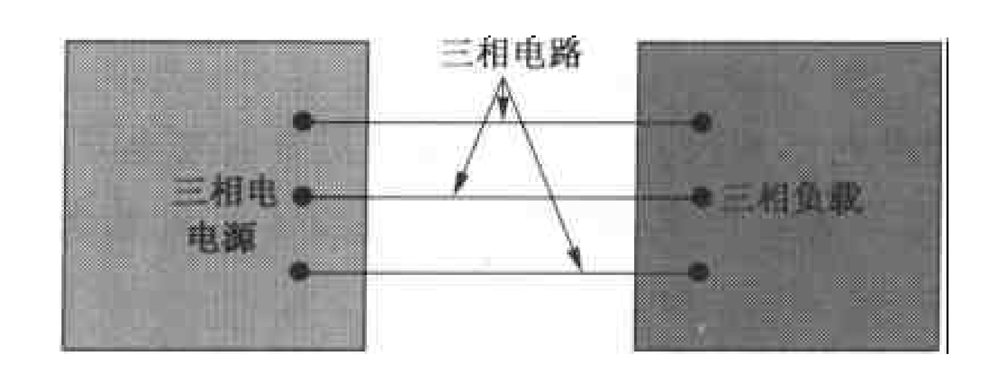


图 11.1 基本三相电路

11.1 平衡三相电压

所谓平衡三相电压是指三个幅值相同但相位相差 120°的正弦电压,三相分别称为 a 相、b 相和 c 相电压。对于 a,b,c 三相电压只可能存在两种相位关系,一种是 b 相电压滞后于 a 相电压 120°,c 相电压超前 a 相电压 120°,这种相位关系称为 abc(或正)相序。另一种相位关系是 b 相电压超前 a 相电压 120°,c 相电压滞后 a 相电压 120°,这种相位关系称为 acb(或负)相序。这两组平衡相电压分别用相量表示为:

$$
\begin{aligned}
V_a &= V_m \angle 0^\circ \\
V_b &= V_m \angle -120^\circ \\
V_c &= V_m \angle +120^\circ
\end{aligned}
\tag{11.1}
$$

和

$$
\begin{aligned}
V_a &= V_m \angle 0^\circ \\
V_b &= V_m \angle +120^\circ \\
V_c &= V_m \angle -120^\circ
\end{aligned}
\tag{11.2}
$$

其中式(11.1)表示 abc 或正相序,式(11.2)表示 acb 或负相序。图 11.2 描述了式(11.1)和(11.2)的电压相量图。相序是从 V_a 开始顺时针排列的,当两个三相电压并联工作时,必须考虑三相电路的相序,只有当它们具有相同的相序时才能并联工作。

平衡三相电压的另一个重要特性是电压之和为零。因此,由式(11.1)和(11.2)可知:

$$V_a + V_b + V_c = 0 \tag{11.3}$$

由于相量电压之和为零,所以,瞬时电压之和也为零,即:

$$v_a + v_b + v_c = 0 \tag{11.4}$$

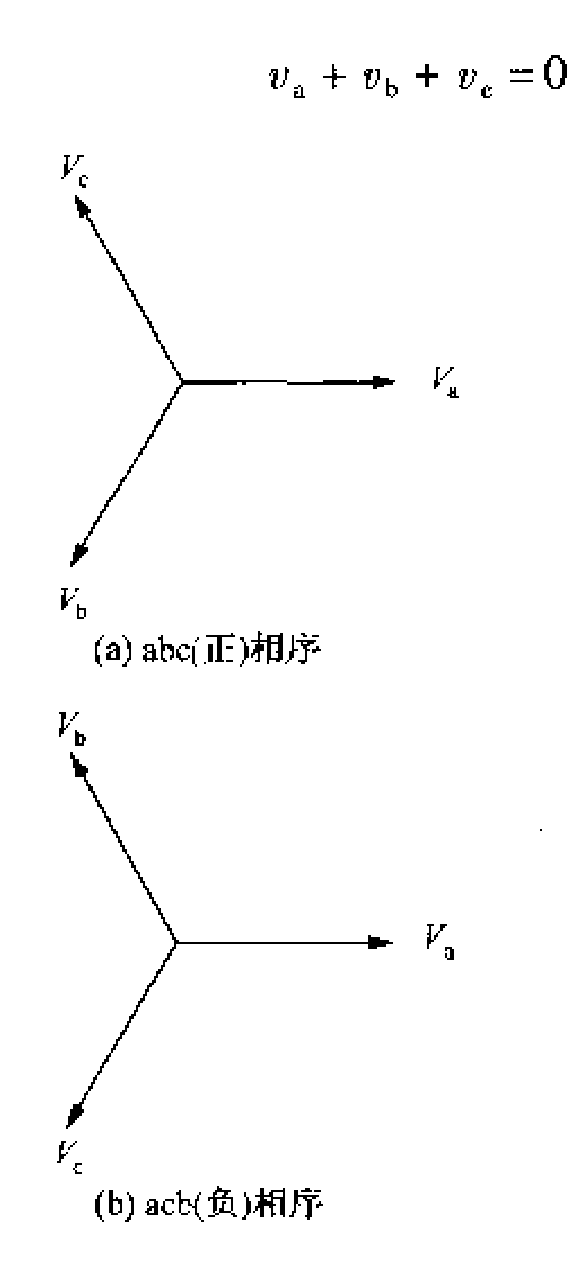


图 11.2　平衡三相电压的相量图

了解一组平衡三相电压的上述特性后，根据本章的介绍可以得出第一个分析方法：如果已知相序和其中的一个电压，就知道了整个系统的电压。因此，对于平衡三相电路，只需要确定一相的电压(或电流)就可以，因为已知一相的值，就可以由此确定其余两个值。

练习题

11.1　下列各组电压的相序是什么？

(a)

$v_a = 208\cos(\omega t + 27°)$ V

$v_b = 208\cos(\omega t + 147°)$ V

$v_c = 208\cos(\omega t - 93°)$ V

(b)

$v_a = 4160\cos(\omega t - 18°)$ V

$v_b = 4160\cos(\omega t - 138°)$ V

$v_c = 4160\cos(\omega t + 102°)$ V

答：(a) acb，(b) abc。

11.2　三相电压源

三相电压源由发电机产生，发电机由三个缠绕在定子上的独立线圈构成。每个线圈即为发电机的一相。发电机的定子是一个运动的物体，如水流或空气涡轮机驱动的匀速转动的电磁铁。电磁铁的转动使每个线圈上产生一个正弦电压，设计线圈的位置以使线圈上产生的正弦电压幅值相同、相位角相差 120°，电磁铁转动时线圈的位置保持不变，因此，每个线圈上电压的频率一致，图 11.3 画出了一个两极三相电压源的轮廓图。

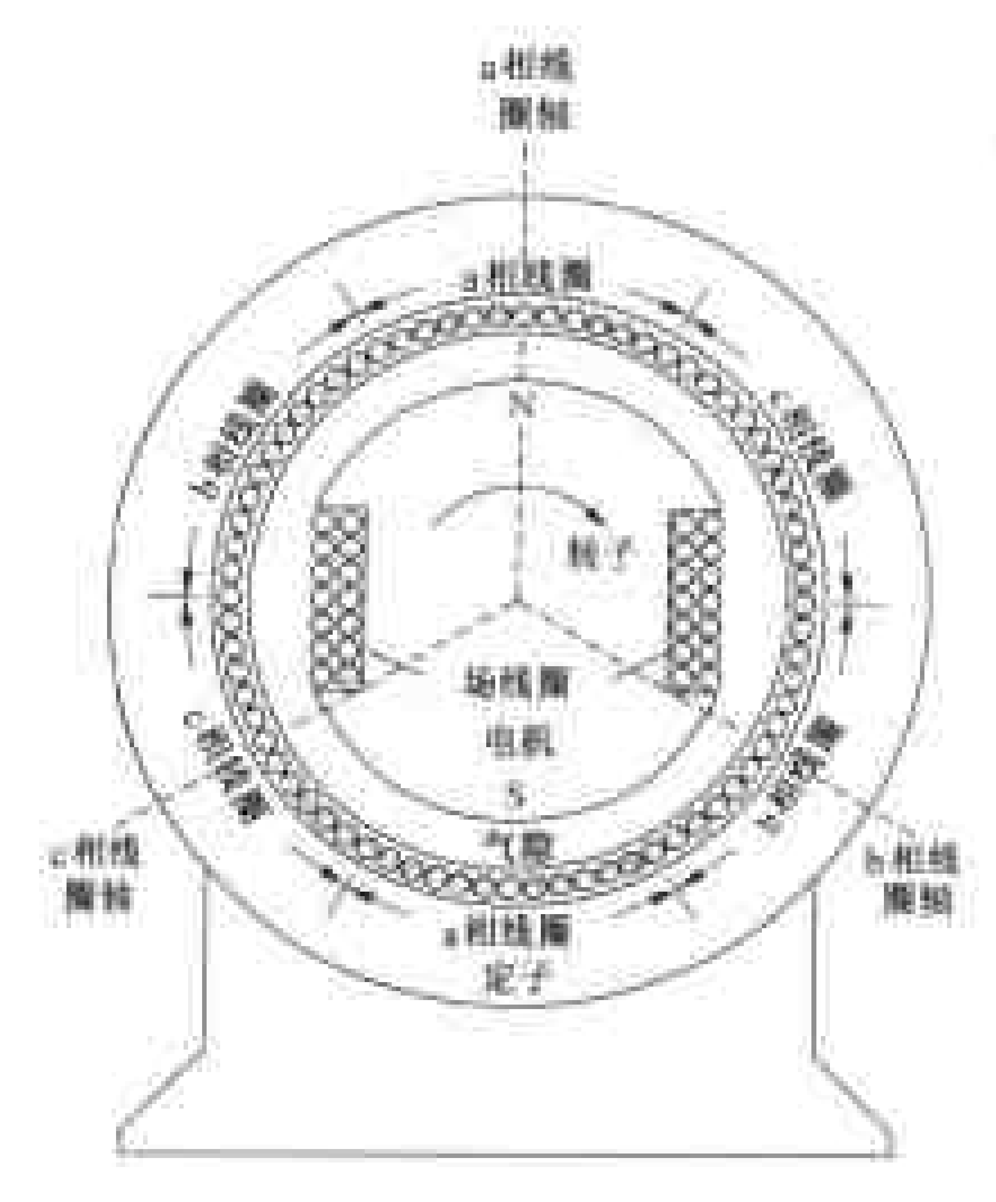
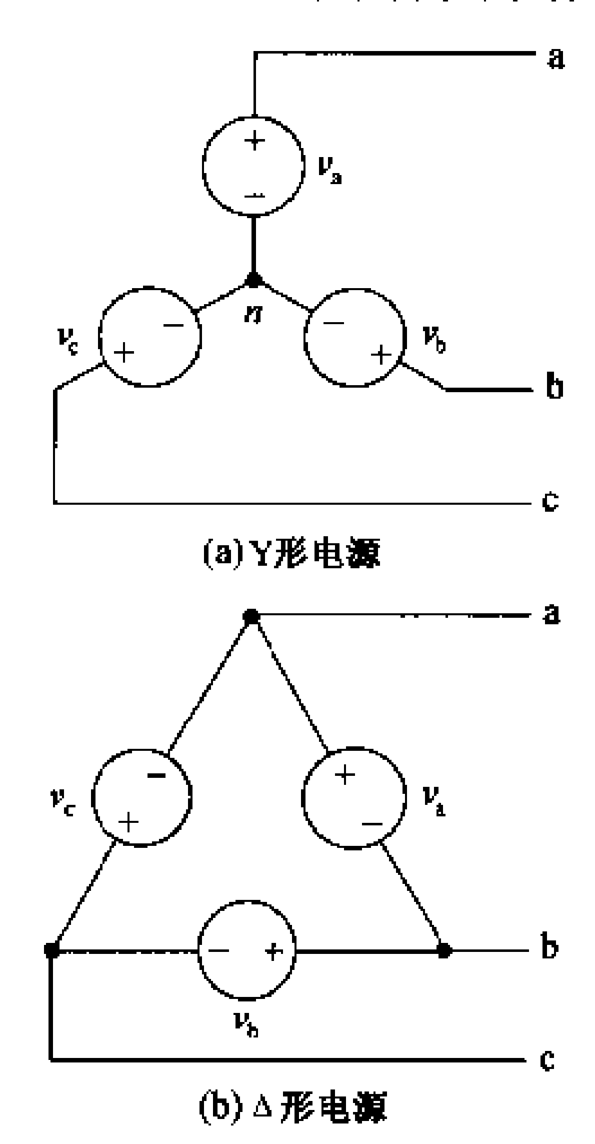


图 11.3 三相电压源的轮廓图

三相源的构成有两种连接方式:Y 结构和 Δ 结构。图 11.4 给出两种结构,用理想电压源模拟三相发电机的线圈。Y 形连接中的公共节点称为中点,外部的连接决定中点是否有效。



(a) Y形电源

(b) Δ形电源

图 11.4 理想三相电源的两种基本连接方式

有时，线圈的阻抗非常小(同电路中的其他阻抗相比)，在模拟发电机时可以忽略不计，因此，电路模型中只包含理想电压源，如图 11.4 所示。但是，如果线圈的阻抗不能忽略，那么理想正弦电压源上就必须串联一个线圈阻抗，由于机器上的所有线圈结构相同，所以假设线圈阻抗相同，且为感性阻抗，图 11.5 是三相发电机的等效电路，其中 R_{w} 是线圈电阻，X_{w} 是线圈感抗。

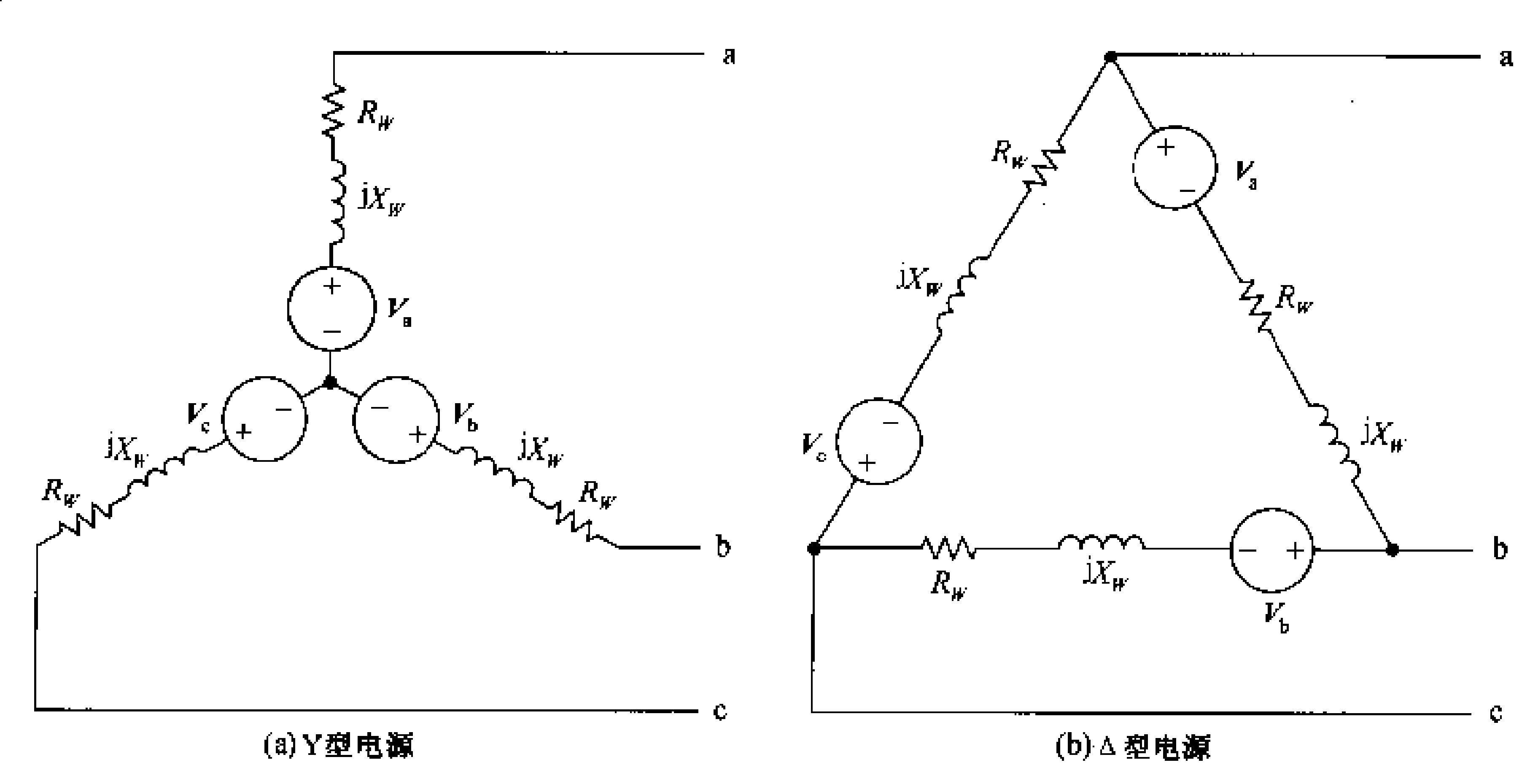


图 11.5　具有线圈阻抗的理想三相电源

由于三相电源和负载都可以连成 Y 形和 Δ 形，因此，图 11.1 所示的基本电路有四种不同的结构：

电源	负载
Y	Y
Y	Δ
Δ	Y
Δ	Δ

先分析 Y-Y 电路，由于其余的三种电路都可以等效为 Y-Y 电路，因此，分析 Y-Y 电路是平衡三相电路分析的重点。然后，介绍 Y-Δ 结构电路的等效变换，Δ-Y 和 Δ-Δ 结构电路的分析在习题中留给读者。

11.3　Y-Y 形电路分析

图 11.6 为常见的 Y-Y 电路。其中，电源中点和负载中点间有四根导线，四导线结构只有在 Y-Y 结构才可能出现(后面将详细讨论。)。为方便起见，将 Y 形变换为图示 T 形，其中 Z_{ga}，Z_{gb}，Z_{gc} 表示发电机每一相线圈的初始阻抗，Z_{la}，Z_{lb}，Z_{lc} 表示线路阻抗，Z_O 表示与电源中点和负载中点相连的零线阻抗，Z_A，Z_B 和 Z_C 表示每相负载的阻抗。

该电路可以用一个节点电压方程描述。以电源中点为参考点，V_N 表示节点 N 和节点 n 之间的电压，可得节点电压方程为：

$$\frac{V_N}{Z_O}+\frac{V_N-V_{a'n}}{Z_A+Z_{la}+Z_{ga}}+\frac{V_N-V_{b'n}}{Z_B+Z_{lb}+Z_{gb}}+\frac{V_N-V_{c'n}}{Z_C+Z_{lc}+Z_{gc}}=0 \tag{11.5}$$

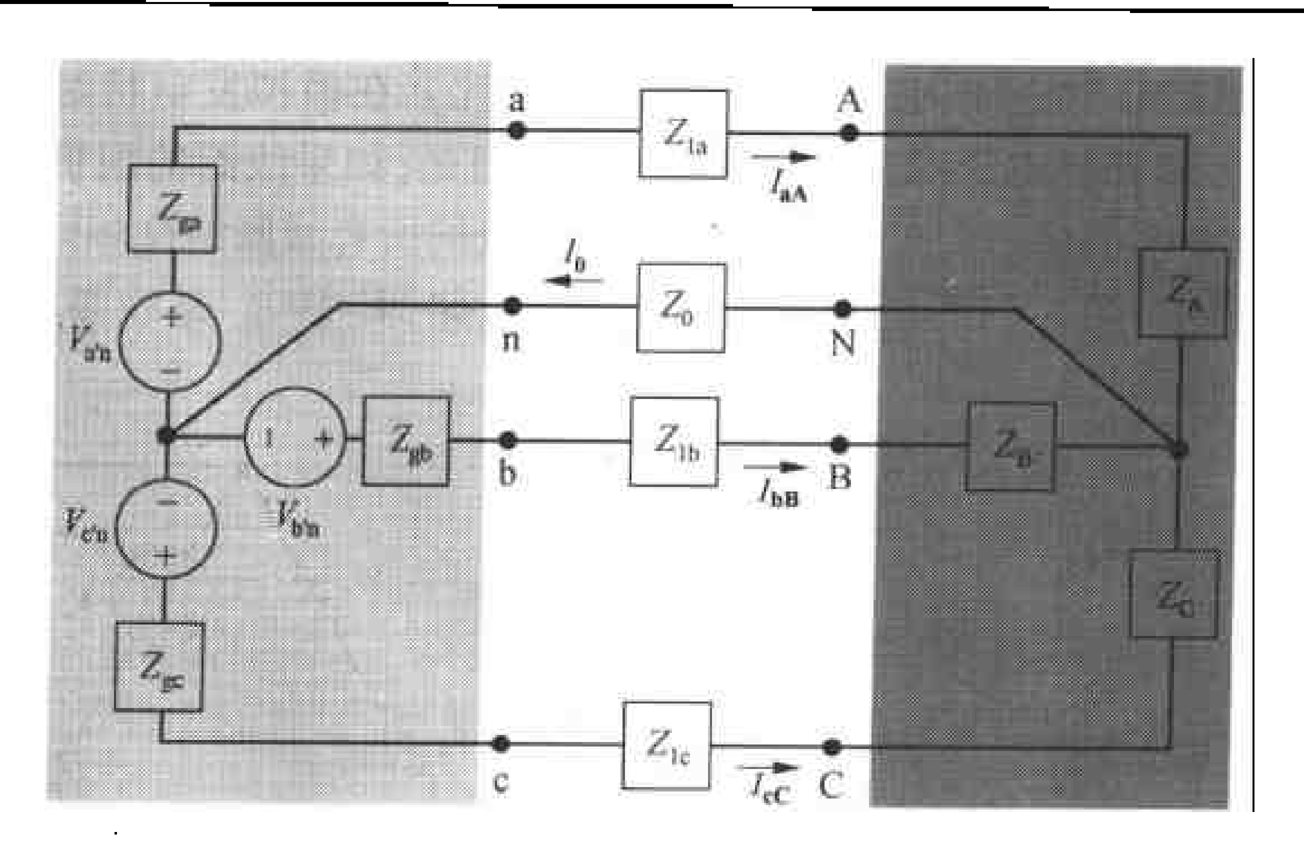


图 11.6 Y-Y 三相电路

该方程为图 11.6 所示的所有 Y-Y 结构电路的一般方程,如果考虑平衡三相电压的常规定义,式(11.5)可以化为简单的形式。该电路满足以下规定:

1. 电压源为一组平衡三相电压,即图 11.6 中的 $V_{a'n}$, $V_{b'n}$, $V_{c'n}$是一组平衡三相电压。

2. 每相电压源的阻抗相同,即图 11.6 中, $Z_{ga}=Z_{gb}=Z_{gc}$。

3. 导线阻抗相同,即图 11.6 中 $Z_{1a}=Z_{1b}=Z_{1c}$。

4. 每相负载阻抗相同,即图 11.6 中, $Z_A=Z_B=Z_C$。

零线上的阻抗没有限制要求,它的值对电路是否平衡不会产生影响。

若图 11.6 所示电路平衡,式(11.5)可以重写为:

$$V_N\left(\frac{1}{Z_0}+\frac{3}{Z_\phi}\right)=\frac{V_{a'n}+V_{b'n}+V_{c'n}}{Z_\phi} \tag{11.6}$$

其中:

$$Z_\phi=Z_A+Z_{1a}+Z_{ga}=Z_B+Z_{1b}+Z_{gb}=Z_C+Z_{1c}+Z_{gc}$$

式(11.6)右边部分为零,因为右边为一组平衡三相电压之和,且 Z_ϕ 不为零,要满足式(11.6)只有 V_N 为零,因此,对于平衡三相电路:

$$V_N=0 \tag{11.7}$$

式(11.7)非常重要。如果 V_N 为零,则在电源中点 n 和负载中点 N 之间没有电位差,也就是说,零线上的电流为零,因此,可以把零线去掉,也可以在节点 n 和 N 之间短路。处理平衡三相电路时,这两种等效方法非常方便。

考虑平衡条件对线路电流的影响,由图 11.6 知,当系统平衡时,线路电流为:

$$I_{aA}=\frac{V_{a'n}-V_N}{Z_A+Z_{1a}+Z_{ga}}=\frac{V_{a'n}}{Z_\phi} \tag{11.8}$$

$$I_{bB}=\frac{V_{b'n}-V_N}{Z_B+Z_{1b}+Z_{gb}}=\frac{V_{b'n}}{Z_\phi} \tag{11.9}$$

$$I_{cC}=\frac{V_{c'n}-V_N}{Z_C+Z_{1c}+Z_{gc}}=\frac{V_{c'n}}{Z_\phi} \tag{11.10}$$

可以看出这三个线路电流构成了一组平衡三相电流,也就是说每条线路上电流的幅值和

频率相同且相位相互之间相差 120°。因此，如果算出电流 I_{aA}，并且知道相序，就可以直接求得 I_{bB} 和 I_{cC}，这个过程与通过 a-相电源电压求 b 相和 c 相电源电压的过程相同。

对于平衡 Y-Y 电路中的 a 相电路，可以利用式(11.8)建立一个等效电路，由方程可知，a 相导线上的电流等于发电机 a 相线圈产生的电压除以 a 相电路的总阻抗。因此，式(11.8)描述的电路如图 11.7 所示，其中零线已被替换为一根短路线。图 11.7 所示电路称为平衡三相电路的单相等效电路。由相位之间的关系，可以容易地写出另两相电路的电压和电流。因此，画出单相等效电路是分析三相电路的重要的第一步。

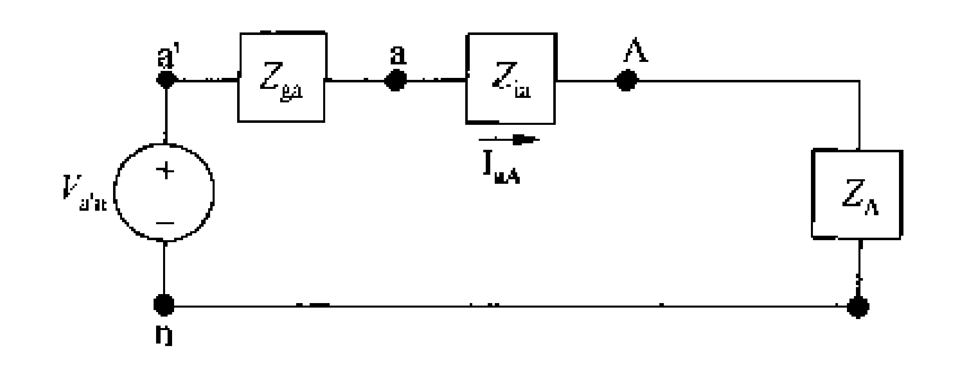


图 11.7　单相等效电路

有一点需要注意，图 11.7 中零线上的电流为 I_{aA}，这个电流与平衡三相电路中的零线电流不是一回事，后者为：

$$I_0 = I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} \tag{11.11}$$

因此，图 11.7 所示的电流是线路电流，并且仅仅是 a 相电源在零线上的电流。只要能够运用单相等效电路，线路电流就形成了三相平衡电流，且式(11.11)右边之和为零。

一旦有了图 11.7 的线路电流，就可以很容易地求出任何一个电压。其中线电压以及线到中点的电压是最关心的电压，通过负载来确立电压之间的关系，这种关系同样适用于电源的两端。图 11.8 所示负载的端电压为 V_{AB}，V_{BC} 和 V_{CA}，下角标表明电压降从一个节点到另一个节点(由于讨论平衡状态，所以不考虑图 11.8 中的零线)。线到中点电压分别为 V_{AN}，V_{BN} 和 V_{CN}。由基尔霍夫定律，线电压用线到中点的电压表示为：

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN} \tag{11.12}$$

$$V_{BC} = V_{BN} - V_{CN} \tag{11.13}$$

$$V_{CA} = V_{CN} - V_{AN} \tag{11.14}$$

为了说明线电压与线到中点的电压间的关系，假设相序为正，即 abc，且以 a 相的线到中点电压作为参考电压：

$$V_{AN} = V_\phi \underline{/0^\circ} \tag{11.15}$$

$$V_{BN} = V_\phi \underline{/-120^\circ} \tag{11.16}$$

$$V_{CN} = V_\phi \underline{/+120^\circ} \tag{11.17}$$

其中 V_ϕ 表示线到中点的幅值，将式(11.15)~(11.17)分别代入式(11.12)~(11.14)中得：

$$V_{AB} = V_\phi \underline{/0^\circ} - V_\phi \underline{/-120^\circ} = \sqrt{3}V_\phi \underline{/30^\circ} \tag{11.18}$$

$$V_{BC} = V_\phi \underline{/-120^\circ} - V_\phi \underline{/120^\circ} = \sqrt{3}V_\phi \underline{/-90^\circ} \tag{11.19}$$

$$V_{CA} = V_\phi \underline{/120^\circ} - V_\phi \underline{/0^\circ} = \sqrt{3}V_\phi \underline{/150^\circ} \tag{11.20}$$

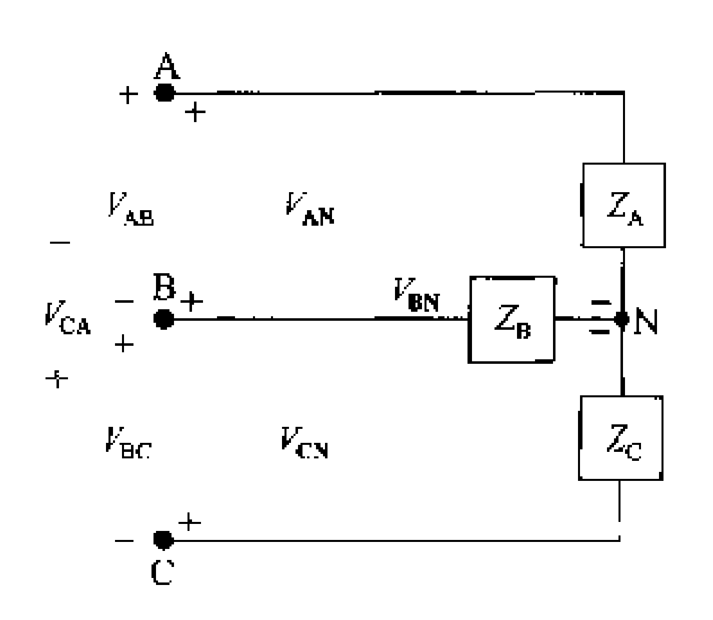


图 11.8 线电压和线到中点的电压

等式(11.18)~(11.20)表明:

1. 线电压的幅值是线到中点电压幅值的$\sqrt{3}$倍。
2. 线电压为一组平衡三相电压。
3. 线电压超前线到中点电压 30°。

对于负相序来说,惟一的区别在于线电压滞后线到中点的电压 30°。这一情况留给读者证明。图 11.9 的相量图归纳了上述结论,这里得出另一个分析平衡三相系统的方法:如果知道了电路某点的线到中点的电压,可以容易地求出该点的线电压,反之亦然。

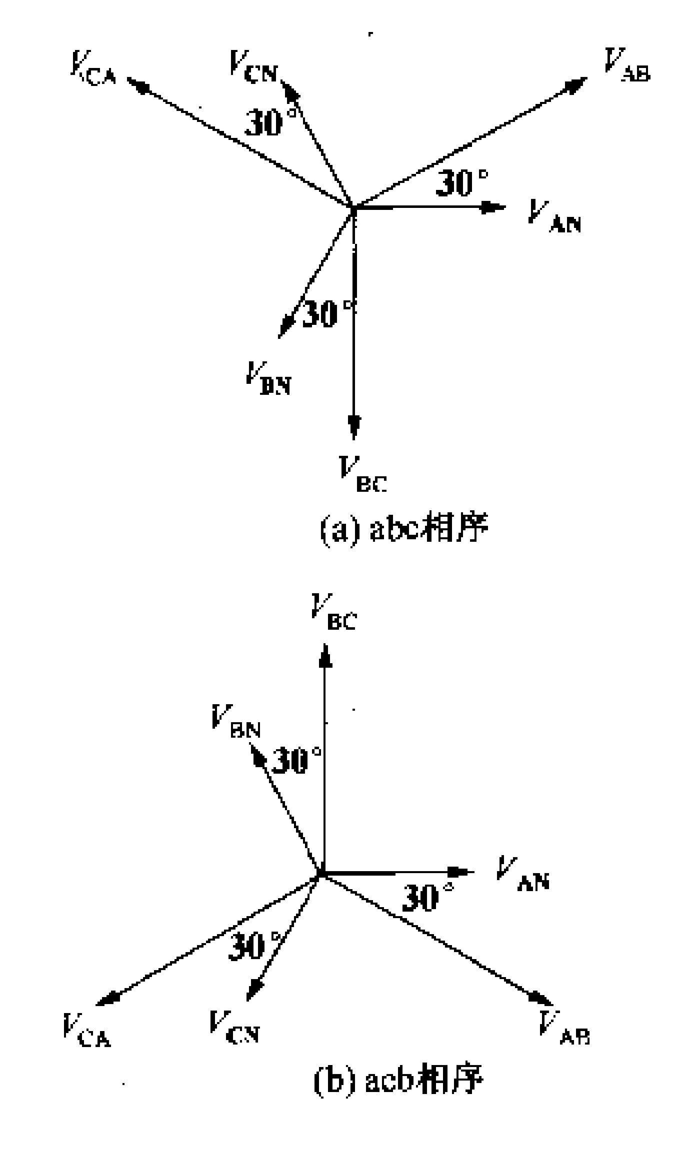


图 11.9 平衡系统线电压以及线到中点电压的相量图

各术语描述如下:线电压表示导线上的电压,相电压表示每相电源的电压,线电流表示导线上的电流,相电流表示每相电源的电流。在 Δ 形连接中,线电压和相电压相同,在 Y 形连接中,线电流和相电流相同。

由于三相系统是为大功率供电系统设计的,因此,所有的电压和电流给出的都是方均根值。当给定一个电压值时,常常是指线电压。因此,当说一个三相传输线为 345 kV 时,是指线

电压的方均根值为 345000 V。在本章，所有的电压和电流都用有效值表示。

文献中常用希腊字母 ϕ 表示每相位，因此，V_ϕ，I_ϕ，Z_ϕ，P_ϕ 和 Q_ϕ 分别表示电压/相、电流/相、阻抗/相、功率/相和无功功率/相。

例 11.1 说明了如何利用上述结论求解一个平衡三相 Y-Y 电路。

例 11.1　一个平衡三相 Y 形连接的发电机，相序为正，阻抗为 $0.2+j0.5\ \Omega/\phi$，初始电压为 120 V/ϕ，平衡三相 Y 形连接的负载阻抗为 $39+j28\ \Omega/\phi$，连接发电机与负载的线路阻抗为 $0.8+j1.5\ \Omega/\phi$。以发电机的 a 相初始电压为参考相量。

(a) 求系统的 a 相等效电路。

(b) 求线路电流 I_{aA}，I_{bB}和 I_{cC}。

(c) 求负载的相电压 V_{AN}，V_{BN}和 V_{CN}。

(d) 求负载两端的线电压 V_{AB}，V_{BC}和 V_{CA}。

(e) 求发电机两端的相电压 V_{an}，V_{bn}和 V_{cn}。

(f) 求发电机两端的线电压 V_{ab}，V_{bc}和 V_{ca}。

(g) 相序为负时，重复(a)～(f)。

解：

(a) 图 11.10 为单相等效电路。

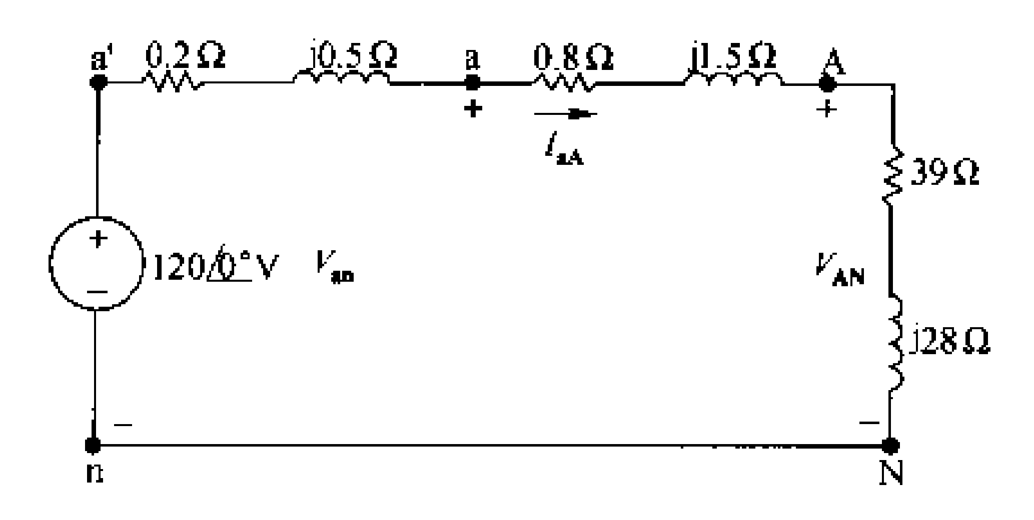


图 11.10　例 11.1 的单相等效电路

(b) a 相线电流为：

$$I_{aA}=\frac{120\,\underline{/0^\circ}}{(0.2+0.8+39)+j(0.5+1.5+28)}=\frac{120\,\underline{/0^\circ}}{40+j30}=2.4\,\underline{/-36.87^\circ}\ \text{A}$$

相序为正时：

$$I_{bB}=2.4\,\underline{/-156.87^\circ}\ \text{A}$$
$$I_{cC}=2.4\,\underline{/83.13^\circ}\ \text{A}$$

(c) 负载 A 端的相电压为：

$$V_{AN}=(39+j28)(2.4\,\underline{/-36.87^\circ})=115.22\,\underline{/-1.19^\circ}\ \text{V}$$

相序为正时：

$$V_{BN}=115.22\,\underline{/-121.19^\circ}\ \text{V}$$

$$V_{CN} = 115.22\,\underline{/118.81^\circ}\text{ V}$$

(d) 相序为正时,线电压超前相电压 30°。因此:

$$V_{AB} = (\sqrt{3}\,\underline{/30^\circ})\,V_{AN}$$
$$= 199.58\,\underline{/28.81^\circ}\text{ V}$$
$$V_{BC} = 199.58\,\underline{/-91.19^\circ}\text{ V}$$
$$V_{CA} = 199.58\,\underline{/148.81^\circ}\text{ V}$$

(e) 电源两端的相电压为:

$$V_{an} = 120-(0.2+j0.5)(2.4\,\underline{/-36.87^\circ})$$
$$= 120-1.29\,\underline{/31.33^\circ}$$
$$= 118.90-j0.67$$
$$= 118.90\,\underline{/-0.32^\circ}\text{ V}$$

相序为正时:

$$V_{bn} = 118.90\,\underline{/-120.32^\circ}\text{ V}$$
$$V_{cn} = 118.90\,\underline{/119.68^\circ}\text{ V}$$

(f) 电源两端的线电压为:

$$V_{ab} = (\sqrt{3}\,\underline{/30^\circ})\,V_{an}$$
$$= 205.94\,\underline{/29.68^\circ}\text{ V}$$
$$V_{bc} = 205.94\,\underline{/-90.32^\circ}\text{ V}$$
$$V_{ca} = 205.94\,\underline{/149.68^\circ}\text{ V}$$

(g) 改变相序,对单相等效电路没有影响。线电流为:

$$I_{aA} = 2.4\,\underline{/-36.87^\circ}\text{ A}$$
$$I_{bB} = 2.4\,\underline{/83.13^\circ}\text{ A}$$
$$I_{cC} = 2.4\,\underline{/-156.87^\circ}\text{ A}$$

负载上的相电压为:

$$V_{AN} = 115.22\,\underline{/-1.19^\circ}\text{ V}$$
$$V_{BN} = 115.22\,\underline{/118.81^\circ}\text{ V}$$
$$V_{CN} = 115.22\,\underline{/-121.19^\circ}\text{ V}$$

相序为负时,线电压滞后相电压 30°:

$$V_{AB} = (\sqrt{3}\,\underline{/30^\circ})\,V_{AN}$$
$$= 199.58\,\underline{/-31.19^\circ}\text{ V}$$
$$V_{BC} = 199.58\,\underline{/88.81^\circ}\text{ V}$$
$$V_{CA} = 199.58\,\underline{/-151.19^\circ}\text{ V}$$

发电机端子上的相电压为:

$$V_{an} = 118.90\,\underline{/-0.32^\circ}\text{ V}$$
$$V_{bn} = 118.90\,\underline{/119.68^\circ}\text{ V}$$
$$V_{cn} = 118.90\,\underline{/-120.32^\circ}\text{ V}$$

发电机端子上的线电压为:

$$V_{ab} = (\sqrt{3}\,\underline{/-30^\circ})\ V_{an}$$
$$= 205.94\,\underline{/-30.32^\circ}\ \text{V}$$
$$V_{bc} = 205.94\,\underline{/89.68^\circ}\ \text{V}$$
$$V_{ca} = 205.94\,\underline{/-150.32^\circ}\ \text{V}$$

练习题

11.2 平衡三相电路从 A 到 N 的电压为 $240\,\underline{/-30^\circ}$ V，若相序为正，求 V_{BC}？

答：$415.69\,\underline{/-120^\circ}$ V。

11.3 Y 形连接的平衡三相电压，C 相的电压为 $450\,\underline{/-25^\circ}$ V，若相序为负，求 V_{AB}？

答：$779.42\,\underline{/65^\circ}$ V。

11.4 Y 形连接的平衡三相电路，负载两端的相电压为 2400 V，负载阻抗为 $16+\text{j}12\ \Omega/\phi$，线路阻抗为 $0.10+\text{j}0.80\ \Omega/\phi$，Y 形连接的电源相序为 acb，初始阻抗为 $0.02+\text{j}0.16\ \Omega/\phi$，以负载的 a 相电压作为参考电压。计算：(a) 线电流 I_{aA}，I_{bB}和 I_{cC}；(b) 电源处的线电压 V_{ab}，V_{bc}和 V_{ca}；(c) 电源处的相到中点电压 $V_{a'n}$，$V_{b'n}$和 $V_{c'n}$。

答：(a) $I_{aA} = 120\,\underline{/-36.87^\circ}$ A，$I_{bB} = 120\,\underline{/83.13^\circ}$ A，$I_{cC} = 120\,\underline{/-156.87^\circ}$ A。

(b) $V_{ab} = 4275.02\,\underline{/-28.38^\circ}$ V，$V_{bc} = 4275.02\,\underline{/91.62^\circ}$ V，$V_{ca} = 4275.02\,\underline{/-148.38^\circ}$ V。

(c) $V_{a'n} = 2482.05\,\underline{/1.93^\circ}$ V，$V_{b'n} = 2482.05\,\underline{/121.93^\circ}$ V，$V_{c'n} = 2482.05\,\underline{/-118.07^\circ}$ V。

11.4　Y-△形电路分析

如果三相电路中的负载是三角形连接，则可以通过 9.6 节介绍的三角形到星形变换将它变换为星形电路。当负载平衡时，星形负载每条支路上的阻抗等于三角形负载每条支路阻抗的三分之一，即：

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \tag{11.21}$$

完全符合式(9.51)～(9.53)。将 Δ 负载替换为等效 Y 形负载后，a 相电路可以用图 11.11 的单相等效电路等效。先求等效电路的线电流，再求 Δ 负载每条支路上的线电流。这两个电流之间的关系可以通过图 11.12 所示电路推出。当一个负载(或电源)三角形连接时，支路上的电流即为相电流，支路电压即为相电压。由图 11.12 可以看出，在 Δ 形结构中，相电压等于线电压。

为了推出相电流和线电流之间的关系，假设相序为正，且相电流幅值为 I_ϕ，则：

$$I_{AB} = I_\phi\,\underline{/0^\circ} \tag{11.22}$$
$$I_{BC} = I_\phi\,\underline{/-120^\circ} \tag{11.23}$$
$$I_{CA} = I_\phi\,\underline{/120^\circ} \tag{11.24}$$

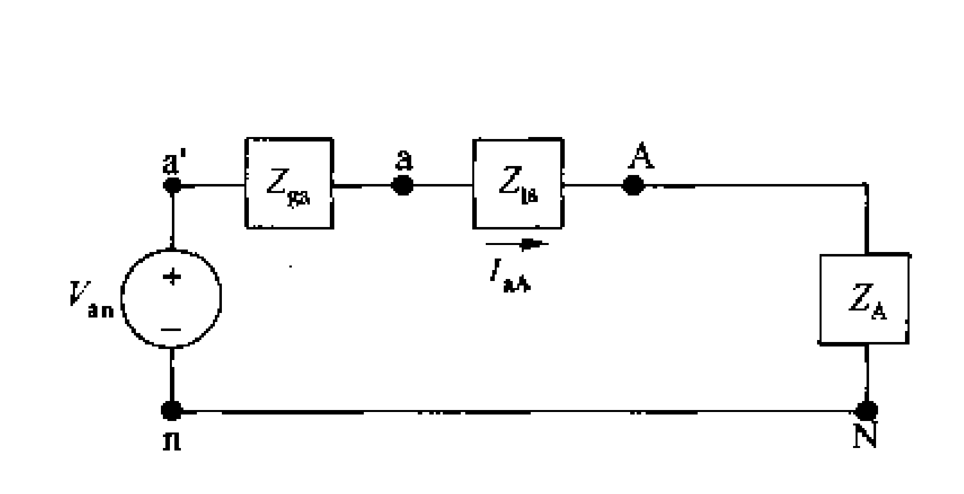


图 11.11 单相等效电路

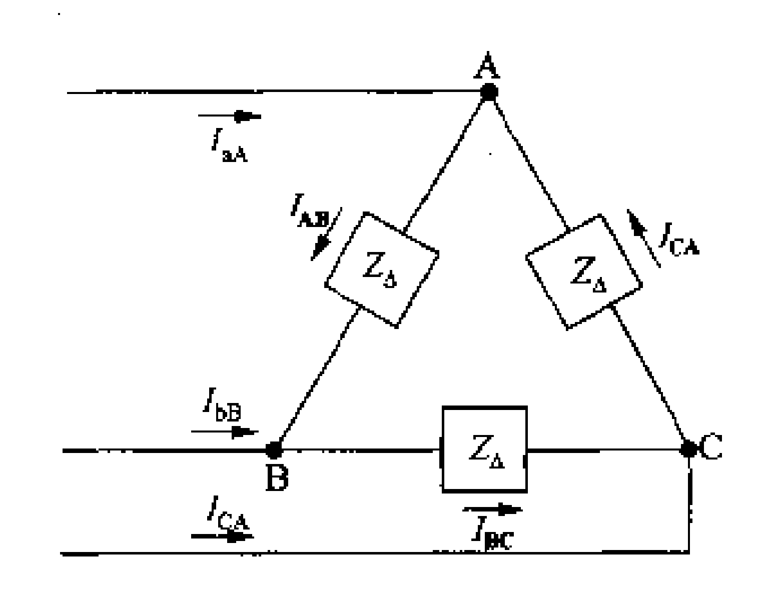


图 11.12 描述平衡 Δ 形负载线电流和相电流关系的电路图

上述等式是在以 I_{AB} 为参考相量的条件下得出的。由基尔霍夫电流定律，得到线电流的相电流表达式为：

$$I_{aA} = I_{AB} - I_{CA} = I_\phi \angle 0^\circ - I_\phi \angle 120^\circ$$

$$= \sqrt{3} I_\phi \angle -30^\circ \tag{11.25}$$

$$I_{bB} = I_{BC} - I_{AB} = I_\phi \angle -120^\circ - I_\phi \angle 0^\circ$$

$$= \sqrt{3} I_\phi \angle -150^\circ \tag{11.26}$$

$$I_{cC} = I_{CA} - I_{BC} = I_\phi \angle -120^\circ - I_\phi \angle -120^\circ$$

$$= \sqrt{3} I_\phi \angle 90^\circ \tag{11.27}$$

比较式(11.25)～(11.27)和式(11.22)～(11.24)可以发现，线电流的幅值是相电流幅值的 $\sqrt{3}$ 倍，且线电流滞后相电流 30°。

请读者证明：若相序为负，则线电流为相电流的 $\sqrt{3}$ 倍，且线电流超前相电流 30°。因此，对于一个平衡三相 Δ 连接的负载来说，由相电流可以方便地求出线电流(反之亦然)。图 11.13 用图形说明这一点。例 11.2 给出了一个 Y 形电源、Δ 形负载的平衡三相电路的分析。

例 11.2 将例 11.1 中的 Y 形连接的电源接到一个 Δ 连接的负载上，线路阻抗为 0.3 + j0.9 Ω/ϕ，负载阻抗为 118.5 + j85.8 Ω/ϕ，以发电机的 a 相电压作为参考电压。

(a) 建立三相电路的单相等效电路。

(b) 求线电流 I_{aA}，I_{bB} 和 I_{cC}。

(c) 求负载两端的相电压。

(d) 求负载两端的相电流。

(e) 求电源两端的线电压。

解：

(a) 单相等效电路如图 11.14 所示。负载的 Y 形等效阻抗为：

$$\frac{(118.5 + j85.8)}{3} 39.5 + j28.6\ \Omega/\phi$$

(b) a 相线电流为：

$$I_{aA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{(0.2 + 0.3 + 39.5) + j(0.5 + 0.9 + 28.6)}$$

$$= \frac{12\underline{/0^\circ}}{40 + j30} = 2.4\underline{/-36.87^\circ}\ \text{A}$$

因此：

$$I_{bB} = 2.4\underline{/-156.87^\circ}\ \text{A}$$
$$I_{cC} = 2.4\underline{/83.13^\circ}\ \text{A}$$

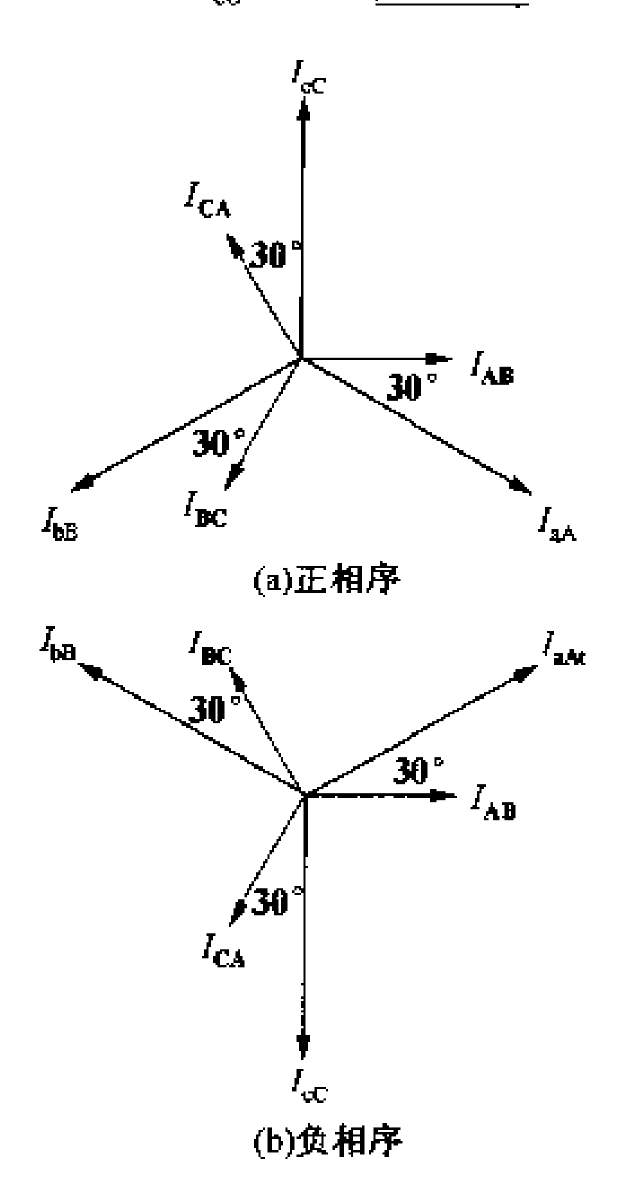


图 11.13　描述 Δ 形负载线电流和相电流关系的相量图

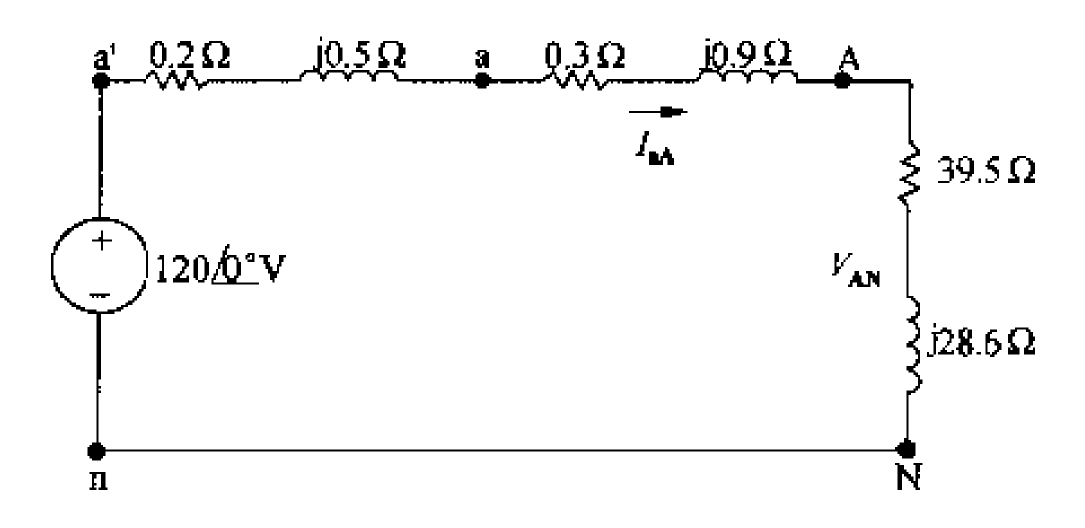


图 11.14　例 11.2 单相等效电路

(c) 由于负载为 Δ 连接，所以相电压即为线电压。为求线电压，先求 V_{AN}：

$$V_{AN} = (39.5 + j28.6)(2.4\underline{/-36.87^\circ})$$
$$= 117.04\underline{/-0.96^\circ}\ \text{V}$$

因为相序为正，所以线电压 V_{AB} 为：

$$V_{AB} = \sqrt{3}\underline{/30^\circ}\ V_{AN}$$
$$= 202.72\underline{/29.04^\circ}\ \text{V}$$

因此：

$$V_{BC} = 202.72 \underline{/-90.96^\circ} \text{ V}$$
$$V_{CA} = 202.72 \underline{/149.04^\circ} \text{ V}$$

(d) 负载的相电流直接由线电流求得为：

$$I_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{/30^\circ}\ I_{aA}$$
$$= 1.39 \underline{/-6.87^\circ} \text{ A}$$

有了 I_{AB}，即可得其余负载的相电流为：

$$I_{BC} = 1.39 \underline{/-126.87^\circ} \text{ A}$$
$$I_{CA} = 1.39 \underline{/113.13^\circ} \text{ A}$$

由前面求得的 V_{AB}和 Δ 形连接的负载验证 I_{AB}的正确性，即：

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\phi} = \frac{202.72 \underline{/29.04^\circ}}{118.5 + j85.8}$$
$$= 1.39 \underline{/-6.87^\circ} \text{ A}$$

(e) 要求电源两端线电压，先求 V_{an}。图 11.14 表明 V_{an}为线路阻抗和负载阻抗两端的电压降，即：

$$V_{an} = (39.8 + j29.5)(2.4 \underline{/-36.87^\circ})$$
$$= 118.90 \underline{/-0.32^\circ} \text{ V}$$

线电压 V_{ab}为：

$$V_{ab} = \sqrt{3}\underline{/30^\circ}\ V_{an}$$

或者：

$$V_{ab} = 205.94 \underline{/29.68^\circ} \text{ V}$$

因此：

$$V_{bc} = 205.94 \underline{/-90.32^\circ} \text{ V}$$
$$V_{ca} = 205.94 \underline{/149.68^\circ} \text{ V}$$

练习题

11.5 平衡三相 Δ 连接的负载上的线电流为 $8 \underline{/-15^\circ}$ A，若相序为正，求 I_{cC}？

答：$13.86 \underline{/-45^\circ}$ A。

11.6 平衡三相电路中的负载为平衡三相 Δ 形负载，b 相线电流的参考方向为流入负载，电流值为 $12 \underline{/65^\circ}$ A，若相序为负，求 I_{AB}？

答：$6.93 \underline{/-85^\circ}$ A。

11.7 平衡三相电路三角形连接的负载端的线电压 V_{AB}为 $4160 \underline{/0^\circ}$ V，线电流 I_{aA}为 $69.28 \underline{/-10^\circ}$ A。

(a) 若相序为正，求负载每相的阻抗。

(b) 若相序为负，重复(a)。

答：(a)$104 \underline{/-20^\circ}$ Ω，(b)$104 \underline{/+40^\circ}$ Ω。

11.8 平衡三角形连接的负载两端的线电压为 110 V，每相负载由 3.667 Ω 电阻和 2.75 Ω 感抗并联组成，求线电流的幅值。

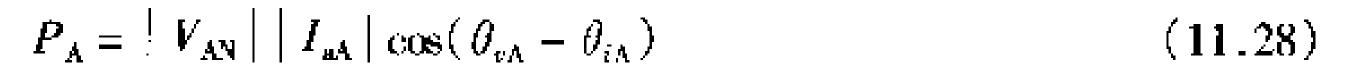
答：86.60 A。

11.5　平衡三相电路功率计算

前面已经分析了平衡三相电路的电压和电流，本节将讨论三相电路的功率计算。首先，分析平衡星形连接的负载的平均功率。

11.5.1　平衡星形负载的平均功率

图 11.15 为一星形负载，电压、电流如图所示。用第 10 章中介绍的方法求每相的平均功率，由式(10.21)，可得 a 相平均功率的表达式为：



$$P_A = |V_{AN}||I_{aA}|\cos(\theta_{vA} - \theta_{iA}) \quad (11.28)$$

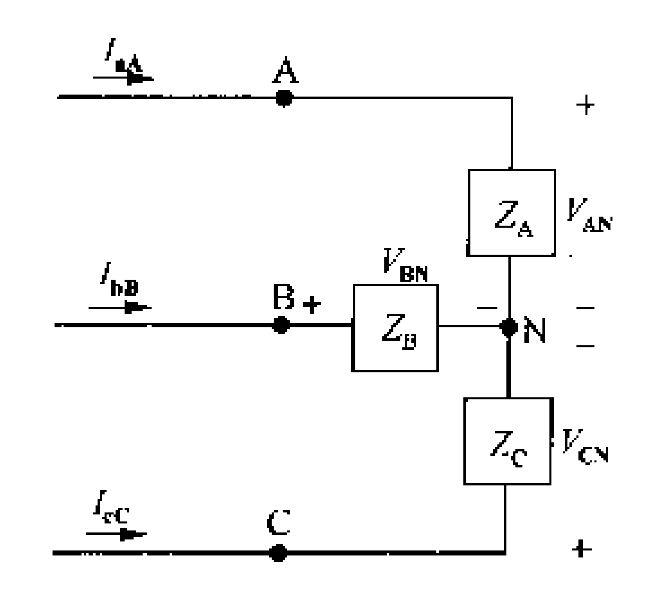


图 11.15　介绍三相电路平均功率计算的平衡星形负载

其中 θ_{vA}，θ_{iA}分别为 V_{AN}和 I_{aA}的相位角。用式(11.28)的表示方法，可得 b 相和 c 相的平均功率为：

$$P_B = |V_{BN}||I_{bB}|\cos(\theta_{vB} - \theta_{iB}) \quad (11.29)$$

$$P_C = |V_{CN}||I_{cC}|\cos(\theta_{vC} - \theta_{iC}) \quad (11.30)$$

在式(11.28)～(11.30)中，所有的电压和电流相量都是正弦函数的方均根相量。

在平衡三相系统中，每相线到中点电压的幅值都相同，每相电流的幅值也相同，并且每相上的余弦函数的相位差也相等，这些特点用下列符号表示为：

$$V_\phi = |V_{AN}| = |V_{BN}| = |V_{CN}| \quad (11.31)$$

$$I_\phi = |I_{aA}| = |I_{bB}| = |I_{cC}| \quad (11.32)$$

和

$$\theta_\phi = \theta_{vA} - \theta_{iA} = \theta_{vB} - \theta_{iB} = \theta_{vC} - \theta_{iC} \quad (11.33)$$

另外，对于一个平衡系统，每相负载吸收的功率也相同，即：

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi \quad (11.34)$$

其中 P_ϕ 表示每相的平均功率。

则平衡 Y 形负载吸收的总平均功率为每相功率的三倍：

$$P_T = 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi \quad (11.35)$$

为了得到总功率与线电压、线电压有效值间的关系式，我们令 V_L，I_L 分别为线电压和线电流的有效值，式(11.35)可变为：

$$P_T = 3\left(\frac{V_L}{\sqrt{3}}\right) I_L\cos\theta_\phi$$
$$= \sqrt{3}\,V_L I_L\cos\theta_\phi \qquad (11.36)$$

在推导式(11.36)的过程中,可以注意到,对于一个平衡 Y 形负载,相电压的幅值为线电压幅值的 1/3 倍,而线电流与相电流的幅值相等。在运用式(11.36)求负载总功率的时候,要记住 θ_ϕ 是相电压和相电流之间的相位差。

11.5.2 平衡 Y 形负载的复功率

运用第 10 章中介绍的方法求 Y 形负载每相的无功功率和复功率。对于平衡负载,无功功率的表达式为:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi\sin\theta_\phi \qquad (11.37)$$

$$Q_T = 3Q_\phi = \sqrt{3}\,V_L I_L\sin\theta_\phi \qquad (11.38)$$

式(10.29)是每相负载复功率的基本表达式。对平衡负载来说:

$$S_\phi = V_{AN}I_{aA}^* = V_{BN}I_{bB}^* = V_{CN}I_{cC}^* = V_\phi I_\phi^* \qquad (11.39)$$

其中 V_ϕ 和 I_ϕ 表示每相的相电压和相电流。因此:

$$S_\phi = P_\phi\mathrm{j} + Q_\phi = V_\phi I_\phi^* \qquad (11.40)$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3}\,V_L I_L \underline{/\theta_\phi} \qquad (11.41)$$

11.5.3 平衡三角形负载的功率计算

若一个负载为 Δ 连接,则计算无功功率或复功率与 Y 形负载的求解过程基本相同,图 11.16 为标注有相应电压、电流的 Δ 连接的负载,每相的电压为:

$$P_A = |V_{AB}|\,|I_{AB}|\cos(\theta_{vAB} - \theta_{iAB}) \qquad (11.42)$$

$$P_B = |V_{BC}|\,|I_{BC}|\cos(\theta_{vBC} - \theta_{iBC}) \qquad (11.43)$$

$$P_C = |V_{CA}|\,|I_{CA}|\cos(\theta_{vCA} - \theta_{iCA}) \qquad (11.44)$$

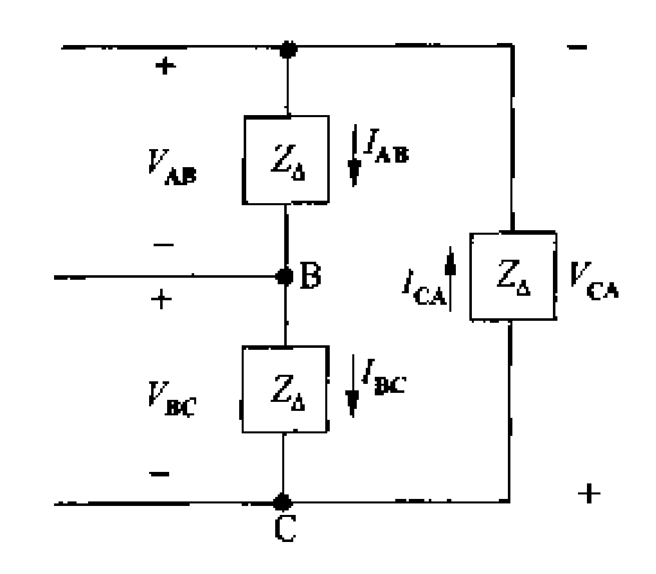


图 11.16 Δ 连接的负载

对于平衡负载:

$$|V_{AB}| = |V_{BC}| = |V_{CA}| = V_\phi \qquad (11.45)$$

$$|I_{AB}| = |I_{BC}| = |I_{CA}| = I_\phi \qquad (11.46)$$

$$\theta_{vAB} - \theta_{iAB} = \theta_{vBC} - \theta_{iBC} = \theta_{vCA} - \theta_{iCA} = \theta_\phi \qquad (11.47)$$

且：

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi \tag{11.48}$$

注意到式(11.48)与式(11.34)相同，因此，对于一个平衡负载，不管它是 Y 形连接还是 Δ 连接，每相的平均功率都等于相电压的有效值，相电流的有效值以及相电压和相电流相位角差的余弦函数三者的乘积。

平衡 Δ 形负载吸收的总功率为：

$$\begin{aligned} P_T &= 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi \\ &= 3V_L\left(\frac{I_L}{\sqrt{3}}\right)\cos\theta_\phi \\ &= \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta_\phi \end{aligned} \tag{11.49}$$

注意到式(11.49)与式(11.36)相同。无功功率和复功率的表达式同样与 Y 形负载的相应表达式相同：

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin\theta_\phi \tag{11.50}$$

$$Q_T = 3Q_\phi = 3V_\phi I_\phi \sin\theta_\phi \tag{11.51}$$

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = V_\phi I_\phi^* \tag{11.52}$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3}V_L I_L \angle\theta_\phi \tag{11.53}$$

11.5.4 三相电路的瞬时功率

虽然我们关心平均功率、无功功率和复功率的计算，总的瞬时功率的计算也是非常重要的。在平衡三相电路中，瞬时功率有个有趣的特性：时不变。因此，三相电机轴上的转矩为常数，这反过来意味着三相电机的振动非常小。

以线到中点电压 V_{AN} 为参考电压，并且，同前面一样，θ_ϕ 为相位角 $\theta_{vA} - \theta_{iA}$，那么，若相序为正，每相上的瞬时功率为：

$$p_A = v_{AN} i_{aA} = V_m I_m \cos\omega t \cos(\omega t - \theta_\phi)$$

$$p_B = v_{BN} i_{bB} = V_m I_m \cos(\omega t - 120°)\cos(\omega t - \theta_\phi - 120°)$$

$$p_C = v_{CN} i_{cC} = V_m I_m \cos(\omega t + 120°)\cos(\omega t - \theta_\phi + 120°)$$

其中 V_m 和 Z_m 分别表示相电压和相电流的最大幅值。总的瞬时功率为每相的瞬时功率之和，其值为 $1.5\ V_m I_m \cos\theta_\phi$，即：

$$p_T = p_A + p_B + p_C = 1.5V_m I_m \cos\theta_\phi$$

注意：由于 $V_m = \sqrt{2}V_\phi$，$I_m = \sqrt{2}I_\phi$（见习题 1.26），所以这个结果与(11.35)一致。

例 11.3～11.5 举例说明了平衡三相电路的功率计算。

例 11.3　(a) 求例 11.1 中 Y 形负载每相上的平均功率。

(b) 求负载上的总平均功率。

(c) 求线路上损失的总平均功率。

(d) 求发电机上损失的总平均功率。

(e) 求负载吸收的总无功功率。

(f) 求电源的总复功率。

解:

(a) 由例 11.1 知,$V_\phi=115.22$ V,$I_\phi=2.4$ A, $\theta_\phi=-1.19-(-36.87)=35.68°$,因此:

$$P_\phi=(115.22)(2.4)\cos 35.68° =224.64\ \text{W}$$

每相的功率由 $I_\phi^2R_\phi$ 得:

$$P_\phi=(2.4)^2(39)=224.64\ \text{W}$$

(b) 负载上的总平均功率为 $P_T=3P_\phi=673.92$ W,例 11.1 中已计算出线电压,因此,可以利用式(11.36)求解,即:

$$P_T=\sqrt{3}(199.58)(2.4)\cos 35.68° =673.92\ \text{W}$$

(c) 线路上的总功率为:

$$P_{\text{line}}=3(2.4)^2(0.8)=13.824\ \text{W}$$

(d) 电机的总功耗为:

$$P_{\text{gen}}=3(2.4)^2(0.2)=3.456\ \text{W}$$

(e) 负载上的总无功功率为:

$$Q_T=\sqrt{3}(199.58)(2.4)\sin 35.68° =483.84\ \text{VAR}$$

(f) 电源的总复功率为:

$$S_T=3S_\phi=-3(120)(2.4)\underline{/36.87°} =-691.20-\text{j}518.40\ \text{VA}$$

负号表示内部功率和无功功率是发送到电路上去的。通过计算电路吸收的总功率和无功功率来检查结果的正确性:

$$P= 673.92 + 13.824 + 3.456 = 691.20\ \text{W}(\text{检查})$$

$$Q= 483.84 + 3(2.4)^2(1.5) + 3(2.4)^2(0.5) = 483.84 + 25.92 + 8.64 = 518.40\ \text{VAR}\ (\text{检查})$$

例 11.4 (a) 求例 11.2 中△形负载上的总复功率?

(b) 线路发送端平均功率的百分之几传送到了负载上?

解:

(a) 利用例 11.2 中求出的 a 相的解,得:

$$V_\phi= V_{\text{AB}} = 202.72\underline{/29.04°}\ \text{V}$$

$$I_\phi= I_{\text{AB}} = 1.39\underline{/-6.87°}\ \text{A}$$

由式(11.52)和(11.53),有:

$$S_T=3(202.72\underline{/29.04°})(1.39\underline{/6.87°}) =682.56+\text{j}494.21\ \text{VA}$$

(b) 传输线发送端的总功率等于发送到负载上的总功率与线路上损失的总功率之和。因此:

$$P_{input} = 682.56 + 3(2.4)^2(0.3) = 687.74\ \text{W}$$

到达负载的功率的百分数为 682.56/687.74×100%,或者 99.25%。

由于线路阻抗同负载阻抗相比非常小,所以输入端将近 100% 的平均功率被送到负载上。

例 11.5　一平衡三相负载需要 480 kW,且滞后功率因数为 0.8 的功率,线路阻抗为 0.005 + j0.025 Ω/φ,负载两端的线电压为 600 V。

(a) 求系统的单相等效电路。

(b) 求线电流的幅值。

(c) 求线路发送端线电压的幅值。

(d) 求线路发送端的功率因数。

解:

(a) 图 11.17 为单相等效电路,参考电压为负载处线到中点的电压。

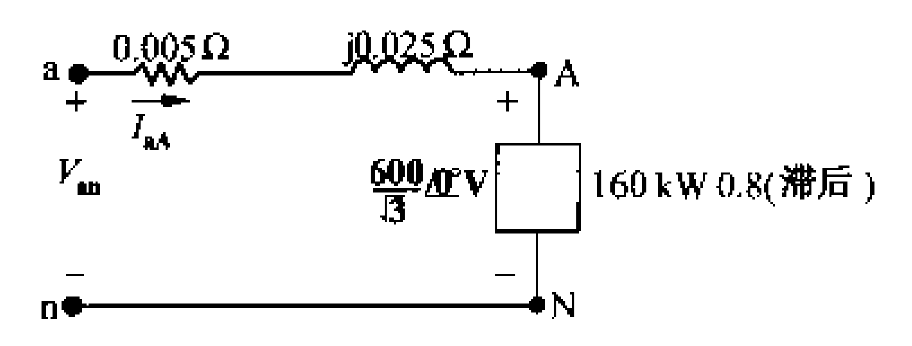


图 11.17　例 11.5 单相等效电路

(b) 线电流 I_{aA}^* 为:

$$\left(\frac{600}{\sqrt{3}}\right)\mathbf{I}_{aA}^* = (160 + j120)10^3$$

或者:

$$I_{aA}^* = 577.35\ \underline{/36.87°}\ \text{A}$$

因此,$I_{aA} = 577.35\ \underline{/-36.87°}$ A。线电流的幅值即为 I_{aA} 的模:

$$I_L = 577.35\ \text{A}$$

另一种求 I_L 的方法如下:

$$P_T = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta_p$$

$$= \sqrt{3}(600)I_L(0.8) = 480000\ \text{W}$$

$$I_L = \frac{480000}{\sqrt{3}(600)(0.8)} = \frac{1\ 000}{\sqrt{3}} = 577.35\ \text{A}$$

(c) 为了求线路发送端线电压的幅值,先求 V_{an}。电路如图 11.17 所示。V_{an} 表示为:

$$V_{an} = V_{AN} + Z_L I_{aA}$$

$$= \frac{600}{\sqrt{3}} + (0.005 + j0.025)(577.35\ \underline{/-36.87°})$$

$$= 357.51\ \underline{/1.57°}\ \text{V}$$

因此:

$$V_L = \sqrt{3}\,|V_{an}| = 619.23 \text{ V}$$

(d) 线路发送端的功率因数为 V_{an}和 I_{aA}相位角之差的余弦函数:

$$\text{pf} = \cos[1.57° - (-36.87°)]$$
$$= \cos 38.44° = 0.783 \text{ (滞后)}$$

另一种求功率因数的方法是先求线路发送端的复功率:

$$S_\phi = (160 + \text{j}120)10^3 + (577.35)^2(0.005 + \text{j}0.025)$$
$$= 161.67 + \text{j}128.33 \text{ kVA}$$
$$= 206.41 \underline{/38.44°} \text{ kVA}$$

则功率因数为:

$$\text{pf} = \cos 38.44° = 0.783 \text{ (滞后)}$$

如果在求出线电流的幅值之后,又求出了发送端的总复功率,则可以利用这个值来求 V_L,即:

$$\sqrt{3}V_L I_L = 3(206.41) \times 10^3,$$
$$V_L = \frac{3(206.41) \times 10^3}{\sqrt{3}(577.35)} = 619.23 \text{ V}$$

练习题

11.9 大型数字计算机的中央处理单元(CPU)所需的三相平均功率为 22.65 W。计算机的三相传输线的电压为 208 V(rms),线电流为 73.8 A(rms),计算机吸收无功功率。

(a) 求 CPU 吸收的总功率。

(b) 求功率因数。

答:(a) 13909.50 VAR, (b) 0.852 滞后功率因数。

11.10 平衡负载每相的复功率为 144 + j192 kVA,负载两端的线电压为 2450 V。

(a) 线电流的幅值。

(b) 负载为三角形连接,且每相阻抗由一电阻和一电抗并联组成,求 R 和 X。

(c) 负载为星形连接,且每相阻抗由一电阻和一电抗串连组成,计算 R 和 X。

答:(a) 169.67 A,(b) $R = 41.68\ \Omega, X = 31.26\ \Omega$, (c) $R = 5\ \Omega, X = 6.67\ \Omega$。

11.6 三相电流平均功率的测量

测量三相电路功率的基本仪器是电动瓦特计,瓦特计包含两个线圈,一个线圈固定,称为电流线圈,其上的电流与负载电流成正比。另一个线圈可动,称为电位线圈,其上的电流与负载电压成正比。瓦特计的主要部件如图 11.18 所示。

动线圈上的指针平均偏移等于以下参数的乘积:电流线圈上的电流有效值、电位线圈上的电压有效值、电压和电流差的余弦值。指针偏移的方向取决于电流线圈电流和电位线圈电压的瞬时极性。因此,每个线圈都有一个端子标有极性标志——通常是一个加号,但是有时也使用双极性标志 ± 号。瓦特计在下列情况向高端刻度偏移:(1) 电流线圈标有极性符号的端子朝向电源,(2) 电位线圈标有极性的端子接在与电流线圈相连的导线上。

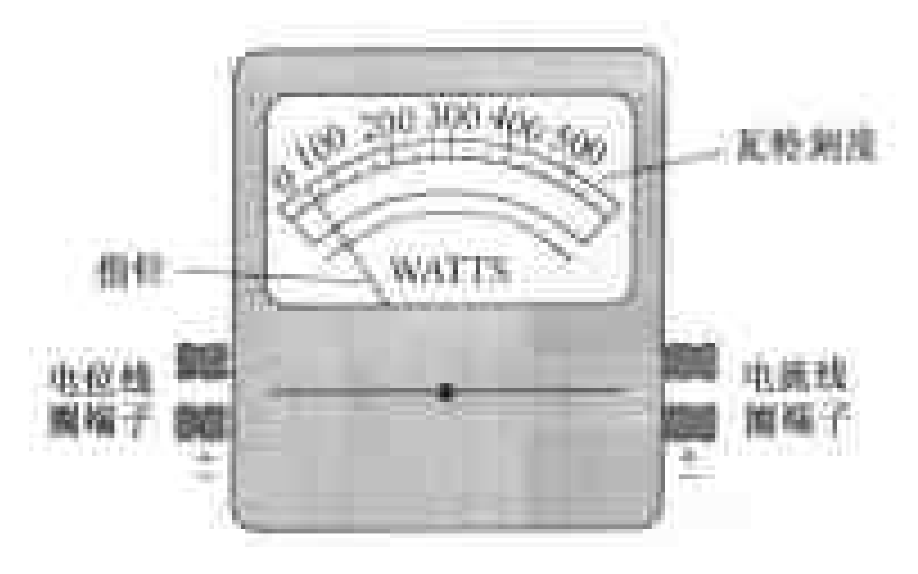


图 11.18 电动瓦特计的轮廓图

11.6.1 双瓦特计方法

n 条导线供电的网络，系统图如图 11.19 所示。若想测量网络端子上的总电压，必须知道 $n-1$ 个电流和电压值，因为若选一个端子为参考点，则有 $n-1$ 个独立电压。同样，n 个导线输入的网络，只有 $n-1$ 个独立电流。因此，总功率为 $n-1$ 个分量之和，即 $p=v_1i_1+v_2i_2+\cdots+v_{n-1}i_{n-1}$。

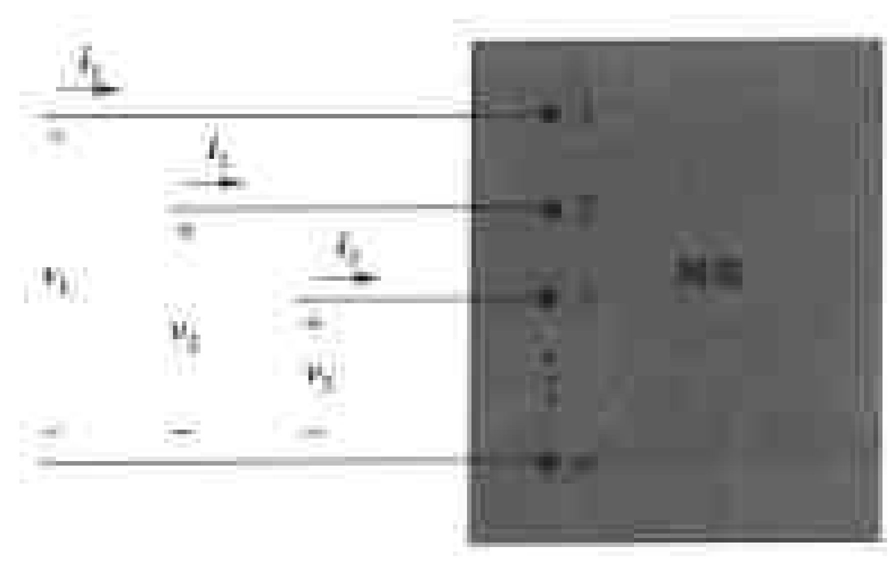


图 11.19 n 个导线提供功率的电路

运用上述结论，可以得出三导线电路，不管其是否平衡，只需两个瓦特计就可测出总功率。对于四导线电路来说，若三相电路不平衡，则需要三个瓦特计，若三相电路平衡，只需两个瓦特计，对于后一种情况，中线上没有电流。因此，对于任何平衡三相电路只需两个瓦特计即可测出总功率。

双瓦特计方法就是确定每个瓦特计显示的平均功率的大小及代数符号。图 11.20 所示电路及其参数给出双瓦特计方法，其中瓦特计用阴影块表示，分别记为 W_1 和 W_2，标注有 cc 和 pc 的线圈分别代表电流线圈和电位线圈。将瓦特计的电流线圈置于导线 aA 和 cC 上，导线 bB 为两电位线圈的参考线。负载星形连接，每相的负载阻抗为 $Z_\phi=|Z|\angle\theta$。由于任何 Δ 形负载都可以等效为 Y 形负载，所以通常采用这种表示方法。另外，对于平衡电路，阻抗角 θ 不受 Δ 到 Y 形变换的影响。

求两瓦特计读数的一般方程。首先假设瓦特计电位线圈的电流与电流线圈测量的线电流相比是不可忽略的，另外假设负载可以模拟为无源电路元件，因此，负载阻抗的相位角(图 11.20 中的 θ)在 $-90°$(纯容性)和 $+90°$(纯感性)之间，最后假设相序为正。

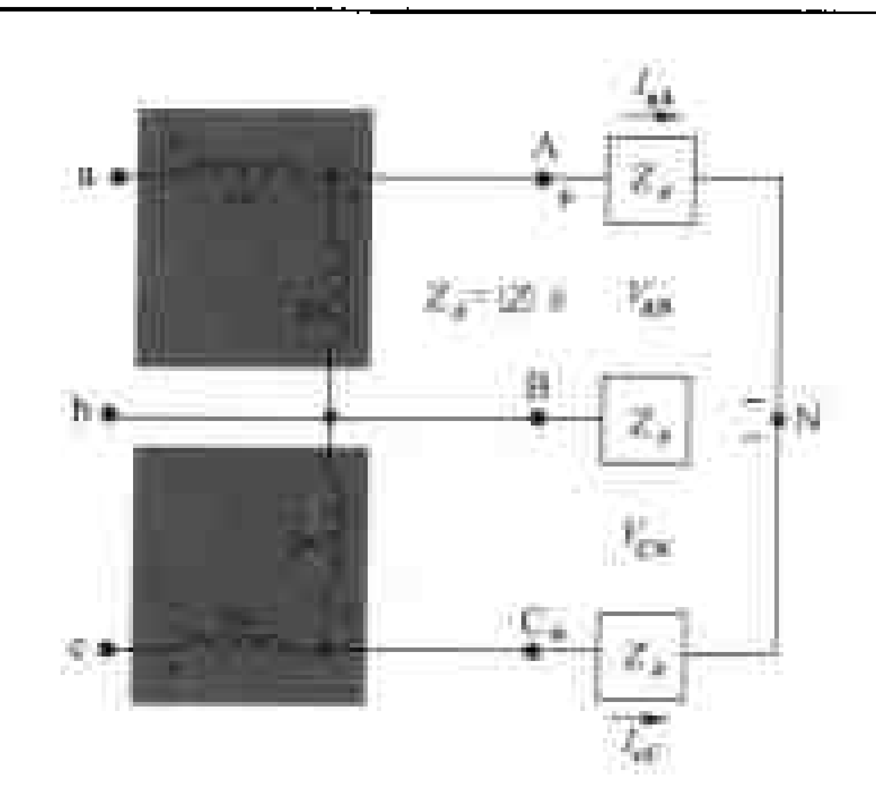


图 11.20 双瓦特计方法测量平衡负载的平均功率

由瓦特计平均偏移的讨论可知，瓦特计 1 与 $|V_{AB}|$，$|V_{aA}|$ 以及 V_{AB} 和 I_{aA} 相位角差的余弦的乘积有关系，若瓦特计的读数为 W_1，则：

$$W_1 = |V_{AB}||I_{aA}| \cos \theta_1 = V_L I_L \cos \theta_1 \tag{11.54}$$

并可得：

$$W_2 = |V_{CB}||I_{cC}| \cos\theta_2 = V_L I_L \cos\theta_2 \tag{11.55}$$

在式(11.54)和式(11.55)中，θ_1 为 V_{AB} 和 I_{aA} 的相位角差，θ_2 为 V_{CB} 和 I_{cC} 的相位角差。

为了计算 W_1 和 W_2，将 θ_1 和 θ_2 用阻抗角 θ 表示，注意：θ 也是相电压和相电流的相角差。若相序为正，则：

$$\theta_1 = \theta + 30° = \theta_\phi + 30° \tag{11.56}$$

$$\theta_2 = \theta - 30° = \theta_\phi - 30° \tag{11.57}$$

式(11.56)和(11.57)的推导留作练习(见习题 11.30)。将式(11.56)和式(11.57)分别代入式(11.54)和式(11.55)中得：

$$W_1 = V_L I_L \cos(\theta_\phi + 30°) \tag{11.58}$$

$$W_2 = V_L I_L \cos(\theta_\phi - 30°) \tag{11.59}$$

将 W_1 和 W_2 相加即得总功率：

$$P_T = W_1 + W_2 = 2V_L I_L \cos\theta_\phi \cos 30° = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_\phi \tag{11.60}$$

此即三相电路总功率的表达式。因此，可知两个瓦特计读数之和即为总平均功率。

仔细观察式(11.58)和式(11.59)可得到有关瓦特计读数的特点：

1. 若功率因数大于 0.5，两瓦特计读数均为正。
2. 若功率因数等于 0.5，两瓦特计读数为零。
3. 若功率因数小于 0.5，两瓦特计读数均为负。
4. 相序改变，两瓦特计上的读数互换。

下面的例子及习题 11.31 ~ 11.39 将说明这几点。

例 11.6　求图 11.20 所示电路每个瓦特计的读数。负载上的相电压为 120 V，并且(a) $Z_\phi = 8 + \mathrm{j}6\ \Omega$，(b) $Z_\phi = 8 - \mathrm{j}6\ \Omega$，(c) $Z_\phi = 5 + \mathrm{j}5\sqrt{3}\ \Omega$，(d) $Z_\phi = 10\underline{/-75^\circ}\ \Omega$，(e) 通过检验瓦特计读数之和是否等于负载上的总功率检查(a) ~ (d)的解。

解：

(a) $Z_\phi = 10\underline{/36.87^\circ}\ \Omega$，$V_L = 120\sqrt{3}$ V，$I_L = 120/10 = 12$ A，则：

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(36.78^\circ + 30^\circ) = 979.75\ \mathrm{W}$$

$$W_2 = (120 + \sqrt{3})(12)\cos(36.87^\circ - 30) = 2476.25\ \mathrm{W}$$

(b) $Z_\phi = 10\underline{/-36.87^\circ}\ \Omega$，$V_L = 120\sqrt{3}$ V，$I_L = 120/10 = 12$ A，则：

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-36.78^\circ + 30^\circ) = 2476.25\ \mathrm{W}$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-36.87^\circ - 30) = 979.75\ \mathrm{W}$$

(c) $Z_\phi = 5(1 + \mathrm{j}\sqrt{3}) = 10\underline{/60^\circ}\ \Omega$，$V_L = 120\sqrt{3}$ V，$I_L = 12$ A，则：

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(60^\circ + 30^\circ) = 0$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(60^\circ - 30) = 2160\ \mathrm{W}$$

(d) $Z_\phi = 10\underline{/-75^\circ}\ \Omega$，$V_L = 120\sqrt{3}$ V，$I_L = 12$ A，则：

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-75^\circ + 30^\circ) = 1763.63\ \mathrm{W}$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-75^\circ - 30) = -645.53\ \mathrm{W}$$

(e) $P_T(\mathrm{a}) = 3(12)^2(8) = 3456$ W，则：

$$W_1 + W_2 = 979.75 + 2476.25 = 3456\ \mathrm{W}$$

$P_T(\mathrm{b}) = P_T(\mathrm{a}) = 3456$ W，则：

$$W_1 + W_2 = 2476.25 + 979.75 = 3456\ \mathrm{W}$$

$P_T(\mathrm{c}) = 3(12)^2(5) = 2160$ W，则：

$$W_1 + W_2 = 0 + 2160 = 2160\ \mathrm{W}$$

$P_T(\mathrm{d}) = 3(12)^2(2.5882) = 1118.10$ W，则：

$$W_1 + W_2 = 1763.63 - 645.53 = 1118.10\ \mathrm{W}$$

练习题

11.11 用双瓦特计方法测量例 11.1 电路负载上的功率,求每个瓦特计的读数。

答:197.29 W, 476.63 W。

11.12 图 11.20 的双瓦特计可以用来计算负载上的总无功功率。

(a) 通过$\sqrt{3}(w_2-w_1)=\sqrt{3}V_LI_L\sin\theta_\phi$ 证明上面的论断。

(b) 对于例 11.6 中的每个负载,通过瓦特计的读数求总无功功率。通过给定的电压和阻抗直接求总无功功率,并由此验证上面结果的正确性。

答:(a) 证明,(b) 2592 VAR, -2592 VAR, 3741.23VAR, -4172.80 VAR。

实例

电力的传输与分配二

在前面曾指出实际中要求用户端的方均根电压值保持不变。对于不同要求,电压允许有一定的偏移,为了便于讨论,假设允许偏差为 ±5.8%。对于一个规定的 120 V 方均根电压来说,可以在 113 V 到 127 V 间变动。同时在系统中合理地放置电容以维持电压不变。下面的例子将说明电容是如何维持电压的。

例 图 11.21 所示电路表示中西部市政系统的变电站。假设系统平衡,变电站的线电压为 13.8 kV,每条传输线的阻抗为 0.6 + j4.8 Ω,在七月份一个酷热、潮湿的下午 3 点钟,负载上的功率为 3.6 MW 和 3.6 MVAR。

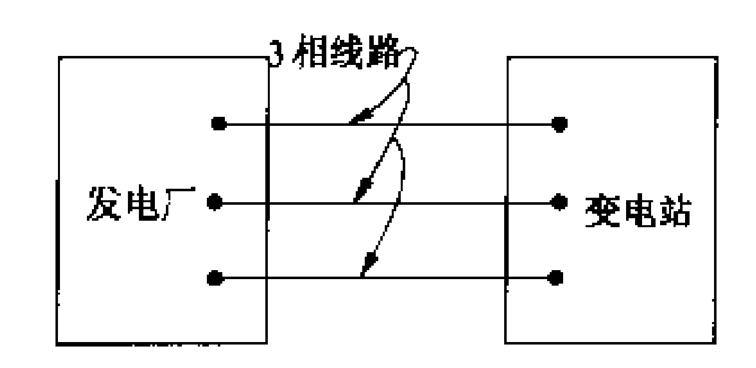


图 11.21 通过三相线路与发电厂相连的变电站

问题是:

(a) 要给变电站提供 13.8 kV 的线电压,发电厂的线电压应为多少?

(b) 由于发电厂还有其他的传输线,(a)中求得的电压会对其他消费者产生影响吗?

(c) 在变电站上加上一个电容排,以对负载提供无功功率,(a)和(b)的答案是什么?

(d) 若是变电站保持在 13.8 kV,变电站负载减少为零,(c)中加入的电容排保持连接,发电厂的电压会有问题吗?

(e) 电容加入变电站之前和之后,线路上总的功率损耗为多少千瓦?

解:

(a) 以变电站线到中点电压为参考电压,图 11.21 的单相等效电路如图 11.22 所示。由变电站复功率的表达式可以求出线电流,因此:

$$\frac{13800}{\sqrt{3}}I_{aA}^{*}=(1.2+j1.2)10^{6}$$

则：

$$I_{aA}^{*}=150.61+j150.61\ \text{A}$$

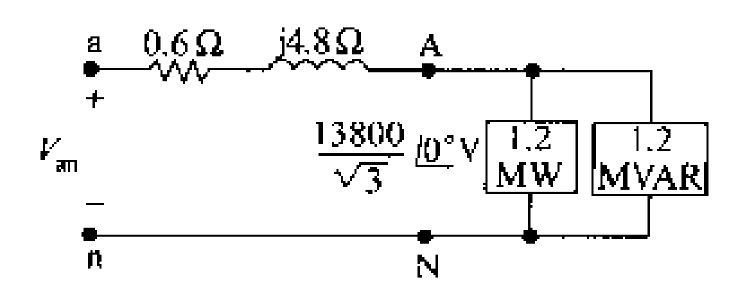


图 11.22 图 11.21 的单相等效电路

或者：

$$I_{aA}=150.61-j150.61\ \text{A}$$

发电厂的线到中点电压为：

$$\begin{aligned}V_{an}&=\frac{13\,800}{\sqrt{3}}\underline{/0°}+(0.6+j4.8)(150.61-j150.61)\\&=8780.74+j632.58\\&=8803.50\underline{/4.12°}\ \text{V}\end{aligned}$$

因此，发电厂线电压的模为：

$$|V_{ab}|=\sqrt{3}(8803.50)=15\,248.11\ \text{V}$$

(b) 会给消费者产生影响，这是一个发电厂不能够接受的电压。假设实用性要求电压在正常值的 ±5.8% 内变动，即发电厂线电压的幅值不能大于 14.6 kV 和小于 13 kV。

(c) 将一个电容加到变电站上以提供无功功率后，线电流 I_{aA} 变为：

$$I_{aA}=150.61+j0\ \text{A}$$

因此，能使变电站的线电压保持 13 800 V 的发电厂的线电压为：

$$\begin{aligned}V_{an}&=\frac{13\,800}{\sqrt{3}}\underline{/0°}+(0.6+j4.8)(150.61+j0)\\&=8057.80+j722.94\\&=8090.17\underline{/5.13°}\ \text{V}\end{aligned}$$

则：

$$|V_{ab}|=\sqrt{3}(8090.17)=14\,012.58\ \text{V}$$

这个电压在电压允许范围 13 kV 到 14.6 kV 之间。

(d) 若电容保持连接，变电站负载为零，则线电流表达式为：

$$\frac{13\,800}{\sqrt{3}}I_{aA}^{*}=-j1.2\times10^{6}$$

或：

$$I_{aA}^{*}=-j150.61\ \text{A}$$

所以：

$$I_{aA}=j150.61\ \text{A}$$

则：
$$V_{an}=\frac{13\ 800}{\sqrt{3}}\underline{/0^\circ}+(0.6+j4.8)(j150.61)$$
$$=7244.49+j90.37$$
$$=7245.05\ \underline{/0.71^\circ}\ \text{V}$$

发电厂线电压的幅值为：
$$|V_{ab}|=\sqrt{3}(7245.05)=12\ 548.80\ \text{V}$$

现在发电厂会出现问题，因为电压低于允许的最小值 13 kV，因此，当变电站的负载为零时，必须将电容去掉。

(e) 加入电容之前，线路总损耗为：
$$P_L=3|150.61+j150.61|^2(0.6)=81.66\ \text{kW}$$

电容加上之后，线路总损耗为：
$$P_L=3|150.61|^2(0.6)=40.83\ \text{kW}$$

加入电容在维持电压水平的同时也降低了线路上的功耗。在本例中，功耗减少一半。

小结

- 分析平衡三相电路时，第一步是将所有的△形连接变换为 Y 形连接，使电路变为 Y-Y 型结构。
- 单相等效电路用来分析 Y-Y 结构一相的线电流和相电压，为此通常选择 a 相。
- 一旦已知 a 相等效电路的线电流和相电压，在基于下面事实的基础上，就可以求出平衡三相电路的任何电流和电压。
  - b 相和 c 相的电流和电压与 a 相的电流和电压相同，除了相位相差 120°。在正相序电路中，b 相的值滞后于 a 相 120°，c 相的值超前于 a 相 120°。在负相序电路中，b 和 c 相与 a 相的关系同上面的相反。
  - 线电压与相电压相位相差 ±30°，正负号分别取决于相序为正还是为负。
  - 在 Y-Y 电路中，线电压的幅值是相电压幅值的$\sqrt{3}$倍。
  - 在电源和负载为△连接的系统中，线电流和相电流的相位相差 ±30°。正负号分别取决于相序为正还是为负。
  - 在电源和负载为△连接的系统中，线电流的幅值是相电流幅值的$\sqrt{3}$倍。
- 求每相平均功率、无功功率和负功率的方法同第 10 章介绍的方法一样。
- 总平均功率、无功功率和复功率既可以通过将每相的相应值乘以 3 得到，也可以通过基于线电流和线电压的表达式得到，见式(11.36)、式(11.38)、式(11.41)所示。
- 平衡三相电路的总瞬时功率为常数，且等于每相平均功率的 1.5 倍。
- 通过将瓦特计电流线圈与负载串联，电位线圈与负载并联，可以测出发送到负载上的平均功率。
- 平衡三相电路中的总平均功率可以通过将两瓦特计连接到电路的不同相上，将其读数相加得到。

习题

11.1 这里所有电压相量均为方均根值。对于每组电压，说明能否构成平衡三相系统。若系统平衡，说明相序为正还是为负，若不平衡，解释原因。

(a) $v_a = 339\cos 337t$ V

$v_b = 339\cos(337t - 120°)$ V

$v_c = 339\cos(337t + 120°)$ V

(b) $v_a = 622\cos 377t$ V

$v_b = 622\cos(377t - 240°)$ V

$v_c = 622\cos(377t + 240°)$ V

(c) $v_a = 933\sin 377t$ V

$v_b = 933\sin(377t + 240°)$ V

$v_c = 933\cos(377t - 30°)$ V

(d) $v_a = 170\sin(\omega t + 60°)$ V

$v_b = 170\sin(\omega t + 180°)$ V

$v_c = 170\cos(\omega t - 150°)$ V

(e) $v_a = 339\cos(\omega t + 30°)$ V

$v_b = 339\cos(\omega t - 90°)$ V

$v_c = 393\sin(\omega t + 240°)$ V

(f) $v_a = 3394\sin(\omega t + 70°)$ V

$v_b = 3394\cos(\omega t - 140°)$ V

$v_c = 3394\sin(\omega t + 180°)$ V

11.2 证明公式(11.3)对于式(11.1)和式(11.2)都成立。

P M11.3 (a) 求图 P11.3 所示电路的 I_0。

(b) 求 V_{BN}。

(c) 求 V_{BC}。

(d) 电路是不是平衡三相系统？

11.4 平衡 Y 形负载阻抗为 96 – j28 Ω/ϕ，与一阻抗为 144 + j42 Ω/ϕ 的平衡 Δ 形负载并联，线路阻抗为 j1.5 Ω/ϕ，Y 形负载的线到中点电压幅值为 7500 V。

(a) 求线电流的幅值。

(b) 求 Δ 形负载相电流的幅值。

(c) 求 Y 形负载相电流的幅值。

(d) 求线路发送端线电压的幅值。

11.5 参考图 11.5(b)电路。假设端子 a，b，c 无外部连接，并且三个线圈构成一个三相发电机，这个 Δ 形发电机的环路电流是多少？

11.6 平衡 Y 形负载线电压的幅值为 12800 V，负载阻抗为 216 + j63 Ω/ϕ，线路阻抗为

$0.25 + j2\ \Omega/\phi$。

(a) 求线电流的幅值。

(b) 电源两端线电压的幅值。

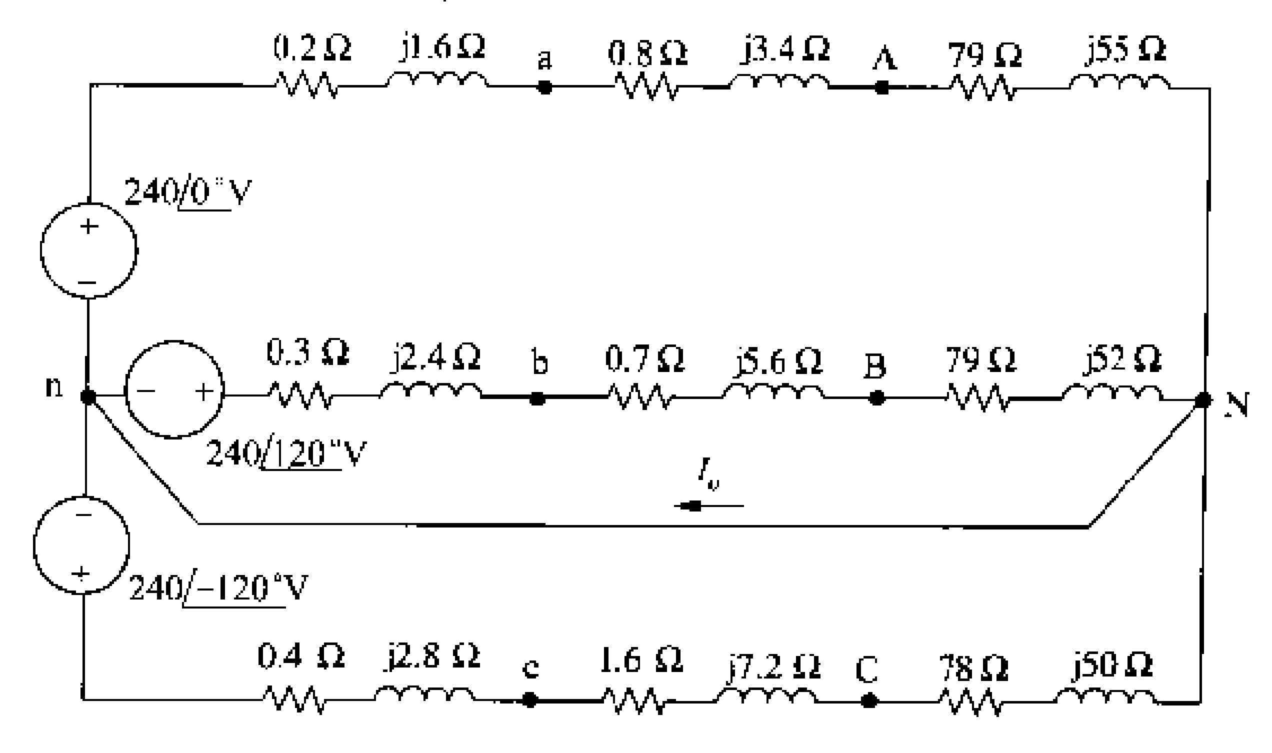


图 P11.3

11.7 理想平衡三相 Y 形电源的相电压幅值为 4800 V,平衡 Y 形负载阻抗为 $190 + j40\ \Omega/\phi$,线路阻抗为 $2 + j16\ \Omega/\phi$,电源相序为 abc,以电源的 a 相电压为参考,求下列参量的幅值和相位角:

(a) 三个相电流。

(b) 电源处的三个线电压。

(c) 负载处的三个相电压。

(d) 负载处的三个线电压。

P11.8 (a) 图 P11.8 电路是否是平衡系统?请解释。

(b) 求 I_0。

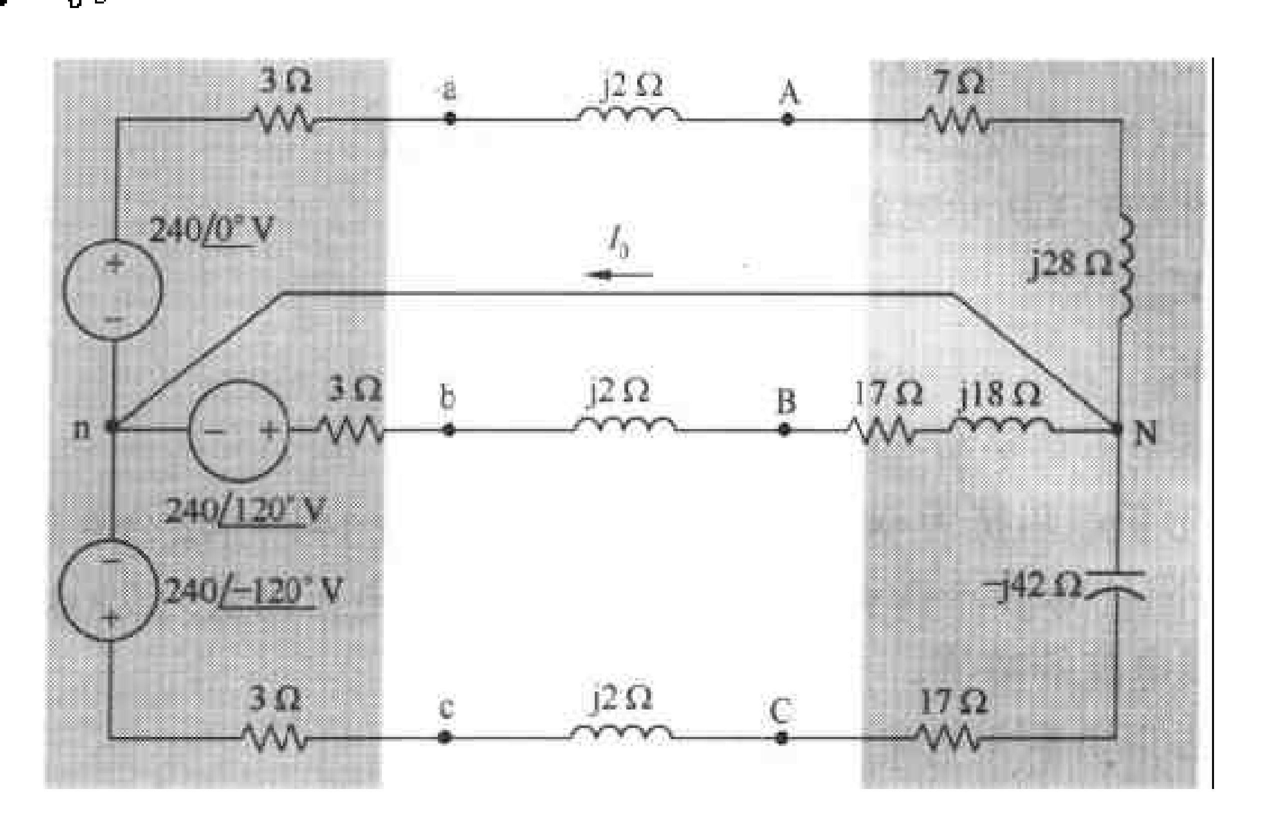


图 P11.8

11.9 Y 形负载三个线到中点电压的时域表达式为:

$$v_{AN} = 7967\cos\omega t\ \text{V}$$

$$v_{BN} = 7967\cos(\omega t + 120°)\ \text{V}$$

$$v_{CN} = 7967\cos(\omega t - 120°)\ \text{V}$$

求三个线电压 v_{AB}，v_{BC}和 v_{AC}的时域表达式。

P11.10 求图 P11.10 所示非平衡三相电路的 I_0 的方均根值。

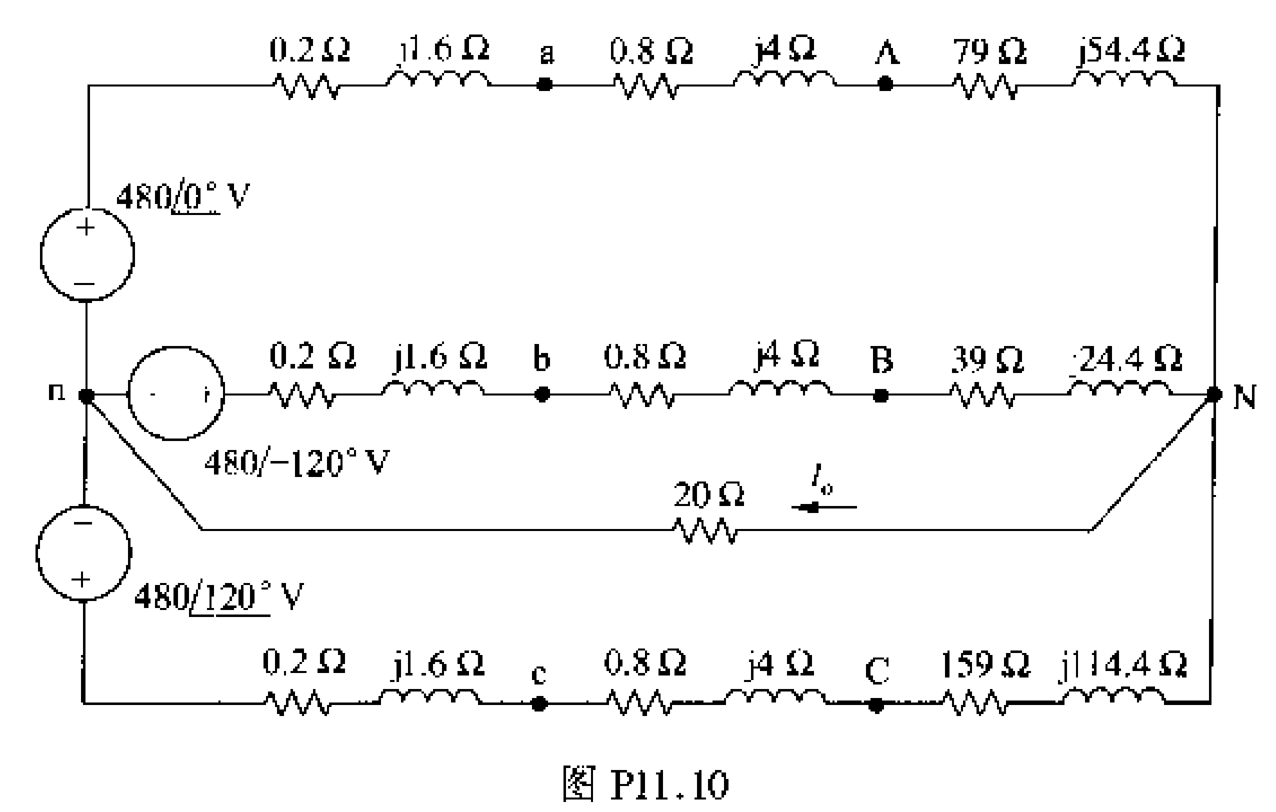


图 P11.10

11.11 平衡 Δ 形负载的阻抗为 360 + j105 Ω/ϕ，线路阻抗为 0.1 + j1.0 Ω/ϕ，负载两端的相电压为 33 kV，相序为正，以 V_{AB}为参考。

(a) 求负载的三个相电流。

(b) 求三个线电流。

(c) 求线路发送端的三个线电压。

11.12 平衡三相 Δ 连接的电源如图 P11.12 所示。

(a) 求 Y 形等效电路。

(b) 证明 Y 形等效电路与原 Δ 形电源的开路电压相同。

(c) 将 A，B，C 三端子短接，求 Δ 形电源的三个线电流 I_{aA}，I_{bB}和 I_{cC}。

(d) 利用 Y 形等效电源重复(c)求三个相电流。

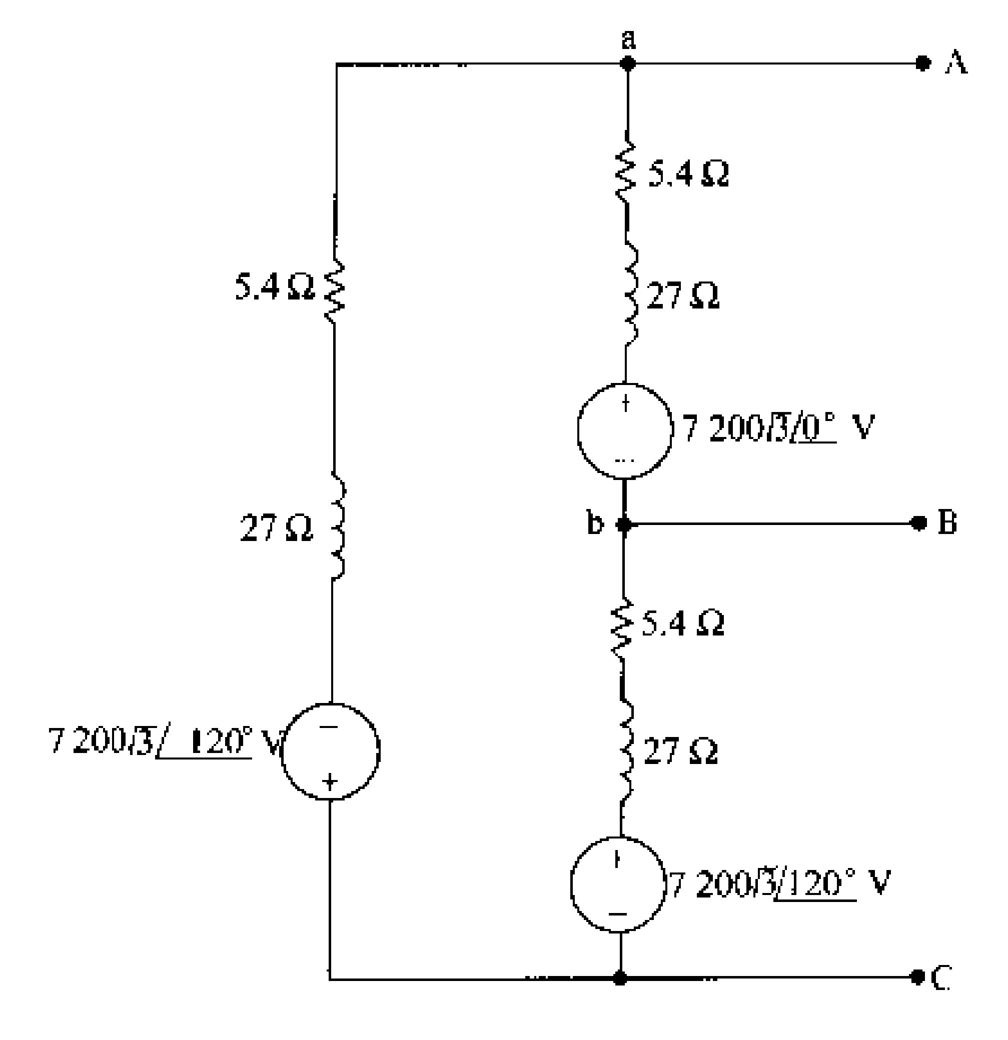


图 P11.12

11.13 习题 11.12 的 Δ 形电源与 Y 形连接的负载相连构成一个平衡三相配电线路。负载阻抗为 957 + j259 Ω/ϕ，线路阻抗为 1.2 + j12 Ω/ϕ。

(a) 求系统的单相等效电路。

(b) 求负载两端线电压的幅值。

(c) 求 Δ 形电源相电流的幅值。

(d) 求电源两端线电压的幅值。

11.14 图 P11.14 平衡三相电路的阻抗 Z 为 600 + j450 Ω，求：

(a) I_{AB}，I_{BC}和 I_{CA}。

(b) I_{aA}，I_{bB}和 I_{cC}。

(c) I_{ba}，I_{cb}和 I_{ac}。

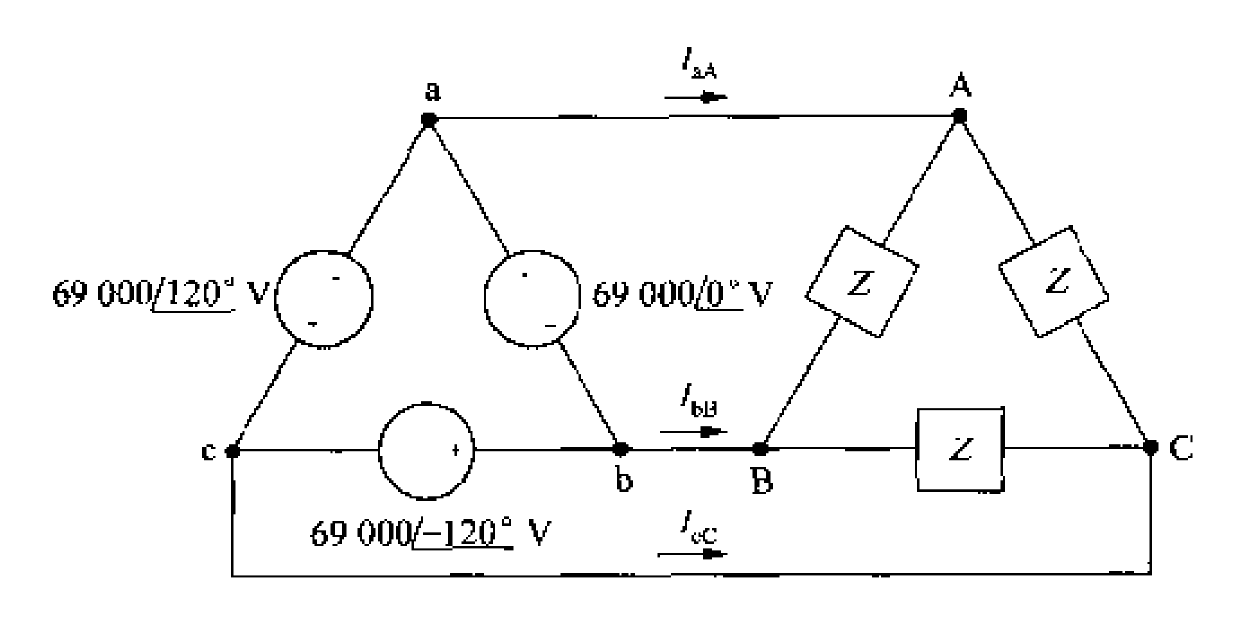


图 P11.14

P11.15 如图 P11.15 所示电路，当 $Z_1 = 4.8 + j1.4\ \Omega$，$Z_2 = 16 - j12\ \Omega$，$Z_3 = 25 + j25\ \Omega$ 时，求：

(a) 相电流 I_{AB}，I_{BC}和 I_{AC}。

(b) 线电流 I_{aA}，I_{bB}和 I_{cC}。

(c) 相电流 I_{ba}，I_{ac}和 I_{cb}。

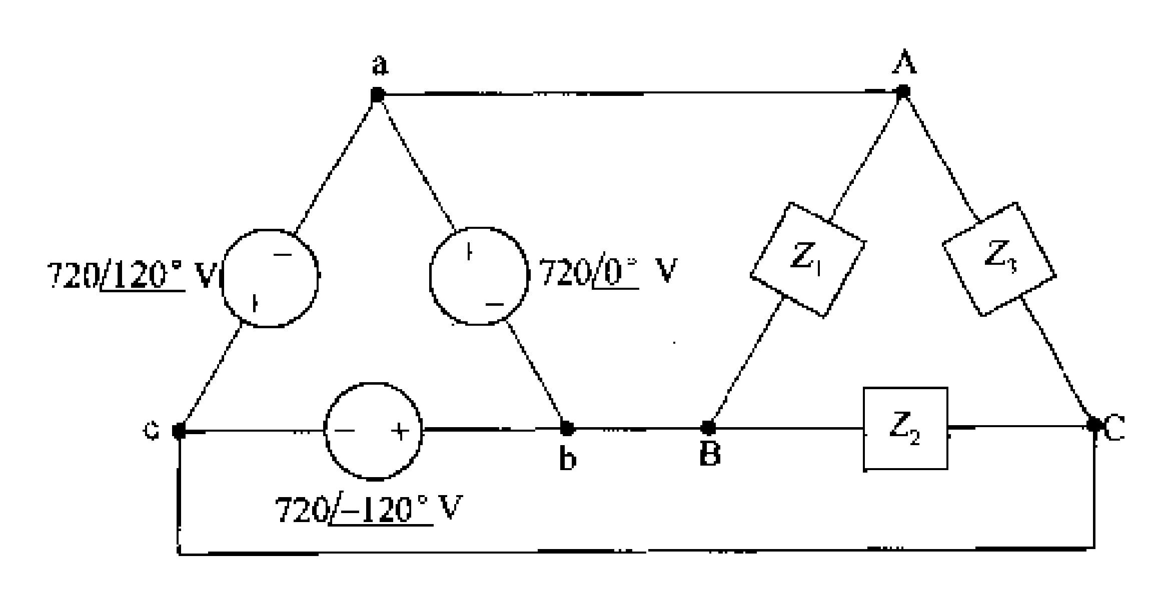


图 P11.15

11.16 求习题 11.15 非平衡负载每相的复功率。

11.17 三相 Δ 连接的发电机内部阻抗为 0.6 + j4.8 Ω/ϕ，当负载从发电机中移走后，端电压的幅值为 34500 V。与 Δ 连接的阻抗相连，负载阻抗为 2877 − j864 Ω/ϕ，传输线阻抗为 0.8 + j6.4 Ω/ϕ。

(a) 求单相等效电路。

(b) 求线电流的幅值。

(c) 求负载端线电压的幅值。

(d) 求电源端电压的幅值。

(e) 求负载端相电流的幅值。

(f) 求电源端相电流的幅值。

11.18 三个平衡三相电路并联。负载 1 是 Y 形连接,阻抗为 $300+j100\ \Omega/\phi$,负载 2 是 Δ 连接,阻抗为 $5400-j2700\ \Omega/\phi$,负载 3 功率为 $112.32+j95.04$ kVA,传输线阻抗为 $1+j10\ \Omega/\phi$,负载端线到中点电压为 7.2 kV。

(a) 求线路发送端的总复功率。

(b) 线路发送端平均功率的百分之几传送到了负载上?

P11.19 (a) 图 P11.19 所示电路,求 I_{CA} 的方均根幅值和相位角。

(b) 三相电源发送平均功率的百分之几被传送到了负载上?

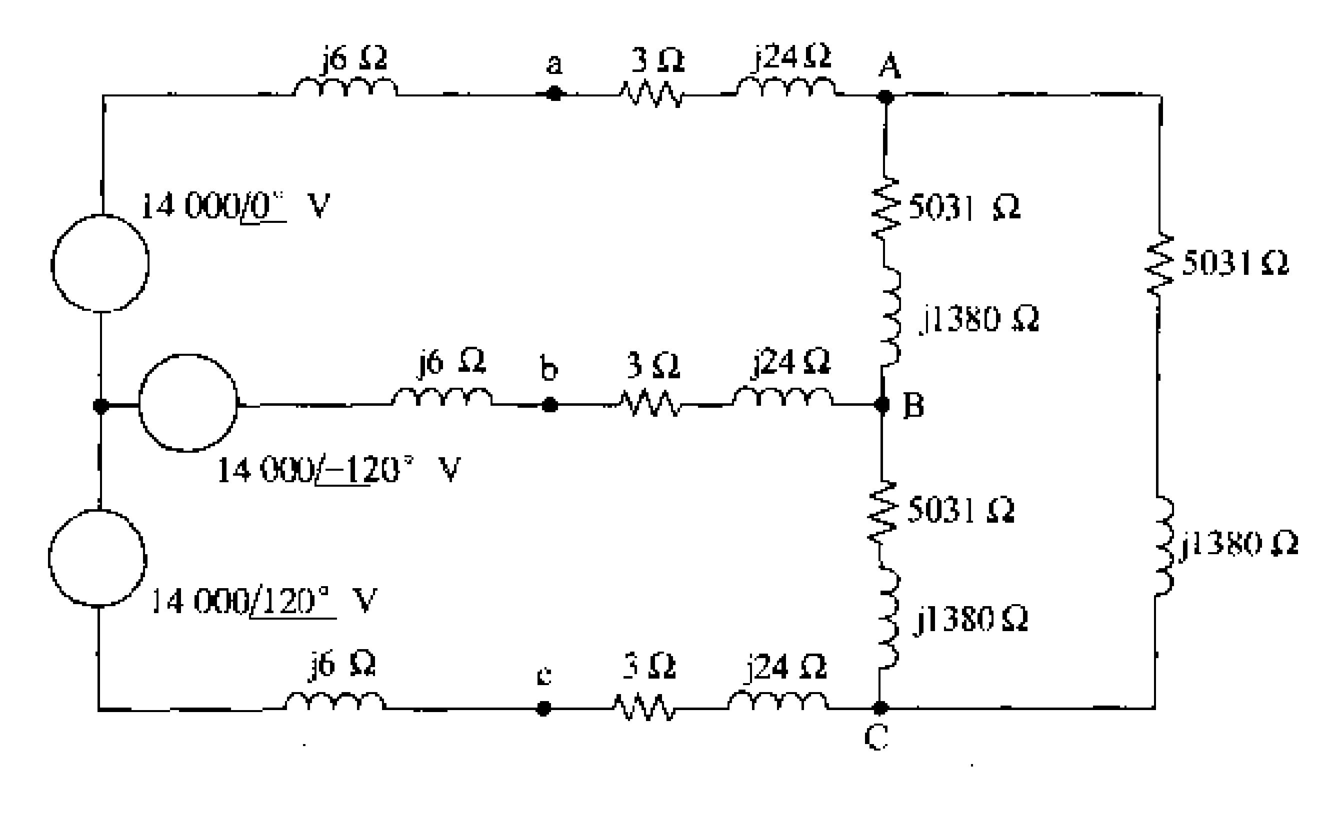


图 P11.19

11.20 下面的设备为计算机上的三个部件,每个设备都是一个平衡三相负载,且工作电压为 208 V,求:

(a) 三个设备线电流的幅值。

(b) 合并之后的负载的功率因数。

- 软驱:4.864 kW,滞后功率因数为 0.79。
- 压缩卡:17.636 kAV,滞后功率因数为 0.96。
- CPU:13.853 kVAR。

11.21 平衡三相电源功率为 1800 kVA,超前功率因数为 0.96,两平衡 Y 形负载并联。传输线阻抗忽略不计;负载 1 功率为 $192+j1464$ k VA。

(a) 若线电压为 $6400\sqrt{3}$ V,且阻抗元件串联,求负载 2 每相的阻抗。

(b) 若阻抗并联,重复(a)。

11.22 三相线路阻抗为 $0.1+j0.8\ \Omega/\phi$,两平衡三相负载并联,第一个负载吸收的总阻抗为 630 kW 和 840 kVAR,第二个负载 Y 形连接,阻抗为 $15.36-j4.48\ \Omega/\phi$,负载处的线到中点电压为 4000 V,求电源处线电压的幅值。

11.23 平衡三相负载的线到中点电压如图 P11.23 所示为 480 V。在这个电压下，负载吸收的功率为 60 kVA，滞后功率因数为 0.8。

(a) 以 V_{AN}为参考电压，求 I_{na}的极坐标表达式。

(b) 求理想三相电源的复功率。

(c) 证明发送的总平均功率等于吸收的总平均功率。

(d) 证明发送的总无功功率等于吸收的总无功功率。

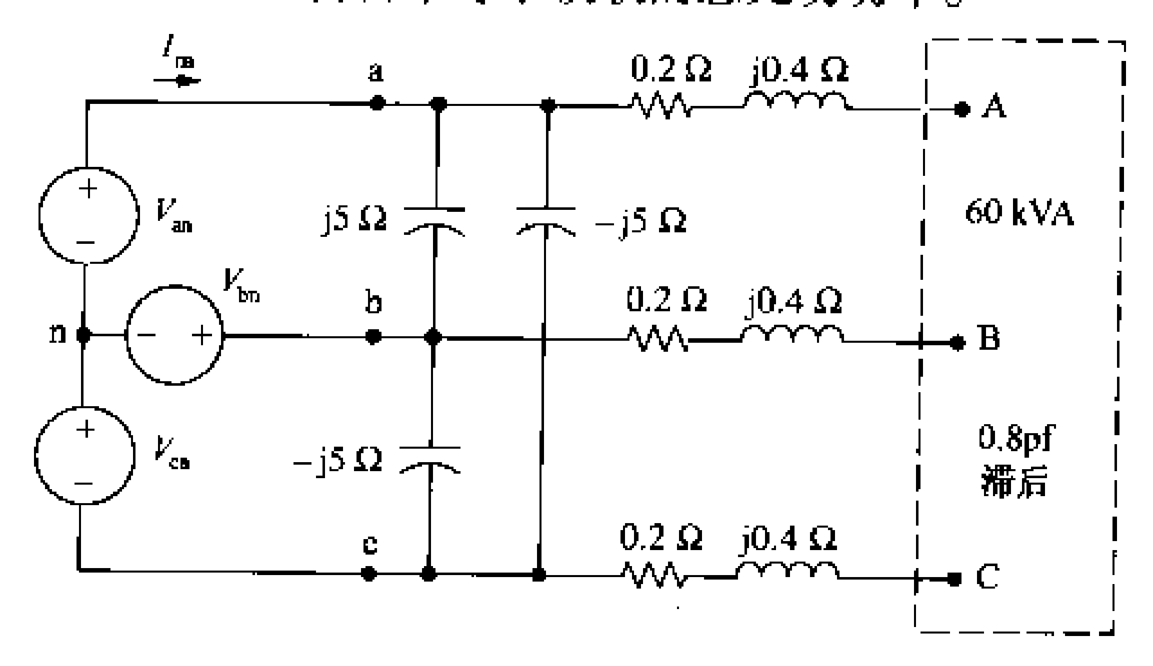


图 P11.23

11.24 在全负载的情况下，商业上的有效功率为 200 hp，三相感应电机工作的有效率为 96%，滞后功率因数为 0.92，电机由一个三相感应插头供电，插座上线电压为 208 V。

(a) 求 208 V 插座上线电流的幅值(1 hp = 746 W)。

(b) 求提供给电机的无功功率。

11.25 图 P11.25 所示的平衡三相电源输出的功率为 78 kVA，超前功率因数为 0.8，电源上的线电压为 $208\sqrt{3}$ V。

(a) 求负载上线电压的幅值。

(b) 求负载的总复功率。

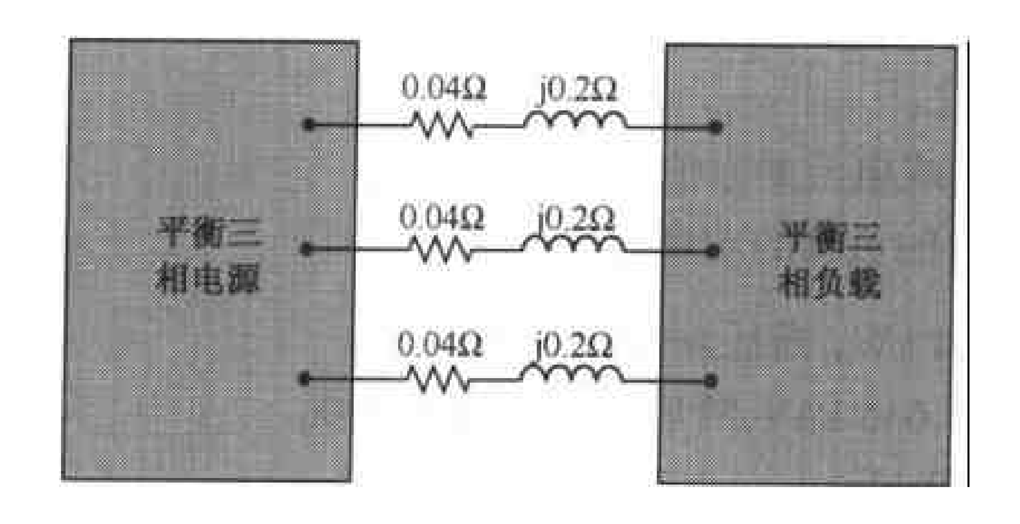


图 P11.25

11.26 证明平衡三相电路的总瞬时功率为常数，并且等于 $1.5\ V_m I_m \cos\theta_\phi$，其中 V_m 和 I_m 分别表示 θ 相电压和相电流的最大幅值。

11.27 平衡三相传输线的阻抗为 $1 + j5\ \Omega/\phi$，给三个并联的平衡三相负载供电，三个负载分别为 L_1 = 75 kVA，超前功率因数为 0.96，L_2 = 150 kVA，滞后功率因数为 0.80，L_3 = 168 kW，无功功率为 36 kVAR。负载上线电压的幅位为 $2\ 500\sqrt{3}$ V。

(a) 求传输线两端线电压的幅值。

(b) 平均功率传输的百分比效率是多少？

11.28 平衡三相负载的总功率为 1188 kW，滞后功率因数为 0.6，线电压为 $6600\sqrt{3}$ V。传输线阻抗为 $0.5+j4\ \Omega/\phi$，在这种条件下，传输线上的压降过大，为了补偿，将一个 Δ 形连接的电容排并联于负载上，当线电压为 $6600\sqrt{3}$ V 时，电容排的无功功率为 1920 kVAR。

(a) 当线电压为 $6600\sqrt{3}$ V，且电容排未连接时，求传输线发送端电压的幅值。

(b) 将电容排接上，重复(a)。

(c) 求(a)中传输线平均功率的有效率。

(d) 若系统频率为 60 Hz，求电容值，单位为 mF。

11.29 平衡三相负载吸收的功率为 190.44 kVA，超前功率因数为 0.8，负载上线电压为 13800 V，找出四个可以用来模拟负载的电路。

11.30 推导式(11.56)和式(11.67)。

11.31 图 P11.31 所示的平衡三相电路，瓦特计的电流线圈接在 a-A 线上，电位线圈跨接于导线 b 和 c 上。证明瓦特计读数的$\sqrt{3}$倍等于负载的总无功功率，设相序为正。

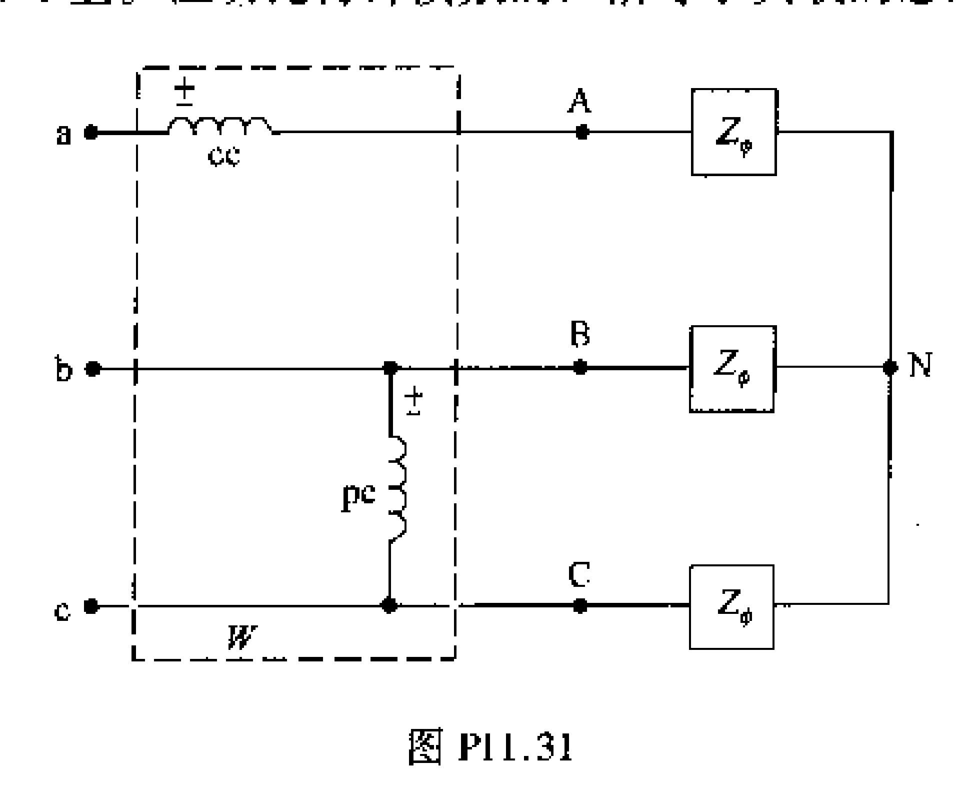


图 P11.31

11.32 图 P11.31 电路的线到中点电压为 720 V，相序为正，负载阻抗为 $96+j72\ \Omega/\phi$。

(a) 求瓦特计的读数。

(b) 求负载的总无功功率。

11.33 图 P11.33 所示为平衡三相负载与平衡三相 Y 形电源，且相序为正。传输线阻抗忽略，电源线到中点电压为 4800 V。

(a) 瓦特计读数为多少瓦？

(b) 为了测量总功率，说明第二个瓦特计应如何放在电路中。

(c) 求第二个瓦特计的读数。

(d) 证明两瓦特计的读数之和等于传递给负载的总平均功率。

11.34 (a) 求习题 11.14 平衡负载每相上的复功率。

(b) 若用双瓦特计的方法测负载上的平均功率，求每个瓦特计的读数。

11.35 (a) 求图 P11.35 所示电路每个瓦特计的读数。Z_ϕ 的值为 $60\angle 30^\circ\ \Omega$。

(b) 确认瓦特计读数之和等于发送到 Δ 形负载上的总平均功率。

11.36 (a) 若 $Z = 276 - j207\ \Omega$,求图 P11.36 所示电路每个瓦特计的读数。

(b) 检查两瓦特计的读数之和是否等于传递到负载上的总功率。

(c) 确认$\sqrt{3}(W_1 - W_2)$等于负载的总无功功率。

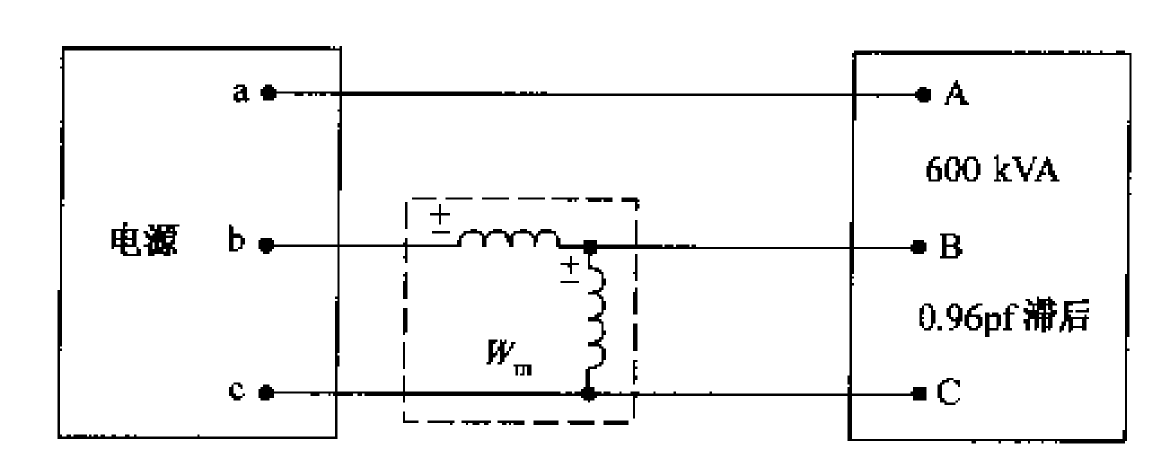


图 P11.33

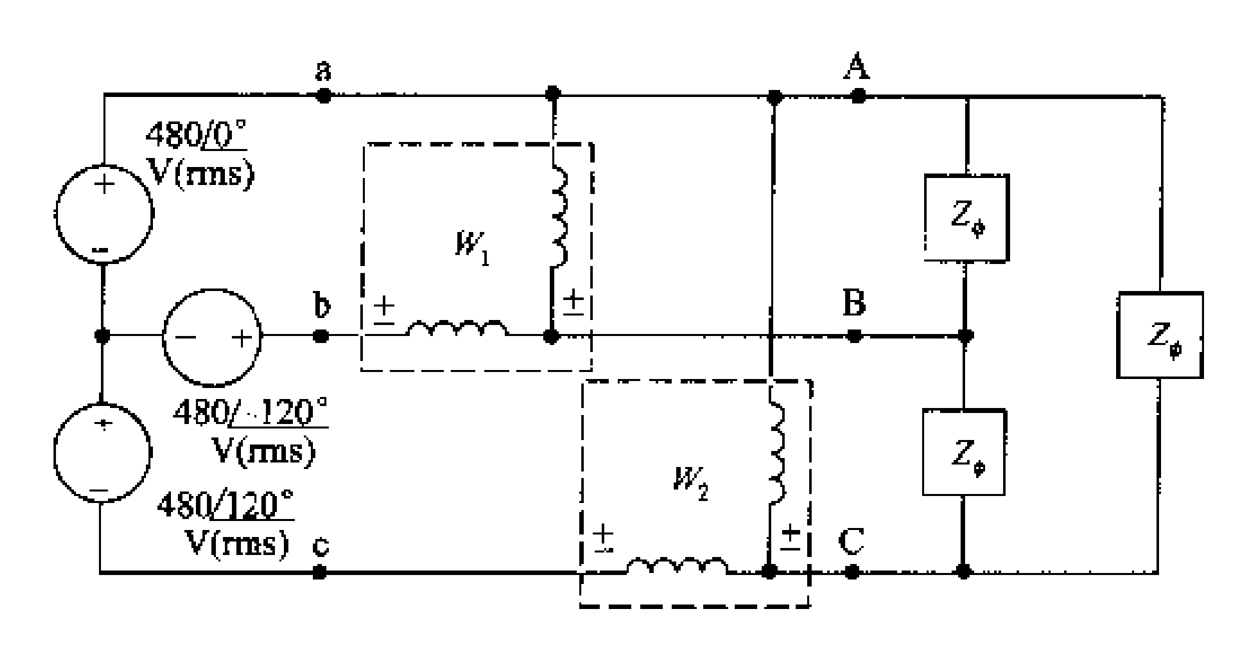


图 P11.35

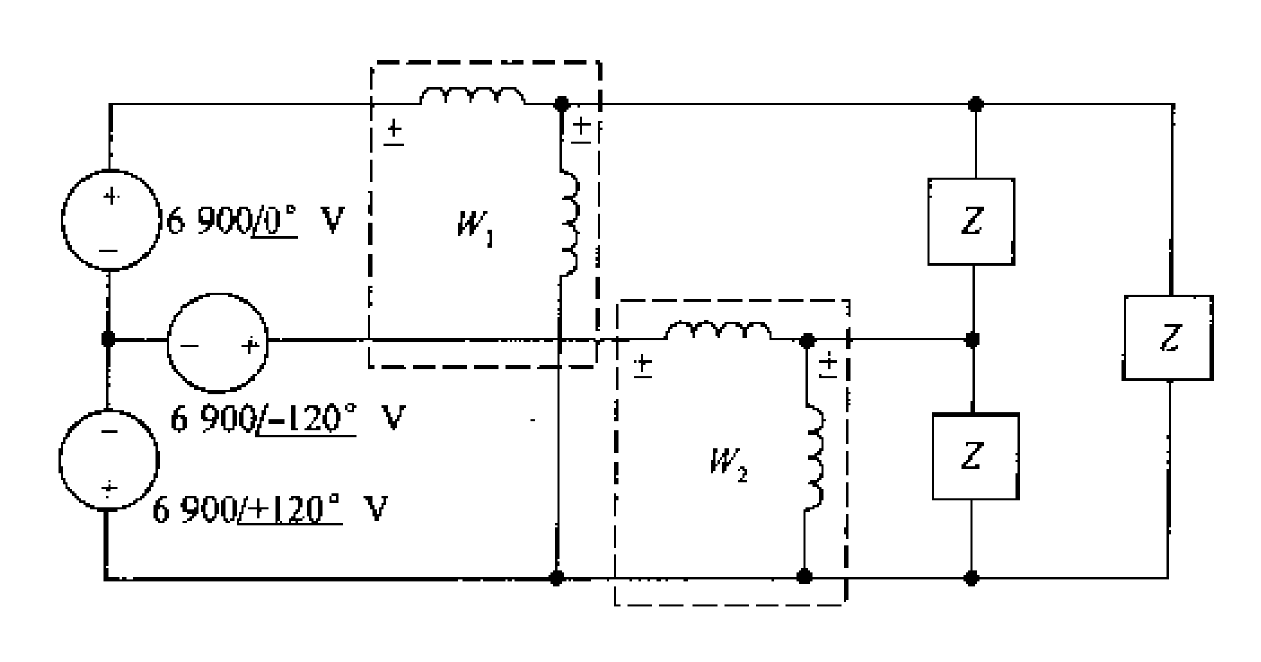


图 P11.36

11.37 (a) 若 $Z_A = 60\angle -30^\circ\ \Omega, Z_B = 24\angle +30^\circ\ \Omega, Z_C = 80\angle 0^\circ\ \Omega$,求图 11.37 所示电路,每个瓦特计的读数。

(b) 两瓦特计的读数之和是否等于负载的总平均功率。

11.38 图 11.20 电路中瓦特计的读数如下:$W_1 = 114291.64$ W, $W_2 = 618486.24$ W。线电压幅值为 $7600\sqrt{3}$ V,相序为正,求 Z_ϕ。

11.39 用双瓦特计方法求习题 11.15 非平衡负载的功率。瓦特计 1 的电流线圈置于导线 aA 上,瓦特计 2 的电流线圈置于导线 bB 上。

(a) 求瓦特计 1 的读数。

(b) 求瓦特计 2 的读数。

(c) 证明两瓦特计的读数之和等于非平衡负载上的总功率。

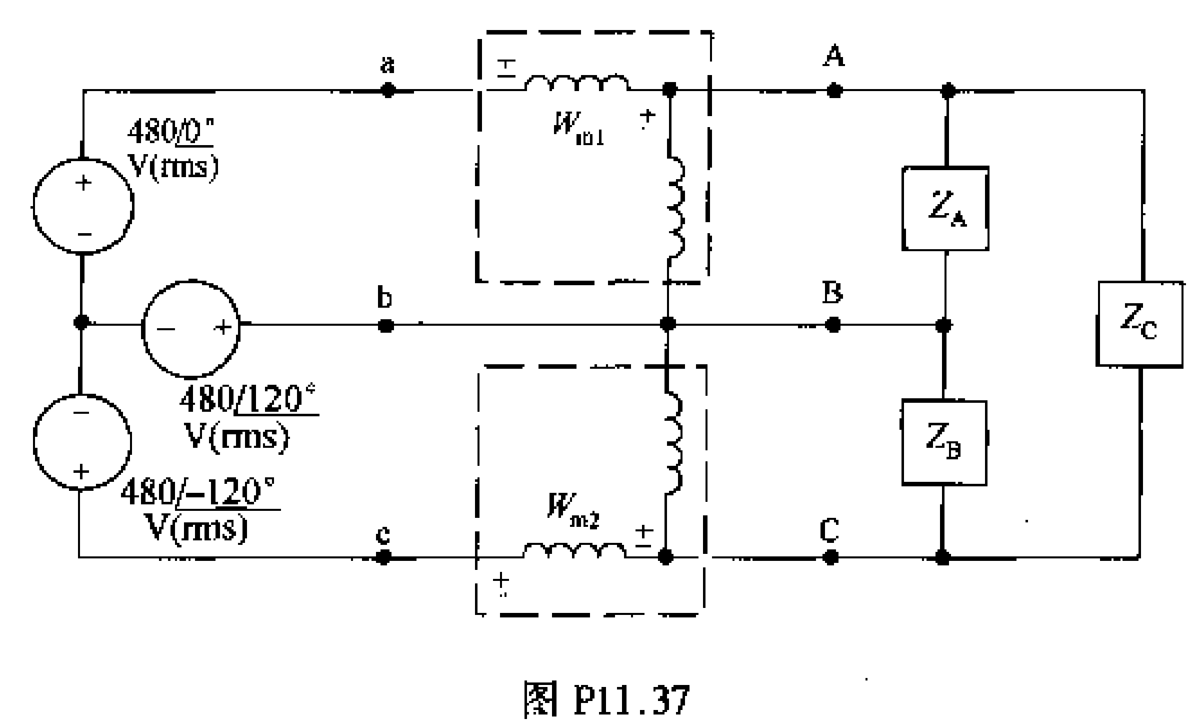


图 P11.37

11.40 平衡三角形连接的电容排与练习题 11.10 中描述的负载并联,其效果如同在负载的每相上并联一个电容,则负载的线电压保持在 2450 V,电路的工作频率为 60 Hz,调整电容的取值,以使合并之后的负载上的线电流的幅值最小。

(a) 求电容值为多少毫法?

(b) 若电容星形连接,重复(a)。

(c) 求线电流的幅值。

◆**11.41** 参考实例:

(a) 以变电站线到中点电压为参考,建立一个描述 V_{AN}和 V_{an}关系的相量表。

(b) 若相序为正,建立一个描述 V_{AB}和 V_{ab}关系的相量表。

(c) 在将电容加入到电路上之前,建立变电站负载的功率三角形。

(d) 将电容加入到电路中,重复(c)。

◆**11.42** 参考实例中的(c),假设频率为 60 Hz。

(a) 若电容为三角形连接,求每个电容的容值,单位为 μF。

(b) 若电容为星形连接,求每个电容的容值,单位为 μF。

◆**11.43** 参考实例,若负载阻抗降为 240 kW 和 600 kVAR,并假设电容一直接在变电站上。

(a) 若要使变电站的线电压保持为 13.8 kV,求发电厂线电压的幅值。

(b) 发电厂这时的电压会不会对其他用户造成影响?

◆**11.44** 假设习题 11.43 当负载功率降至 240 kW 和 600 kVAR 时,变电站的电容排断开,并且假设变电站线电压保持为 13.8 kV。

(a) 求发电厂线电压幅值。

(b) (a)中求得的电压值是在允许变化的范围内吗?

(c) 负载功率降至 240 + j600 kVA 后,若电容保持在线路上,总的线路损耗为多少 kW?

(d) 当负载功率降至 240 + j600 kVA 后,若将电容从线路上移走,总的线路损耗为多少 kW?

(e) 基于上面的计算,当负载功率降至 240 + j600 kVA 后,是否可以将电容去掉? 请解释。

第 12 章　拉普拉斯变换介绍

本章将介绍一种强有力的分析工具，这种工具广泛地应用于分析线性集总电路，它是建立在拉普拉斯变换（简称拉氏变换）基础上的。拉氏变换将在 12.1 节中给予定义。在定义拉氏变换之前，需要解释为什么需要这种分析方法。首先，在讨论电路的暂态特性时，电路的方程里包含许多节点电压和网孔电流的微分方程。换句话说，在研究多节点和多网孔电路时，列写的电路方程都是由一系列线性微分方程描述的。第二，要研究更复杂信号源的作用，而不是第 7，8 章讨论的简单直流及阶跃信号作用下的暂态响应。第三，用拉氏变换引入转移函数的概念。转移函数是分析正弦电路正弦稳态响应的工具，第 13 章将讨论转移函数。最后，希望以系统的方式将电路的时域特性与频域特性联系起来，拉氏变换可以加深对电路功能的理解。

本章介绍拉氏变换，讨论它的自身特点，提出从频域向时域转化的系统方法。

12.1　拉氏变换的定义

函数拉氏变换的定义为：

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \tag{12.1}$$

式中的符号 $\mathscr{L}\{f(t)\}$ 读做“$f(t)$的拉氏变换”。

$f(t)$的拉氏变换也记做 $F(s)$，即：

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(s)\} \tag{12.2}$$

该表达式说明，当式(12.1)中的积分运算完成后，结果就是 s 的函数。在实际应用中，t 代表时间。同时，因式(12.1)积分式中的指数必须是无量纲的，所以 s 必须具有时间的倒数的量纲，即频率。拉氏变换将问题从时域变换到频域，若得到了未知函数的频域表达式，则可通过反变换回到时域表达式，若对拉氏变换的含义不清楚，可讨论另一种数学变换。对数可以将乘除法问题转化为加减法问题，如 $A = \log BC = \log B + \log C$，反对数用来完成相反的运算过程。相量是另一种变换，正如第 9 章讨论的，它将正弦信号转化为复数，以便于对电路参数进行简单的几何运算。在得出信号的相量值后，再转化为时域表达式。这两个例子都说明了数学变换的特点：建立一种新的域，简化数学运算。在找到了新域中的未知数后，再反变换到原来的域。在电路分析中，利用拉氏变换将时域的微积分方程转化为频域的代数方程，通过处理代数方程使未知量的求解过程得到简化。

在介绍拉氏变换的一些重要特性之前，要说明某些一般性的问题。第一，式(12.1)是不恰当的，因其积分上限为无穷大。因此，读者会想到积分是否有界的问题，或者说是否存在拉氏变换？显然，在工程分析中有意义的初等函数都存在拉氏变换，否则就不会对拉氏变换感兴趣了，在线性电路分析中，用存在拉氏变换的电源激励系统，没有拉氏变换的激励函数如 t^t 或 e^{t^2}

在电路分析中是没有意义的。

第二，因积分下限为零，拉氏变换忽略了 $t<0$ 时的 $f(t)$，或者说 $F(s)$ 仅由 $t>0$ 时的 $f(t)$ 的特性决定。为强调积分下限为零，式(12.1)常被称为单边拉氏变换。在双边拉氏变换中，积分下限为 $-\infty$，此处不用双边拉氏变换。

另外一点就是当 $f(t)$ 在原点不连续时，关于积分下限的位置问题。如果 $f(t)$ 在原点是不连续的，如图 12.1(a)所示，$t(0)$ 是有意义的，但当 $f(t)$ 在原点为有限的不连续值时，如图 12.1(b)所示，就出现了拉氏变换的积分是否包含不连续点的问题，换句话说，是应该令积分下限为 0^-，包括不连续点，还是令积分下限为 0^+，不包含不连续点？（0^- 和 0^+ 分别表示 t 在原点的左侧和右侧），实际上只要一致，选择哪边都可以，现在选 0^- 为积分下限，原因以后再解释。

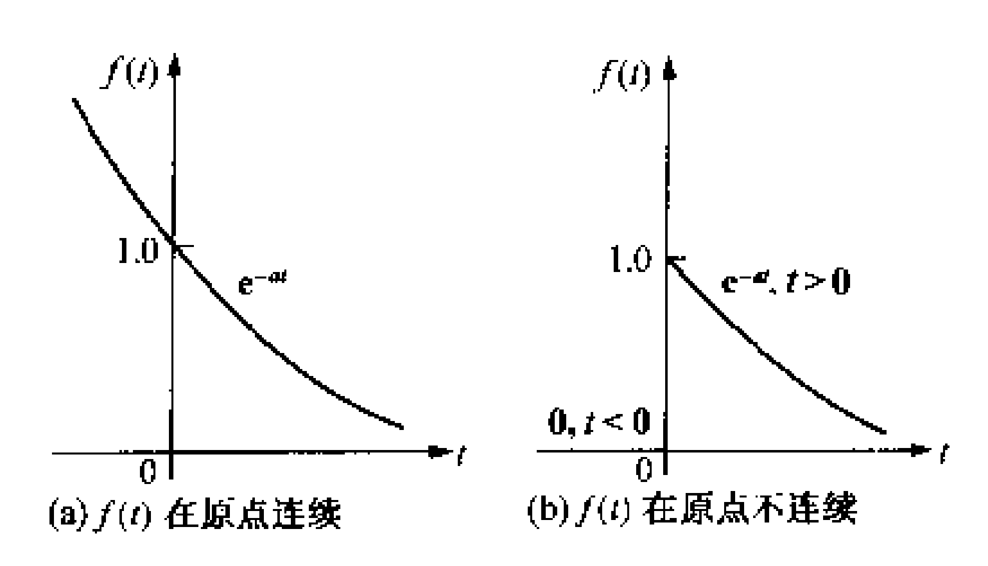


图 12.1　在原点连续和不连续的函数

因选 0^- 作为积分下限，马上会发现积分从 0^- 到 0^+ 为零，但如果在原点处有一冲激函数，积分结果就不为零了，这种情况在 12.3 节中讨论。非常重要的一点就是，由于在原点处没有冲激函数，所以图 12.1 所示的两个函数的拉氏变换相等。

单边拉氏变换忽略了 $t<0$ 时的 $f(t)$，而 0^- 以前的状态可以通过初始条件来考虑，这样就可以用拉氏变换确定初始条件建立后所出现的激励的响应。

在讨论下面的问题时，将拉氏变换分为两种：函数变换和算子变换。函数变换是特殊函数的拉氏变换，如 $\sin\omega t$，t，e^{-at} 等等。算子变换定义了拉氏变换的一般数学特性，如求 $f(t)$ 派生函数的拉氏变换，但在讨论函数拉氏变换和算子变换之前，先介绍阶跃函数和冲激函数。

12.2　阶跃函数

实际中，可能会遇到在原点不连续的或有跳变的函数，例如，曾经讨论过的暂态特性，开关的动作会使电流或电压产生突变，如果引入阶跃或冲激函数，就可以用数学的方法表达这种不连续性。

图 12.2 表示了阶跃函数，当 $t<0$ 时，其值为零。阶跃函数的符号用 $Ku(t)$ 表示。这样，阶跃函数的数学定义就是：

$$Ku(t)=0,\quad t<0 \tag{12.3}$$

$$Ku(t)=K,\quad t>0 \tag{12.4}$$

若 $K=1$，则式(12.3)定义的函数就叫单位阶跃函数。

阶跃函数在 $t=0$ 时无定义，当需要定义 0^- 与 0^+ 之间的过渡过程时，就假设函数是线性

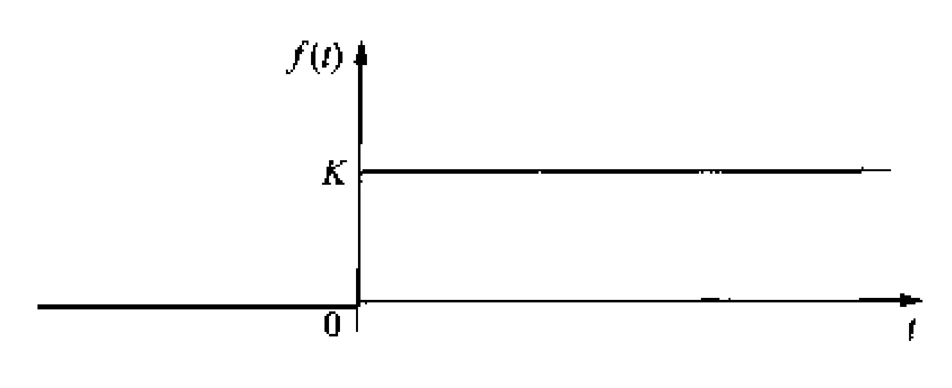


图 12.2 阶跃函数

的,且:

$$Ku(0) = 0.5K \tag{12.4}$$

图 12.3 表示了从 0^- 到 0^+ 的线性变换过程。

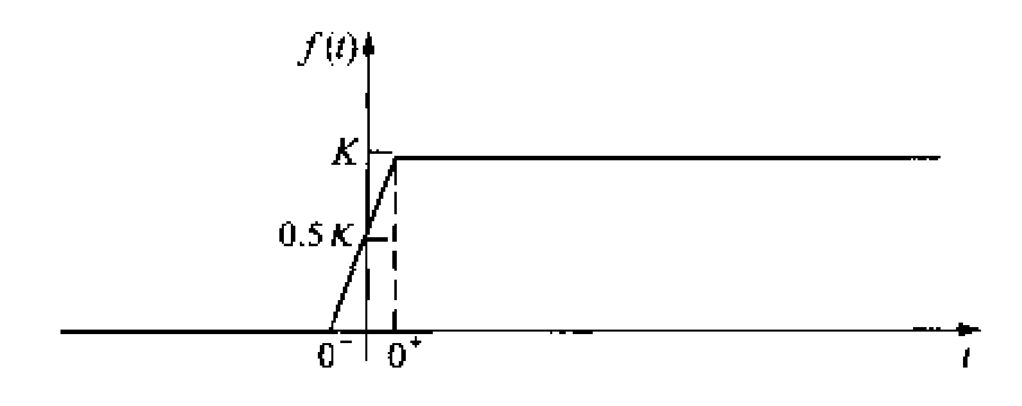


图 12.3 阶跃函数的线性近似

不连续点也可能出现在 t 不等于零的其他点,例如在顺序开关电路中,在 $t=a$ 处出现的阶跃函数表示为 $Ku(t-a)$,这样:

$$Ku(t-a) = 0,\ t < a$$
$$Ku(t-a) = K,\ t > a \tag{12.5}$$

若 $a>0$,阶跃出现在原点的右侧,否则出现在左侧。图 12.4 表示了式(12.5),当 $t-a<0$ 时,阶跃函数值为零,当 $t-a>0$ 时阶跃函数值为 K。

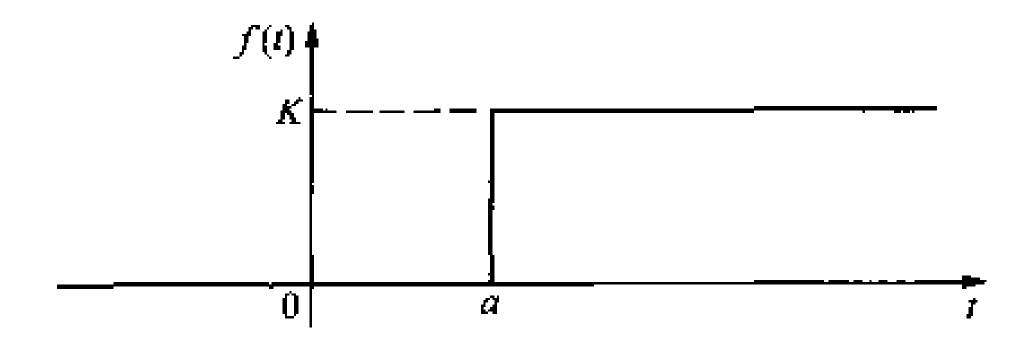


图 12.4 在 a 处出现的阶跃函数($a>0$)

当 $t<a$ 时,阶跃函数为 K,这种函数表示为 $Ku(a-t)$,因此:

$$Ku(a-t) = K,\ t < a$$
$$Ku(a-t) = 0,\ t > a \tag{12.6}$$

当 $a<0$ 时,间断点出现在原点的左侧,图 12.5 表示了式(12.6)。

利用阶跃函数可以写出在整个正半轴上有定义、且连续有界的函数的数学表达式,例如在电路分析中非常有用的有限宽度的脉冲,可用两个阶跃函数来表达。函数 $K[u(t-1)-u(t-3)]$在 $1<t<3$ 时,其值为 K,在其他处其值为零,因此,它是一个高为 K,从 $t=1$ 处开始,在 $t=3$ 时结束的有限脉冲,用阶跃函数定义这个脉冲时,可以将函数 $u(t-1)$看做在 $t=1$ 时常数值 K 的开关闭合,而阶跃函数 $-u(t-3)$可以看做在 $t=3$ 时常数值 K 的开关打开,在例 12.1 中,用阶跃函数在规定的时间里打开和关闭线性函数。

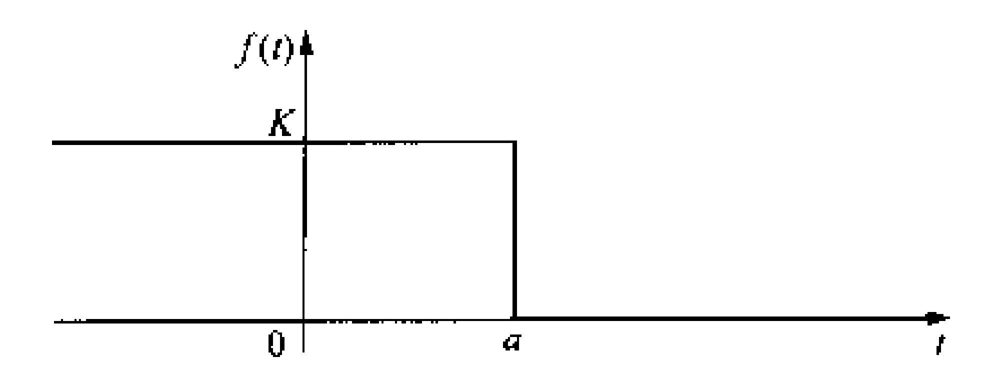


图 12.5　阶跃函数 $Ku(a-t)(a>0)$

例 12.1　用阶跃函数表示图 12.6 所示的函数。

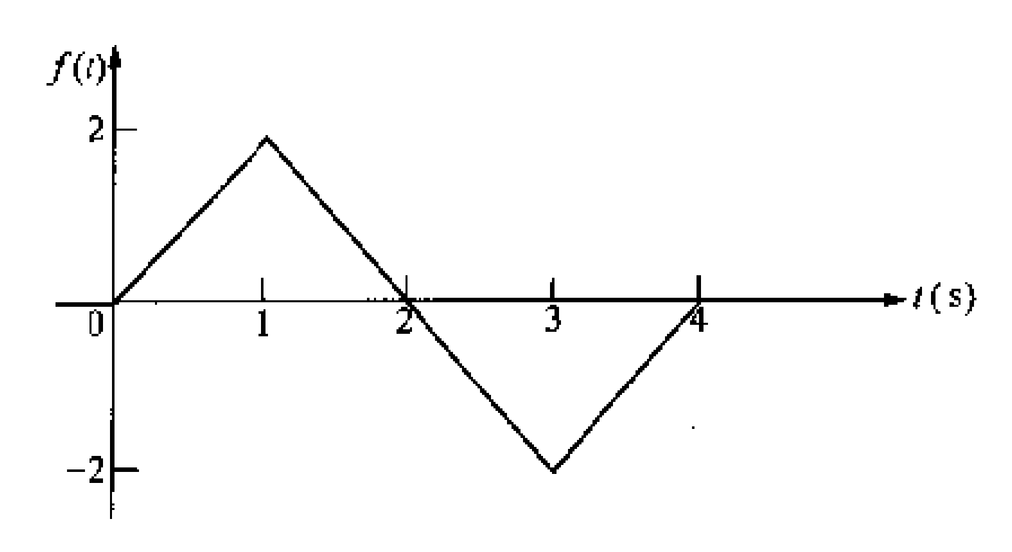


图 12.6　例 12.1 的函数

解：

图 12.6 所示的函数是由 0,1,3,4 点所分割成的直线组成，为建立该函数，必须加或减某种斜率下的线性函数，用阶跃函数在某些适当的点开始和结束这些线段，即利用阶跃函数来打开和关闭方程所表示的直线：$+2t$，在 $t=0$ 时打开，在 $t=1$ 时关闭；$-2t+4$，在 $t=1$ 时打开，$t=3$ 时关闭；$+2t-8$，在 $t=3$ 时打开，在 $t=4$ 时关闭，各直线段及其方程如图 12.7 所示。

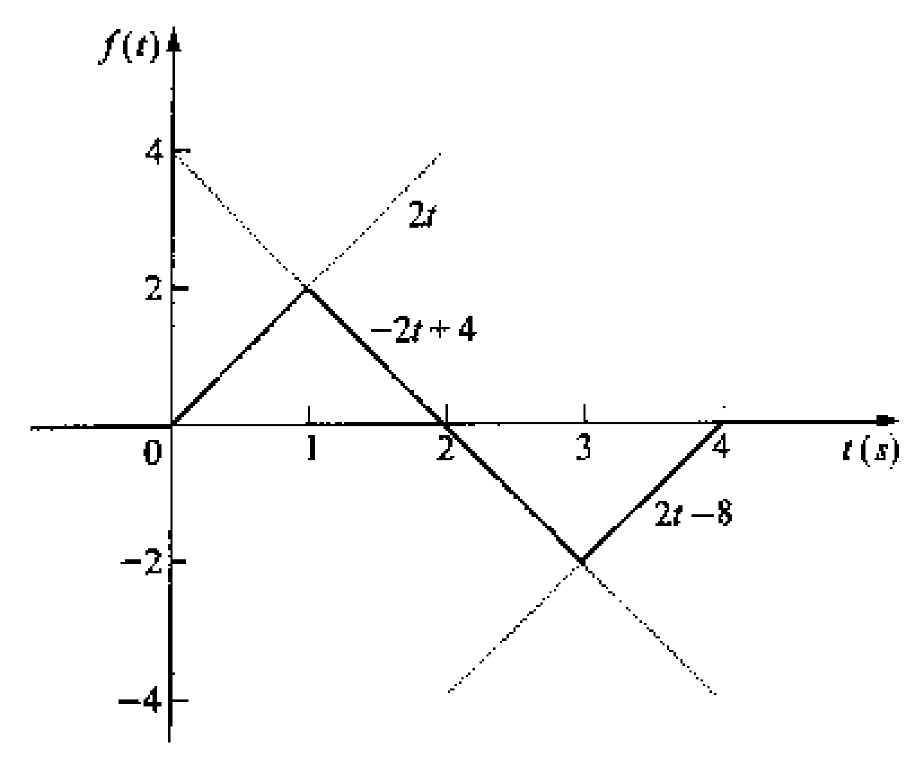


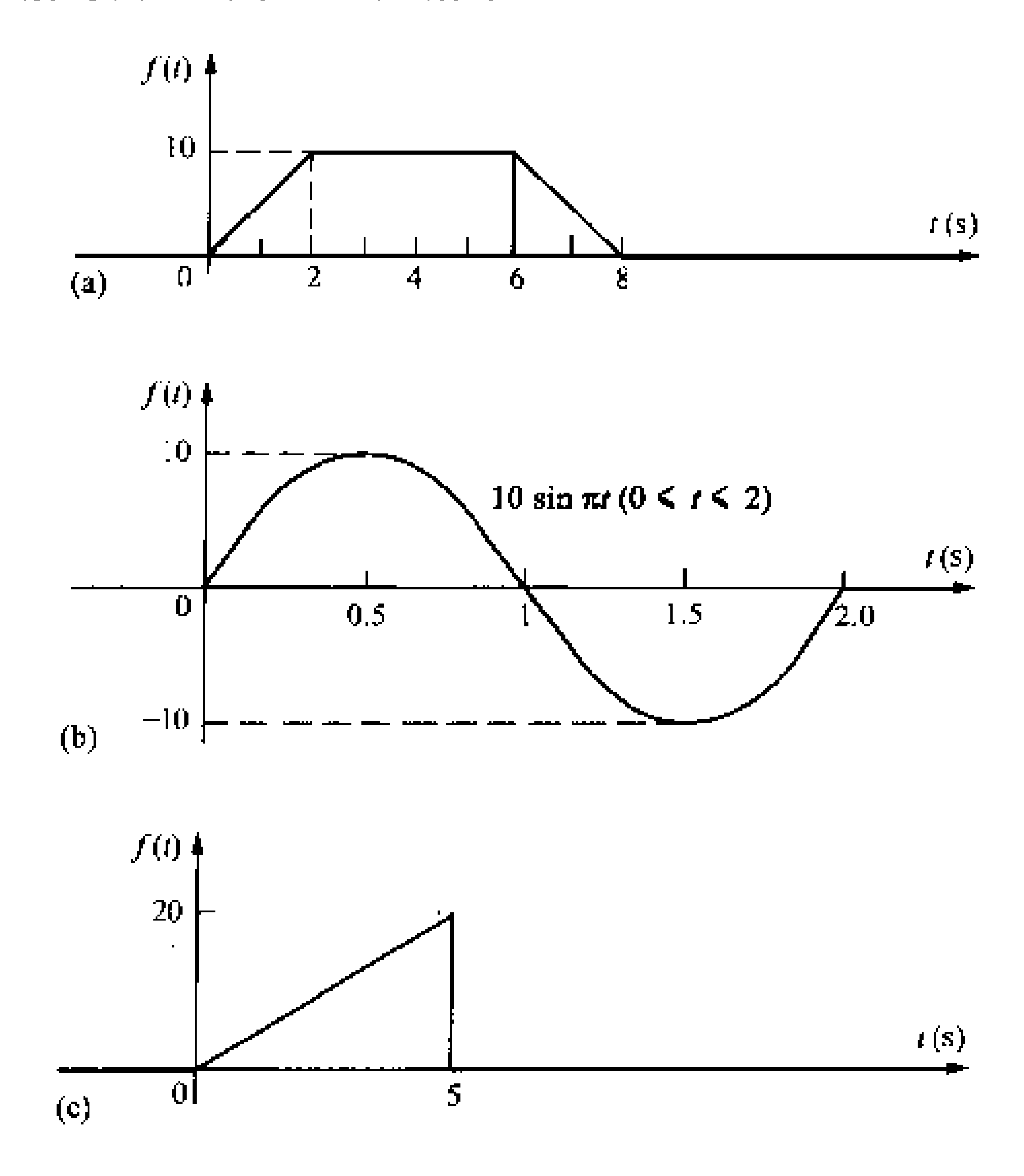
图 12.7　用阶跃函数的开和关生成图 12.6 的函数

$f(t)$的表达式为：

$$f(t) = 2t[u(t) - u(t-1)] + (-2t+4)[u(t-1) - u(t-3)] + (2t-8)[u(t-3) - u(t-4)]$$

练习题

12.1 用阶跃函数表示以下图示的函数。



答:(a) $f(t)=5t[u(t)-u(t-2)]+10[u(t-2)-u(t-6)]+(-5t+40)[u(t-6)-u(t-8)]$;(b) $f(t)=10\sin(\pi t)[u(t)-u(t-2)]$;(c) $f(t)=4t[u(t)-u(t-5)]$。

12.3 冲激函数

当函数存在有界间断点时,如图 12.1(b)所示,函数的导数在间断点处没有定义,可以用冲激函数的概念定义间断点的导数,并因此定义了导数的拉氏变换。冲激函数是在连续区间内为零,具有无穷间断点的信号,自然界中并不存在这种信号,但一些电路信号与这种定义非常接近,因此,冲激函数的数学模型非常有用,在电路分析中开关操作或在电路中加入冲激函数会出现冲激电压或者电流,第 13 章将讨论这种情况,这里只一般性地介绍冲激函数的定义。

为定义函数在间断点的斜率,先假设函数通过间断点时是线性变化的,如图 12.8 所示,可以看出,当 $\varepsilon\to0$ 时,在原点处出现了突变间断点,对函数取微分后,在 $-\varepsilon$ 和 $+\varepsilon$ 之间的斜率为常数 $1/2\varepsilon$。$t>\varepsilon$ 时,斜率为 $-a\mathrm{e}^{-a(t-\varepsilon)}$。图 12.9 用曲线表示了这种情况,当 $\varepsilon\to0$ 时,在 $+\varepsilon$ 与 $-\varepsilon$ 之间,$f'(t)$ 的值趋于无穷大。同时这个大值的持续时间也趋于零。当 $\varepsilon\to0$ 时,在 $+\varepsilon$ 与 $-\varepsilon$ 之间,$f'(t)$ 下的面积保持常数。在该例子中,面积为 1,当 $\varepsilon\to0$ 时,说明在 $+\varepsilon$ 与 $-\varepsilon$ 之间的函数趋近于单位冲激函数,用 $\delta(t)$ 表示。因此,当 $\varepsilon\to0$ 时,函数 $f(t)$ 的导数在原点处趋近于单位冲激函数。

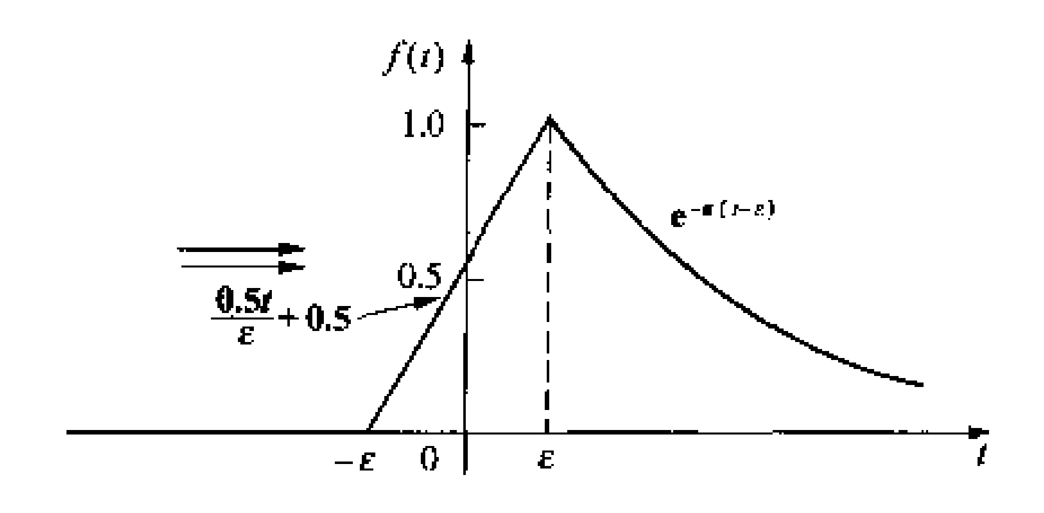


图 12.8　图 12.1(b) 中间断点的放大图，假设 ±ε 间是线性变化

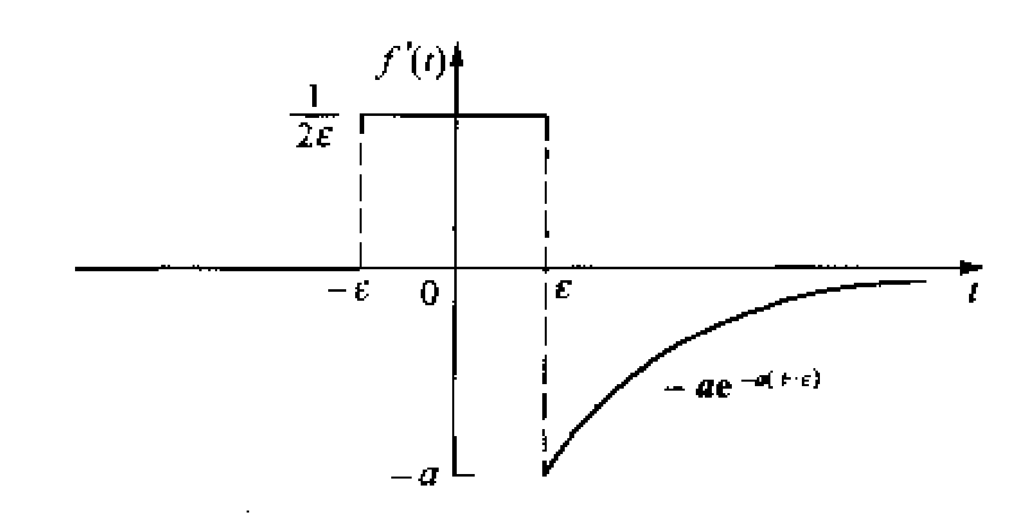


图 12.9　图 12.8 函数的导数

或者：

$$f'(0) \to \delta(t)\ ,\ 当\ \varepsilon \to 0$$

若冲激函数曲线下的面积不等于 1，冲激函数就用 $K\delta(t)$ 表示，其中 K 是面积，K 指的是冲激函数的强度。

总之，冲激函数是由可变参数函数中的参数趋于零时形成的，当参数趋近于零时，可变参数函数表现以下三个特性：

1. 幅值趋于无穷大。
2. 函数的持续时间趋于零。
3. 当参数变换时，函数下的面积为常数。

许多变参函数都具有上述特点。在图 12.8 中，使用的是线性函数 $f(t)=0.5t/\varepsilon+0.5$，图 12.10 中使用的另一函数就是可变参数指数函数：

$$f(t)=\frac{K}{2\varepsilon}e^{-|t|/\varepsilon} \tag{12.7}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，在原点的函数变为无穷大，同时在无穷短时间内，函数衰减至零。图 12.10 表明了 $\varepsilon \to 0$ 时 $f(t)$ 的特点，为证明当 $\varepsilon \to 0$ 时，产生的是冲激函数，必须求出与 ε 无关的函数下的面积，这样：

$$\begin{aligned}面积 &= \int_{-\infty}^{0} \frac{K}{2\varepsilon}e^{t/\varepsilon}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \frac{K}{2\varepsilon}e^{-t/\varepsilon}\mathrm{d}t \\ &= \frac{K}{2\varepsilon}\cdot\frac{e^{t/\varepsilon}}{1/\varepsilon}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{K}{2\varepsilon}\cdot\frac{e^{-t/\varepsilon}}{-1/\varepsilon}\bigg|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{K}{2}+\frac{K}{2}=K \end{aligned} \tag{12.8}$$

该式说明,曲线下的面积为常数 K,因此,当 $\varepsilon\to0$ 时 $f(t)\to K\delta(t)$。

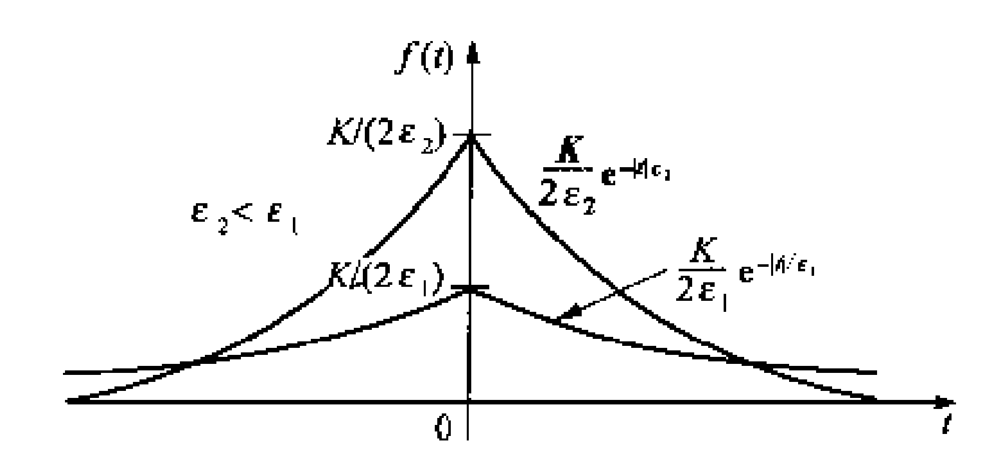


图 12.10 用于生成冲激函数的变参数函数

数学上冲激函数的定义为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t)\mathrm{d}t = K \tag{12.9}$$

$$\delta(t) = 0,\ t\neq 0 \tag{12.10}$$

式(12.9)说明了冲激函数下的面积为常数,该面积代表了冲激强度,式(12.10)说明了在 $t\neq0$ 的任何时候,冲激函数值均为零,在 $t=a$ 处出现的冲激表示为 $K\delta(t-a)$。

冲激函数的波形符号为一箭头,冲激的强度用靠近箭头的数值给出,图 12.11 给出了冲激函数 $K\delta(t)$和 $K\delta(t-a)$。

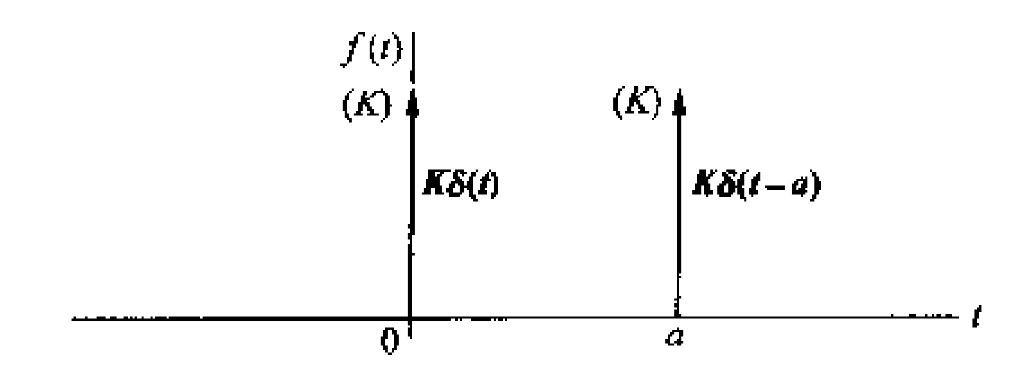


图 12.11 冲激函数 $K\delta(t)$和 $K\delta(t-a)$的图形

冲激函数的一个重要特性就是筛选特性,其表达式为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t = f(a) \tag{12.11}$$

其中函数 $f(t)$在 $t=a$ 处假设为连续的。式(12.11)说明,冲激函数筛选掉了 $t=a$ 以外所有 $f(t)$的值,在 $t\neq a$ 的任一点,$\delta(t-a)$均为零,因此,式(12.11)的积分结果写为：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t \tag{12.12}$$

但是,因为 $f(t)$在 a 处连续,当 $t\to a$ 时,它取 $f(a)$的值,所以：

$$I = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(a)\delta(t-a)\mathrm{d}t = f(a)\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(t-a)\mathrm{d}t = f(a) \tag{12.13}$$

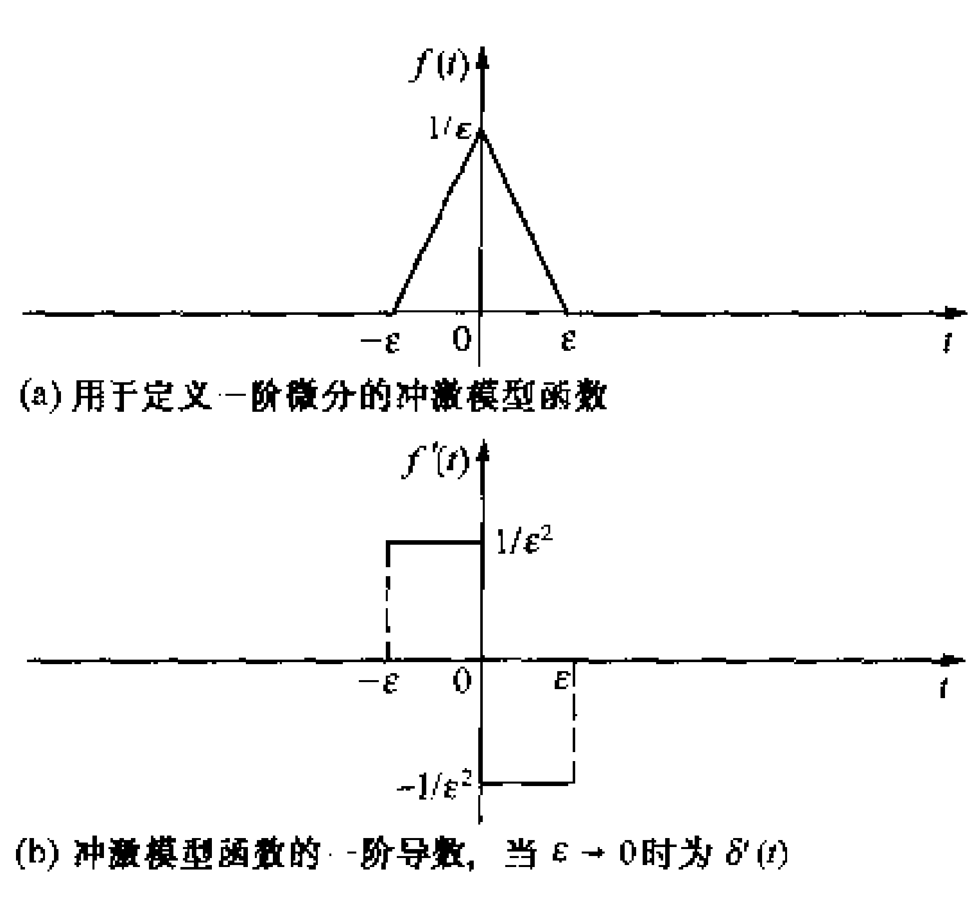
利用冲激函数的筛选特性求出其拉氏变换：

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = 1 \tag{12.14}$$

这就是电路分析中非常有用的拉氏变换对。

也可以定义冲激函数的微分及高阶微分的拉氏变换，先讨论一阶微分及其拉氏变换，然后讨论对高阶微分的拉氏变换。

图 12.12(a)中说明了当 $\varepsilon\to 0$ 时生成冲激函数的过程。图 12.12(b)表示了冲激函数微分生成的函数，也就是当 $\varepsilon\to 0$ 时冲激函数的微分 $\delta'(t)$。冲激函数的微分常常被称为单位冲激偶。



(a) 用于定义一阶微分的冲激模型函数

(b) 冲激模型函数的一阶导数，当 $\varepsilon\to 0$ 时为 $\delta'(t)$

图 12.12　冲激函数的一阶微分

为求 $\delta'(t)$的拉氏变换，用定义式对函数进行积分运算，如图 12.12(b)所示，积分后令 $\varepsilon\to 0$，则：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\delta'(t)\} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\varepsilon}^{0^-}\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0^+}^{\varepsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)e^{-st}\mathrm{d}t\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{s\varepsilon}+e^{-s\varepsilon}-2}{s\varepsilon^2}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{se^{s\varepsilon}-se^{-s\varepsilon}}{2\varepsilon s}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{s^2e^{s\varepsilon}+s^2e^{-s\varepsilon}}{2s}\\
&= s
\end{aligned}\tag{12.15}$$

在求解式(12.15)时，两次用到罗必塔法则。

与一阶微分的生成方法一样，也可以生成高阶微分，并确定其拉氏变换。对冲激函数的 n 阶微分，其拉氏变换为 s^n，即：

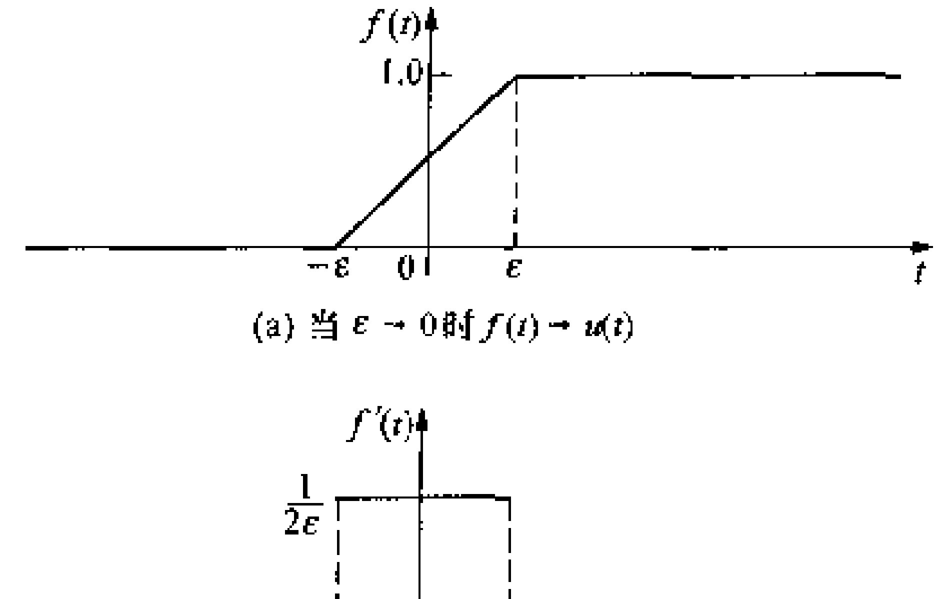
$$\mathscr{L}\{\delta^{(n)}(t)\}=s^n \tag{12.16}$$

因此，冲激函数可看做阶跃函数的导数，即：

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{12.17}$$

图 12.13 是式(12.17)的图形解释。当 $\varepsilon\to 0$ 时，图 12.13(a)中的函数趋近于阶跃函数。图 12.13(b)中的函数在 $\varepsilon\to 0$ 时趋近于单位冲激函数。

在电路分析中，冲激函数是一个非常有用的概念，在后面的章节中会进一步讨论，这里引入冲激函数，目的是为了在求函数的拉氏变换中将不连续的原点包含到积分限中。



(a) 当 $\varepsilon\to 0$ 时 $f(t)\to u(t)$

$f'(t)$, $\frac{1}{2\varepsilon}$, $-\varepsilon$, 0, ε, t

(b) 当 $\varepsilon\to 0$ 时 $f'(t)\to \delta(t)$

图 12.13 阶跃函数的导数:冲激函数

练习题

12.2 (a) 求图 12.12(a)所示函数以下的面积。

(b) 当 $\varepsilon\approx 0$ 时,函数的持续时间是多少?

(c) 当 $\varepsilon=0$ 时,$f(0)$的幅度是多少?

答:(a) 1,(b) 0,(c) ∞。

12.3 计算下列积分:

(a) $I=\int_{-1}^{3}(t^3+2)[\delta(t)+8\delta(t-1)]\mathrm{d}t$

(b) $I=\int_{-2}^{2}t^2[\delta(t)+\delta(t+1.5)+\delta(t-3)]\mathrm{d}t$

答:(a) 26,(b) 2.25。

12.4 求 $f(t)$。已知:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

其中:
$$F(\omega)=\frac{4+\mathrm{j}\omega}{9+\mathrm{j}\omega}\pi\delta(\omega)$$

答:2/9。

12.4 函数变换

函数变换是典型时域函数的拉氏变换,因为限制拉氏变换为单边的,因此,设所有函数在 $t<0$ 时的值为零。

12.3 节已经得出了函数变换对,并证明单位冲激函数的拉氏变换为 1,见式(12.14)。单位阶跃函数如图 12.13(a),其拉氏变换为:

$$\mathscr{L}\{u(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^+}^{\infty}1\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s} \tag{12.18}$$

式(12.18)表明,单位阶跃函数的拉氏变换为 $1/s$。

衰减指数函数如图 12.14 所示,其拉氏变换为:

$$\mathscr{L}\{e^{-at}\} = \int_{0^+}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+s)t}dt = \frac{1}{s+a} \tag{12.19}$$

在推导式(12.18)和(12.19)过程中,用到通过原点(间断点)的积分为零的事实。

再求图 12.15 所示正弦函数的拉氏变换,当 $t>0$ 时,$f(t)$为 $\sin\omega t$,因此,其拉氏变换为:

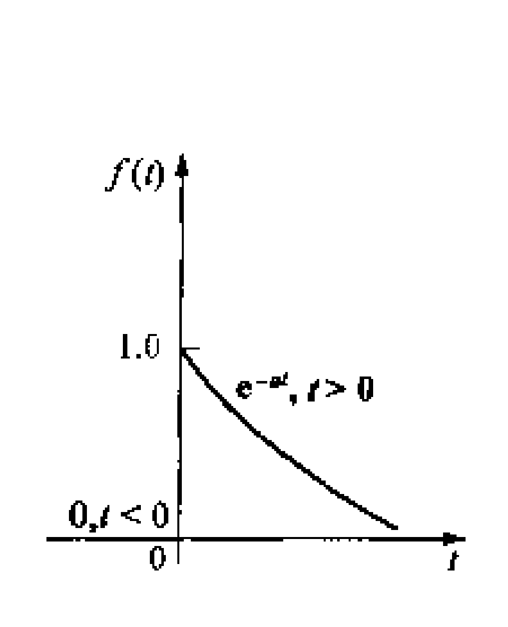


图 12.14 衰减指数函数

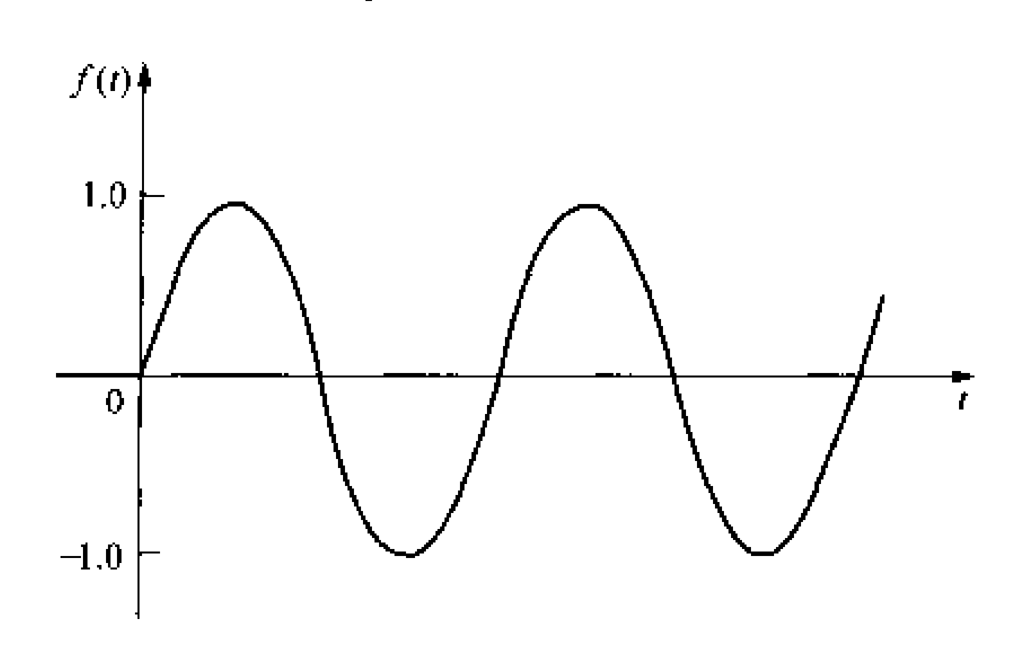


图 12.15 $t>0$ 时的正弦函数

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\sin\omega t\} &= \int_{0^-}^{\infty}(\sin\omega t)e^{-st}dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty}\left(\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right)e^{-st}dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty}\frac{e^{-(s-j\omega)t}-e^{-(s+j\omega)t}}{2j}dt \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right) \\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned} \tag{12.20}$$

表 12.1 给出了拉氏变换对的简表,其中包含了许多在电路中有用的函数。

表 12.1 单边拉氏变换对简表

类 型	$f(t)(t>0^-)$	$F(s)$
冲激函数	$\delta(t)$	1
阶跃函数	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
斜坡函数	t	$\frac{1}{s^2}$
指数函数	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
正弦函数	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
余弦函数	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

(续表)

类　型	$f(t)(t>0^-)$	$F(s)$
衰减斜坡函数	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
衰减正弦函数	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
衰减余弦函数	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

练习题

12.5 用积分定义式：

(a) 证明 t 的拉氏变换为 $1/s^2$。

(b) 求 $\sinh\beta t$ 的拉氏变换。

答：(a) 推导运算，(b) $\beta/(s^2-\beta^2)$。

12.5 算子变换

算子变换说明了如何将 $f(t)$或 $F(s)$的数学算子转化为其对应域的函数，重要的初等变换包括：(1) 乘以常数，(2) 加减，(3) 微分，(4) 积分，(5) 时域平移，(6) 频域平移，(7)尺度变换。

12.5.1 乘以常数

根据积分定义，若：

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$$

则：

$$\mathscr{L}\{Kf(t)\}=KF(s) \tag{12.21}$$

因此，常数乘以 $f(t)$，对应于 $F(s)$乘以同一常数。

12.5.2 加(减)运算特性

时域的加(减)对应于频域加(减)，因此：

若：

$$\mathscr{L}\{f_1(t)\}=F_1(s)$$

$$\mathscr{L}\{f_2(t)\}=F_2(s)$$

$$\mathscr{L}\{f_3(t)\}=F_3(s)$$

则：

$$\mathscr{L}\{f_1(t)+f_2(t)-f_3(t)\}=F_1(s)+F_2(s)-F_3(s) \tag{12.22}$$

它是直接将时域的加法代入到积分式定义中得到的。

12.5.3 微分

时域的微分与 $F(s)$乘以 s 后再减去$f(t)$的初始值相对应，即从乘积中减去 $f(0^-)$：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=sF(s)-f(0^-) \tag{12.23}$$

这是直接从拉氏变换定义得出的，或：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=\int_{0^-}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{12.24}$$

用分部积分法求式(12.24)，令 $u=\mathrm{e}^{-st}$，$\mathrm{d}v=[\mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t]$，得：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=\mathrm{e}^{-st}f(t)\Big|_{0^-}^{\infty}-\int_{0^-}^{\infty}f(t)(-s\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t) \tag{12.25}$$

假设 $f(t)$的拉氏变换存在，当 $t=\infty$时，$\mathrm{e}^{-st}f(t)=0$，因此，式(12.25)的右边化简为：

$$-f(0^-)+s\int_{0^-}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=sF(s)-f(0^-)$$

于是就证明了式(12.23)，这是一个非常重要的结论，说明时域的微分可化为 s 域的代数运算。

以式(12.23)为基础，可以求得高阶导数的拉氏变换，例如求 $f(t)$的二阶导数的拉氏变换。首先令：

$$g(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \tag{12.26}$$

根据式(12.23)写出：

$$G(s)=sF(s)-f(0^-) \tag{12.27}$$

因为：

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

则可写为：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\}=sG(s)-g(0^-) \tag{12.28}$$

联立式(12.26)、式(12.27)、式(12.28)得：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\}=s^2F(s)-sf(0^-)-\frac{\mathrm{d}f(0^-)}{\mathrm{d}t} \tag{12.29}$$

连续应用上述方法可求得 n 阶导数的拉氏变换，其一般形式为：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}\frac{\mathrm{d}f(0^-)}{\mathrm{d}t}-s^{n-3}\frac{\mathrm{d}^2f(0^-)}{\mathrm{d}t^2}-\cdots-\frac{\mathrm{d}^{n-1}f(0^-)}{\mathrm{d}t^{n-1}} \tag{12.30}$$

12.5.4　积分

时域内的积分对应于 s 域中除以 s。采用上述方法，通过积分定义建立关系式：

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0^-}^{t}f(x)\mathrm{d}x\right\}=\int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{t}f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{12.31}$$

用分部积分法求出式(12.31)右边的积分，首先令：

$$u=\int_{0^-}^{t}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

那么:

$$\mathrm{d}u = f(t)\mathrm{d}t$$

$$v = -\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}$$

由分部积分公式得:

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\mathrm{d}x\right\} = -\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\int_{0^-}^{t} f(x)\mathrm{d}x\Bigg|_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}f(t)\mathrm{d}t \tag{12.32}$$

式(12.32)右侧的第一项在上下限处的结果很明显为零,下限为零是因为假设 $f(t)$ 的拉氏变换存在,第二项为 $F(s)/s$,因此:

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\mathrm{d}x\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{12.33}$$

该式表明,时域中的积分运算转化为 s 域中的除法运算,式(12.33)和式(12.30)证明了这一点。

12.5.5 时域平移

对任意函数 $f(t)u(t)$,若在时轴上平移一个常数 a,则可用同一种形式的函数表示,即 $f(t-a)u(t-a)$。时域中的平移对应于频域中乘以一个指数,因此:

$$\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \mathrm{e}^{-as}F(s),\ a>0 \tag{12.34}$$

例如,已知:

$$\mathscr{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

根据积分定义式,式(12.34)的直接得出 $(t-a)u(t-a)$ 的拉氏变换:

$$\mathscr{L}\{(t-a)u(t-a)\} = \frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^2}$$

根据积分定义式,式(12.34)的证明如下:

$$\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} u(t-a)f(t-a)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{a}^{\infty} f(t-a)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{12.35}$$

在推导式(12.35)时,利用了 $t>a$ 时 $u(t-a)=1$。改变积分变量,令 $x=t-a$,则当 $t=a$ 时,$x=0$,当 $t=\infty$ 时,$x=\infty$,并且 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$。因此,可以将式(12.35)中的积分写为:

$$\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-s(x+a)}\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^{-sa}\int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-as}F(s)$$

这就是要证明的结论。

12.5.6 频域平移特性

频域中的平移对应于时域中乘以指数:

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-at}f(t)\} = F(s+a) \tag{12.36}$$

该式可根据积分定义得到，该式的证明留给习题 12.15。

利用式(12.36)的关系式可以得出新的变换对，因此，若已知：

$$\mathscr{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

可以根据式(12.36)得出：

$$\mathscr{L}\{e^{-at}\cos\omega t\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

12.5.7 尺度变换

当时间变量乘以一个常数后，尺度变换特性给出了 $f(t)$ 和 $F(s)$ 之间的关系：

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ a>0 \tag{12.37}$$

该式的证明留给习题 12.19，尺度变换特性在实际工作中特别有用，尤其是在建立系统模型时非常方便。

利用式(12.37)可建立一个新的变换对，若已知：

$$\mathscr{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$$

则由式(12.37)推导出：

$$\mathscr{L}\{\cos\omega t\} = \frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

表 12.2 给出了算子变换的简表，其中一些项目在本节中没有讨论，但通过习题 12.20 和 12.21 的求解，会使读者逐渐熟悉起来。

练习题

12.6　利用表 12.2 求出下列函数的拉氏变换：(a) t^2e^{-at}，(b) $\frac{d}{dt}(e^{-at}\sinh\beta t)$，(c) $t\cos\omega t$。

答：(a) $\frac{2}{(s+a)^3}$，(b) $\frac{\beta s}{(s+a)^2-\beta^2}$，(c) $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$。

表 12.2　算子变换简表

算　子	$f(t)$	$F(s)$
乘以常数	$Kf(t)$	$KF(s)$
加减	$f_1(t)+f_2(t)-f_3(t)+\cdots$	$F_1(s)+F_2(s)-F_3(s)+\cdots$
一阶微分(时域)	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0^-)$
二阶微分(时域)	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s)-sf(0^-)-\frac{df(0^-)}{dt}$
n 阶微分(时域)	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt}-s^{n-3}\frac{df^2(0^-)}{dt^2}-\cdots-\frac{d^{n-1}f(0^-)}{dt^{n-1}}$

(续表)

算　子	$f(t)$	$F(s)$
时域积分	$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$	$\frac{F(s)}{s}$
时移	$f(t-a)u(t-a), a>0$	$\mathrm{e}^{-as}F(s)$
频移	$\mathrm{e}^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
尺度变换	$f(at), a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
一阶微分(s 域)	$tf(t)$	$-\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$
n 阶微分(s 域)	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{\mathrm{d}^nF(s)}{\mathrm{d}s^n}$
s 域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)\mathrm{d}u$

12.6 拉氏变换的应用

本节将用拉氏变换求解表示集总电路特性的普通微积分方程。电路如图 12.16 所示，假设在开关打开时，电路中没有初始贮能，求当 $t\geqslant 0$ 时电路的时域响应。

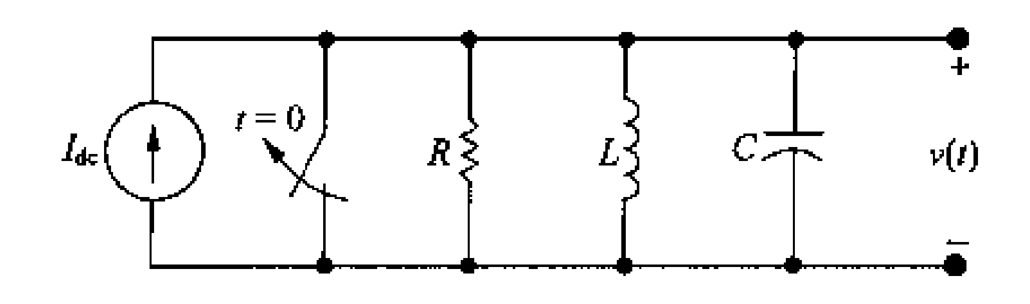


图 12.16　并联 RLC 电路

首先，列写 $v(t)$满足的微积分方程，列出一个节点的节点电压方程，将电路中流出上部节点的电流相加，得方程：

$$\frac{v(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v(x)\mathrm{d}x+C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=I_{dc}u(t) \tag{12.38}$$

在写式(12.38)时，已经表示出开关打开时，电流源电流由零跃到 I_{dc}，得到微积分方程后(此处只有一个)，将其转化为 s 域方程，此处不详细讲述每一步具体的过程，在第 13 章将讨论直接建立 s 域方程的方法，直接对式(12.38)进行拉氏变换，得：

$$\frac{V(s)}{R}+\frac{1}{L}\frac{V(s)}{s}+C[sV(s)-v(0^-)]=I_{dc}\left(\frac{1}{s}\right) \tag{12.39}$$

该代数方程中只有 $V(s)$是未知变量。假设电路参数 R,L,C 以及电源电流已知，因初始贮能为零，所以电容的初始电压为零，将问题简化为解代数方程。

下面解方程，求未知数，得：

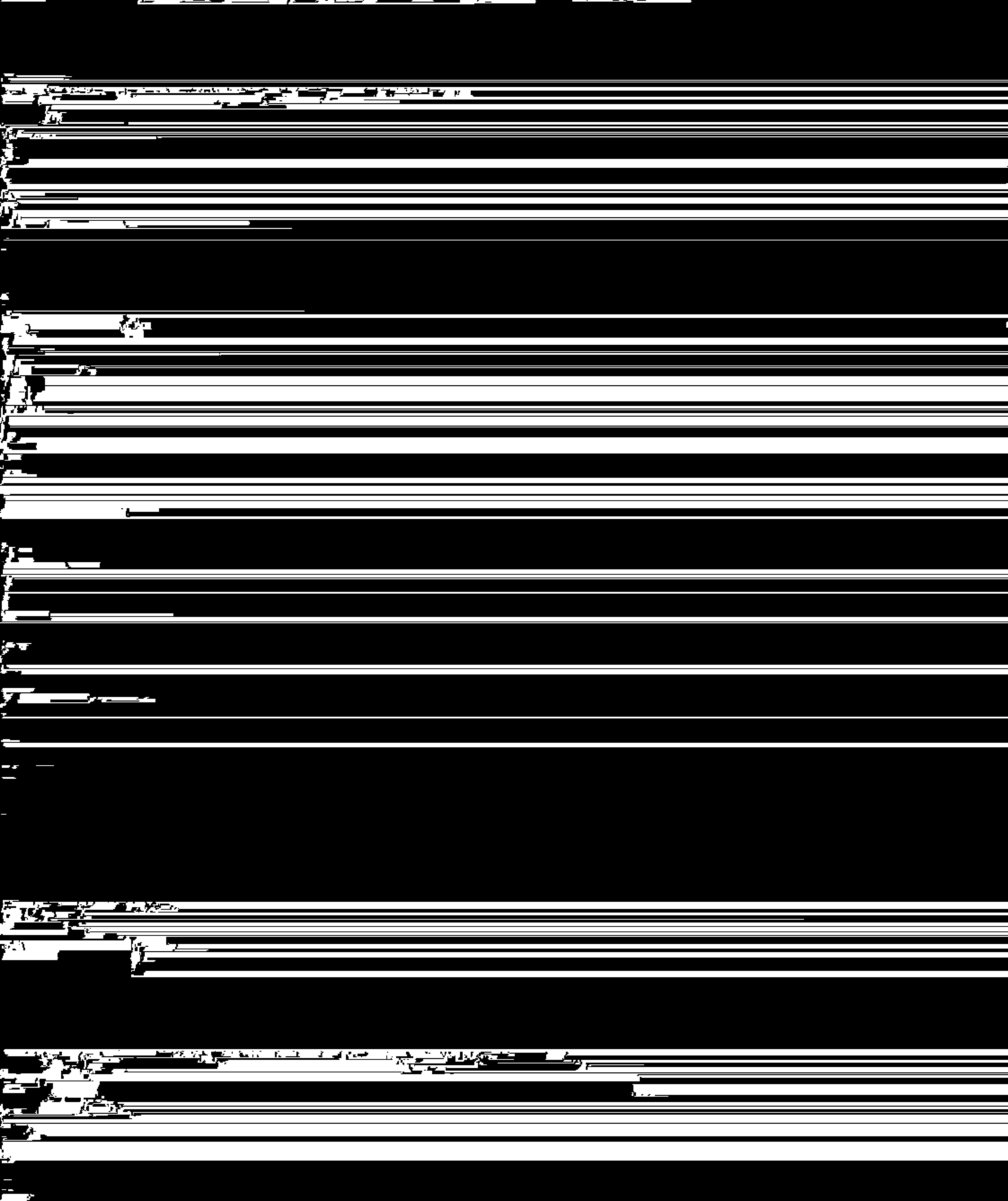
$$V(s)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{sL}+sC\right)=\frac{I_{dc}}{s}$$

$$V(s)=\frac{I_{dc}/C}{s^2+(1/RC)s+(1/LC)} \tag{12.40}$$

为求得 $v(t)$，必须对 $V(s)$进行反变换，将反变换表示为：

$$v(t)=\mathscr{L}^{-1}\{V(s)\} \tag{12.41}$$

接着，求出 s 域表达式的反变换，这是 12.7 节重点讨论的问题，并给出最后的结论，检验时域



部分分式法的关键就是找到展开式中每一项所对应的时域函数 $f(t)$,根据表 12.1 就可以得到:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2}\right\}$$
$$=(K_1+K_2e^{-3t}+K_3te^{-t}+K_4e^{-t})u(t) \tag{12.44}$$

剩下的问题就是确定部分分式展开式中的系数($K_1,K_2,K_3,K_4\cdots$)。$D(s)$的根会有四种可能的情况,(1) 实数的单根,(2) 复数的单根,(3) 实数的重根,(4) 复数的重根。在顺序讨论每种情况之前,先说明以下几点。

在式(12.43)中用恒等式符号"≡"的意思是强调,在将分式展开为部分分式时建立的是恒等方程,也就是对 s 取任何值时,方程两边都相等,并且在对方程两边进行同一个数学运算时恒等关系也成立。下面将会看到,这种特点适合于求系数。

首先要检查分式是否为真分式,这步检查很重要。因为,如果分式是假分式,求得的 K 值可能没有意义,这里提出校核 K 的过程,以免老是问自己"$F(s)$是真分式吗?"

12.7.2 部分分式展开式: $D(s)$具有独立的实根

先讨论当 $D(s)$具有不等实根时,部分分式展开式中的常数的求解方法,为求得展开式中的系数 K,在方程两边同时乘以一个因式,该因式是所求 K 值对应的分母。然后令 s 等于所乘因式的根,再计算方程两边的值,方程右边就是所求的 K,左边就是其值,例如:

$$F(s)=\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)}\equiv\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+8}+\frac{K_3}{s+6} \tag{12.45}$$

为求得 K_1 的值,两边同时乘以 s,然后计算 $s=0$ 时方程两边的值:

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{(s+8)(s+6)}\right|_{s=0}\equiv K_1+\left.\frac{K_2s}{s+8}\right|_{s=0}+\left.\frac{K_3s}{s+6}\right|_{s=0}$$

或:

$$\frac{96(5)(12)}{8(6)}\equiv K_1=120 \tag{12.46}$$

为求得 K_2 之值,两边同乘以 $s+8$,然后计算 $s=-8$ 时两边的值:

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+6)}\right|_{s=-8}\equiv\left.\frac{K_1(s+8)}{s}\right|_{s=-8}+K_2+\left.\frac{K_3(s+8)}{(s+6)}\right|_{s=-8}$$

或者:

$$\frac{96(-3)(4)}{(-8)(-2)}\equiv K_2=-72 \tag{12.47}$$

则 K_3 为:

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)}\right|_{s=-6}=K_3=48 \tag{12.48}$$

由式(12.45)和所得的 K 值;

$$\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)}\equiv\frac{120}{s}+\frac{48}{s+6}-\frac{72}{s+8} \tag{12.49}$$

此时再验算计算结果,以免出错。前面已经提到,部分分式展开建立了一个恒等式,因此,式(12.49)在 s 为任何值时都应相等,验算值的选择完全是任意的,因此,选择容易算的值。例如,在式(12.49)中,选 $s=-5$ 和 $s=-12$ 进行验算,两边应都是零,选 -5 得:

$$\frac{120}{-5}+\frac{48}{1}-\frac{72}{3}=-24+48-24=0$$

选 -12 得:

$$\frac{120}{-12}+\frac{48}{-6}-\frac{72}{-4}=-10-8+18=0$$

现在可以保证这些 K 值是正确的。下面求式(12.49)的反变换:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)}\right\}=(120+48e^{-6t}-72e^{-8t})u(t) \tag{12.50}$$

练习题

12.8 若 $F(s)=\dfrac{6s^2+26s+26}{(s+1)(s+2)(s+3)}$,求 $f(t)$。

答:$f(t)=(3e^{-t}+2e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$。

12.9 若 $F(s)=\dfrac{7s^2+63s+134}{(s+3)(s+4)(s+5)}$,求 $f(t)$。

答:$f(t)=(4e^{-3t}+6e^{-4t}-3e^{-5t})u(t)$。

12.7.3 部分分式法：$D(s)$具有不等的复根

$D(s)$具有单复根时,展开式系数的求法和单实根的求法相同,惟一差别是前者包含复数的代数运算。下面通过分式展开式加以说明:

$$F(s)=\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} \tag{12.51}$$

注意到 $F(s)$是有理真分式,下面求二次项 $s^2+6s+25$ 的根:

$$s^2+6s+25=(s+3-j4)(s+3+j4) \tag{12.52}$$

对分母因式分解后:

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\equiv\frac{K_1}{s+6}+\frac{K_2}{s+3-j4}+\frac{K_3}{s+3+j4} \tag{12.53}$$

用同样方法求 K_1,K_2,K_3:

$$K_1=\left.\frac{100(s+3)}{s^2+6s+25}\right|_{s=-6}=\frac{100(-3)}{25}=-12 \tag{12.54}$$

$$K_2=\left.\frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3+j4)}\right|_{s=-3+j4}=\frac{100(j4)}{(3+j4)(j8)}$$

$$=6-j8=10e^{-j53.13^\circ} \tag{12.55}$$

$$K_3=\left.\frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3-j4)}\right|_{s=-3-j4}=\frac{100(-j4)}{(3-j4)(-j8)}$$

$$=6+j8=10e^{j53.13^\circ} \tag{12.56}$$

得:

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}=\frac{-12}{s+6}+\frac{10\angle-53.13^\circ}{s+3-j4}+\frac{10\angle 53.13^\circ}{s+3+j4} \tag{12.57}$$

需要说明的是,第一,在物理可实现电路中,复根总是以共扼复数对出现。第二,与共扼复数对相对应的系数也是共扼复数。例如,K_1 就是 K_2 的共扼复数,因此,对于共扼复根,实际只

需计算一半参数。

在对式(12.57)进行反变换之前,验算部分分式展开式,选 -3 时验算比较方便,因为,此时左边为零:

$$F(s)=\frac{-12}{3}+\frac{10\angle -53.13^\circ}{-\mathrm{j}4}+\frac{10\angle 53.13^\circ}{\mathrm{j}4}$$
$$=-4+2.5\angle 36.87^\circ+2.5\angle -36.87^\circ$$
$$=-4+2.0+\mathrm{j}1.5+2.0-\mathrm{j}1.5=0$$

现在进行反变换:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\}=(-12\mathrm{e}^{-6t}+10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}53.13^\circ}\mathrm{e}^{-(3-\mathrm{j}4)t}$$
$$+10\mathrm{e}^{\mathrm{j}53.13^\circ}\mathrm{e}^{-(3+\mathrm{j}4)t})u(t) \qquad (12.58)$$

一般来说,使函数在时域中包含虚部是不现实的,恰好含有虚部的项总是成对出现。因此,可以将出现的虚数相加并消掉:

$$10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}53.13^\circ}\mathrm{e}^{-(3-\mathrm{j}4)t}+10\mathrm{e}^{\mathrm{j}53.13^\circ}\mathrm{e}^{-(3+\mathrm{j}4)t}$$
$$=10\mathrm{e}^{-3t}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(4t-53.13^\circ)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(4t-53.13^\circ)})$$
$$=20\mathrm{e}^{-3t}\cos(4t-53.13^\circ) \qquad (12.59)$$

简化式(12.58):

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\}=[-12\mathrm{e}^{-6t}+20\mathrm{e}^{-3t}\cos(4t-53.13^\circ)]u(t) \qquad (12.60)$$

因在集总参数线性电路分析中,经常出现共轭复根,因此,需要用一个新的变换以简化计算结果,当 $D(s)$ 含有共轭复根时,展开式中含有:

$$\frac{K}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{K^*}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta} \qquad (12.61)$$

其中系数一般为复数,极坐标形式为:

$$K=|K|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=|K|\angle\theta^\circ \qquad (12.62)$$

那么:

$$K^*=|K|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}=|K|\angle-\theta^\circ \qquad (12.63)$$

式(12.61)的反变换总具有这种形式:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{K^*}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}\right\}=2|K|E^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta) \qquad (12.64)$$

在应用式(12.64)时,一定要注意,系数 K 与分母项 $s+a-\mathrm{j}\beta$ 对应,K^* 与分母项 $s+a+\mathrm{j}\beta$ 对应。

练习题

12.10 若 $F(s)=10(s^2+119)/[(s+5)(s^2+10s+169)]$,求 $f(t)$。

答:$f(t)=(10\mathrm{e}^{-5t}-8.33\mathrm{e}^{-5t}\sin 12t)u(t)$。

12.11 求练习题 12.7 中的 $v(t)$。

答:$v(t)=[4.98\cos(10t-5.14^\circ)+0.15\mathrm{e}^{-1.67t}-5.11\mathrm{e}^{-38.33t}]u(t)$ V。

12.7.4 部分分式展开式:$D(s)$具有实重根

为求得与 r 阶重根相对应项的系数,将方程两边同乘以重根多项式的 r 次方,再令 s 等于

重根，并计算方程两边的值，求得一个系数。为求得剩下的 $r-1$ 个系数，对方程两边求导 $r-1$ 次，在每次微分后，计算在重根处方程两边的值，右边是要求的 K，而左边总是它的值，例如：

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{(s+5)^3}+\frac{K_3}{(s+5)^2}+\frac{K_4}{(s+5)} \tag{12.65}$$

K_1 已经说过，即：

$$K_1=\left.\frac{100(s+25)}{(s+5)^3}\right|_{s=0}=\frac{100(25)}{125}=20 \tag{12.66}$$

为求得 K_2，两边先乘以 $(s+5)^3$，然后在 $s=-5$ 处计算两边得值：

$$\left.\frac{100(s+25)}{s}\right|_{s=-5}=\left.\frac{K_1(s+5)^3}{s}\right|_{s=-5}+K_2+K_3(s+5)\mid_{s=-5}+K_4(s+5)^2\mid_{s=-5} \tag{12.67}$$

$$\begin{aligned}\frac{100(20)}{(-5)}&=K_1\times 0+K_2+K_3\times 0+K_4\times 0\\&=K_2=-400\end{aligned} \tag{12.68}$$

为求得 K_3，两边先乘以 $(s+5)^3$，然后两边同时对 s 取一次微分，再计算 $s=-5$ 时的值：

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left[\frac{100(s+25)}{s}\right]_{s=-5}=&\frac{d}{ds}\left[\frac{K_1(s+5)^3}{s}\right]_{s=-5}\\&+\frac{d}{ds}[K_2]_{s=-5}\\&+\frac{d}{ds}[K_3(s+5)]_{s=-5}\\&+\frac{d}{ds}[K_4(s+5)^2]_{s=-5}\end{aligned} \tag{12.69}$$

$$100\left[\frac{s-(s+25)}{s^2}\right]_{s=-5}=K_3=-100 \tag{12.70}$$

为求 K_4，两边同乘以 $(s+5)^3$，然后两边同时对 s 取二次微分，再计算 $s=-5$ 时的值。第一次微分化简后，再进行一次微分：

$$100\frac{d}{ds}\left[-\frac{25}{s^2}\right]_{s=-5}=K_1\frac{d}{ds}\left[\frac{(s+5)^2(2s-5)}{s^2}\right]_{s=-5}+0+\frac{d}{ds}[K_3]_{s=-5}+\frac{d}{ds}[2K_4(s+5)]_{s=-5}$$

或：

$$-40=2K_4 \tag{12.71}$$

解式(12.71)得：

$$K_4=-20 \tag{12.72}$$

那么：

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}=\frac{20}{s}-\frac{400}{(s+5)^3}-\frac{100}{(s+5)^2}-\frac{20}{(s+5)} \tag{12.73}$$

现在将 $s=-25$ 代入式(12.73)，验证展开式。经计算证明展开式正确，方程的反变换为：

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}\right\}=[20-200t^2e^{-5t}-100te^{-5t}-20e^{-5t}]u(t) \tag{12.74}$$

练习题

12.12 若 $F(s)=(4s^2+7s+1)/[s(s+1)^2]$,求 $f(t)$。

答:$f(t)=(1+2te^{-t}+3e^{-t})u(t)$。

12.7.5 部分分式展开式:$D(s)$具有多重复数根

具有多重复根的处理方法与具有重实根的处理方法相同,只是运算中含有复数。考虑到复数根总是以共轭形式出现,并且对应的系数也为共轭复数对,因此,只需计算 K 的一半。例如:

$$F(s)=\frac{768}{(s^2+6s+25)^2} \tag{12.75}$$

对分母多项式进行因式分解后,得到:

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{768}{(s+3-j4)^2(s+3+j4)^2}\\&=\frac{K_1}{(s+3-j4)^2}+\frac{K_2}{s+3-j4}\\&\quad+\frac{K_1^*}{(s+3-j4)^2}+\frac{K_2^*}{s+3+j4}\end{aligned} \tag{12.76}$$

只需要计算 K_1 和 K_2,因 K_1 和 K_2^* 是共扼复数,K_1 值为:

$$\begin{aligned}K_1&=\left.\frac{768}{(s+3+j4)^2}\right|_{s=-3+j4}\\&=\frac{768}{(j8)^2}=-12\end{aligned} \tag{12.77}$$

K_2 值为:

$$\begin{aligned}K_2&=\frac{d}{ds}\left[\frac{768}{(s+3+j4)^2}\right]_{s=-3+j4}\\&=\left.\frac{2(768)}{(s+3+j4)^3}\right|_{s=-3+j4}\\&=-\frac{2(768)}{(j8)^3}\\&=-j3=3\angle-90^\circ\end{aligned} \tag{12.78}$$

由式(12.77)和(12.78)得:

$$K_1^*=-12 \tag{12.79}$$

$$K_2^*=j3=3\angle 90^\circ \tag{12.80}$$

现在根据共扼项将展开式分组,得到:

$$\begin{aligned}F(s)&=\left[\frac{-12}{(s+3-j4)^2}+\frac{-12}{(s+3+j4)^2}\right]\\&\quad+\left(\frac{3\angle-90^\circ}{s+3-j4}+\frac{3\angle 90^\circ}{s+3+j4}\right)\end{aligned} \tag{12.81}$$

求得 $F(s)$的反变换为:

$$f(t)=[-24te^{-3t}\cos 4t+6e^{-3t}\cos(4t-90^\circ)]u(t) \tag{12.82}$$

如果 $F(s)$分母多项式中有 r 阶重实根 a,那么展开式中项的形式为:

$$\frac{K}{(s+a)^r}$$

该项的反变换为：

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+a)^r}\right\}=\frac{Kt^{r-1}e^{-at}}{(r-1)!}u(t) \tag{12.83}$$

若 $F(s)$分母中含有 r 重复根，则展开式中的项是共扼对：

$$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}$$

其反变换为：

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}\right\}$$
$$=\left[\frac{2|K|t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\right]u(t) \tag{12.84}$$

对任何部分分式展开式求反变换来说，式(12.83)和(12.84)都是关键。关于这两个方程，还要说明的是：在大多数电路分析中，r 很少会大于 2，因此，用表 12.3 所示的四个变换对就可以求出分式的反变换。

表 12.3　四个有用的变换

序　号	根的形式	$F(s)$	$f(t)$
1	单实根	$\frac{K}{s+a}$	$Ke^{-at}u(t)$
2	重实根	$\frac{K}{(s+a)^2}$	$Kte^{-at}u(t)$
3	单复根	$\frac{K}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\|K\|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$
4	重复根	$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\|K\|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$

注：在 1 和 2 变换对中，K 是实数，而 3 和 4 中，K 是复数。

练习题

12.13　若 $F(s)=40/(s^2+4s+5)^2$，求 $f(t)$。

答：$f(t)=(-20te^{-2t}\cos t+20e^{-2t}\sin t)u(t)$。

12.7.6　部分分式展开：假分式

在本节开始时曾叙述过，求反变换时，假分式不会对求解有多大影响，假分式总可以展开为一个多项式与有理真分式之和，多项式可以反变换为冲激函数和高阶冲激偶。而真分式的反变换可用本章前面讨论过的方法求，下面说明求解过程，对函数：

$$F(s)=\frac{s^4+13s^3+66s^2+200s+300}{s^2+9s+20} \tag{12.85}$$

用分子除以分母，得到多项式与真分式之和：

$$F(s)=s^2+4s+10+\frac{30s+100}{s^2+9s+20} \tag{12.86}$$

然后展开真分式：

$$\frac{30s+100}{s^2+9s+20}=\frac{30s+100}{(s+4)(s+5)}=\frac{-20}{s+4}+\frac{50}{s+5} \tag{12.87}$$

将式(12.87)代入式(12.86)得：

$$F(s)=s^2+4s+10-\frac{20}{s+4}+\frac{50}{s+5} \tag{12.88}$$

现在求式(12.88)的反变换得：

$$f(t)=\frac{\mathrm{d}^2\delta(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}+10\delta(t)-(20\mathrm{e}^{-4t}-50\mathrm{e}^{-5t})u(t) \tag{12.89}$$

练习题

12.14 若 $F(s)=(5s^2+29s+32)/[(s+2)(s+4)]$，求 $f(t)$。

答：$f(t)=5\delta(t)-(3e^{-2t}-2e^{-4t})u(t)$。

12.15 若 $F(s)=(2s^3+8s^2+2s-4)/(s^2+5s+4)$，求 $f(t)$。

答：$f(t)=2\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}-2\delta(t)+4\mathrm{e}^{-4t}u(t)$。

12.8 $F(s)$的零点和极点

式(12.42)也可表示为两个多项式因式分解的比，可以写为：

$$F(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)} \tag{12.90}$$

式中 K 是常数 a_n/b_m，例如，可将函数：

$$F(s)=\frac{8s^2+120s+400}{2s^4+20s^3+70s^2+100s+48}$$

写成：

$$F(s)=\frac{8(s^2+15s+50)}{2(s^4+10s^3+35s^2+50s+24)}$$
$$=\frac{4(s+5)(s+10)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{12.91}$$

分母多项式的根，即 $-p_1,-p_2,-p_3,\cdots,-p_m$ 叫 $F(s)$的极点，当 s 为这些值时，函数 $F(s)$趋于无穷大，式(12.91)所描述的函数 $F(s)$的极点为 $-1,-2,-3,-4$。

分子多项式的根，即 $-z_1,-z_2,-z_3,\cdots,-z_n$ 叫 $F(s)$的零点，它们使 $F(s)$值为零，式(12.91)所示函数的零点为 $-5,-10$。

经过下述内容的讨论读者会发现，可以将 $F(s)$的零、极点看做 s 平面上的点，因多项式的根可能是复数，因此，要用到复平面，在复平面中，用横轴表示 s 实部的值，纵轴表示 s 的虚部的值。

下面举例说明 $F(s)$零极点的画法，函数为：

$$F(s)=\frac{10(s+5)(s+3-\mathrm{j}4)(s+3+\mathrm{j}4)}{s(s+10)(s+6-\mathrm{j}8)(s+6+\mathrm{j}8)} \tag{12.92}$$

其极点为 $0,-10,-6+\mathrm{j}8,-6-\mathrm{j}8$。零点为 $-5,-3+\mathrm{j}4,-3-\mathrm{j}4$。图 12.17 表示 s 平面的零点和极点图，图中(×)代表极点，(○)代表零点。

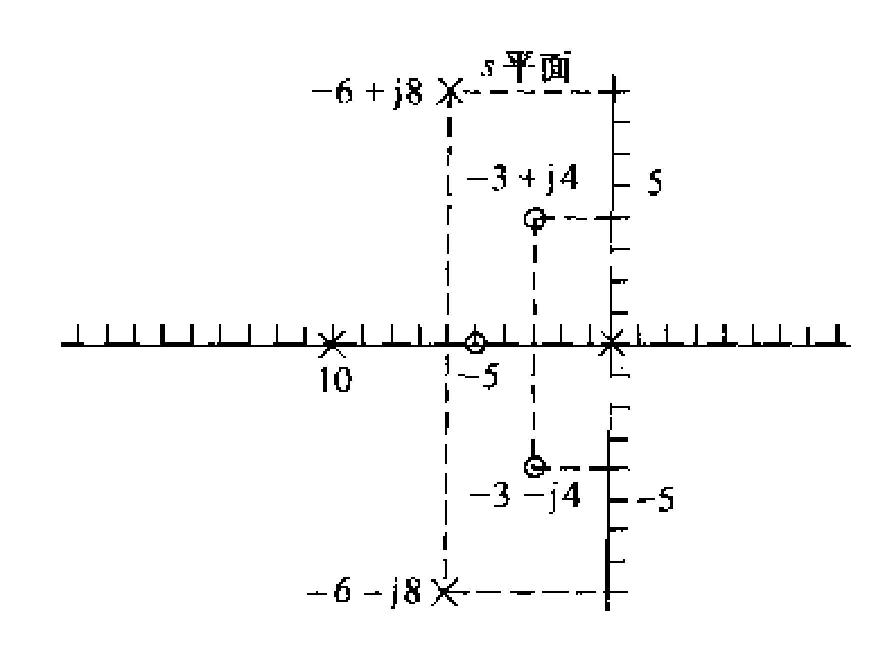


图 12.17　在 s 平面上画零极图

式(12.90)的零点和极点已在有限的 s 平面上画出，$F(s)$在 s 平面上无穷远处也可以有 n 阶零点和 n 阶极点。例如式(12.91)在 s 平面的无穷大处有一个二阶零点，因为当 s 很大时，方程近似为 $4/s^2$，且当 $s=\infty$ 时，$F(s)=0$。此外，这里主要研究有限 s 平面上的零极点位置，因此，以后所说的零极点均指有限 s 平面内的零极点。

12.9　初值和终值定理

初值和终值定理非常有用，它能根据 $F(s)$确定当 $t=0$ 和∞时 $f(t)$的值，因此，在求 $F(s)$ 的反变换之前，可利用初值定理和终值定理来验证拉氏变换是否与电路的已知特性一致。

初值定理为：

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{12.93}$$

终值定理为：

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{12.94}$$

若 $f(t)$不包含冲激函数时，式(12.94)必须加限制条件，即只有 $F(s)$的极点置于 s 平面的左半面(原点处的一阶极点除外)时，终值定理才成立。

下面证明式(12.93)。算子变换的一阶导数为：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right\} = sF(s) - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{12.95}$$

取 $s\to\infty$时的极限：

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{12.96}$$

式(12.96)的右边可表示为：

$$\lim_{s\to\infty}\left(\int_{0^-}^{0^+} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{0}\mathrm{d}t + \int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right)$$

当 $s\to\infty$ 时，$(\mathrm{d}f/\mathrm{d}t)\mathrm{e}^{-st}\to 0$；因此，第二个积分式的极限消失，第一个积分式变为 $f(0^+)-f(0^-)$，且与 s 无关，因此，方程的右边变为：

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = f(0^+) - f(0^-) \tag{12.97}$$

因 $f(0^-)$与 s 无关，式(12.96)的左边可以写做：

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0^-)]=\lim_{s\to\infty}[sF(s)]-f(0^-) \tag{12.98}$$

根据式(12.97)和(12.98)得：

$$\lim_{s\to\infty}sF(s)=f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f(t)$$

于是完成了初值定理的证明。

终值定理的证明也是先从式(12.95)开始，只是取 $s\to0$ 时的极限：

$$\lim_{s\to0}[sF(s)-f(0^-)]=\lim_{s\to0}\left(\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt\right) \tag{12.99}$$

对 t 积分，对 s 求极限，所以式(12.99)的右边化为：

$$\lim_{s\to0}\left(\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt\right)=\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}dt \tag{12.100}$$

因式中的积分上限为无穷大，该积分也可以写做极限形式：

$$\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}dt=\lim_{t\to\infty}\int_{0^-}^{t}\frac{df}{dy}dy \tag{12.101}$$

式中用 y 做积分变量以避免与积分上限混淆，积分运算得：

$$\lim_{t\to\infty}[f(t)-f(0^-)]=\lim_{t\to\infty}[f(t)]-f(0^-) \tag{12.102}$$

将式(12.102)代入式(12.99)得：

$$\lim_{s\to0}[sF(s)]-f(0^-)=\lim_{t\to\infty}[f(t)]-f(0^-) \tag{12.103}$$

因 $f(0^-)$ 消掉了，于是式(12.103)就化简为终值定理，即：

$$\lim_{s\to0}sF(s)=\lim_{s\to\infty}f(t)$$

若 $f(\infty)$ 存在，那么终值定理非常有用，只有当 $F(s)$ 的所有极点(原点处的单极点除外)位于 s 平面的左半面时，该定理才成立。

12.9.1 初值和终值定理的应用

为了说明初值定理和终值定理的应用，现将其应用到部分分式展开式中，对式(12.60)所示的变换对，根据初值定理得：

$$\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{100s^2[1+(3/s)]}{s^3[1+(6/s)][1+(6/s)+(25/s^2)]}=0$$

$$\lim_{t\to0^+}f(t)=[-12+20\cos(-53.13^\circ)](1)=-12+12=0$$

由终值定理得：

$$\lim_{s\to0}sF(s)=\lim_{s\to0}\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}=0$$

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}[-12e^{-6t}+20e^{-3t}\cos(4t-53.13^\circ)]u(t)=0$$

前边已经知道该式的时域表达式，应用初值和终值定理是验证其正确性，其实际意义是在求反变换之前，能验证 s 域表达式的正确性，例如，对式(12.40)给出的表达式 $V(s)$，虽然在电路参数确定之前，无法计算出 $v(t)$，但可以用定理，通过 $V(s)$ 验证 $v(0^+)$ 和 $v(\infty)$ 的正确与否。根据题意求得 $V(s)$，进而求得 $v(0^+)=0$。在直流电源作用下，理想电感相当于短路，因此，$v(\infty)$ 必为零。因 R,L,C 是正的常数，所以 $V(s)$ 的极点必然位于 s 平面的左半面，这样 $sV(s)$ 的极点也位于 s 平面的左半面。

根据初值定理得：

$$\lim_{s\to\infty} sV(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s(I_{dc}/C)}{s^2[1+1/(RCs)+1/(LCs^2)]} = 0$$

根据终值定理得：

$$\lim_{s\to 0} sV(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s(I_{dc}/C)}{s^2+(s/RC)+(1/LC)} = 0$$

由所得的 $V(s)$表达式正确地求出了 $v(t)$的初值和终值。

练习题

12.16 对练习题 12.9,12.12,12.13,应用初值和终值定理求出 $f(t)$的初值和终值。

答:7,0,4,1,0,0。

12.17 (a) 求练习 12.7 的初值和终值。

(b) 能用终值定理求电压的稳态值吗？为什么？

答:(a) 0,(b) 不能,因为 V 在虚轴上有一对极点。

小结

拉氏变换是时域到频域的变换工具,其定义如下：

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

其中 $f(t)$是时域表达式,$F(s)$是频域表达式。

- 函数变换是一些典型函数的拉氏变换,表 12.1 列出了重要的变换对。
- 算子变换定义了拉氏变换的普通数学特性,表 12.2 中列出了重要的算子变换对。
- 阶跃函数 $Ku(t)$,表示一个函数在时域变量经过间断点时,函数值从一个值跳变到另一个值。K 是跳变的幅度;若 $K=1$,则 $Ku(t)$就是单位阶跃函数。
- 冲激函数的定义是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t)dt = K$$

$$\delta(t) = 0,\ t \neq 0$$

  K 为冲激强度;若 $K=1$,则 $K\delta(t)$就是单位冲激函数。
- 在线性集总电路中,$F(s)$是 s 的方程式。
- 若 $F(s)$是有理真分式,反变换可以通过部分分式法求得。
- 若 $F(s)$是假分式,可先将其化为多项式与有理真分式之和,进而求得反变换。
- $F(s)$可以表示成两个因式相乘的多项式之比,分母的根为极点,在 s 平面上用 × 表示,分子的根为零点,在 s 平面上用 ○ 表示。
- 初值定理表示为：

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

- 终值定理表示为：

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} sF(s)$$

当 $F(s)$ 的所有极点(除原点处的一阶极点外)位于 s 平面的左半面时,该定理成立。

● 初值、终值定理可用来由 s 域表达式求出 $f(t)$ 的初值和终值。

习题

M12.1 用阶跃函数表示图 P12.1 中的各函数。

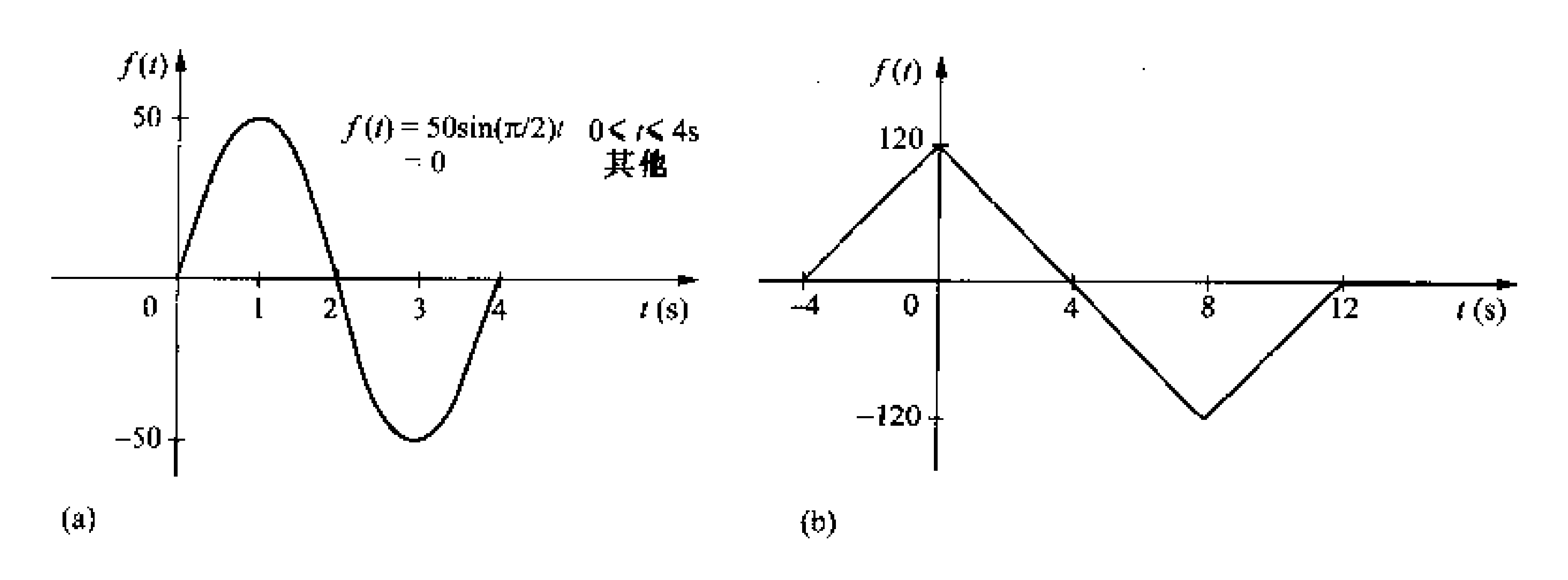


图 P12.1

M12.2 阶跃函数可用来定义窗函数,$u(t-1)-u(t-4)$ 定义了窗函数,高为 1,宽为 3,在时间轴上 1 ~ 4 之间。

一个函数的定义如下:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 0 && ,t \leqslant 0 \\
&= 30t && ,0 \leqslant t \leqslant 2s \\
&= 60 && ,2s \leqslant t \leqslant 4s \\
&= 60\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\pi\right) && ,4s \leqslant t \leqslant 8s \\
&= 30t-300 && ,8s \leqslant t \leqslant 10s \\
&= 0 && ,10s \leqslant t \leqslant \infty
\end{aligned}
$$

(a) 画出 $-2s \leqslant t \leqslant 12s$ 间的 $f(t)$。

(b) 用窗函数的概念写出 $f(t)$ 的表达式。

M12.3 $f(t)$ 的表达式如下,画出 $f(t)$ 在 $-2\ s \leqslant t \leqslant 25\ s$ 的曲线。

$$
\begin{aligned}
f(t) = &-(20t+400)u(t+20)+(40t+400)u(t+10) \\
&+(400-40t)u(t-10)+(20t-400)u(t-20)
\end{aligned}
$$

12.4 说明为什么当 $\varepsilon \to 0$ 时,函数 $f(t)$ 生成了一个冲激函数。

$$f(t)=\frac{\varepsilon/\pi}{\varepsilon^2+t^2},\quad -\infty \leqslant t \leqslant \infty$$

12.5 在 12.3 节中,用冲激函数的筛选特性证明了 $\delta(t)$ 的拉氏变换为 1。试证明对图 12.9 所示的角脉冲,通过求拉氏变换,再对变换取 $\varepsilon \to 0$ 时的极限,其结果相同。

12.6 图 P12.6 所示的双三角脉冲与图 12.12(b)的三角脉冲等效,它们的面积均为 $1/\varepsilon$,且当 $\varepsilon \to 0$ 时,它们的极限均为 $1/\varepsilon^2$,用该双三角脉冲表示 $\delta'(t)$,并求 $\delta'(t)$ 的拉氏

变换。

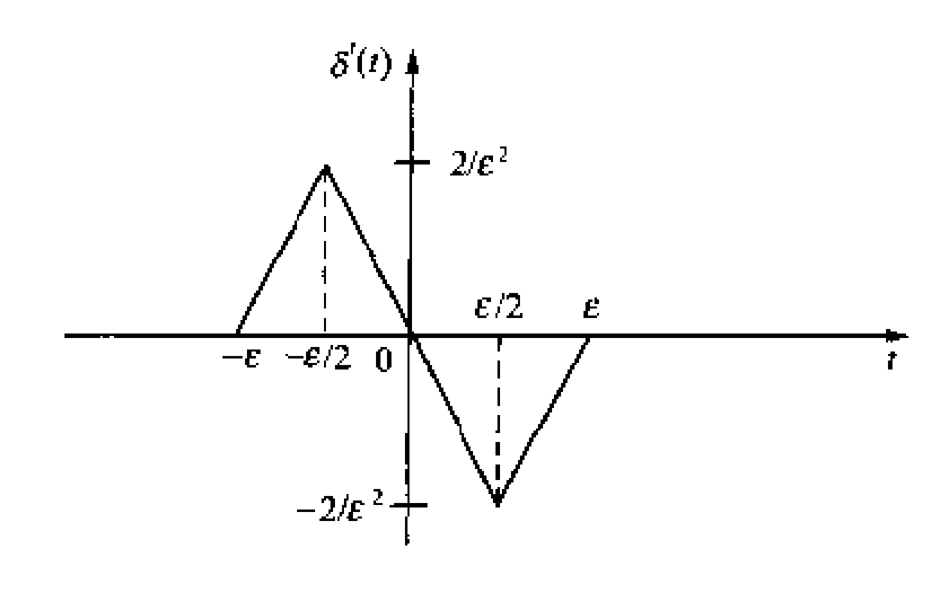


图 P12.6

12.7 (a) 证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-a)\mathrm{d}t = -f'(a)$$

(提示：用分部积分法。)

(b) 用(a)中的公式证明：

$$\mathscr{L}\{\delta'(t)\} = s$$

12.8 求下列函数的拉氏变换。

(a) $f(t) = t\mathrm{e}^{-at}$。

(b) $f(t) = \sin\omega t$。

(c) $f(t) = \sin(\omega t + \theta)$。

(d) $f(t) = \cosh t$。

(e) $f(t) = \cosh(t + \theta)$。

12.9 用下面的两种算法求图 12.81 中指数函数导数的拉氏变换：

(a) 先求导数，再求拉氏变换。

(b) 用式(12.23)给出的算子变换。

12.10 证明：

$$\mathscr{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n$$

12.11 (a) 求 $t\mathrm{e}^{-at}$ 的拉氏变换。

(b) 用式(12.23)的算子变换求 $2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\mathrm{e}^{-at})$ 的拉氏变换。

(c) 检验(b)的结果，先求导数，再求变换。

12.12 (a) 求 $\mathscr{L}\left\{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\omega t\right\}$。

(b) 求 $\mathscr{L}\left\{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\omega t\right\}$。

(c) 求 $\mathscr{L}\left\{\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}t^2\right\}$。

(d) 用先微分，后求变换的方法证明以上结果。

12.13 (a) 求下式拉氏变换(先积分后变换)：

$$\int_{0_-}^{t} x\mathrm{d}x$$

(b) 用式(12.33)校核(a)得到的结果。

12.14 (a) 求 $\mathscr{L}\left\{\int_{0_-}^{t} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x\right\}$。

(b) 求 $\mathscr{L}\left\{\int_{0_-}^{t} y\mathrm{d}y\right\}$。

(c) 用先积分后变换的方法校核上面的结果。

12.15 证明:

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

12.16 求下列各式的拉氏变换:

(a) $f(t) = -20\mathrm{e}^{-5(t-2)}u(t-2)$。

(b) $f(t) = (8t-8)[u(t-1)-u(t-2)]+24-8t)[u(t-2)-u(t-4)]+(8t-40)[u(t-4)-u(t-5)]$。

12.17 (a) 求图 P12.17 所示函数的拉氏变换。

(b) 求图 P12.17 所示函数的一阶导数的拉氏变换。

(c) 求图 P12.17 所示函数的二阶导数的拉氏变换。

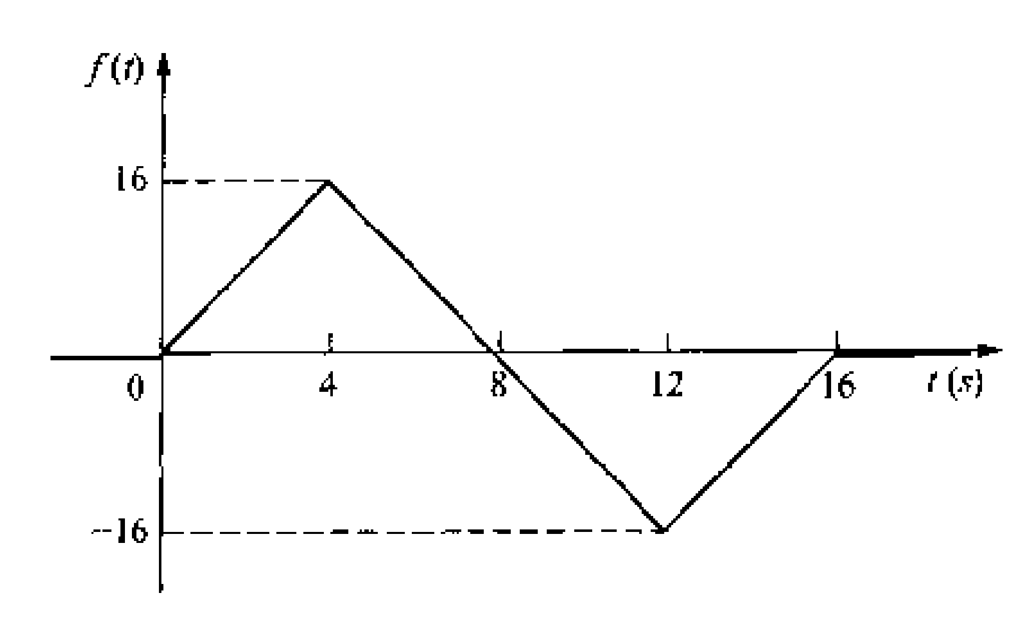


图 P12.17

12.18 (a) 求下面函数的拉氏变换:

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-at}\sin \omega t)$$

(b) 求下面函数的拉氏变换:

$$f(t) = \int_{0^-}^{t} \mathrm{e}^{-ax}\cos \omega x \, \mathrm{d}x$$

(c) 先求数学运算,再求拉氏变换证明 (a),(b)得到的结果。

12.19 (a) 证明:

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

(b) 利用(a)的结果和 12.8(d)问题的答案求:

$$\mathscr{L}\{\cosh\beta t\}$$

12.20 (a) 已知 $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$,证明:

$$-\frac{dF(s)}{ds}=\mathscr{L}\{tf(t)\}$$

(b) 证明:

$$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}=\mathscr{L}\{t^nf(t)\}$$

(c) 用(b)的结果求 $\mathscr{L}\{t^5\}$,$\mathscr{L}\{t\sin\beta t\}$,$\mathscr{L}\{te^{-t}\cos t\}$。

12.21 (a) 若 $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$,且$(f(t)/t)$的拉氏变换存在,则证明:

$$\int_s^{\infty}F(u)du=\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

(提示:利用积分定义写出式子 $\int_s^{\infty}F(u)du=\int_s^{\infty}\left(\int_{0_-}^{\infty}f(t)e^{-ut}dt\right)du$,然后变换积分次序。)

(b) 用题 12.20 (c) 中关于 $\mathscr{L}\{t\sin\beta t\}$ 的结果和本题 (a) 的算子变换,求 $\mathscr{L}\{\sin\beta t\}$。

12.22 如图 P12.22 所示电路,开关打开时电路无贮能。

(a) 求出关于 V_o 的微积分方程。

(b) 证明:

$$V_o(s)=\frac{I_{dc}/C}{s^2+(1/RC)s+(1/LC)}$$

(c) 证明:

$$I_o(s)=\frac{sI_{dc}}{s^2+(1/RC)s+(1/LC)}$$

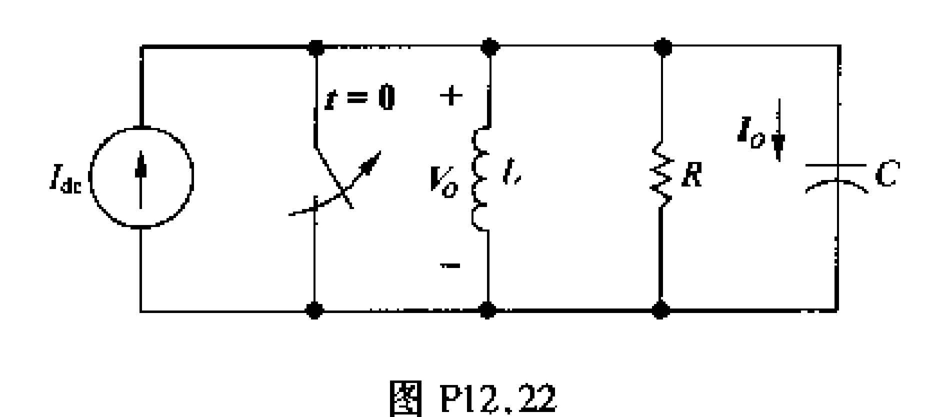


图 P12.22

P12.23 已知图 P12.22 电路中元件参数为:$R=4\ k\Omega$, $L=2.5\ H$, $C=25\ nF$, $I_{dc}=3\ mA$。

(a) 求 $v_o(t)$, $t\geq o$。

(b) 求 $i_o(t)$,$t\geq o$。

(c) $t=0$ 时,$i_o(t)$的结果有意义吗? 请加以解释。

12.24 图 P12.24 电路中的开关打开很久,$t=0$ 时闭合。

(a) 求出 $t\geq0$ 时关于 v_o 的微积分方程。

(b) 证明:

$$V_o(s)=\frac{V_{dc}/LC}{s[s^2+(1/RC)s+(1/LC)]}$$

(c) 证明:

$$I_o(s)=\frac{V_{dc}[s+(1/RC)]}{sL[s^2+(1/RC)s+(1/LC)]}$$

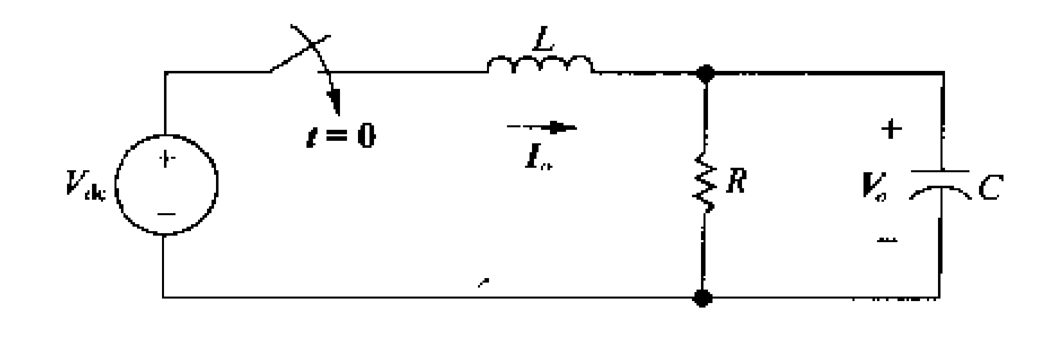


图 P12.24

P12.25 图 P12.24 电路中的元件参数为 $R = 10\ \text{k}\Omega$, $L = 800\ \text{mH}$, $C = 100\ \text{nF}$, $V_{dc} = 70\ \text{V}$。求(a) $v_o(t)$, $t \geqslant 0$,(b) $i_o(t)$, $t \geqslant 0$。

M12.26 求下列各式的 $f(t)$:

(a) $F(s) = \dfrac{18s^2 + 66s + 54}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

(b) $F(s) = \dfrac{25s^2 + 86s + 40}{s(s+2)(s+4)}$

(c) $F(s) = \dfrac{11s^2 + 172s + 700}{(s+2)(s^2 + 12s + 100)}$

(d) $F(s) = \dfrac{56s^2 + 112s + 5000}{s(s^2 + 14s + 625)}$

M12.27 求下列各式的 $f(t)$:

(a) $F(s) = \dfrac{8(s^2 - 5s + 50)}{s^2(s+10)}$

(b) $F(s) = \dfrac{10(3s^2 + 4s + 4)}{s(s+2)^2}$

(c) $F(s) = \dfrac{s^3 - 6s^2 + 15s + 50}{s^2(s^2 + 4s + 5)}$

(d) $F(s) = \dfrac{s^2 + 6s + 5}{(s^2)^3}$

(e) $F(s) = \dfrac{16s^3 + 72s^2 + 216s - 128}{(s^2 + 2s + 5)^2}$

M12.28 求下列各式的 $f(t)$:

(a) $F(s) = \dfrac{10s^2 + 85s + 95}{s^2 + 6s + 5}$

(b) $F(s) = \dfrac{5(s^2 + 8s + 5)}{s^2 + 4s + 5}$

(c) $F(s) = \dfrac{s^2 + 25s + 150}{s + 20}$

M12.29 求下列各式的 $f(t)$:

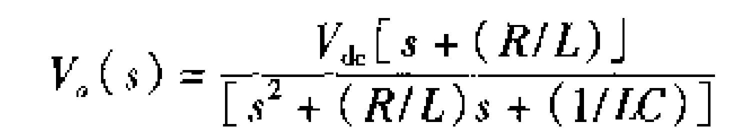
(a) $F(s) = \dfrac{20s^2}{(s+1)^3}$

(b) $F(s) = \dfrac{5(s+2)^2}{s^4(s+1)}$

12.30 图 P12.30 电路中的开关在 2 位置很长时间,当 $t = 0$ 时,开关达到 b 位置。

(a) 求 $t \geqslant 0^+$ 时，关于 V_o 的微积分方程。

(b) 证明：



$$V_o(s)=\frac{V_{dc}[s+(R/L)]}{[s^2+(R/L)s+(1/LC)]}$$

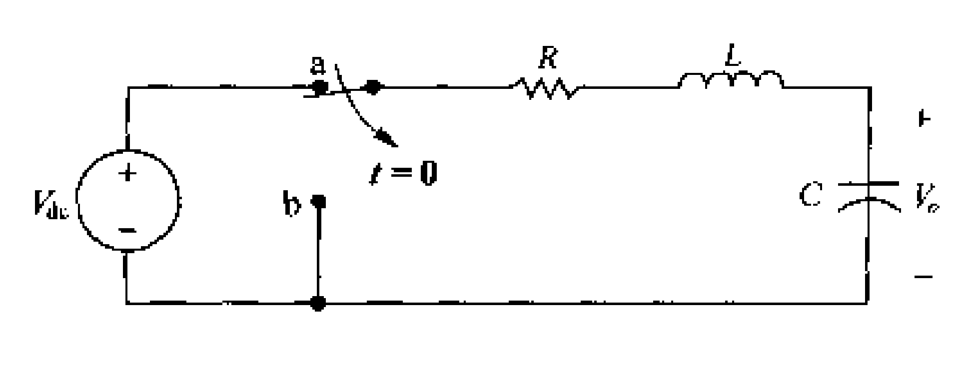


图 P12.30

P M12.31 在图 P12.30 电路中，电路参数为 $R=5000\ \Omega$, $L=1$ H, $C=0.25\ \mu$F, $V_{dc}=15$ V，求 $t \geqslant 0$时的 $v_o(t)$。

12.32 图 P12.32 中开关打开时电路中无贮能。

(a) 列出关于结点电压 v_1 和 v_2 的微积分方程。

(b) 证明：

$$V_2(s)=\frac{sI_g}{C[s^2+(R/L)s+(1/LC)]}$$

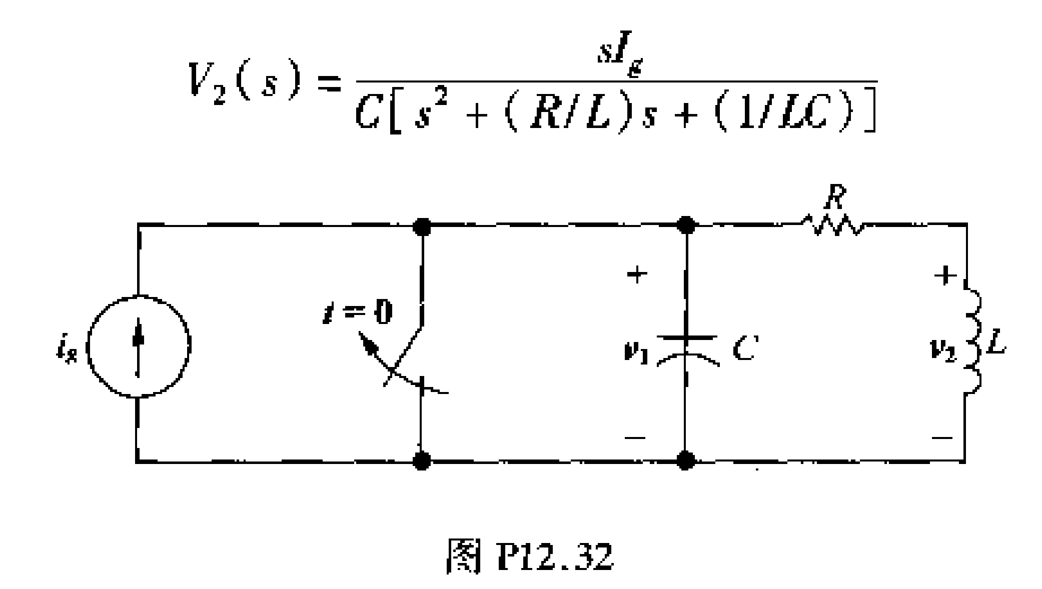


图 P12.32

P M12.33 在图 P12.32 电路中，电路参数为 $R=1\,600\ \Omega$, $L=200$ mH, $C=0.2\ \mu$F，若 $i_g(t)=6u(t)$ mA，求 $v_2(t)$。

12.34 求出式(12.64)的变换对。

12.35 (a) 求式(12.83)的变换对。

(b) 求式(12.84)的变换对。

12.36 对题 12.26 的每个变换对使用初值和终值定理。

12.37 对题 12.27 的每个变换对使用初值和终值定理。

12.38 对题 12.28 的每个变换对使用初值和终值定理。

12.39 对题 12.29 的每个变换对使用初值和终值定理。

12.40 用初值和终值定理对题 12.22 中的电流和电压的初值和终值加以验证。

12.41 用初值和终值定理对题 12.24 中的电流和电压的初值和终值加以验证。

12.42 用初值和终值定理对题 12.30 中的电压的初值和终值加以验证。

P12.43 (a) 写出关于图 P12.43 中网孔电流 i_1 和 i_2 的两组微分方程。

(b) 假设电路的初始贮能为零，对(a) 得出的方程进行拉氏变换。

(c) 求(b)方程中的 $I_1(s)$和 $I_2(s)$。

(d) 求 $i_1(t)$和 $i_2(t)$。

(e) 求 $i_1(\infty)$和 $i_2(\infty)$。

(f) i_1 和 i_2 的结果有意义吗？请加以解释。

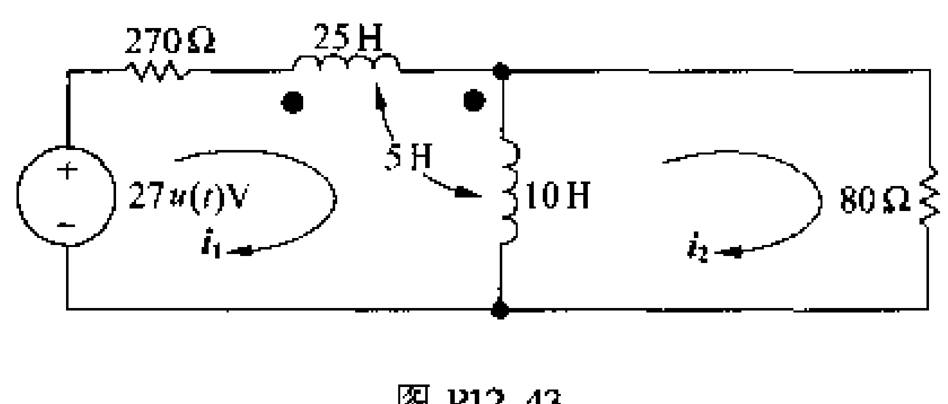


图 P12.43

第 13 章　拉氏变换在电路分析中的应用

拉氏变换是电路分析中一个有效的工具。它有两个特点：第一，拉氏变换将线性常系数微分方程转化为容易处理的线性多项式方程；第二，拉氏变换将电流和电压变量的初始值自动引入多项式方程中，这样，在变换处理过程中，初始条件就成为变换的一部分（与经典的微分方程求法相比较而言，在经典分析方法中，初始条件是在求未知数系数时要考虑的）。

下面将要说明如何跳过列时域微积分方程这一步，直接转换到 s 域当中。在 13.1 节中，将建立电阻、电感、电容的 s 域电路模型，直接对所有电路写出 s 域模型。在 13.2 节中还会学习 s 域中的基尔霍夫电流定律和电压定律。在此基础上，就可以将拉氏变换应用到 13.3 节中的各种电路分析中。

前面介绍的关于电阻电路的分析方法和化简方法，如网孔电流分析法、节点电压分析法以及电源变换也都可以用到 s 域中，在求出电路的 s 域响应后，应用部分分式法，反变换到时域（如 12 章所提到），同以往一样，在求解过程中根据初始条件和终值，验证最终的时域方程是非常重要的一个环节。

在 13.4 节中，s 域电路的输入输出描述法引出了转移函数的概念。某一电路的转移函数是输出拉氏变换和输入拉氏变换之比，在第 14 章和第 15 章中，将讨论转移函数在设计中的应用。现在，将集中讨论作为一个分析工具的应用，接着讨论在电路分析中使用转移函数时部分分式展开法（13.5 节）和卷积积分（13.6 节）的作用，最后讨论电路分析中的冲激函数。

13.1　s 域中的电路元件

对每个电路元件，建立其 s 域等效电路的过程非常简单。首先，写出关于输出端电压和电流的时域方程。然后对方程进行拉氏变换，则产生一个 s 域电流和电压的代数方程式。注意到变换后电压的单位为伏·秒，电流变换后的单位为安·秒。s 域中电压和电流之比的单位为伏/安，s 域阻抗单位为欧姆，导纳的单位为西门子。建立一个满足 s 域电压和电流间关系的电路模型，在所有的导出式中，规定采用正号。

13.1.1　s 域中的电阻

对电阻元件，由欧姆定律得：

$$v = Ri \tag{13.1}$$

因为 R 为常数，所以，式(13.1)的拉氏变换为：

$$V = RI \tag{13.2}$$

其中：

$$V = \mathscr{L}\{v\} \text{ 和 } I = \mathscr{L}\{i\}$$

式(13.2)表明，电阻在 s 域中的等效电路仍然是一个 $R\ \Omega$ 的电阻，它两端的电压为 V（伏·秒），流过的电流为 I（安·秒）。

图 13.1 画出了电阻的时域和频域电路,注意到从时域转到频域,电阻元件不变。

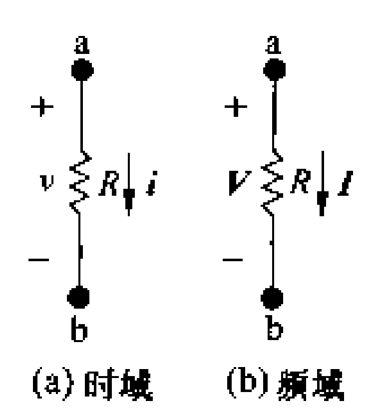


图 13.1 电阻元件

13.1.2 s 域中的电感

图 13.2 所示电感,其初始电流为 I_0 安,两端电压和电流的时域方程为:

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{13.3}$$

其拉氏变换为:

$$V = L[sI - i(0^-)] = sLI - LI_0 \tag{13.4}$$

两个不同的电路形式均满足式(13.4),第一个包含一个 sL Ω 的阻抗串联一个 LI_0(伏·秒)的电压源,如图 13.3 所示。电压源的极性与方程中的减号一致,LI_0 有自己的代数符号,也就是说,如果 I 的初始值与 i 的参考方向相反,则 I_0 为负值。

第二个等效电路中包含一个 sL Ω 的阻抗和一个 I_0/s(安·伏)的电流源并联,如图 13.4 所示。可用多种方法求出图 13.4 所示电路的等效电路,其中最简单的方法就是求解式(13.4)中的电流 I,然后建立一个满足所求方程的电路。

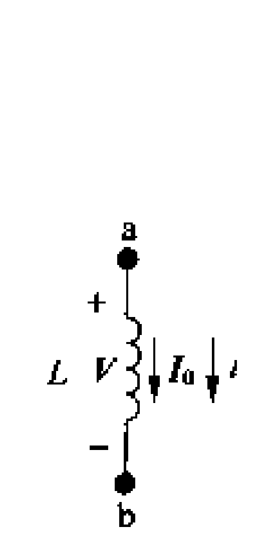


图 13.2 电感 L,它的初始电流为 I_0

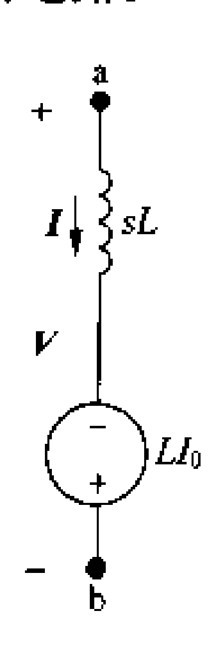


图 13.3 具有初始电流 I_0 的电感元件的串联等效电路

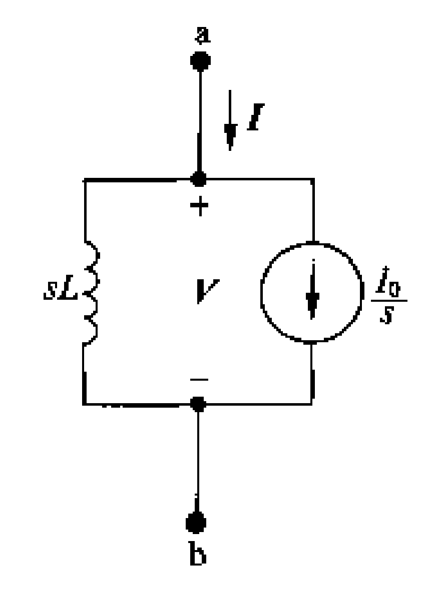


图 13.4 具有初始电流 I_0 的电感元件的并联等效电路

这样:

$$I = \frac{V + LI_0}{sL} = \frac{V}{sL} + \frac{I_0}{s} \tag{13.5}$$

另外两种方法是:(1) 求图 13.3 所示电路的等效电路。(2) 将电感的电流化为电压的函数,然后对所求的积分式取拉氏变换,这两种方法留在习题 13.1 和 13.2 中。

若电感的初始贮能为零,即如果 $I_0 = 0$,则电感的 s 域等效电路就简化为一个具有 sL Ω 的

电感，如图 13.5 所示电路。

13.1.3　*s* 域中的电容

具有初始电压的电容也有两个 *s* 域等效电路。图 13.6 是一个初始电压为 V_0 伏的电容，端口电流为：

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{13.6}$$

对其进行拉氏变换得：

$$I = C[sV - v(0^-)]$$

或：

$$I = sCV - CV_0 \tag{13.7}$$

它表明 *s* 域的电流 *I* 是两个支路电流之和。一条支路上的导纳为 *sC* 西门子，另一条支路上的独立电流源为 CV_0 安·秒，如图 13.7 所示并联等效电路。

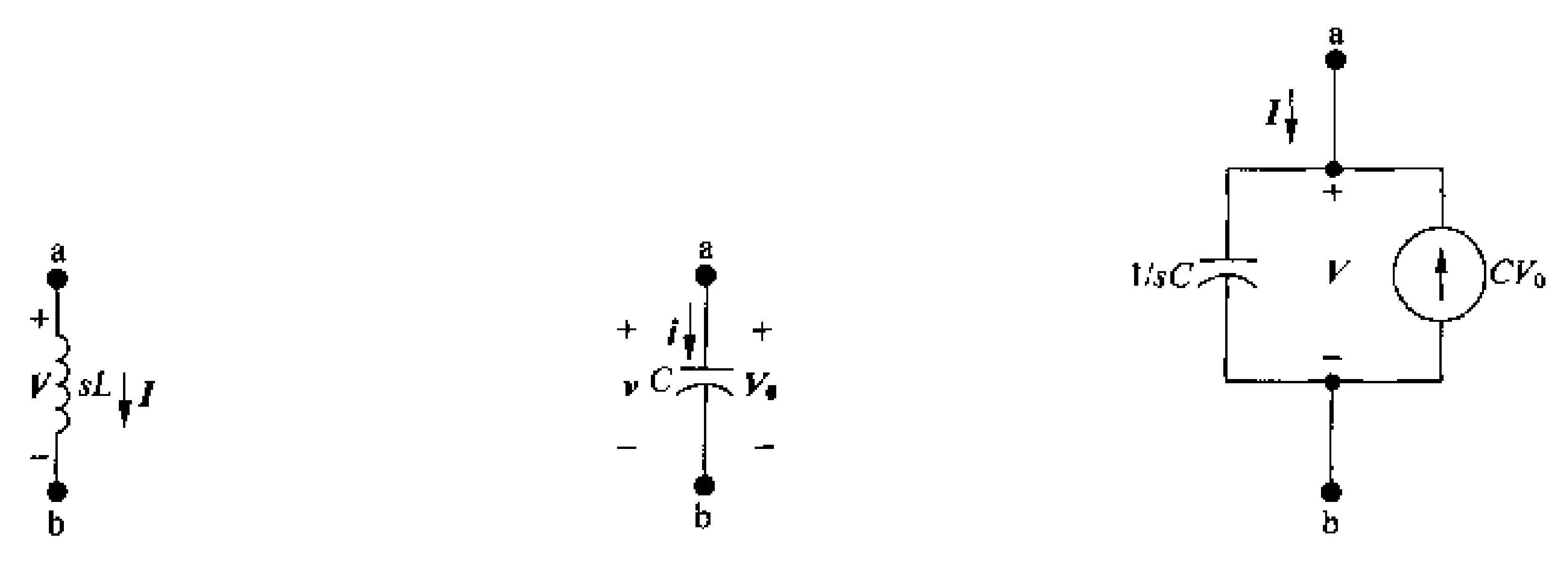


图 13.5　无初始贮能的电感的 *s* 域电路　　图 13.6　初始电压为 V_0 伏的电容　　图 13.7　初始电压为 V_0 伏电容的并联等效电路

求式(13.7)中的电压 *V*，可得到电容的串联等效电路：

$$V = \left(\frac{1}{sC}\right)I + \frac{V_0}{s} \tag{13.8}$$

图 13.8 画出了满足式(13.8)的电路。

图 13.7 和 13.8 的等效电路中，V_0 有自己的符号，就是说，如果 V_0 的极性与 *v* 的参考方向相反，那么 V_0 是负的。如果电容的初始电压为零，那么两个等效电路可化简为一个 1/*sC* 欧姆的阻抗，如图 13.9 所示。



图 13.8　具有初始电压的电容的串联等效电路　　图 13.9　初始电压为零时电容的等效电路

本章中,当电路中存在电容和电感时,首先必须选择等效电路的形式,或者串联或者并联,这是求解问题的重要一步。经过学习和练习,做出正确选择还是非常容易的。表 13.1 对等效电路进行了总结。

表 13.1 s 域等效电路总结

时域	频域	
$v = Ri$	$V = RI$	
$v = L\,di/dt$, $i = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} v\,dx + I_0$	$V = sLI - LI_0$	$I = \frac{V}{sL} + \frac{I_0}{s}$
$i = C\,dv/dt$, $v = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i\,dx + V_0$	$V = \frac{1}{sC} + \frac{V_0}{s}$	$I = sCV - CV_0$

13.2 s 域中的电路分析

说明如何在电路分析中使用 s 域等效电路之前,需要做些准备工作。首先,若电感或电容中无初始贮能,则对每个无源元件,其伏安关系的形式均为:

$$V = ZI \tag{13.9}$$

其中 Z 是元件的 s 域阻抗。因此,电阻元件的阻抗为 $R\ \Omega$,电感的阻抗为 $sL\ \Omega$。电容的阻抗为 $1/SC\ \Omega$。式(13.9)中的这种关系在图 13.1(b),13.5,13.9 中也都存在。式(13.9)常常指 s 域的欧姆定律。

阻抗的倒数是导纳，因此，s 域电阻的导纳为 $1/R$ 西门子，电感的导纳为 $1/sL$ 西门子，电容的导纳为 sC 西门子。

s 域中阻抗和导纳结合的规则与频域相同。因此，串并联化简和 Δ - Y 转换对 s 域分析也同样适用。

另外，基尔霍夫定律对 s 域的电流和电压也适用，这种适用性是根据拉氏变换的线性特性得出的。因时域中节点上电流的代数和为零，所以电流变换的代数和也为零。同理，闭合回路中电压变换式的代数和也为零。基尔霍夫定律的 s 域形式为：

$$\sum I = 0 \tag{13.10}$$

$$\sum V = 0 \tag{13.11}$$

因为无源元件端口电压和电流的关系是由代数方程确定的，基尔霍夫定律始终成立，因此，所有电阻电路的分析方法均可用到 s 域电路的分析中。这样，节点电压、网孔电流、电源变换和戴维南 - 诺顿等效都是正确的方法，甚至电感和电容含有初始贮能时也可以应用。当有初始贮能时，需要在式(13.9)中加上一个串联或并联电源来修正方程。所加的电源与基尔霍夫定律相符合。

练习题

13.1　一个 500 Ω 电阻，16 mH 电感，25 nF 电容并联。

(a) 将该并联电路的导纳表示成 s 的分式。

(b) 计算极点和零点。

答：(a) $25\times10^{-9}(s^2+80000s+25\times10^8)/s$，(b) $-z_1=-40000-\mathrm{j}30000$，$-z_2=-40000-\mathrm{j}30000$，$p_1=0$。

13.2　用 500 Ω 的电阻与练习题 13.1 中的并联电路相串联。

(a) 将串联电路的阻抗表示为 s 的分式。

(b) 计算极点和零点值。

答：(a) $500(s+50000)^2/(s^2+80000s+25\times10^8)$，(b) $-z_1=-z_2=-50000$，$-p_1=-40000-\mathrm{j}30000$，$-p_2=-40000+\mathrm{j}30000$。

13.3　应用

本节将介绍如何用拉氏变换确定多个线性集总电路的暂态特性。首先分析第 7,8 章中熟悉的电路。这些电路比较简单，并且可以证明使用拉氏变换方法得到同样的结果。显然，在所有的例题中将用容易求解的代数方程代替微分方程。

13.3.1　*RC* 电路的自然响应

首先，用拉氏变换法求 RC 电路(图 13.10)的自然响应(复习 7.2 节对同一个电路的经典分析方法)。

电容的初始电压为 V_0 伏，求 i 和 v 的时域表达式。先求 i，将图 13.10 中的电路转化为 s 域时，对充电电容的等效电路有两种选择，因为要求电流，所以选串联等效电路比较好，这样会

产生一个频域单回路。建立的 s 域电路如图 13.11 所示。

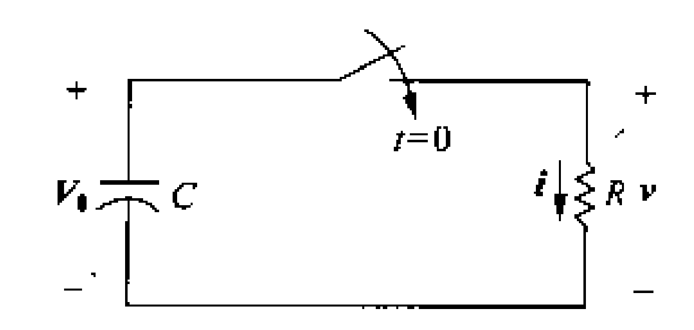


图 13.10 电容放电电路

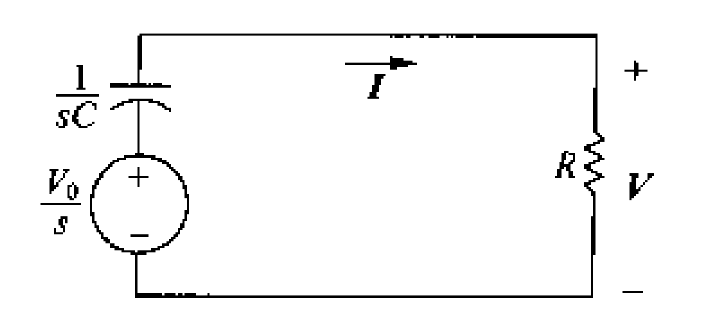


图 13.11 图 13.10 电路的 s 域等效电路

将网孔电压取和,得:

$$\frac{V_0}{s}=\frac{1}{sC}I+RI \tag{13.12}$$

解方程求 I 得:

$$I=\frac{CV_0}{RCs+1}=\frac{V_0/R}{s+(1/RC)} \tag{13.13}$$

注意到 I 的表达式是 s 的真分式,可反变换为:

$$i=\frac{V_0}{R}e^{-t/RC}u(t) \tag{13.14}$$

与经典时域分析法所得的结果相同,见式(7.26),该方程中的 τ 与 RC 相等。求得 I 后,确定 v 的最容易方法是应用欧姆定理,即根据电路,得到:

$$v=Ri=V_0e^{-t/RC}u(t) \tag{13.15}$$

这里介绍不通过 I,直接由电路求 v 的方法。在这种方法中,将最初的电路转化为并联的 s 域模型。此时可得到一个单节点等效电路,如图 13.12 所示。

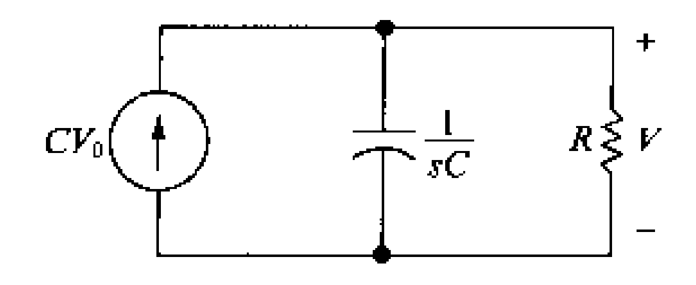


图 13.12 图 13.10 电路的 s 域并联等效电路

新电路的节点电压方程为:

$$\frac{V}{R}+sCV=CV_0 \tag{13.16}$$

解该方程,求 V 得:

$$V=\frac{V_0}{s+(1/RC)} \tag{13.17}$$

对式(13.17)进行反变换,得到与式(13.15)相同的表达式,即:

$$v=V_0e^{-t/RC}=V_0e^{-t/\tau}u(t) \tag{13.18}$$

直接用变换法求出了 v,这说明选择哪种 s 域等效电路求解与所求参数有关。

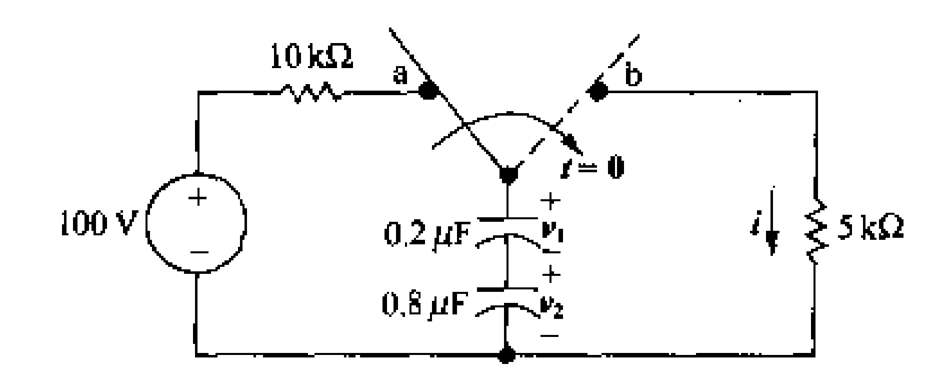
练习题

13.3 电路中的开关在 a 位置很久,$t=0$ 时,开关置到 b 点。

(a) 求 I, V_1, V_2 的 s 域表达式。

(b) 求 i, v_1, v_2 的时域表达式。

答:(a) $I = 0.02/(s+1250)$, $V_1 = 80/(s+1250)$, $V_2 = 20/(s+1250)$, (b) $i = 20e^{-1250t}u(t)$ mA, $v_1 = 80e^{-1250t}u(t)$ V, $v_2 = 20e^{-1250t}u(t)$ V。



13.3.2　并联电路的阶跃响应

分析 RLC 并联电路,如图 13.13 所示。在例 8.7 中已经分析过该电路。求开关打开后 i_L 的表达式。电路的初始贮能为零。

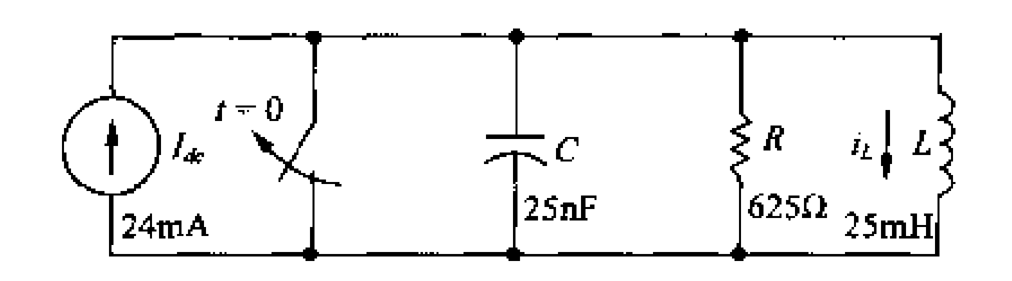


图 13.13　并联 RLC 电路的阶跃响应

首先建立 s 域等效电路,如图 13.14 所示,将独立电源从时域转换到频域,只要将其时域函数进行拉氏变换就可得到 s 域值,该电路中,开关打开会使电路产生一个阶跃变化。因此,s 域电源为 I_{dc}/s,为求得 I_L,要先求得 V,然后用下式求出 I_L 的 s 域表达式:

$$I_L = \frac{V}{sL} \tag{13.19}$$

将流出上节点的电流相加得表达式:

$$sCV + \frac{V}{R} + \frac{V}{sL} = \frac{I_{dc}}{s} \tag{13.20}$$

解方程求得 V:

$$V = \frac{I_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \tag{13.21}$$

将式(13.21)代入式(13.19)得:

$$I_L = \frac{I_{dc}/LC}{s[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]} \tag{13.22}$$

将 R, L, C, I_{dc} 值代入上式,得:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s^2 + 64000s + 16 \times 10^8)} \tag{13.23}$$

在将式(13.23)展开成部分分式和之前,对分母中的二次项进行因式分解:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s+32000-j24000)(s+32000+j24000)} \tag{13.24}$$

现在可以验证 I_L 的 s 域表达式正确与否,验证方法是用终值定理求出 $t=\infty$ 时,i_L 的值。I_L 的所有极点,除原点处的一阶极点外均在 s 平面的左半面,因此,可以应用终值定理。由电路特性可知,在开关打开很长时间后,电感将使电流源短路。因此,i_L 的终值必然为 24 mA,当 $s \to 0$,极限为:

$$\lim_{s\to 0} sI_L = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \text{ mA} \tag{13.25}$$

表明 s 域表达式正确。

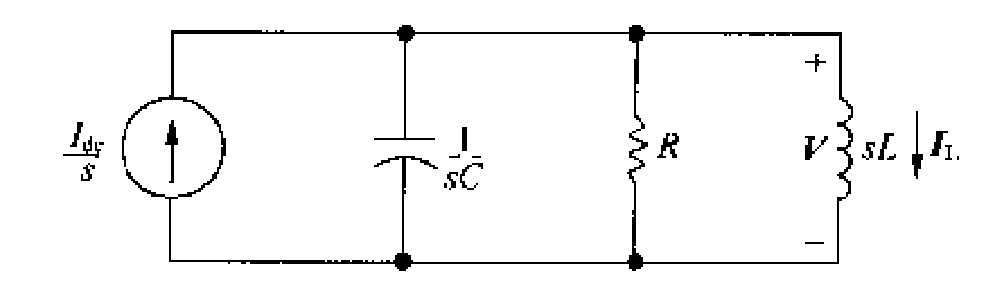


图 13.14 图 13.13 电路的 s 域等效电路

现在对式(13.24)进行部分分式展开:

$$I_L = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+32000-j24000} + \frac{K_2^*}{s+32000+j24000} \tag{13.26}$$

部分分式系数为:

$$K_1 = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \times 10^{-3} \tag{13.27}$$

$$K_2 = \frac{384 \times 10^5}{(-32000+j24000)(j48000)}$$

$$= 20 \times 10^{-3} \angle 126.87° \tag{13.28}$$

将 K_1 和 K_2 值代入式(13.26)并进行反变换得:

$$i_L = [24 + 40e^{-32000t}\cos(24000t + 126.87°)]u(t) \text{ mA} \tag{13.29}$$

式(13.29)给出的答案与例 8.7 给出的答案一致,因为:

$$40\cos(24000t + 126.87°) = -24\cos 24000t - 32\sin 24000t$$

如果没有前面的答案做对比校核,就应该用初值定理来验证结果的正确性。

练习题

13.4 电路的初始贮能为零,$t=0$ 时开关闭合。

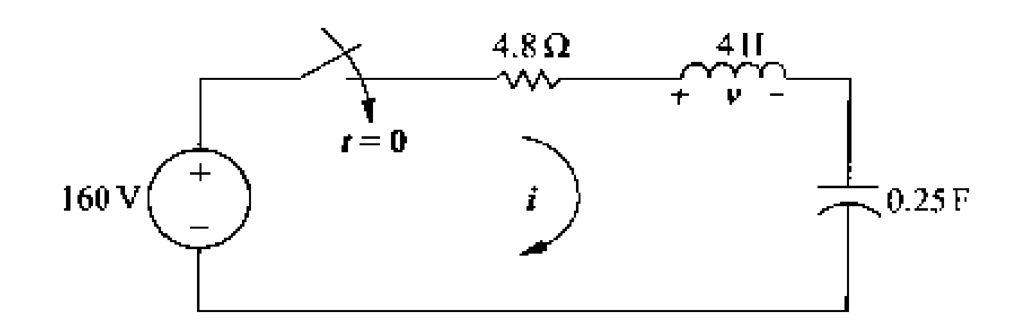
(a) 求 I 的 s 域表达式。

(b) 求 $t>0$ 时 i 的时域表达式。

(c) 求 V 的 s 域表达式。

(d) 求 $t>0$ 时 v 的时域表达式。

答:(a) $I = 40/(s^2+1.2s+1)$,(b) $i = (50e^{-0.6t}\sin 0.8t)u(t)$ A,(c) $V = 160s/(s^2 + 1.2s+1)$,(d) $v = [200e^{-0.6t}\cos(0.8t+36.87°]u(t)$ V。



13.3.3 并联 *RLC* 电路的暂态响应

将图 13.13 中的直流电流源用正弦电流源代替,可得到一个新的电路,用拉氏变换分析法可求得该电路的暂态特性,新电源为:

$$i_g = I_m \cos \omega t \text{ A} \tag{13.30}$$

其中 $I_m = 24$ mA, $\omega = 40000$ rad/s。假设初始贮能为零。

正弦电流源的 s 域表达式为:

$$I_g = \frac{sI_m}{s^2 + \omega^2} \tag{13.31}$$

并联元件的电压为:

$$V = \frac{(I_g/C)s}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \tag{13.32}$$

将式(13.31)代入式(13.32)得:

$$V = \frac{(I_m/C)s^2}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]} \tag{13.33}$$

由此得:

$$I_L = \frac{V}{sL} = \frac{(I_m/LC)s}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]} \tag{13.34}$$

将 I_m, ω, R, L, C 的值代入式(13.34)得:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s^2 + 16 \times 10^8)(s^2 + 64000s + 16 \times 10^8)} \tag{13.35}$$

现将分母展开成因式形式:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s - j\omega)(s + j\omega)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} \tag{13.36}$$

其中 $\omega = 40000, \alpha = 32000, \beta = 24000$。

不能用终值定理验证 i_L 的终值。因为 I_L 有一对极点在虚轴上,极点为 $\pm j4 \times 10^4$。必须先求出 i_L,然后根据电路的已知值验证表达式的正确性。

将式(13.36)展开成部分分式和:

$$I_L = \frac{K_1}{s - j40000} + \frac{K_1^*}{s + j40000} + \frac{K_2}{s + 32000 - j24000} + \frac{K_2^*}{s + 32000 + j24000} \tag{13.37}$$

系数 K_1 和 K_2 的值为:

$$K_1 = \frac{384 \times 10^5 (j40000)}{(j80000)(32000 + j16000)(32000 + j64000)}$$

$$= 7.5 \times 10^{-3} \underline{/-90^\circ} \tag{13.38}$$

$$K_2 = \frac{384 \times 10^5(-32000 + j24000)}{(-32000 - j16000)(-32000 + j64000)(j48000)}$$

$$= 12.5 \times 10^{-3} \underline{/-90^\circ} \tag{13.39}$$

将式(13.38)、式(13.39)代入式(13.37),进行反变换,得到表达式:

$$i_L = [15\cos(40000t - 90^\circ) + 25e^{-32000t}\cos(24000t + 90^\circ)] \text{ mA}$$

$$= (15\sin 40000t - 25e^{-32000t}\sin 24000t)u(t) \text{ mA} \tag{13.40}$$

验证式(13.40),看是否满足初始条件和给定特性。当 $t = 0$ 时,式(13.40)的初始值为零,符合电路为零状态条件,式(13.40)也确定了一个稳态电流:

$$iL_{ss} = 15\sin 40000t \text{ mA} \tag{13.41}$$

该式也可由第 9 章的相量法求得。

13.3.4 多网孔电路的阶跃响应

到目前为止,一直没有遇到需要列多节点电压或多网孔电流方程的电路。因解联立微分方程组的方法已经超出了本书范围。但应用拉氏变换可以求解如图 13.15 所示的电路。

在该题中,336 V 直流电压源突然作用到电路中,求支路电流 i_1, i_2。初始贮能为零。图 13.16 表示的是图 13.15 的 s 域等效电路,两个网孔方程为:

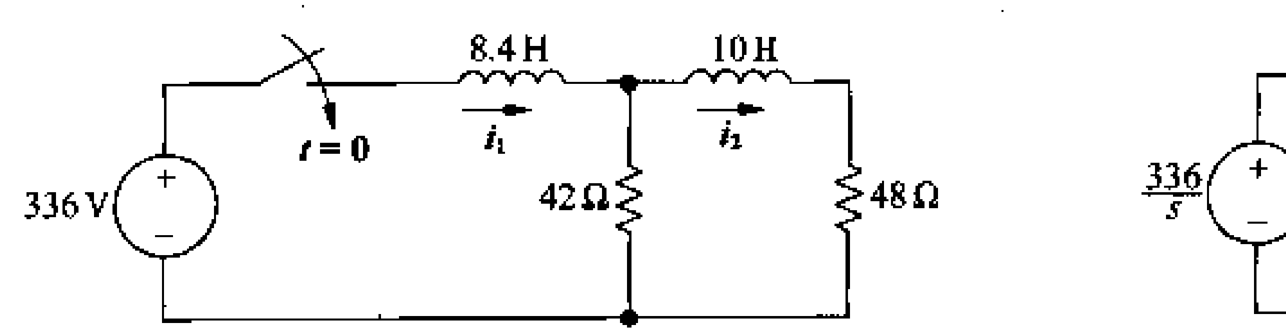


图 13.15 多网孔 RL 电路

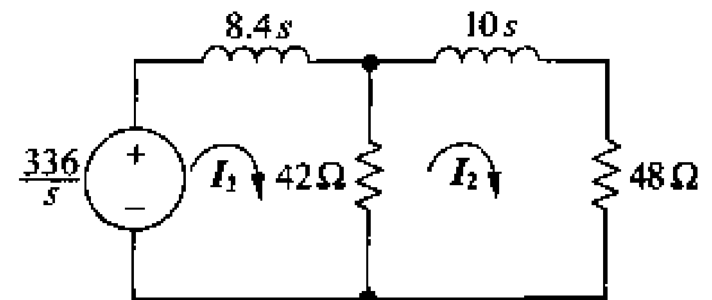


图 13.16 图 13.15 的 s 域等效电路

$$\frac{336}{s} = (42 + 8.4s)I_1 - 42I_2 \tag{13.42}$$

$$0 = -42I_1 + (90 + 10s)I_2 \tag{13.43}$$

用克莱姆法则求 I_1 和 I_2 得:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 42 + 8.4s & -42 \\ -42 & 90 + 10s \end{vmatrix}$$

$$= 84(s^2 + 14s + 24)$$

$$= 84(s + 2)(s + 12) \tag{13.44}$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 336/s & -42 \\ 0 & 90 + 10s \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3360(s + 9)}{s} \tag{13.45}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 42 + 8.4s & 336/s \\ -42 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{14112}{s} \qquad (13.46)$$

根据以上三个方程得：

$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta} = \frac{40(s+9)}{s(s+2)(s+12)} \qquad (13.47)$$

$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta} = \frac{168}{s(s+2)(s+12)} \qquad (13.48)$$

将 I_1 和 I_2 展为部分分式和形式得：

$$I_1 = \frac{15}{s} - \frac{14}{s+2} - \frac{1}{s+12} \qquad (13.49)$$

$$I_2 = \frac{7}{s} - \frac{8.4}{s+2} + \frac{1.4}{s+12} \qquad (13.50)$$

分别进行反变换得 i_1 和 i_2 的表达式：

$$i_1 = (15 - 14e^{-2t} - e^{-12t})u(t)\ \text{A} \qquad (13.51)$$

$$i_2 = (7 - 8.4e^{-2t} + 1.4e^{-12t})u(t)\ \text{A} \qquad (13.52)$$

验证以上结果，看是否与电路相符，因初始贮能为零，则 $i_1(0^-)$和 $i_2(0^-)$必为零。

结果与初始值一致，开关打开较长时间后，两电感相当于短路，因此，两终值为：

$$i_1(\infty) = \frac{336(90)}{42(48)} = 15\ \text{A} \qquad (13.53)$$

$$i_2(\infty) = \frac{15(42)}{90} = 7\ \text{A} \qquad (13.54)$$

最后的验证包括指数部分值、计算 42 Ω 电阻的电压降，可用三种不同的方法。由电路可知，通过 42 Ω 电阻的电压为：

$$v = 42(i_1 - i_2) = 336 - 8.4\frac{di_1}{dt} = 4.8i_2 + 10\frac{di_2}{dt} \qquad (13.55)$$

应该保证不论式(13.55)采用哪种形式，电压都是：

$$v = (336 - 235.2e^{-2t} - 100.80e^{-12t})u(t)\ \text{V}$$

从而保证网孔电流的解是正确的。

练习题

13.5 直流电流源和电压源同时加到电路中，加电时刻无初始贮能。求：

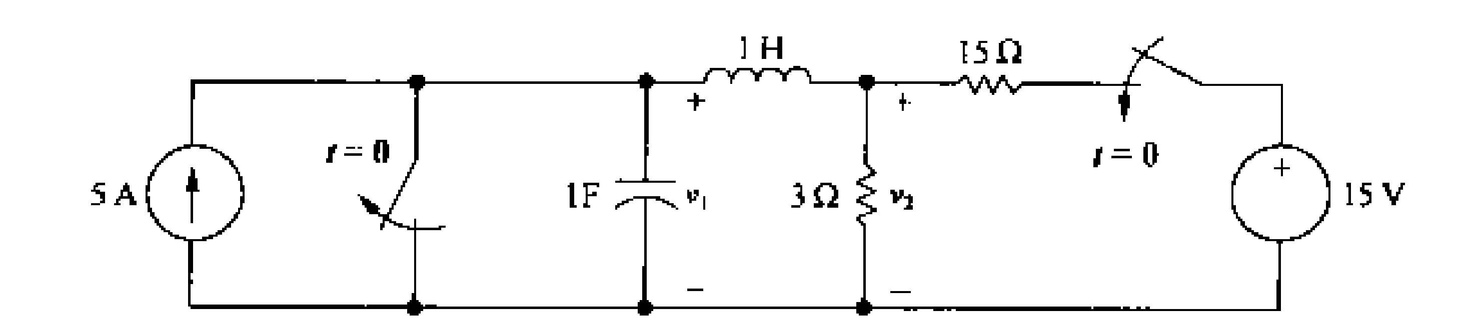
(a) V_1 和 V_2 的 s 域表达式。

(b) 求 $t>0$ 时，v_1 和 v_2 的时域表达式。

(c) 计算 $v_1(0^+)$和 $v_2(0^+)$。

(d) 计算 v_1 和 v_2 的稳态值。

答：(a) $V_1 = [5(s+3)]/[s(s+0.5)(s+2)]$，$V_2 = [2.5(s^2+6)]/[s(s+0.5)(s+2)]$；(b) $v_1 = \left(15 - \frac{50}{3}e^{-0.5t} + \frac{5}{3}e^{-2t}\right)u(t)$ V，$v_2 = \left(15 - \frac{125}{6}e^{-0.5t} + \frac{25}{3}e^{-2t}\right)u(t)$ V；(c) $v_0(0^+) = 0$，$v_2(0^+) = 2.5$ V；(d) $v_1 = v_2 = 15$ V。



13.3.5 戴维南等效电路的应用

本节将说明如何在 s 域中使用戴维南等效电路。图 13.17 画出了要分析的电路。求开关闭合后电容的电流。开关闭合前电路无贮能。

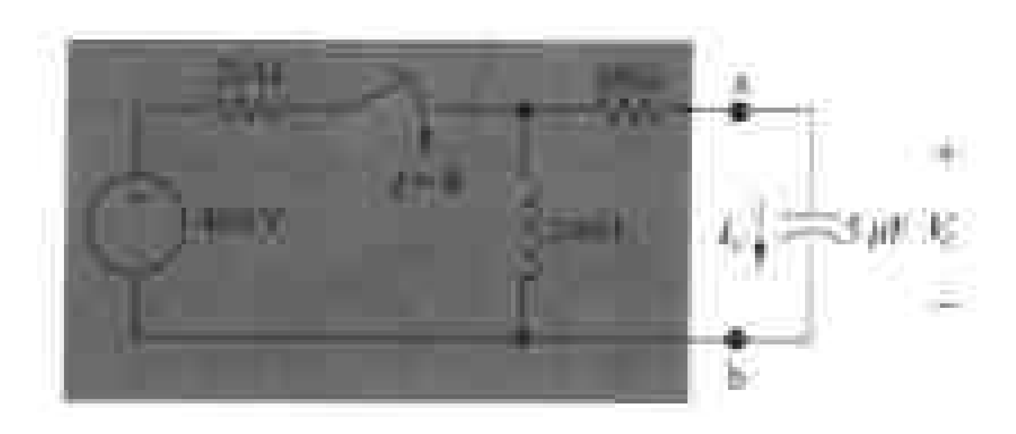


图 13.17 戴维南等效电路在 s 域中应用的电路

为求得 i_C,先建立 s 域等效电路,然后再求出电容端口的戴维南等效电路。图 13.18 为 s 域电路。

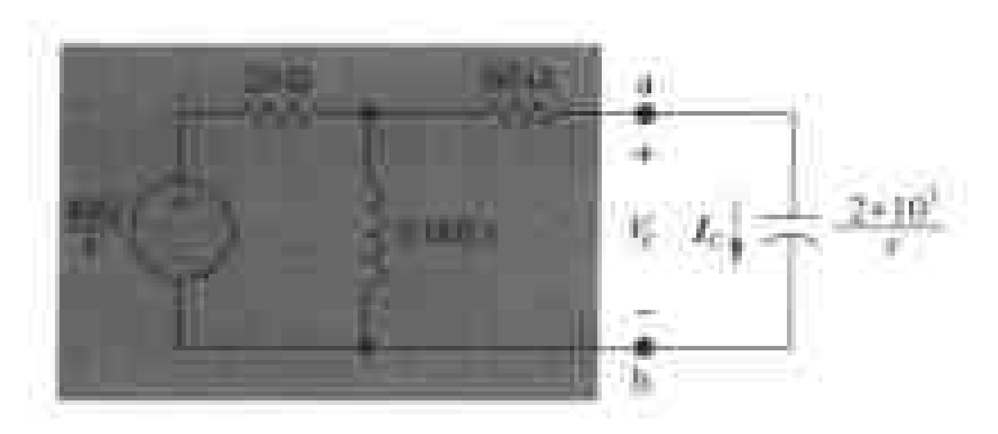


图 13.18 图 13.17 的 s 域电路模型

戴维南电压是 ab 端口的开路电压。开路时 60 Ω 电阻两端无电压,所以:

$$V_{\mathrm{Th}}=\frac{(480/s)(0.002s)}{20+0.002s}=\frac{480}{s+10^4} \tag{13.56}$$

从 ab 端口看,戴维南等效阻抗是 60 Ω 电阻串联上 20 Ω 电阻与 2 mH 电感的并联。其阻抗为:

$$Z_{\mathrm{Th}}=60+\frac{0.002s(20)}{20+0.002s}=\frac{80(s+7500)}{s+10^4} \tag{13.57}$$

利用戴维南等效定理,将图 13.18 所示电路化简为图 13.19 所示的电路,表明电容电流 I_c 等于戴维南电压除以全部串联阻抗,于是:

$$I_C=\frac{480/(s+10^4)}{[80(s+7500)/(s+10^4)]+[(2\times10^5)/s]} \tag{13.58}$$

化简上式得:

$$I_C=\frac{6s}{s^2+10000s+25\times10^6}$$

$$= \frac{6s}{(s+5000)^2} \tag{13.59}$$

该方程的部分分式展示式为：

$$I_C = \frac{-30000}{(s+5000)^2} + \frac{6}{(s+5000)} \tag{13.60}$$

其反变换为：

$$i_C = (-30000te^{-5000t} + 6e^{-5000t})u(t)\ \text{A} \tag{13.61}$$

验证式(13.61)是否与已知电路相一致，由式(13.61)得：

$$i_C(0) = 6\ \text{A} \tag{13.62}$$

正如图 13.17 所示的电路，结果与电容的电流终值一致，电感的初始电流和电容的初始电压为零，因此电容的初始电流为 480/80 或者 6 A。

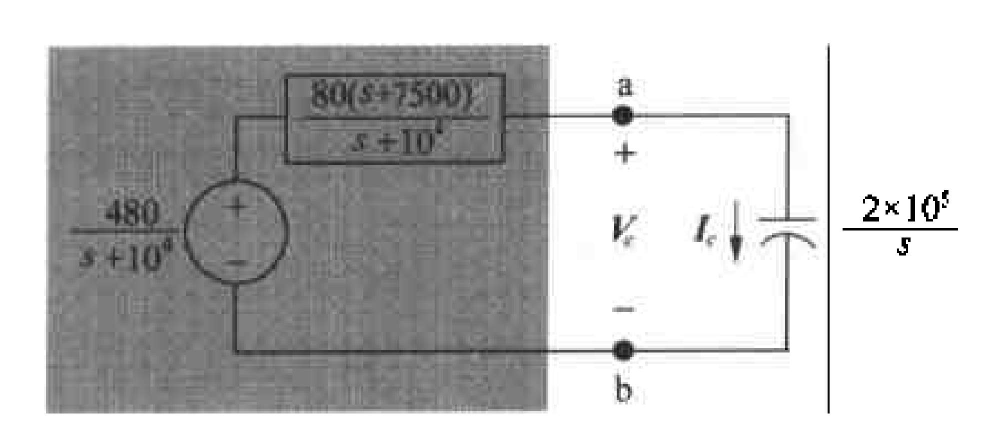


图 13.19　图 13.18 电路用戴维南等效定理化简的电路

电容的电流终值为零，与式(13.61)一致。由方程可知，当 t 大于 200 μs 时，电流为反号，这是因为在开关闭合时，电容开始充电。当 $t=\infty$ 时，电感为短路，电容电压为零。I_c 符号的改变恰好反映了电容充放电的变化。

假设读者对电容两端的电压降感兴趣，则可在求得 i_c 后，通过时域积分求得 v_c，即：

$$v_c = 2\times10^5\int_{0^-}^{t}(6-30000x)e^{-5000x}dx \tag{13.63}$$

虽然上式积分计算不难，但是还是希望先求出 V_c 的 s 域表达式，再求反变换得到 v_c 的表达式。这样可以避免积分运算，于是 V_c 表达式为：

$$V_C = \frac{1}{sC}I_C = \frac{2\times10^5}{s}\frac{6s}{(s+5000)^2}$$

$$= \frac{12\times10^5}{(s+5000)^2} \tag{13.64}$$

由此得出：

$$v_C = 12\times10^5te^{-5000t}u(t) \tag{13.65}$$

读者应当验证式(13.65)是否与式(13.63)相符合，是否与 i_c 的特性一致(见习题 13.33)。

练习题

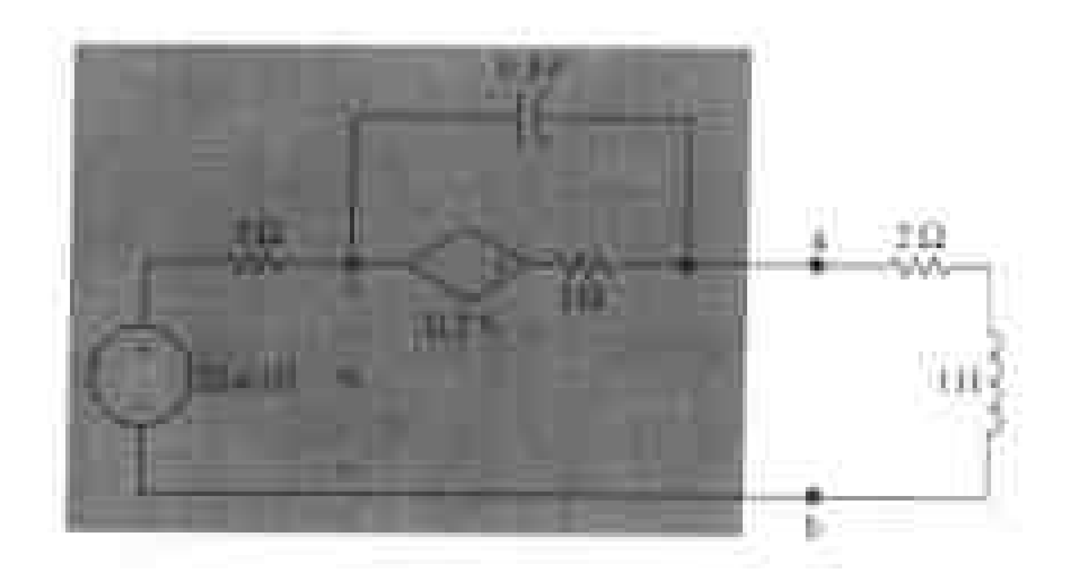
13.6　电路如图所示，电路中电容的初始贮能为零。

(a) 求端口 ab 处的 s 域戴维南等效电路。

(b) 在端口处加一个和 1H 电感相串联的负载电阻 2 Ω，求电流 I_{ab}的 s 域表达式。

答：(a) $V_{Th}=V_{ab}=[20(s+1.5)]/[s(s+1)]$，$Z_{Th}=5(s+1.9)/(s+1)$；(b) $I_{ab}=[4$

$(s+1.5)]/[s(s^2+4s+3.9)]$。



13.3.6 电感电路

下面的例子叙述了含有耦合电感电路的暂态响应的拉氏变换分析法。电路如图 13.20 所示,开关断开之前确保其处于 a 位置较长时间,在 $t=0$ 时,开关瞬时移到 b 点。求 i_2 的时域表达式。

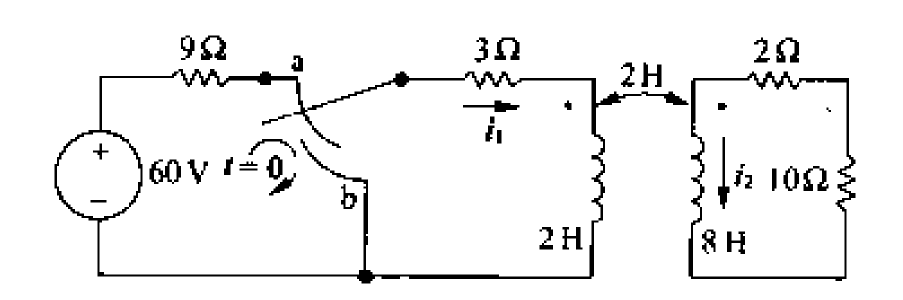


图 13.20 含耦合电感的电路

将图 13.20 电路中的耦合电感用其 T 型等效电路代替,开关在位置 b,如图 13.21 所示。现在将电路转换到 s 域。转换过程中注意到:

$$i_1(0^-)=\frac{60}{12}=5\ \text{A} \tag{13.66}$$

$$i_2(0^-)=0 \tag{13.67}$$

为应用 s 域的网孔分析法,将电感化为串联等效电路。如图 13.22 所示,注意到电路中只有一个独立电压源。这个电源出现在 T 型电路中的垂直支路上,用来计入 2 H 电感中的初始电流 $i_1(0^-)+i_2(0^-)$或 5 A。电流 i_1 所在支路中无电压源。因为 $L_1-M=0$。

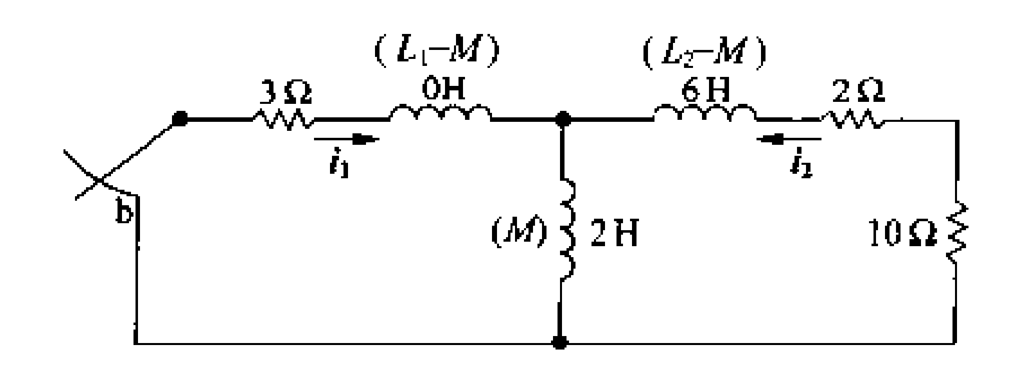


图 13.21 图 13.20 的耦合电感用其 T 型等效电路代替后的电路

描述图 13.22 所示电路的两个 s 域网孔方程为:

$$(3+2s)I_1+2sI_2=10 \tag{13.68}$$

$$2sI_1+(12+8s)I_2=10 \tag{13.69}$$

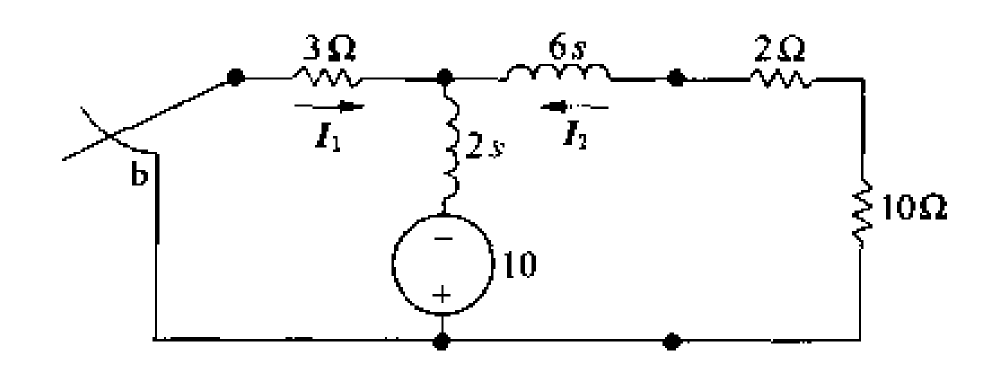


图 13.22　图 13.21 电路的 s 域等效电路

求 I_2 得:

$$I_2 = \frac{2.5}{(s+1)(s+3)} \tag{13.70}$$

将上式展开为部分分式和形式,得:

$$I_2 = \frac{1.25}{s+1} - \frac{1.25}{s+3} \tag{13.71}$$

从而:

$$i_2 = (1.25e^{-t} - 1.25e^{-3t})u(t)\ \text{A} \tag{13.72}$$

式(13.72)表明,在开关移到 b 点之后 549.31 ms 时,i_2 的值从零增大到最大值 481.13 mA,之后,按指数衰减到零。图 13.23 为 i_2 的时间曲线。这个响应与耦合电感的已知物理特性一致,只有 L_1 电感中有时变电流时,L_l 中才会存在电压。当 i_l 从其初始电流 5 A 开始减小时,i_2 中的电流从零开始增加,之后又随 i_1 趋于零。

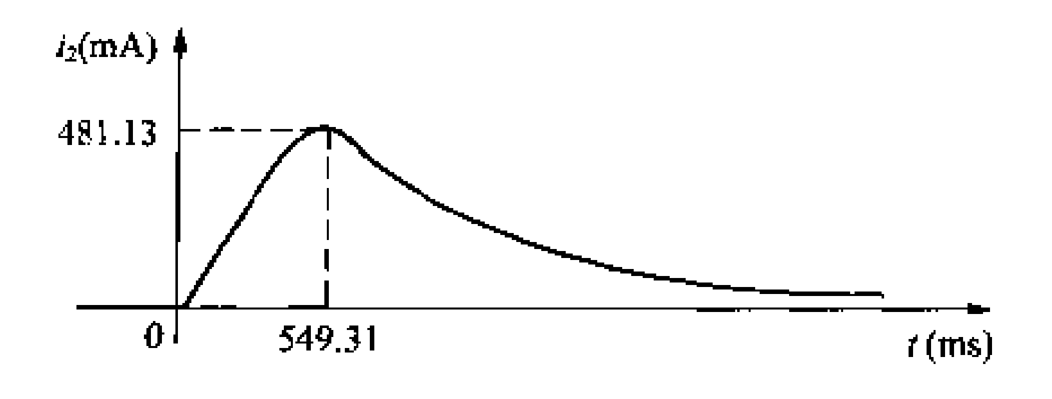


图 13.23　图 13.20 中 i_2 的时间曲线

练习题

13.7　(a) 根据式(13.72)验证,在 $t = 549.31$ ms 时,i_2 达到其最大值 481.13 mA。

(b) 求图 13.20 电路中,$t > 0$ 时的电流 i_l。

(c) 当 i_2 为其最大值时,计算 di_1/dt。

(d) 当 i_2 为其最大值时,将 i_2 表示成 di_1/dt 的函数。

(e) 用(c) 和(d) 的结果计算 i_2 的峰值。

答:(a) $di_2/dt = 0$ 当 $t = \frac{1}{2}\ln 3(\text{s})$;(b) $i_1 = 2.5(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ A;(c) −2.89 A/s;(d) $i_2 = -(Mdi_1/dt)/12$;(e) 481.13 mA。

13.3.7　叠加定理的应用

因所分析的电路都是线性集总电路,所以可以用叠加定理将响应分解为几个部分,每个部

分可根据初始条件和单个电源求出。为了使用转移函数,将响应分成几个部分是非常重要的,下一节将会介绍。

分析图 13.24 所示电路,假设在两个电源作用到电路这一时刻,电感的初始电流为 ρ A,电容的初始电压为 γ V。所求的响应为电阻 R_2 两端的电压 v_2。

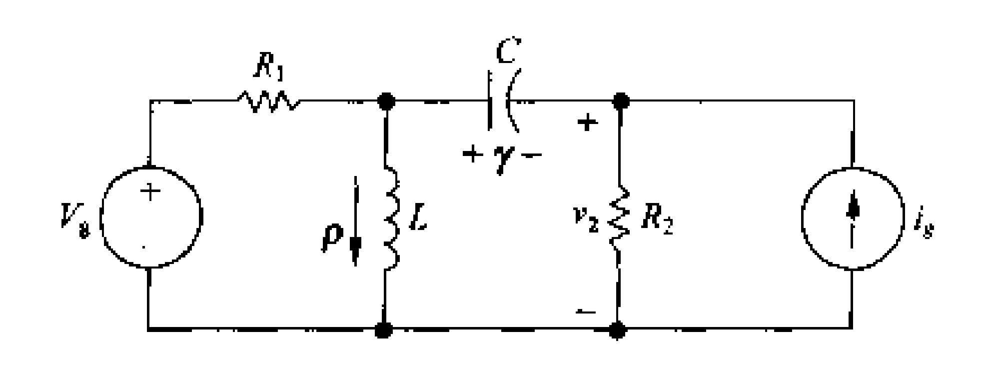


图 13.24 说明 s 域分析中应用叠加定理的电路

图 13.25 所示的为 s 域等效电路,因为要用节点电压法求 V_2,所以选 L 和 C 的并联等效电路。

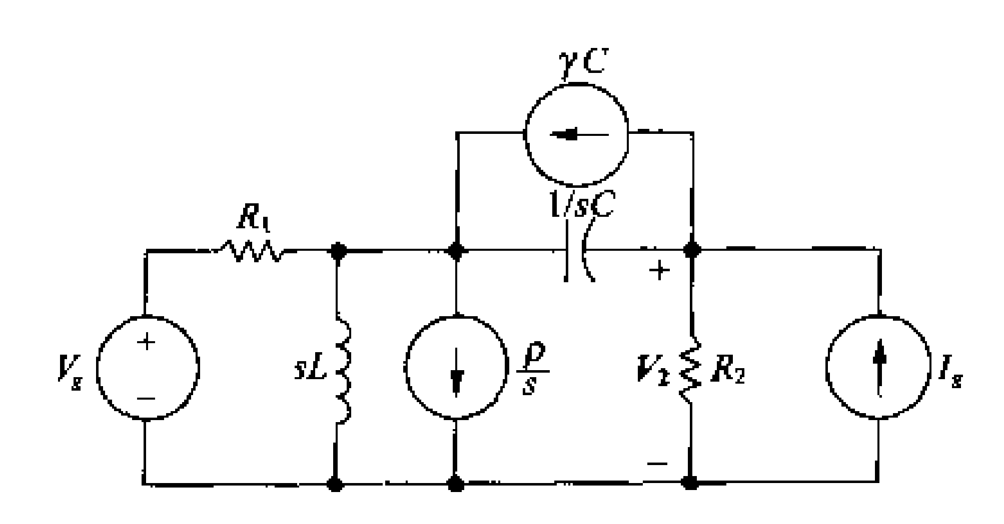


图 13.25 图 13.24 所示电路的 s 域等效电路

用叠加法求 V_2,计算每个电源单独作用时响应 V_2 的各部分分量,然后将各部分相加。先求 V_g 单独作用,使三个电流源开路,如图 13.26 所示。加一个节点电压 V_1'以便分析。V_1 和 V_2 上的撇号表示它们是 V_g 单独作用时分配到 V_1 和 V_2 的分量。

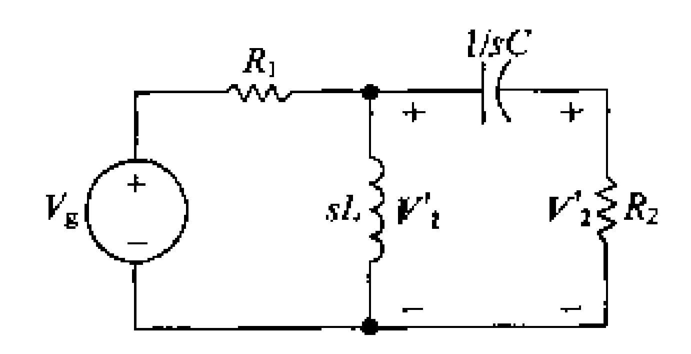


图 13.26 图 13.25 电路中 V_g 单独作用时的电路

图 13.26 所示电路的两个方程为:

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{sL}+sC\right)V_1'-sCV_2'=\frac{V_g}{R_1} \tag{13.73}$$

$$-sCV_1'+\left(\frac{1}{R_2}+sC\right)V_2'=0 \tag{13.74}$$

为方便起见,引入符号:

$$Y_{11}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{sL}+sC \tag{13.75}$$

$$Y_{12} = -sC \tag{13.76}$$

$$Y_{22} = \frac{1}{R_2} + sC \tag{13.77}$$

将式(13.75)、式(13.76)、式(13.77)代入式(13.73)和式(13.74),得:

$$Y_{11}V_1' + Y_{12}V_2' = V_g/R_1 \tag{13.78}$$

$$Y_{12}V_1' + Y_{22}V_2' = 0 \tag{13.79}$$

解式(13.78)和式(13.79),得 V_2'为:

$$V_2' = \frac{-Y_{12}/R_1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}V_g \tag{13.80}$$

当电流源 I_g 单独作用时,图 13.25 的电路化为图 13.27 的电路。其中 V_1''和 V_2''是 I_g 单独作用时,V_1 和 V_2 上产生的分量。若使用式(13.75)~(13.77)引入的符号,则图 13.27 所示电路的两个节点方程为:

$$Y_{11}V_1'' + Y_{12}V_2'' = 0 \tag{13.81}$$

$$Y_{12}V_1'' + Y_{22}V_2'' = I_g \tag{13.82}$$

由式(13.81)和(13.82)求 V_2''得:

$$V_2'' = \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}I_g \tag{13.83}$$

为求得电感的初始贮能所产生的 V_2 的分量 V_2''',必须求解图 13.28 所示的电路。

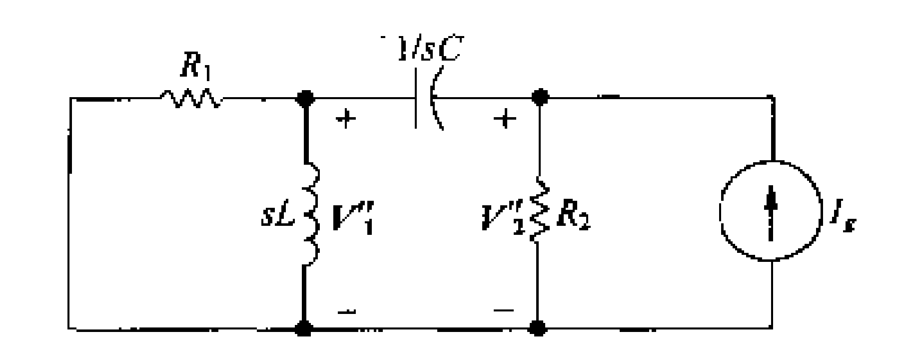


图 13.27 I_g 单独作用时的电路

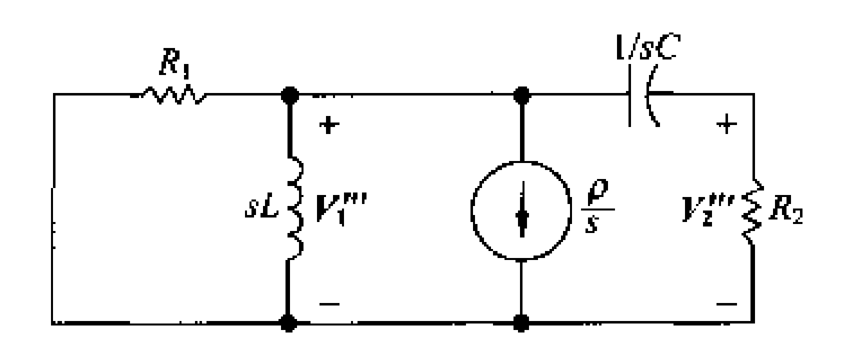


图 13.28 具有初始贮能的电感单独作用时的电路

于是:

$$Y_{11}V_1''' + Y_{12}V_2''' = -\rho/s \tag{13.84}$$

$$Y_{12}V_1''' + Y_{22}V_2''' = 0 \tag{13.85}$$

因此:

$$V_2''' = \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\rho \tag{13.86}$$

根据图 13.29 所示的电路,可以求得电容的初始贮能产生的分量 V_2'''',该电路的节点方程为:

$$Y_{11}V_1'''' + Y_{12}V_2'''' = \gamma C \tag{13.87}$$

$$Y_{12}V_1'''' + Y_{22}V_2'''' = -\gamma C \tag{13.88}$$

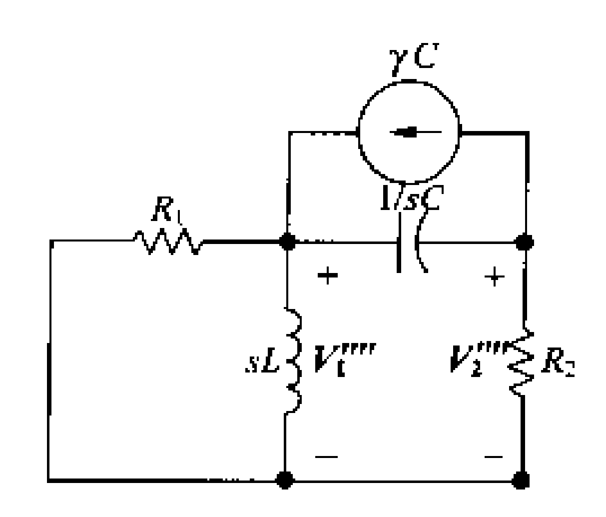


图 13.29 具有初始贮能的电容单独作用时的电路

求 V_2''''得：

$$V_2'''' = \frac{-(Y_{11}+Y_{12})C}{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}^2}\gamma \tag{13.89}$$

所以 V_2 的表达式为：

$$\begin{aligned} V_2 &= V_2' + V_2'' + V_3''' + V_2'''' \\ &= \frac{-(Y_{12}/R_1)}{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}^2}V_g + \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}^2}I_g \\ &\quad + \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}^2}\rho + \frac{-C(Y_{11}+Y_{12})}{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}^2}\gamma \end{aligned} \tag{13.90}$$

另外，也可以对图 13.25 所示的电路直接列出两个节点方程，求 V_2 不用叠加法。

有：

$$Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 = \frac{V_g}{R_1} + \gamma C - \frac{\rho}{s} \tag{13.91}$$

$$Y_{12}V_1 + Y_{22}V_2 = I_g - \gamma C \tag{13.92}$$

习题 13.47 要求验证，由式(13.91)和(13.92)得出的 V_2 与式(13.90)给出的解相等。

练习题

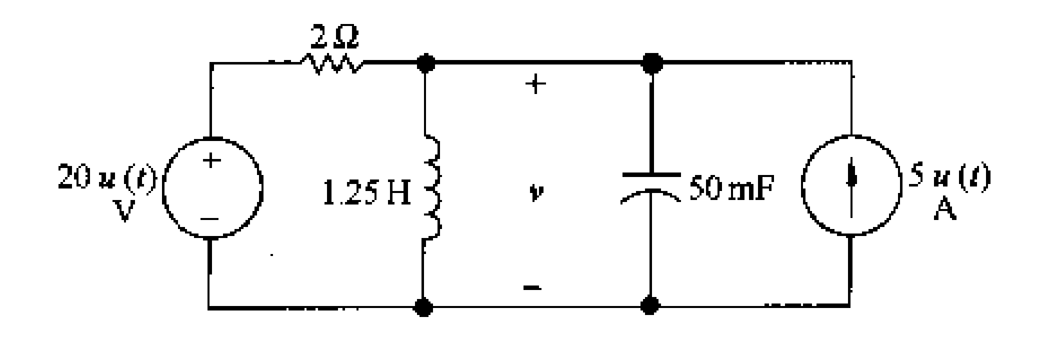
13.8 当两电源作用到电路中时，电路的初始贮能为零，电路如图所示。

(a) 求 $t>0$ 时，电压源所产生的电压 v 的分量。

(b) 求 $t>0$ 时，电流源所产生的电压 v 的分量。

(c) 求 $t>0$ 时，v 的表达式。

答：(a) $(100/3)e^{-2t}-(100/3)e^{-8t}$ V；(b) $-(50/3)e^{-2t}(50/3)e^{-8t}$ V；(c) $50e^{-2t}-50e^{-8t}$ V。



13.4 转移函数

转移函数定义为，s 域中输出响应的拉氏变换与输入激励的拉氏变换之比。在求转移函数时，要注意电路的限制条件，即初始条件为零，若电路中存在多个独立电源，那么可以为每个电源求出一个转移函数并用叠加定理求出所有电源作用时的响应。

转移函数为：

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \tag{13.93}$$

其中 $Y(s)$是输出信号的拉氏变换，$X(s)$是输入信号的拉氏变换。转移函数与所定义的输出信号有关，例如，图 13.30 所示电路，若电路的电流定义为响应信号，那么：

$$H(s)=\frac{I}{V_g}=\frac{1}{R+sL+1/sC}=\frac{sC}{s^2LC+RCs+1} \tag{13.94}$$

求解式(13.94)时，注意：I 对应于输出信号 $Y(s)$，V_g 则对应于输入信号 $X(s)$。

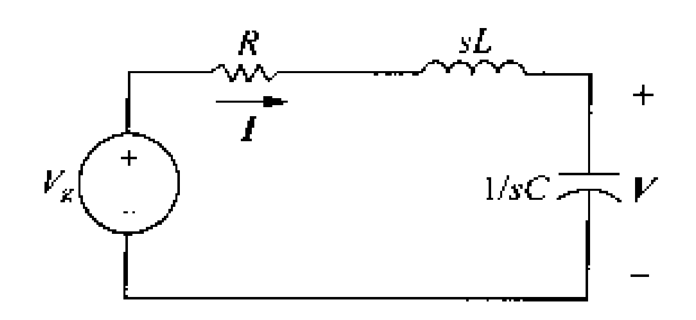


图 13.30　RLC 串联电路

若将电容电压定义为图 13.30 所示电路的输出信号，则转移函数为：

$$H(s)=\frac{I}{V_g}=\frac{1/sC}{R+sL+1/sC}=\frac{1}{s^2LC+RCs+1} \tag{13.95}$$

因电路中可能含有多个电源，感兴趣的输出信号定义也可能会有不同，因此，一个电路可能有多个转移函数。当电路中含有多个电源时，一个转移函数不能表达所有的输出信号。因此，必须将与每个电源相关的转移函数结合起来，再用叠加法求全部响应。例 13.1 叙述了已知 R，L，C，求转移函数的过程。

例 13.1　电压源作用到图 13.31 所示电路，响应信号是电容两端电压 v_0。

(a) 计算转移函数的数学表达式。

(b) 计算转移函数零极点的值。

解：

(a) 求转移函数的第一步是建立电路的 s 域等效电路模型，如图 13.32 所示。根据定义，转移函数是 V_0 与 V_g 之比，可由单节点方程求得，将流出该节点的电流相加，得：

$$\frac{V_0-V_g}{1000}+\frac{V_0}{250+0.05s}+\frac{V_0 s}{10^6}=0$$

解方程求 V_0 得：

$$V_0=\frac{1000(s+5000)V_g}{s^2+6000s+25\times10^6}$$

所以转移函数为：

$$H(s)=\frac{V_0}{V_g}=\frac{1000(s+5000)}{s^2+6000s+25\times10^6}$$

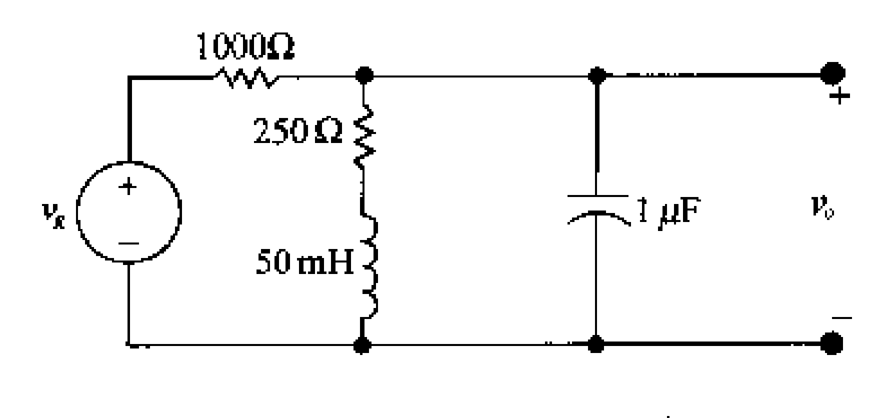




图 13.31 例 13.1 的电路

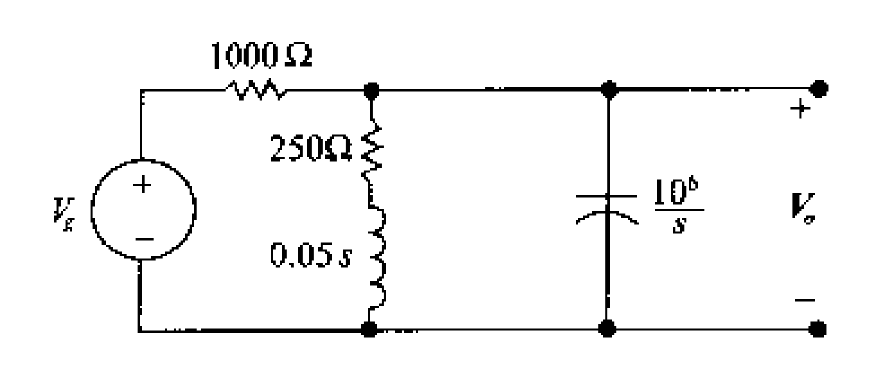


图 13.32 图 13.31 的 s 域等效电路

(b) $H(s)$的极点是分母多项式的根，因此：

$$-p_1=-3000-\mathrm{j}4000$$
$$-p_2=-3000+\mathrm{j}4000$$

$H(s)$的零点是分子多项式的根，因此，$H(s)$的零点在：

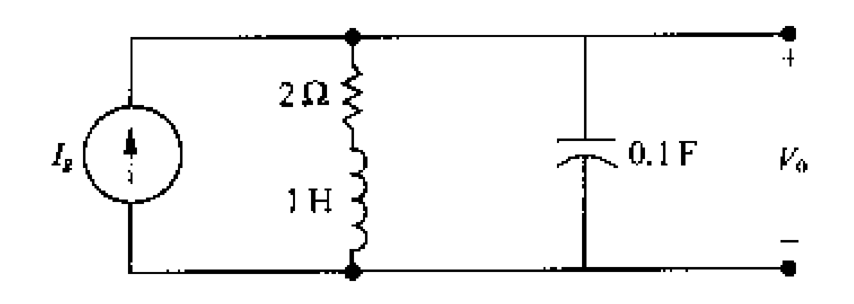
$$-z_1=-5000$$

练习题

13.9 (a) 电路如图所示，求转移函数 V_0/I_g 的数学表达式。

(b) 求出 $H(s)$零极点的值。

答：(a) $H(s)=10(s+2)/(s^2+2s+10)$，(b) $-p_1=-1+\mathrm{j}3$，$-p_2=-1-\mathrm{j}3$，$-z=-2$。



13.4.1 $H(s)$的零极点位置

对线性集总电路，$H(s)$是 s 的有理式，复极点和复零点总是成对出现。有界电源(电源值在某一有限边界内)的响应也是有界的，那么 $H(s)$的极点必须在 s 平面的左半面内。$H(s)$的零点在左右平面内均可以。

记住这些特点，就可以继续讨论在确定响应函数时 $H(s)$的作用。求响应 $y(t)$时用部分分式展开法。

13.5 部分分式展开中的转移函数

根据式(13.93)，可将电路的输出写为转移函数与激励函数之积的形式：

$$Y(s)=H(s)X(s) \tag{13.96}$$

其中，$H(s)$是 s 的分式，参考表 13.1 可知，在电路分析中，感兴趣的激励函数中大多数也是 s 的分式。

将方程的右边展开成部分分式之和，$H(s)$和 $X(s)$的每个极点都会产生一个分式项。由12 章讨论结果已知，极点是分母多项式的根，零点是分子多项式的根，由 $H(s)$的极点产生的分式项求出的响应，是完全响应中的暂态分量，而 $X(s)$极点项求出的响应是完全响应中的稳态分量，所谓稳态响应是指暂态响应分量忽略后仍然存在的响应分量。例 13.2 说明了这些结论。

例 13.2　图 13.31 中的激励为一个电压源 $v_g = 50tu(t)$，

(a) 用转移函数求 v_o。

(b) 求暂态响应分量。

(c) 求稳态响应分量。

(d) 画出 $0 \leqslant t \leqslant 1.5$ ms 间的 v_0 曲线。

解：

(a) 由例 13.1 得：

$$H(s) = \frac{1000(s+5000)}{s^2+6000s+25\times10^6}$$

激励源的拉氏变换为 $50/s^2$，所以输出电压的 s 域表达式为：

$$V_0 = \frac{1000(s+5000)}{(s^2+6000s+25\times10^6)}\frac{50}{s^2}$$

其部分分式展开为：

$$V_0 = \frac{K_1}{s+3000-\mathrm{j}4000} + \frac{K_1^*}{s+3000+\mathrm{j}4000} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s}$$

用 12.7 节所述方法，求系数 K_1，K_2 和 K_3：

$$K_1 = 5\sqrt{5}\times10^{-4}\,\underline{/79.70^\circ}$$

$$K_1^* = 5\sqrt{5}\times10^{-4}\,\underline{/-79.70^\circ}$$

$$K_2 = 10$$

$$K_3 = -4\times10^{-4}$$

v_0 的时域表达式为：

$$v_0 = [10\sqrt{5}\times10^{-4}\mathrm{e}^{-3000t}\cos(4000t+79.70^\circ) + 10t - 4\times10^{-4}]u(t)\ \mathrm{V}$$

(b) v_0 的暂态分量为：

$$10\sqrt{5}\times10^{-4}\mathrm{e}^{-3000t}\cos(4000t+79.70^\circ)$$

该项是转移函数的极点$(-3000+\mathrm{j}4000)$和$(-3000-\mathrm{j}4000)$产生的。

(c) 响应的稳态分量为

$$(10t-4\times10^{-4})u(t)$$

这两项是由激励电压的二阶极点(K/s^2)产生的。

(d) v_0 的曲线如图 13.33 所示，大约在 1 ms 后，看不到与稳态值之间的误差。

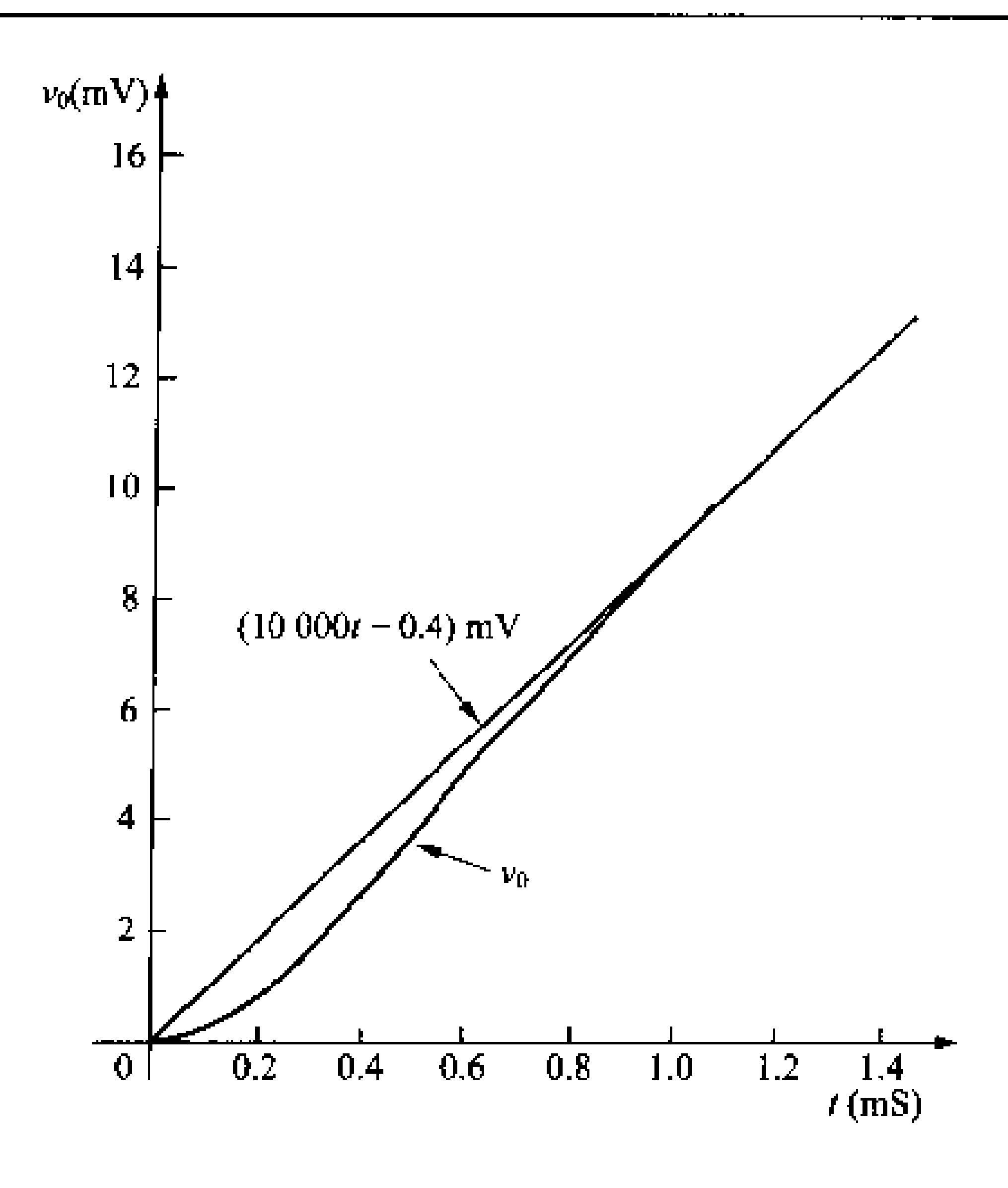


图 13.33 例 13.2 中 $v_0 - t$ 曲线

练习题

13.10 (a) 求练习题 13.9 中电路的单位阶跃响应。

(b) 求练习题 13.9 中电路的单位冲激响应。

答:(a) $[2+(10/3)e^{-t}\cos(3t+126.87°)]u(t)$ V,(b) $10.54e^{-t}\cos(3t-18.43°)u(t)$ V。

13.11 一个电路的单位冲激响应为:

$$v_0(t)=10000e^{-70t}\cos(240t+\theta)\ \text{V}$$

其中 $\tan\theta=\frac{7}{24}$。

(a) 求电路的转移函数。

(b) 求电路的单位阶跃响应。

答:(a) $9600s/(s^2+140s+62500)$,(b) $40e^{-70t}\sin 240t$ V。

13.5.1 *H(s)*的结论在电路分析中的应用

例 13.2 清楚地表明如何通过部分分式将转移函数 $H(s)$与电路响应联系起来。但是例题中也提出了一个问题,当增幅斜坡电压激励电路时,会产生增幅斜坡响应,有实用性吗?最终在大的电压作用下,电路元件会损坏,而且当上述情况发生后,线性模型就不再成立了。斜坡函数经过有限时间间隔增加到一个最大值,这种斜坡响应是有实用意义的。如果达到最大值所需要的时间比电路的时间常数长,那么在有限时间间隔内可以将斜坡函数假设为无界的斜坡函数。

关于式(13.96)有两点需要补充。第一,讨论延时输入下电路的响应。若输入延时 a 秒

得：

$$\mathscr{L}\{x(t-a)u(t-a)\}=\mathrm{e}^{-as}X(s)$$

再结合式(13.96)，得到响应为：

$$Y(s)=H(s)X(s)\mathrm{e}^{-as} \tag{13.97}$$

若 $y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(S)X(S)\}$，那么，由式(13.97)得：

$$y(t-a)u(t-a)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)X(s)\mathrm{e}^{-as}\} \tag{13.98}$$

因此，输入延时 a 秒，则响应也延时 a 秒，电路的这种特性叫时不变性。

第二，若是单位冲激电源激励电路，则电路的响应等于转移函数的反变换。

如果：

$$x(t)=\delta(t)，则\ X(s)=1$$

以及：

$$Y(s)=H(s) \tag{13.99}$$

因此，由式(13.99)得：

$$y(t)=h(t) \tag{13.100}$$

转移函数的反变换等于电路的单位冲激响应，它也是电路的自然响应，因为冲激电源相当于电路中的瞬时贮能(见 3.8 节)，紧接着贮能的释放引起自然响应(见习题 13.83)。

实际上，电路的冲激响应 $h(t)$ 包含很多信息，可以用来计算任何激励源激励电路时的响应。下一节中将介绍，卷积积分可用来求任何电源激励下的电路响应。

13.6 转移函数和卷积积分

卷积积分把线性非时变电路的响应 $y(t)$ 与电路的输入 $x(t)$ 以及电路的单位冲激响应联系在一起。积分关系可用两种方式表示：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\lambda)x(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{13.101}$$

卷积积分的重要性可以从几个方面说明。首先，完全在时域内求解。如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 只能通过实验得出，那么卷积积分会带来方便，但是，变换法可能很繁琐甚至不可能，因为这时必须对实验数据进行拉氏变换。第二，卷积积分将记忆的概念和加权函数的概念引入分析中。以后会说明记忆的概念，使读者清楚冲激响应(加权函数) $h(t)$，并表明输出波形在某种程度上对输入波形的复制。第三，卷积积分为拉氏变换乘积的反变换提供了一般方法。

根据式(13.101)的结果，假设电路是线性时不变电路。因电路是线性的，所以可以应用叠加定理，因为它是时不变的，所以输入延时与输出延时相等。参见图 13.34，含 $h(t)$ 的方框代表任一线性非时变电路，其冲激响应已知。$x(t)$ 代表激励信号，$y(t)$ 是要求解的输出信号。

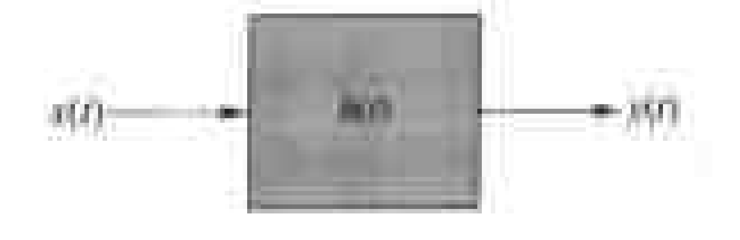


图 13.34　一般电路的方框图

假设 $x(t)$ 是一个一般的激励信号,如图 13.35(a) 所示。为方便起见,假设 $t<0^-$ 时,$x(t)=0$,一旦清楚 $t<0^-$ 时,$x(t)=0$ 的卷积积分结果后,再扩展积分区间,以便包含在整个时域内都存在的激励函数,这时理解卷积积分就非常简单了。同时还要注意,输入在原点可以不连续,也就是在 0^- 和 0^+ 之间存在跳变。

现在用一系列等宽为 $\Delta\lambda$ 的矩形脉冲近似表示 $x(t)$,如图 13.35(b) 所示,即:

$$x(t)=x_0(t)+x_1(t)+\cdots+x_i(t)+\cdots \tag{13.102}$$

其中 $x_i(t)$ 是一个矩形脉冲,它在 λ_i 和 λ_{i+1} 之间等于 $x(t)$,其他处为零。第 i 个脉冲可以用阶跃函数表示,即:

$$x_i(t)=x(\lambda_i)\{u(t-\lambda_i)-u[t-(\lambda_i+\Delta\lambda)]\}$$

令 $x(t)$ 近似表达式中的 $\Delta\lambda$ 足够小,使第 i 个部分可以近似看做是一个强度为 $x(\lambda_i)\Delta\lambda$ 的冲激函数,图 13.35(c) 表示了冲激的表达式,每个冲激的强度在箭头旁的括号中。$x(t)$ 的冲激表达式为:

$$x(t)=x(\lambda_0)\Delta\lambda\delta(t-\lambda_0)+x(\lambda_1)\Delta\lambda\delta(t-\lambda_1)+\cdots+x(\lambda_i)\Delta\lambda\delta(t-\lambda_i)+\cdots \tag{13.103}$$

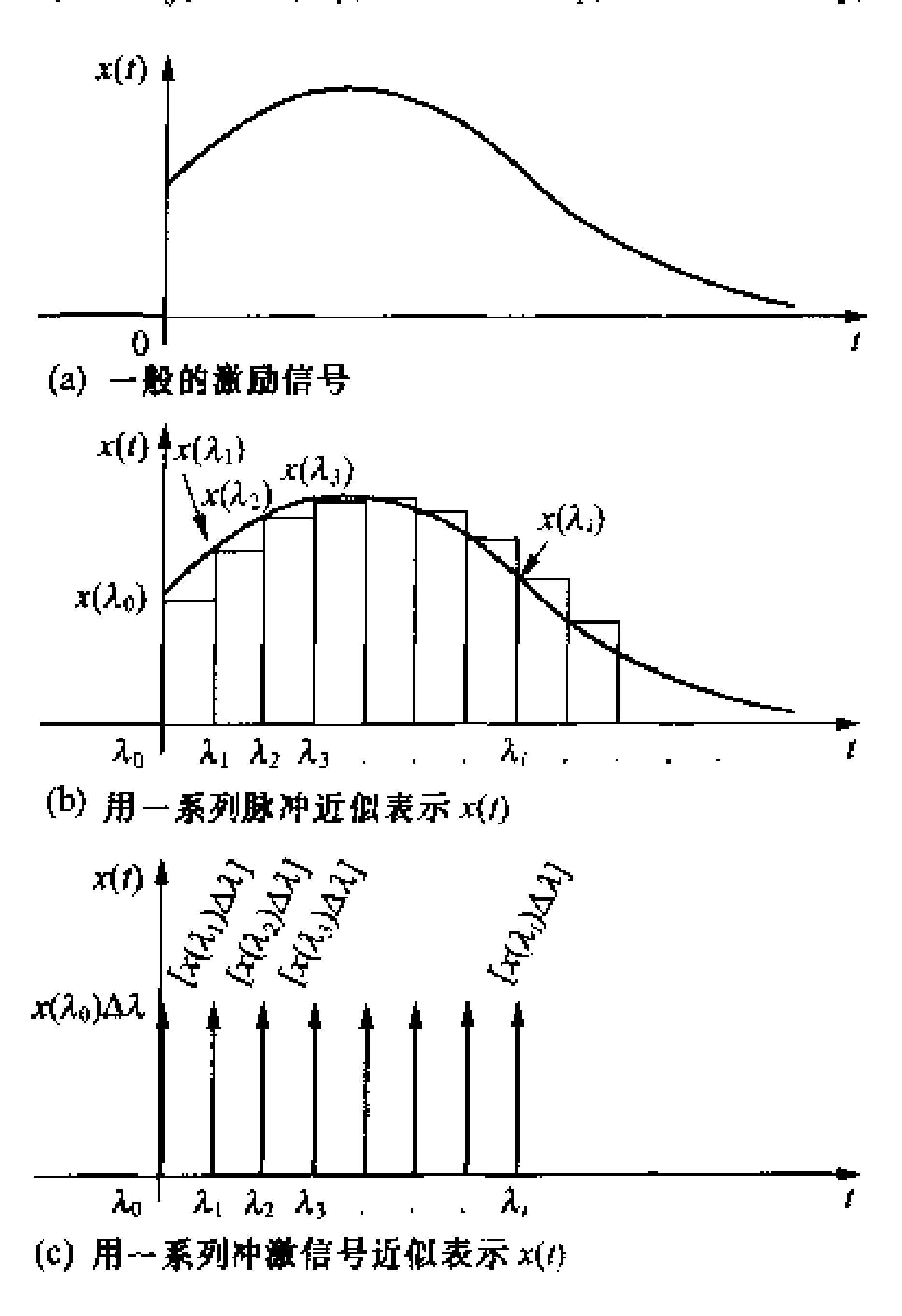


图 13.35 激励信号 $x(t)$

当 $x(t)$ 表示为一系列冲激函数时候(冲激以相等的时间间隔出现),响应 $y(t)$ 就包含一系列同样延时的冲激响应之和,每个响应的强度与激励到电路中的冲激强度有关。例如,图 13.34 的方框中,电路的单位冲激响应是延时的指数函数。如图 13.36(a)所示,则 $y(t)$ 的表达式为:

$$\begin{aligned}y(t)\approx\ & x(\lambda_0)\Delta\lambda h(t-\lambda_0)+x(\lambda_1)\Delta\lambda h(t-\lambda_1)\\ &+x(\lambda_2)\Delta\lambda h(t-\lambda_2)+\cdots+x(\lambda_i)\Delta\lambda h(t-\lambda_i+\cdots\end{aligned} \tag{13.104}$$

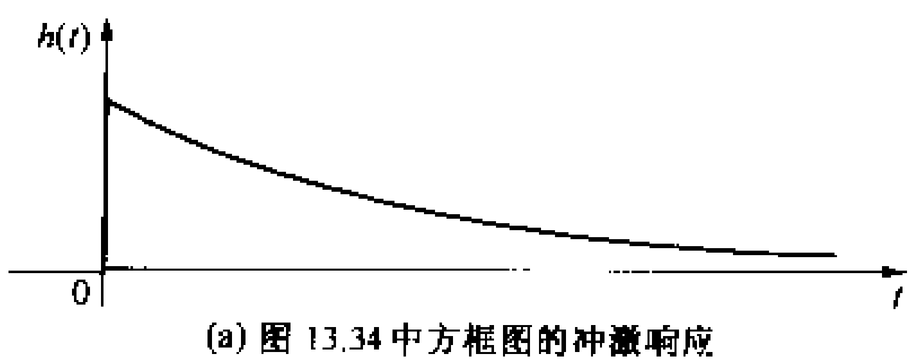
当 $\Delta\lambda\to 0$ 时，式(13.104)中的和趋近于一个连续的积分式，或为：

$$\sum_{i=0}^{\infty} x(\lambda_i)h(t-\lambda_i)\Delta\lambda \to \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (13.105)$$

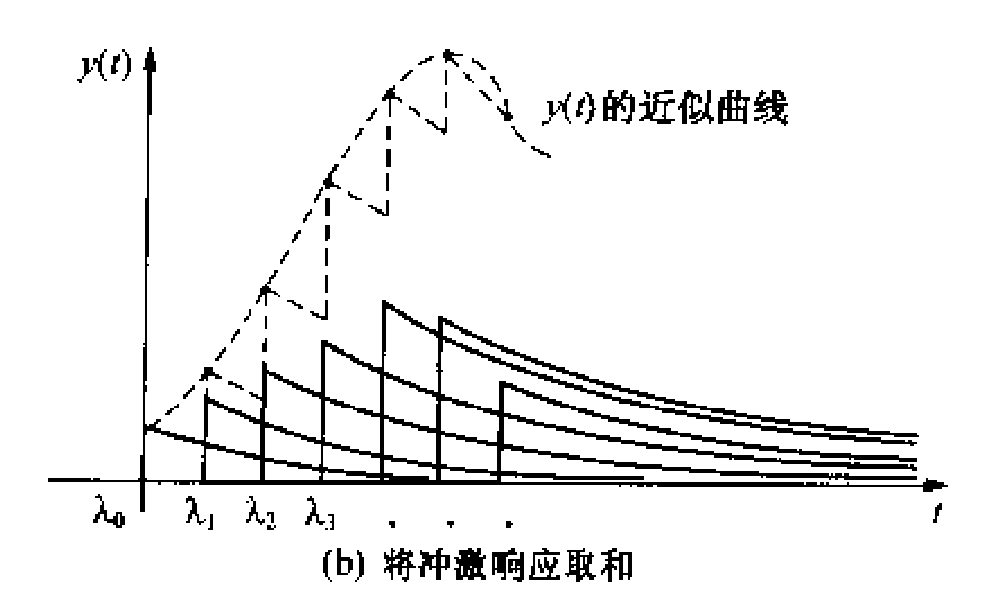
因此：



$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (13.106)$$



(a) 图 13.34 中方框图的冲激响应



(b) 将冲激响应取和

图 13.36　$y(t)$的近似计算

如果 $x(t)$存在于整个时间内，式(13.106)的下限变为 $-\infty$，于是，一般情况下：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (13.107)$$

这是由式(13.101)给出的卷积积分的另一种形式，对式(13.107)进行积分变量代换，可得出第一种积分形式。令 $u=t-\lambda$，则 $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}\lambda$。当 $\lambda=\infty$时，$u=-\infty$。当 $\lambda=-\infty$时，$u=+\infty$。于是可写出方程：

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} x(t-u)h(u)(-\mathrm{d}u)$$

或：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)h(u)(\mathrm{d}u) \qquad (13.108)$$

但是因 u 只是积分变量，所以式(13.108)与式(13.101)是等效的，其中式(13.101)是第一种卷积积分的形式。

式(13.101)所表示的三个函数 $y(t)$，$h(t)$，$x(t)$之间的积分关系常写为下面的简化符号：

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t) \qquad (13.109)$$

式中的星号表明 $h(t)$和 $x(t)$之间是卷积积分关系，这样 $h(t) * x(t)$读做“$x(t)$卷积 $h(t)$”，其含义是：

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

而 $x(t)*h(t)$读做“$h(t)$卷积 $x(t)$”,表示为:

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

式(13.101)中的积分式给出了两个函数卷积的一般关系式。但是在卷积的应用中,可以将下限改为零,上限改为 t。这样式(13.101)可写做:

$$y(t)=\int_{0}^{t}h(\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{0}^{t}x(\lambda)h(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (13.110)$$

改变积分限的原因有两个。第一,对物理可实现的电路而言,当 $t<0$ 时,$h(t)=0$,也就是说在冲激信号作用前不存在冲激响应。第二,当激励作用到系统这一时刻开始计时。因此,当 $t<0^-$ 时,$x(t)=0$。

当将积分作为一种计算工具的时候,式(13.110)中包含的卷积积分的图解非常重要。先从第一种积分开始,为讨论方便,假设电路的冲激响应是指数延时函数。如图 13.37(a)所示,同时激励函数的波形如图 13.37(b)所示,在两个图中均用 λ 代替 t 作为积分符号。用 $-\lambda$ 代替λ,就是将激励以纵轴为对称轴翻转,用 $t-\lambda$ 代替 $-\lambda$,就是将翻转后的函数向右移,如图 13.37(c)和(d) 所示。这种翻转操作就引出了“卷”的概念。对任一给定的 t,响应函数 $y(t)$就是乘积函数 $h(\lambda)x(t-\lambda)$曲线下的面积。

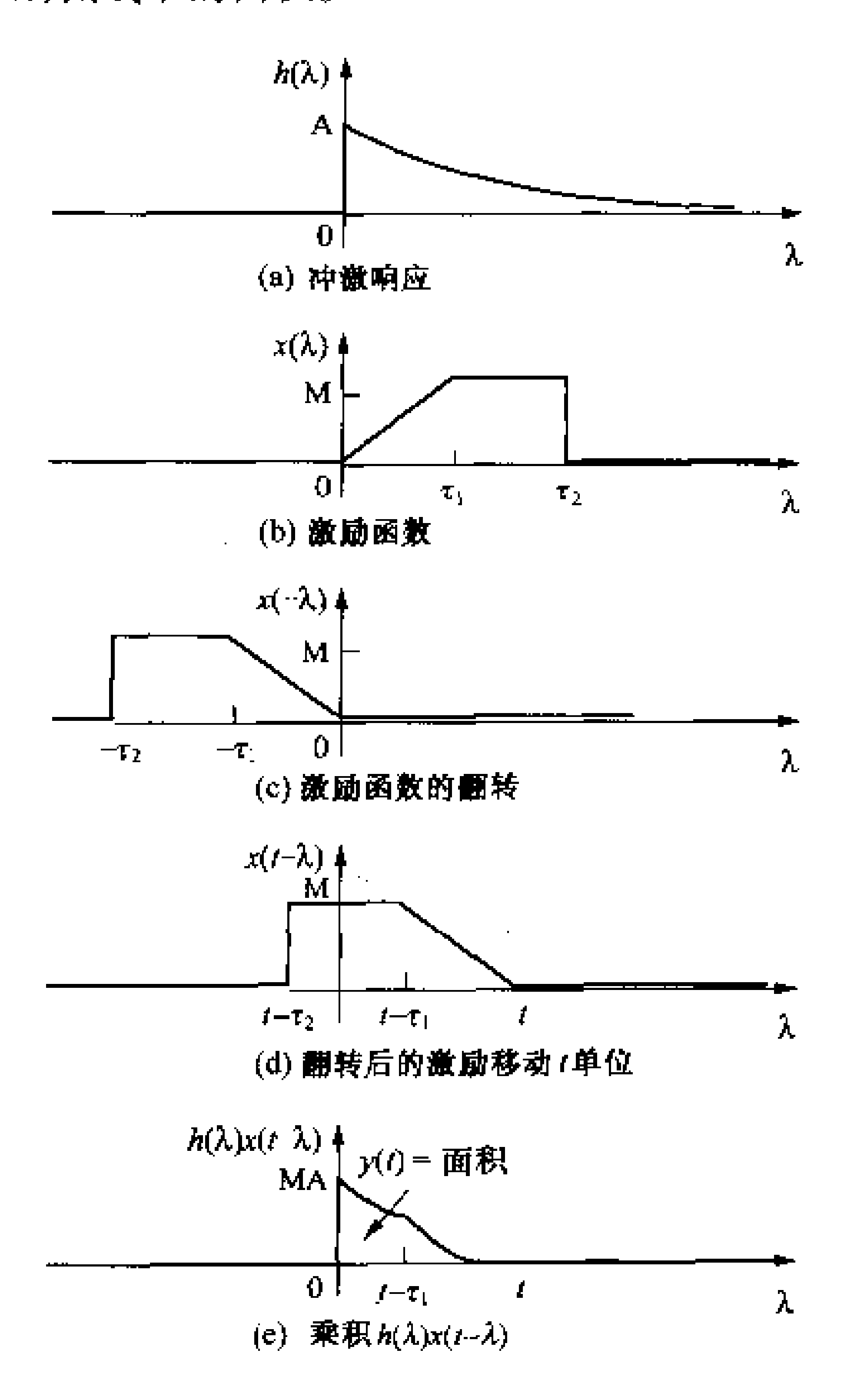


图 13.37 卷积积分 $\int_0^t h(t-\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$ 的图解

如图 13.37(e) 所示，显然，从曲线可以看出卷积积分的下限为零，上限为 t 的原因。当 $\lambda<0$时，因 $h(\lambda)$为零，所以乘积 $h(\lambda)x(t-\lambda)$也为零，当 $\lambda>t$ 时，因 $x(t-\lambda)$为零，所以乘积 $h(\lambda)x(t-\lambda)$也为零。

图 13.38 展示了卷积积分的第二种形式，注意图 13.38(e) 中的乘积函数确定了积分下限为零，积分上限为 t。例 13.3 说明了如何用卷积以及单位冲激响应求电路的响应。

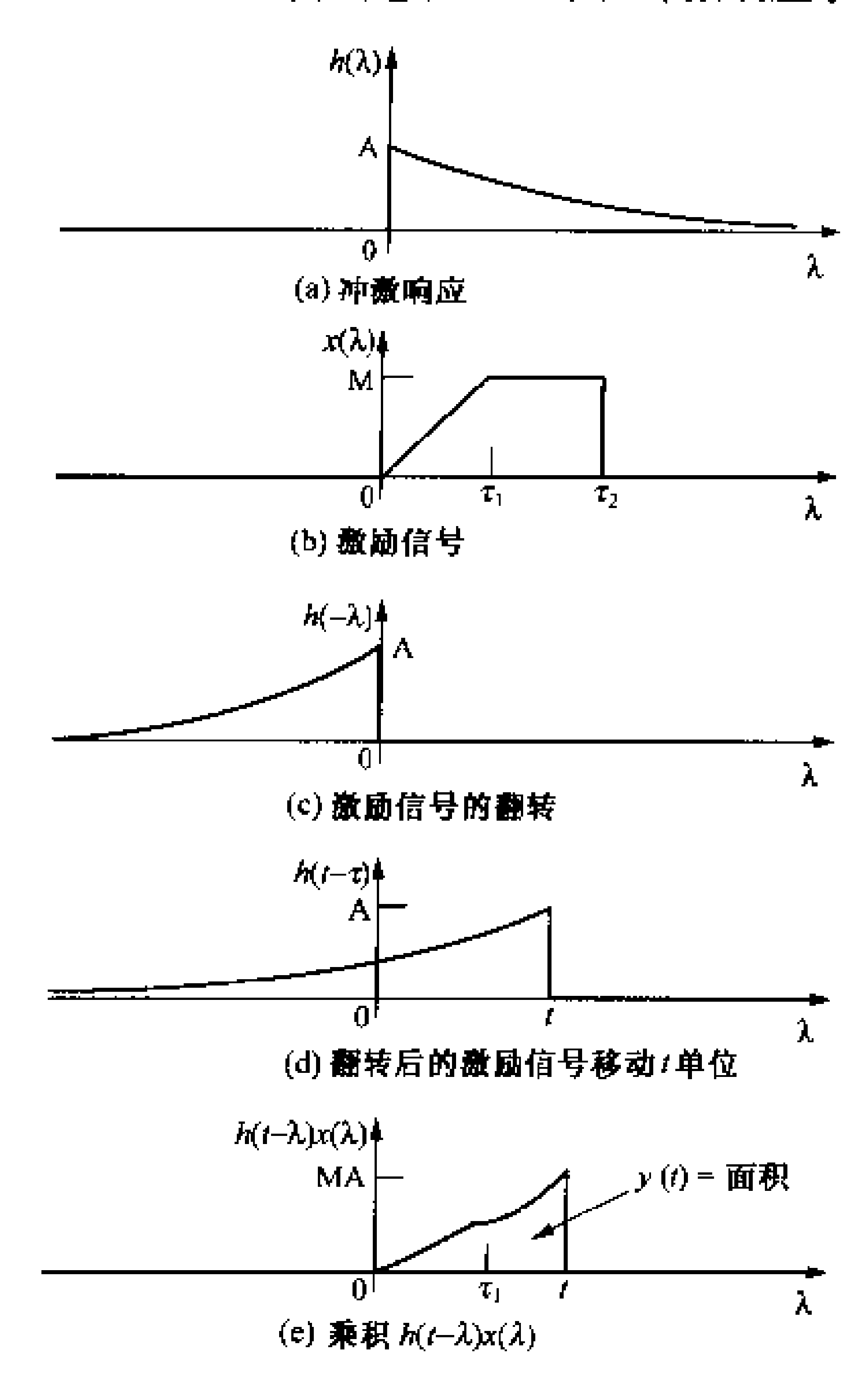


图 13.38　卷积积分 $\int_0^t h(t-\lambda)x(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ 的图解

例 13.3　图 13.39(a) 中电路的激励电压 v_i 如图 13.39(b)所示。

(a) 用卷积求 v_0。

(b) 画出 v_0 在 0～15 秒间的曲线。

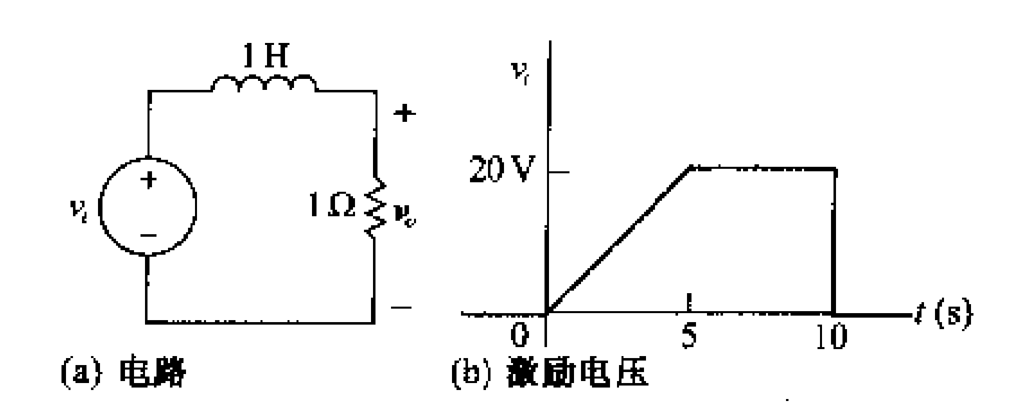


图 13.39　例 13.3 的电路和激励电源

解：

(a) 用卷积法求电路响应的第一步是求电路的冲激响应，由图 13.39(a)的 s 域等效电路求 v_o 的表达式：

$$V_o = \frac{V_i}{s+1}(1)$$

当 v_i 是单位冲激函数 $\delta(t)$ 时，则：

$$\begin{aligned} v_o &= h(t) \\ &= e^{-t}u(t) \end{aligned}$$

据此：

$$h(\lambda) = e^{-\lambda}u(\lambda)$$

用第一种卷积形式，建立冲激响应和翻转后的激励函数，如图 13.40 所示，这对确定卷积积分限很有帮助。移动翻转后的激励函数，将积分分成三个间隔：$0 \leqslant t \leqslant 5$，$5 \leqslant t \leqslant 10$，$10 \leqslant t \leqslant \infty$。激励函数的三个间断点就确定了这些断点。图 13.41 表明了每个阶段激励函数所在的位置。

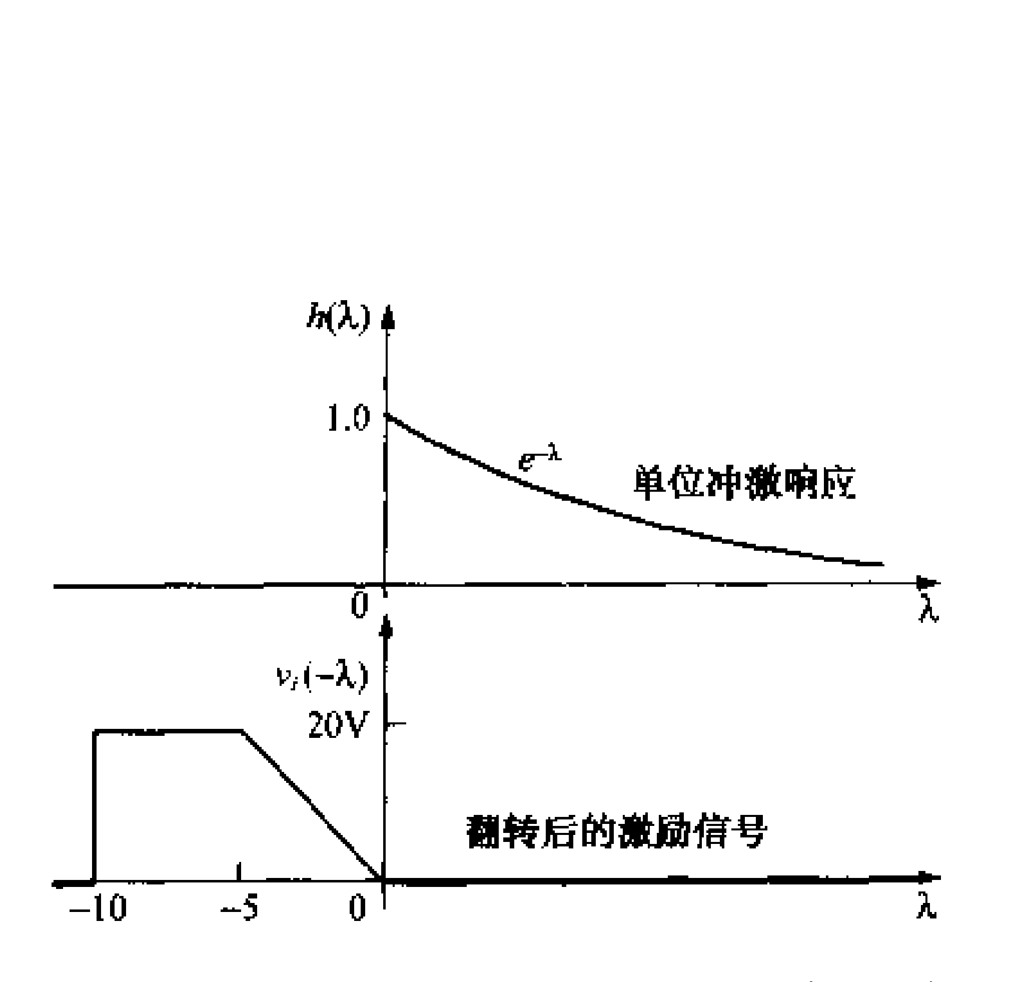


图 13.40 例 13.3 的冲激响应和翻转后的激励函数

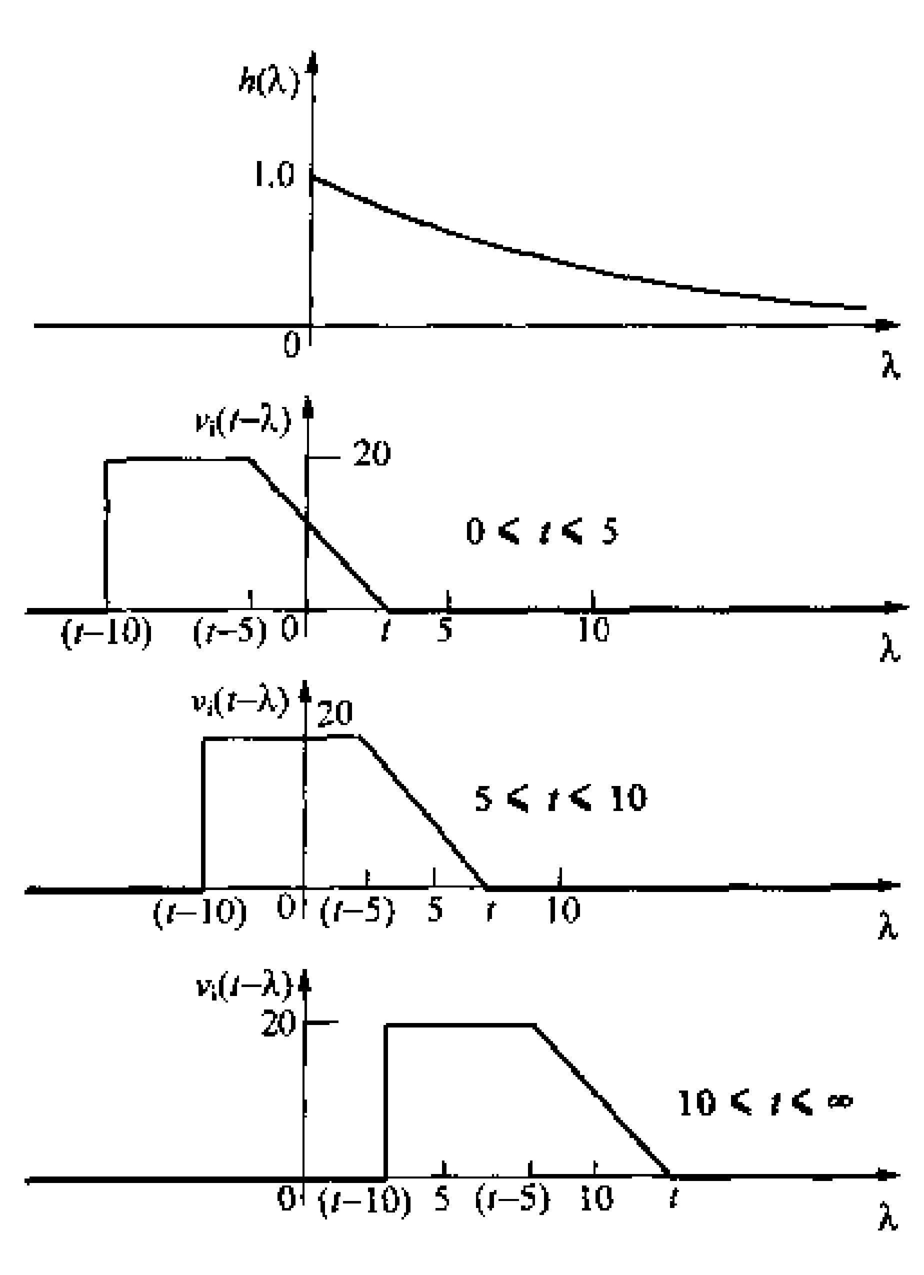


图 13.41 $v_i(t-\lambda)$ 移动三个不同的时间

在 $0 \leqslant t \leqslant 5$ 时间内，v_i 的解析表达式为：

$$v_i = 4t, \ (0 \leqslant t \leqslant 5 \text{ s})$$

因此，在 $t-5 \leqslant \lambda \leqslant t$ 内，翻转的激励函数的解析表达式为：

$$v_i(t-\lambda) = 4(t-\lambda), \ (t-5 \leqslant \lambda \leqslant t)$$

现在可以建立三个 v_0 的积分表达式：

当 $0 \leqslant t \leqslant 5$：

$$v_0 = \int_0^t 4(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda$$
$$= 4(e^{-t} + t - 1)\ \text{V}$$

当 $5 \leqslant t \leqslant 10$:

$$v_0 = \int_0^{t-5} 20e^{-\lambda}d\lambda + \int_{t-5}^{t} 4(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda$$
$$= 4(5 + e^{-t} - e^{-(t-5)})\ \text{V}$$

当 $10 \leqslant t \leqslant \infty$:

$$v_0 = \int_{t-10}^{t-5} 20e^{-\lambda}d\lambda + \int_{t-5}^{t} 4(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda$$
$$= 4(e^{-t} - e^{-(t-5)} + 5e^{-(t-10)})\ \text{V}$$

(b) 用适当的方程，每隔 1 s 间隔，计算出 v_0，结果放在表 13.2 中，图 13.42 表示其波形。

表 13.2　$v_0(t)$的数值

t	v_0	t	v_0	t	v_0
1	1.47	6	18.54	11	7.35
2	4.54	7	19.56	12	2.70
3	8.20	8	19.80	13	0.99
4	12.07	9	19.93	14	0.37
5	16.03	10	19.97	15	0.13

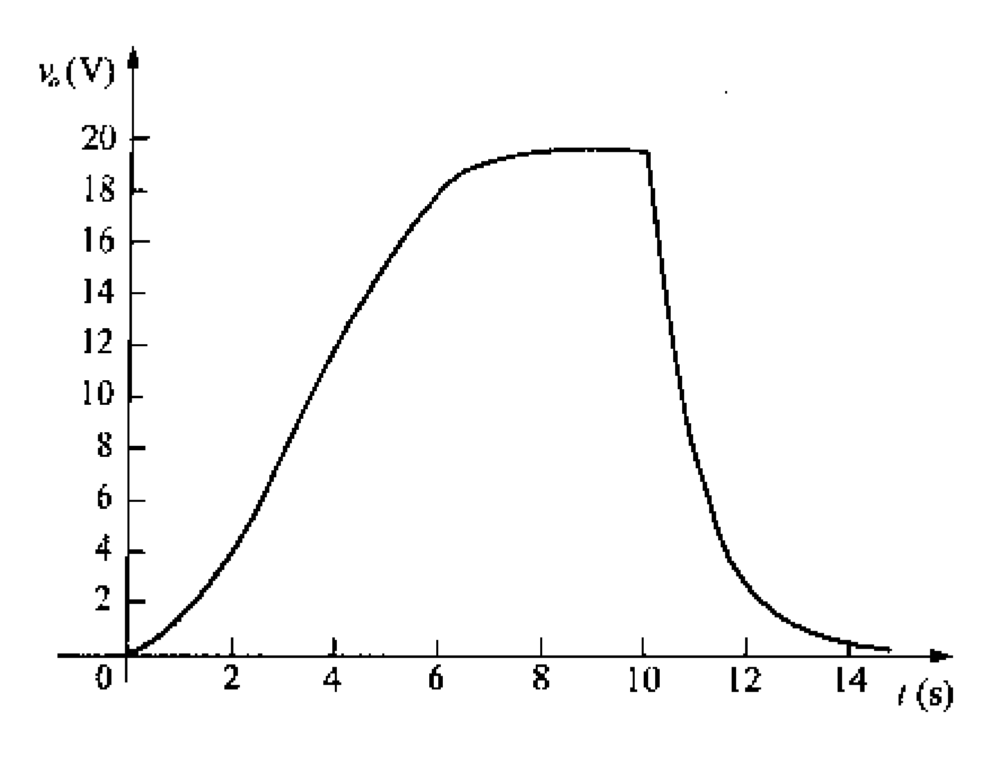


图 13.42　例 13.3 题的电压响应时间曲线

13.6.1　记忆性和加权函数的概念

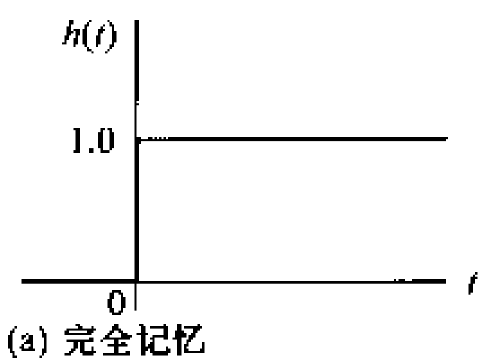
在本节开始曾经提到过，卷积积分将记忆和加权函数的概念引入电路分析之中。卷积积分的图形解释是掌握这些概念的最容易方法，可以用时间尺度的方式将激励函数的翻转和平移描述为过去、现在和未来，纵轴代表目前值，纵轴的左边代表未来值，右边代表过去值，如图 13.43 所示。为了说明问题方便，采用例 13.3 的激励函数。

把 $x(t-\tau)$波形的过去、现在和将来与电路的冲激响应结合起来观察后会发现，冲激响应根据目前和过去值对 $x(t)$加权，如图 13.41 所示，冲激响应(例 13.3)对 $x(t)$的过去值加权比

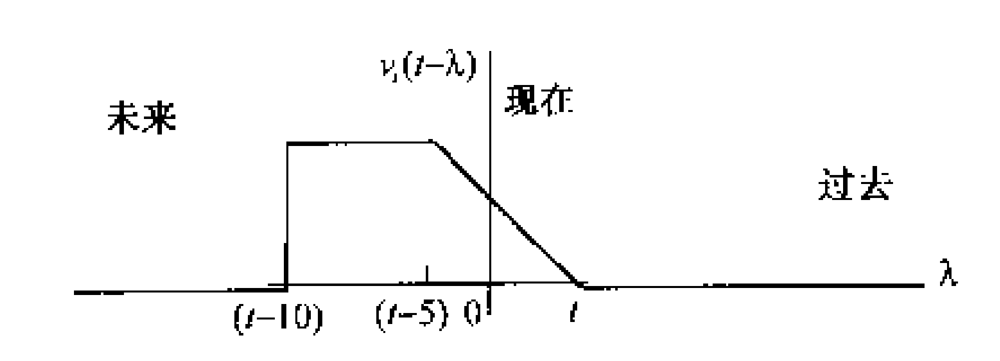
对 $x(t)$的当前值加权小得多,换句话说,电路对过去的输入值保留的越来越少。因此,对图 13.42 中的 V_o,当输入的当前值为零($t>10$ s)时,V_o 很快趋向于零,也就是说,输入的当前值比过去值接受到较多的加权,所以输出很快地接近输入的当前值。

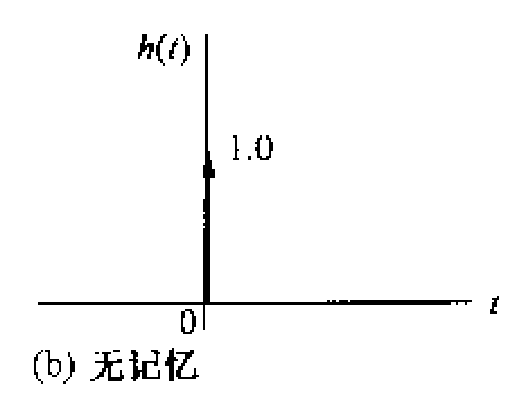
$x(t-\lambda)$乘以 $h(\lambda)$倍,冲激响应就是电路的加权函数。反之,加权函数决定了电路记忆性的大小。记忆是指电路的响应与输入相似的程度,例如,如果冲激响应或者加权函数是水平的,如图 13.44(a),对所有的 $x(t)$值无论是过去和当前,都会得到相等的加权,这种电路具有完全的记忆。但如果冲激响应是冲激函数,如图 13.44(b),它对 $x(t)$的过去值没有加权,这种电路没有记忆。因此,电路的记忆性越强,激励函数的波形和响应函数波形之间的差别就越大。证明:假设电路没有记忆,即 $h(t)=A\delta(t)$。根据卷积积分定义记为:

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=\int_0^t A\delta(\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=Ax(t)\end{aligned}\tag{13.111}$$



(a) 完全记忆





(b) 无记忆

图 13.43 激励信号的过去、现在和将来值

图 13.44 加权函数

式(13.111)表明,如果电路无记忆,则输出是输入的比例复制。

例 13.3 所示电路表明,对有记忆的电路,输出和输入之间存在误差,若将输出和输入画到同一个图中,误差会看得非常清楚,如图 13.45 所示。

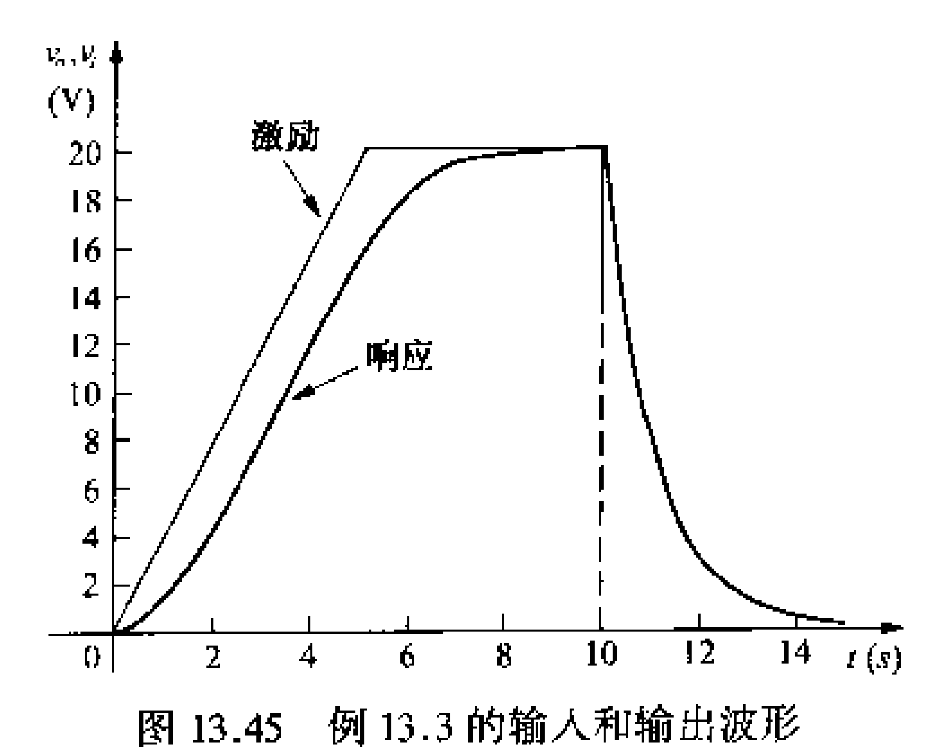
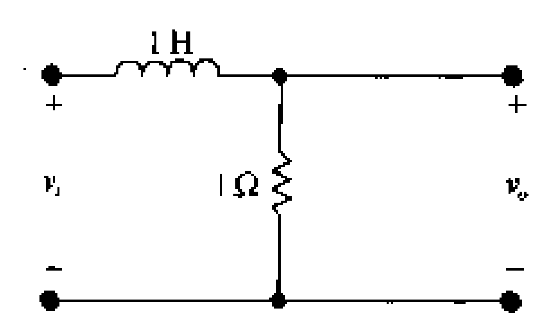


图 13.45 例 13.3 的输入和输出波形

练习题

13.12　一个矩形脉冲电压 $v_i=[u(t)-u(t-1)]$ V 作用到如图所示的电路中，试用卷积积分求 v_o。

答：$v_o=1-e^{-t}$ V, $0\leqslant t\leqslant 1$, $v_o=(e-1)e^{-t}$ V, $1\leqslant t\leqslant\infty$。



13.13　交换练习题 13.12 所示电路中的电阻和电感，然后用卷积积分求 v_o。

答：$v_o=e^{-t}$ V, $0<t<1$, $v_o=(1-e)e^{-t}$ V, $1<t\leqslant\infty$。

13.7　转移函数和正弦稳态响应

如果求出电路的转移函数，就不需要单独对电路进行相量分析来求稳态响应，而直接用转移函数建立激励源和稳态响应的关系。首先假设：

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi)\tag{13.112}$$

然后，用式(13.96)求 $y(t)$ 的稳态响应。为求 $x(t)$ 的拉氏变换，先将 $x(t)$ 写成：

$$x(t)=A\cos\omega t\cos\phi-A\sin\omega t\sin\phi\tag{13.113}$$

从而得到：

$$X(s)=\frac{(A\cos\phi)s}{s^2+\omega^2}+\frac{(A\sin\phi)\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{A(s\cos\phi-\omega\sin\phi)}{s^2+\omega^2}\tag{13.114}$$

将式(13.114)代入式(13.96)，得出响应的 s 域表达式：

$$Y(s)=H(s)\frac{A(s\cos\phi-\omega\sin\phi)}{s^2+\omega^2}\tag{13.115}$$

观察式(13.115)的部分分式展开式。展开式的项数与 $H(s)$ 的极点有关，因 $H(s)$ 作为物理可实现电路的转移函数是不难确定的。式(13.115)的展开式为：

$$Y(s)=\frac{K_1}{s-j\omega}+\frac{K_1^*}{s+j\omega}$$

$$+\sum \text{由 } H(s) \text{ 极点产生的项}\tag{13.116}$$

在式(13.116)中，前两项是由激励源的共轭复极点产生的，但 $H(s)$ 的极点产生的响应对 $y(t)$ 的稳态响应没有影响，因为，所有的 $H(s)$ 的极点位于 s 左半平面，所以当 t 增加时，相应的时域项趋向于零，所以，方程右边的前两项决定了稳态响应。剩下的问题就是求部分分式的系数 K_1：

$$K_1=\left.\frac{H(s)A(s\cos\phi-\omega\sin\phi)}{s+j\omega}\right|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{H(\mathrm{j}\omega)A(\mathrm{j}\omega s\cos\phi - \omega\sin\phi)}{2\mathrm{j}\omega}$$

$$= \frac{H(\mathrm{j}\omega)A(\cos\phi + \mathrm{j}\sin\phi)}{2} = \frac{1}{2}H(\mathrm{j}\omega)A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} \tag{13.117}$$

一般情况下,$H(\mathrm{j}\omega)$是一个复数,可以写成极数形式,即:

$$H(\mathrm{j}\omega) = |H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\omega)} \tag{13.118}$$

式(13.118)中的转移函数的幅度和相位角均随着 $\theta(\omega)$而变化。当把式(13.118)代入式(13.117)时,K_1 的表达式为:

$$K_1 = = \frac{A}{2}|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta(\omega)+\phi]} \tag{13.119}$$

将式(13.116)进行反变换,求得 $y(t)$的稳态解。在反变换过程中忽略 $H(s)$的极点产生的项,得:

$$y_{ss}(t) = A|H(\mathrm{j}\omega)|\cos[\omega t + \phi + \theta(\omega)] \tag{13.120}$$

该式说明了如何用转移函数求电路的正弦稳态响应,响应的幅值等于电源的幅值乘以转移函数的幅度,相角等于电源的相角加上转移函数的相角,$|H(\mathrm{j}\omega)|$和 $\theta(\omega)$值要根据电源的频率计算。例 13.4 说明如何用转移函数求电路的正弦稳态响应。

例 13.4 电路如图 13.46 所示,正弦电压源为 $120\cos(5000t+30°)$ V,求稳态响应 v_o。

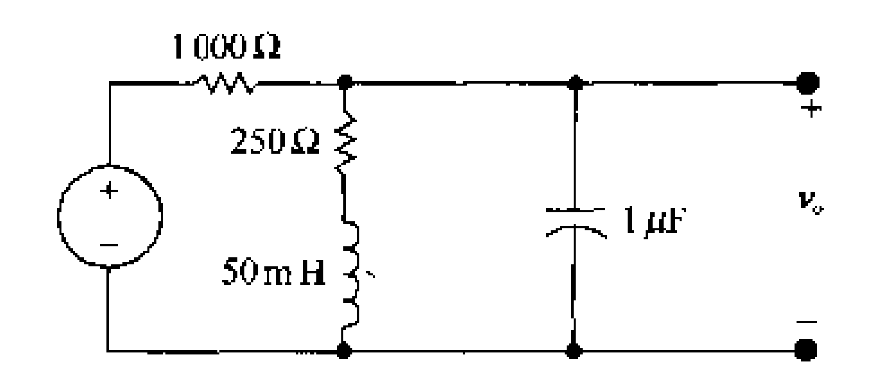


图 13.46 例 13.4电路

解:

由例 13.1 得:

$$H(s) = \frac{1000(s+5000)}{s^2+6000s+25\times10^6}$$

电源频率为 5000 rad/s,所以 $H(\mathrm{j}\omega)$的值为:

$$H(\mathrm{j}5000) = \frac{1000(5000+\mathrm{j}5000)}{-25\times10^6+\mathrm{j}5000(6000)+25\times10^6}$$

$$\frac{1+\mathrm{j}1}{\mathrm{j}6} = \frac{1-\mathrm{j}1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6}\angle -45°$$

再由式(13.120)得:

$$v_{os} = \frac{(120)\sqrt{2}}{6}\cos(5000t+30°-45°)$$

$$= 20\sqrt{2}\cos(5000t-15°)\ \mathrm{V}$$

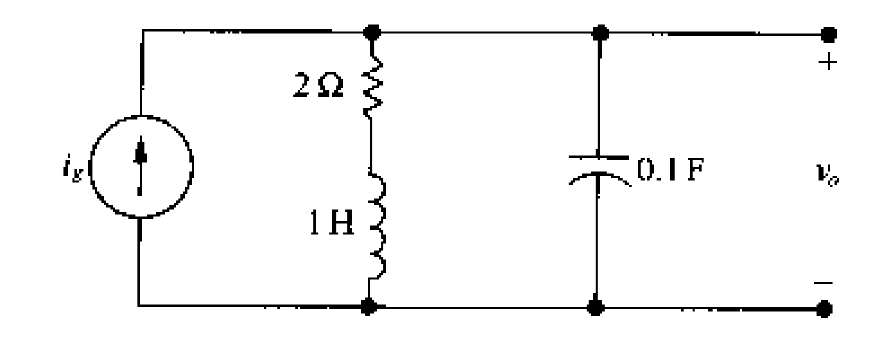
利用转移函数求电路的稳态响应非常重要,如果知道 $H(\mathrm{j}\omega)$,至少在理论上可以知道 $H(s)$。换句话说,可以反过来进行。不是由 $H(s)$求 $H(\mathrm{j}\omega)$,而是由 $H(\mathrm{j}\omega)$求 $H(s)$。一

旦知道了 $H(s)$，就可以求其他激励源产生的响应。在应用方面，用实验方法确定 $H(j\omega)$，然后由数据求得 $H(s)$。实际上，这种实验方法不一定是可行的，但在有些情况下，可以确定求 $H(s)$。理论上说，$H(s)$ 和 $H(j\omega)$ 的关系将时域和频域联系起来，在电路频率响应的问题中，转移函数是一个非常有用的工具，下一章将会继续介绍。

练习题

13.14 图 13.14 练习中的电流源的电流为 $10\cos 4t$ A。用转移函数求 v_o 的稳态响应。

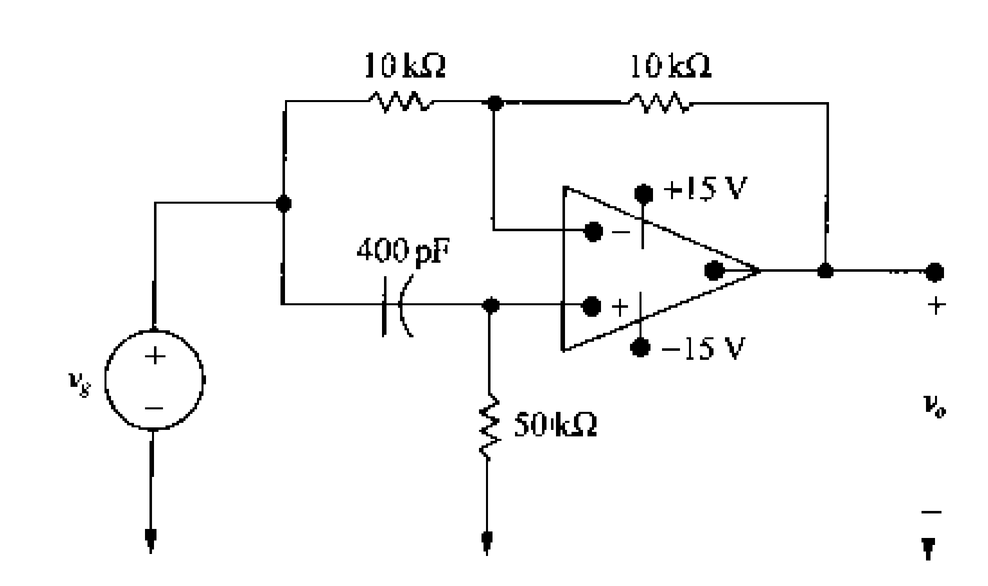
答：$44.7\cos(4t-63.43°)$ V。



13.15 (a) 如图所示电路，当 $v_g = 10\cos 50000t$ V 时，求 v_o 稳态响应的表达式。

(b) 用一个可变电阻代替 50 kΩ 电阻，为使 v_o 超前 v_g 120°，求所需的电阻值。

答：(a) $10\cos(50000t+90°)$ V，(b) 28867.51 Ω。



13.8 电路分析中的冲激响应

电路分析中的冲激函数或是由开关操作产生或是因为电路中有冲激电源。用拉氏变换求解开关操作时产生的冲激电流或者冲激电压，接着，求解冲激电源产生的电路响应。首先，讨论如何用开关操作产生冲激函数。

13.8.1 开关操作

用两个不同的电路说明如何通过开关操作产生冲激函数：一个是电容电路，一个是串联电感电路。

13.8.2 电容电路

如图 13.47 所示电路，开关闭合时，电容 C_1 已有初始电压 V_o，C_2 初始电压为零。求 R 趋向于零时，$i(t)$ 的表达式，图 13.48 为其 s 域等效模型。由图 13.48 得：

$$I = \frac{V_o/s}{R + (1/sC_1) + (1/sC_2)}$$
$$= \frac{V_o/R}{s + (1/RC_e)} \qquad (13.121)$$

其中，C_e 代替等效电容 $C_1C_2/(C_1+C_2)$。

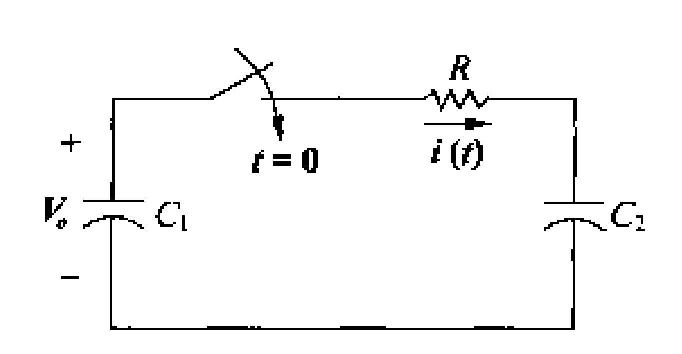


图 13.47 产生冲激电流的电路

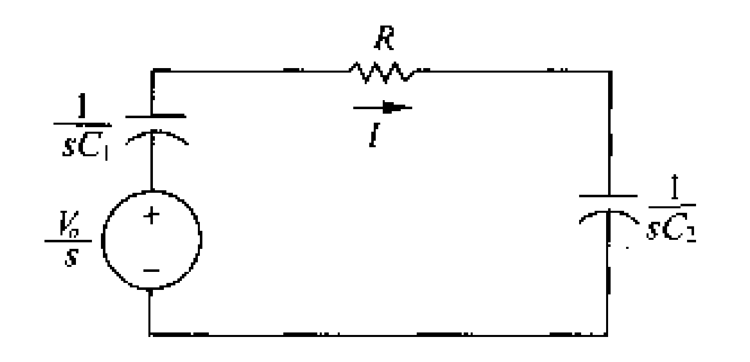


图 13.48 上图的 s 域等效模型

对式(13.121)检查后进行反变换得：

$$i = \left(\frac{V_o}{R}e^{-t/RC_e}\right)u(t) \qquad (13.122)$$

该式表明，当 R 增加时，初始电流(V_o/R)减小，因此，当 R 变小时，电流初值很大，而且下降得很快，图 13.49 说明了 i 的这种特性。

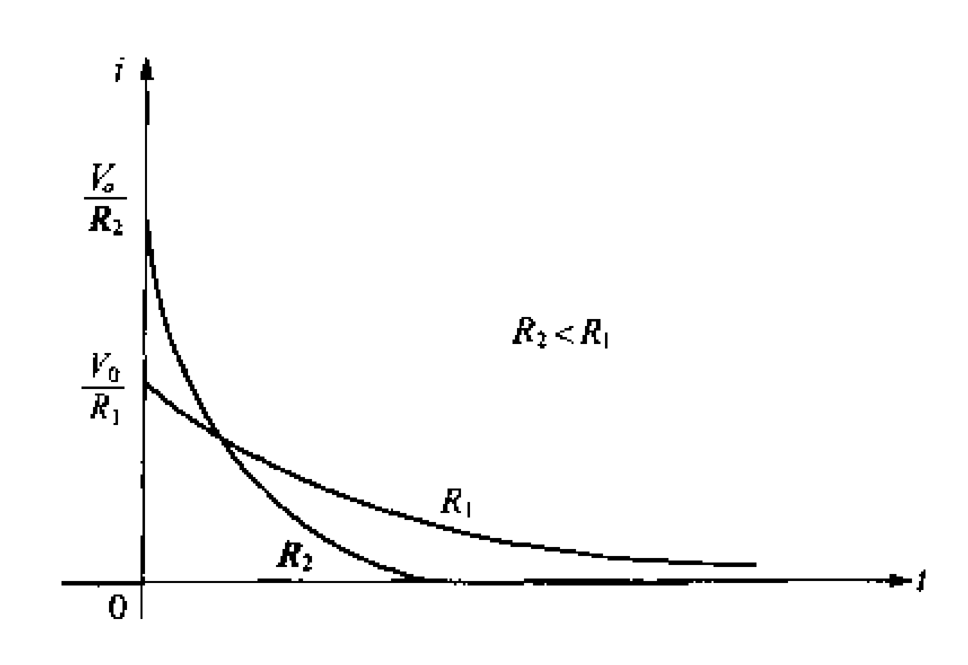


图 13.49 R 为不同值时的电流曲线

显然，当 R 趋向于零的时候，电流 i 趋向于冲激函数，因为 i 的初始值趋向于无穷大，而持续时间趋向于零。确定曲线下的面积是否与 R 无关，从物理角度而言，$i-t$ 曲线下的全部面积代表开关闭合后转移给 C_2 的全部电荷，即：

$$\text{面积} = q = \int_{0^-}^{\infty} \frac{V_o}{R}e^{-t/RC_e}\,dt = V_oC_e \qquad (13.123)$$

该式说明转移到 C_2 上的所有电荷与 R 无关，且等于 V_oC_e 库仑，所以当 R 趋近于零的时候，电流趋近于一个强度为 V_oC_e 的冲激。即：

$$i \to V_oC_e\delta(t) \qquad (13.124)$$

该式的物理解释为：当 $R=0$ 时，有限量的电荷立即被转移到 C_2 上，图 13.47 所示电路中，令 $R=0$，说明为何 C_2 会立即得到电荷。当 $R=0$ 时，开关闭合后就建立了一种相互制约关系，给初始电压为零的电容加上了电压，使电容电压瞬时发生变化的惟一途径就是瞬时电荷的转移。

开关闭合后，电容 C_2 的电压不会跃变到 V_o，而是跃变到它的终值，即：

$$v_2 = \frac{C_1 V_o}{C_1 + C_2} \tag{13.125}$$

上式的求解留给读者（见习题 13.78）。

如果从一开始就令 $R = 0$，可以用拉氏变换求出冲激电流响应，即：

$$I = \frac{V_o/s}{(1/sC_1) + (1/sC_2)} = \frac{C_1 C_2 V_o}{C_1 + C_2} = C_e V_o \tag{13.126}$$

在写式（13.126）的时候，用到了 $t = 0^-$ 时电容的电压，常数的反变换是常数乘以冲激函数，因此，由式（13.126）得：

$$i = C_e V_o \delta(t) \tag{13.127}$$

为什么拉氏变换被广泛地应用于线性非时变集总电路的暂态分析中？其原因就是因为拉氏变换能正确的求出冲激响应。

13.8.3　串联电感电路

图 13.50 所示电路说明瞬间的开关转换操作会产生冲激响应，求开关打开后 v_o 的时域表达式。打开开关会使电流 L_2 产生瞬时变化，进而使 v_o 含有冲激分量。

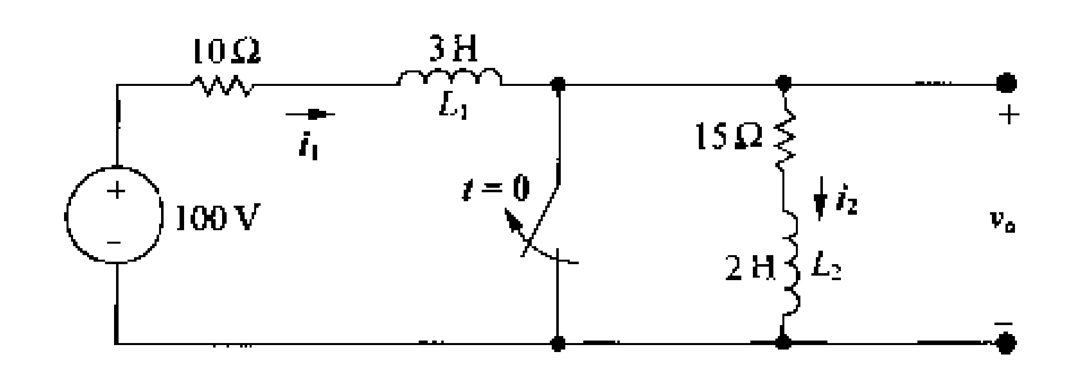


图 13.50　说明产生冲激电压的电路

图 13.51 表示开关打开时的 s 域等效电路，在求解该电路时，3 H 电感上的电流在 0^- 时为 10 A，2 H 电感的电流为零，使用 0^- 为初始条件是因为在拉氏变换定义中，积分下限为 0^-。

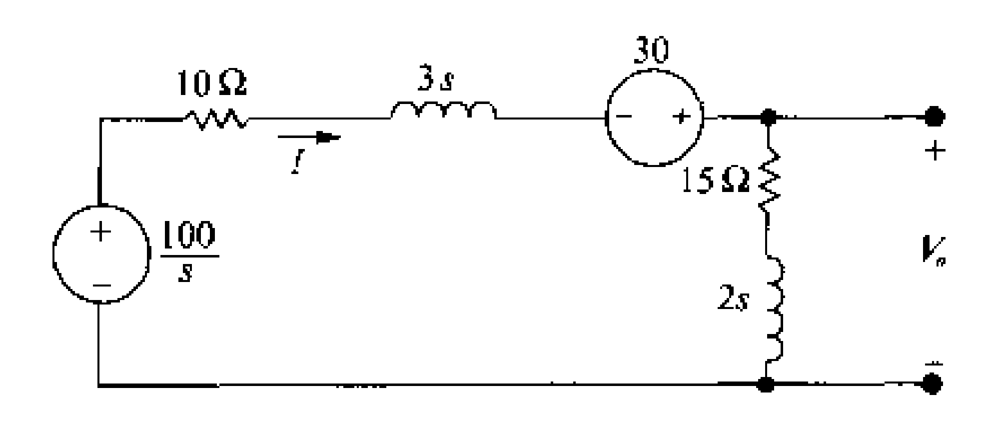


图 13.51　图 13.50 的 s 域等效电路

由单节点方程得到 V_o 的表达式，将流出 15 Ω 电阻的电流与 30 V 电源公共节点的电流求和得：

$$\frac{V_o}{2s + 15} + \frac{V_o - [(100/s) + 30]}{3s + 10} = 0 \tag{13.128}$$

解方程求 V_o 得：

$$V_o = \frac{40(s + 7.5)}{s(s + 5)} + \frac{12(s + 7.5)}{s + 5} \tag{13.129}$$

方程右边第二项为假分式,V_o 中含有冲激项,可以将该假分式分解为常数和真分式之和,即:

$$\frac{12(s+7.5)}{s+5}=12+\frac{30}{s+5} \tag{13.130}$$

将上式和式(13.129)的右边第一项化简,得到:

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{60}{s}-\frac{20}{s+5}+12+\frac{30}{s+5} \\ &= 12+\frac{60}{s}+\frac{10}{s+5} \end{aligned} \tag{13.131}$$

由此式得:

$$v_o=12\delta(t)+(60+10e^{-5t})u(t)\ \text{V} \tag{13.132}$$

结果正确吗?在回答该问题前,先求出 $t>0^-$ 时电流的表达式。在开关打开后,L_1 和 L_2 上的电流相等。若以顺时针方向为电流参考方向,s 域表达式为:

$$\begin{aligned} I &= \frac{(100/s)+30}{5s+25}=\frac{20}{s(s+5)}+\frac{6}{s+5} \\ &= \frac{4}{s}-\frac{4}{s+5}+\frac{6}{s+5} \\ &= \frac{4}{s}+\frac{2}{s+5} \end{aligned} \tag{13.133}$$

反变换得:

$$i=(4+2e^{-5t})u(t)\ \text{A} \tag{13.134}$$

开关打开前,L_1 上的电流为 10 A,L_2 上的电流为零,根据式(13.134)可知 $t=0^+$ 时,两个电感上的电流均为 6 A。在开关打开时刻,L_1 上的电流立即由 10 A 变到6 A,而 L_2 由 0 变到 6 A。然后,电流从 6 A 开始以指数形式减小直到终值4 A,该终值很容易根据电路得以验证,图 13.52 表明了 i_1 和 i_2 的这些特点。

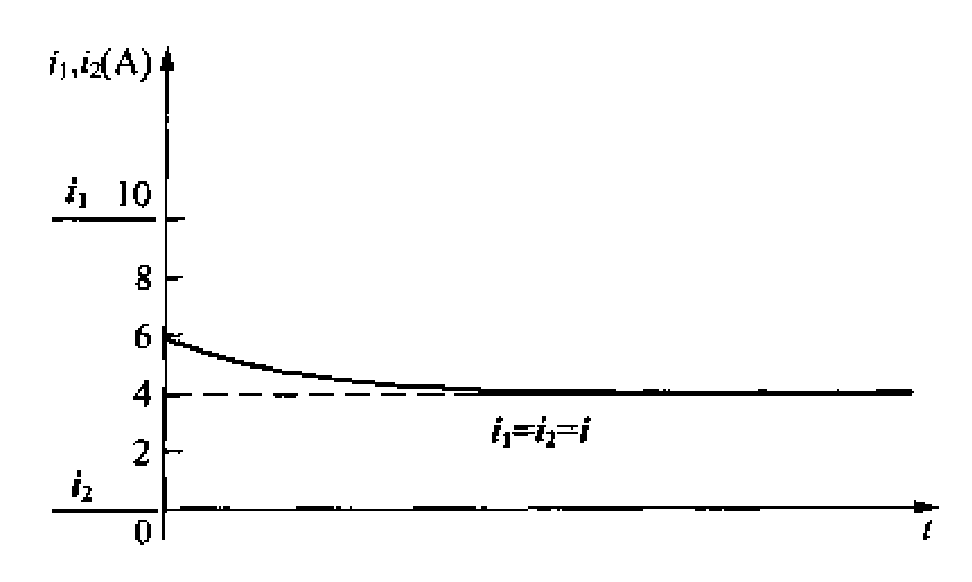


图 13.52 图 13.50 电路中电感电流的时间曲线

根据电路的物理特性,可以验证电感电流的这种瞬时跃变是合理的。首先,注意到开关操作使两个电感成为串联关系,那么,在 3 H 电感上出现的电压冲激与 2 H 电感上电压的冲激相抵消,因为沿回路电压之和为零。法拉第定理表明,感应电压与磁链的变化率成正比。因此,磁链的变化之和必然为零,就是说开关闭合的前后瞬间磁链相等,对这个电路,开关动作前的磁链为:

$$\lambda=L_1i_1+L_2i_2=3(10)+2(0)=30\ \text{Wb} \tag{13.135}$$

开关动作后一瞬间:

$$\lambda = (L_1 + L_2)i(0^+) = 5i(0^+) \tag{13.136}$$

由以上两个方程得到：

$$i(0^+) = 30/5 = 6\ \text{A} \tag{13.137}$$

所以，电流 i 的结果符合磁链守恒定律。

验证式(13.132)，先校核冲激项 $12\delta(t)$，在 $t=0$ 的时候，i_2 从 0 跃变到 6 A。

使 i_2 出现一个冲激 $6\delta(t)$，该电流冲激使 2 H 电感的电压产生一个冲激 $12\delta(t)$，当 $t>0^+$ 的时候，di_2/dt 为 $-10e^{-5t}$ A/S。因此，v_o 为：

$$\begin{aligned} v_o &= 15(4+2e^{-5t}) + 2(-10e^{-5t}) \\ &= (60+10e^{-5t})u(t)\ \text{V} \end{aligned} \tag{13.138}$$

式(13.138)与式(13.132)右边的后两项相等，因此，可以确定式(13.132)与电路的特性一致。

验证 i_1 从 10 A 到 6 A 的瞬时下降值，瞬时下降使 i_1 产生一个冲激 $-4\delta(t)$. 因此，L_1 的电压在原点处包含一个冲激 $12\delta(t)$. 该电压恰好与 L_2 上的冲激平衡；即沿闭合回路冲激电压之和为零。

13.8.4　冲激电源

电源中以及响应中都能出现冲激函数，这种电源叫冲激电源，作用到电路中的冲激源瞬时给系统输入有限的能量，与其相似的力学模拟就是撞铃，当能量传输给铃之后，铃的自然响应决定了所发出的音调(即声波的频率)和持续时间。

在图 13.53 所示的电路中，强度为 V_o(伏·秒)的冲激电压源作用到 RL 串联电路中。电压源开始作用时，电感初始贮能为零，因此，初始电流为零，电阻两端无电压，冲激电压源全部作用到电感上，电感两端的冲激电压会建立瞬时电流，电流为：

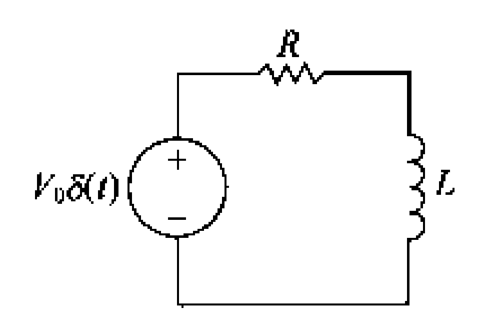


图 13.53　冲激电压源作用下的 RL 电路

$$i = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} V_o\delta(x)dx \tag{13.139}$$

已知，$\delta(t)$的积分在包含原点的间隔内为 1，由式(13.139)得：

$$i(0^+) = \frac{V_o}{L}\ \text{A} \tag{13.140}$$

这样，在极其短的时间里，冲激电压源在电感中存贮了一定的能量，该能量为：

$$w = \frac{1}{2}L\left(\frac{V_o}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{V_o^2}{L}\ \text{J} \tag{13.141}$$

电流 V_o/L 随着电路的自然响应衰减为零，即：

$$i = \frac{V_o}{L}e^{-t/\tau}u(t) \tag{13.142}$$

其中 $\tau = L/R$。由第 7 章可以知道，自然响应是由动态元件的贮能和释放能量引起的，不是电源的作用引起的。当电路只受冲激源作用时，完全响应由自然响应决定，冲激源的持续时间太短，不会引起任何强制响应。

直接用拉氏变换法也可以得到式(13.142)。图 13.54 是图 13.53 所示电路的 s 域等效电路。

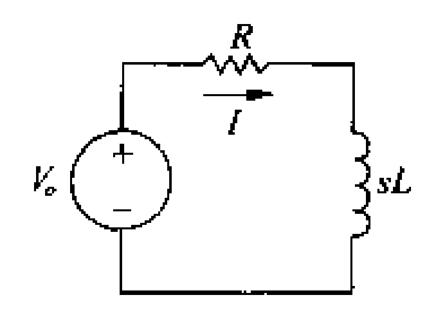


图 13.54 图 13.53 中电路的 s 域等效电路

由图得：

$$I = \frac{V_o}{R + sL} = \frac{V_o/L}{s + (R/L)} \tag{13.143}$$

$$i = \frac{V_o}{L}e^{-(R/L)t} = \frac{V_o}{L}e^{-t/\tau}u(t) \tag{13.144}$$

这样，拉氏变换法也给出了 $t \geqslant 0^+$ 时 i 的正确结果。

最后，讨论内部产生的冲激和外部施加的冲激同时出现时的情况。如果在建立电路 s 域等效模型时考虑了 $t = 0^-$ 时电感的电流和电容电压，且外施冲激也用变换式，那么拉氏变换法能自动保证 $t > 0^+$ 时结论的正确性。为说明该问题，在图 13.50 所示电路中加一个与 100 V 电源相串联的冲激电压源 $50\delta(t)$，如图 13.55 所示。

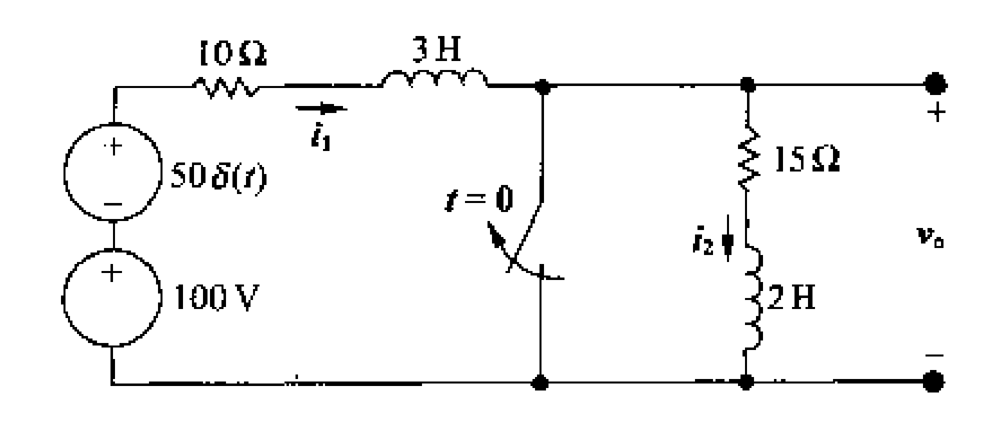


图 13.55 图 13.50 的电路中增加了一个与 100 V 电源相串联的冲激电压源

$t = 0^-$ 时，$i_1(0^-) = 10$ A，$i_2(0^-) = 0$ A。$50\delta(t)$的拉氏变换为 50，则 s 域等效电路如图 13.56 所示。

I 的表达式为：

$$I = \frac{50 + (100/s) + 30}{25 + 5s}$$
$$= \frac{16}{s+5} + \frac{20}{s(s+5)}$$
$$= \frac{16}{s+5} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s+5}$$

$$= \frac{12}{s+5} + \frac{4}{s} \tag{13.145}$$

图 13.56　图 13.55 中电路的 s 域等效电路

于是得出：

$$i(t) = (12e^{-5t} + 4)u(t)\ \text{A} \tag{13.146}$$

V_o 的表达式为：

$$\begin{aligned} V_o &= (15+2s)I = \frac{32(s+7.5)}{s+5} + \frac{40(s+7.5)}{s(s+5)} \\ &= 32\left(1+\frac{2.5}{s+5}\right) + \frac{60}{s} - \frac{20}{s+5} \\ &= 32 + \frac{60}{s+5} + \frac{60}{s} \end{aligned} \tag{13.147}$$

由此得到：

$$v_o = 32\delta(t) + (60e^{-5t} + 60)u(t)\ \text{V} \tag{13.148}$$

验证结果是否正确，由式(13.146)可以看到，当 $t=0^+$ 时，L_1 和 L_2 上的电流为 16 A。和前边情况一样，开关动作使电流 i_1 从 10 A 突然下降到 6 A，同时 i_2 电流从 0 突然增加到 6 A，冲激电压源在 L_1 和 L_2 上建立了 10 A 的电流，即：

$$i = \frac{1}{3+2}\int_{0^-}^{t} 50\delta(x)\,\mathrm{d}x = 10\ \text{A} \tag{13.149}$$

因此，i_1 从 10 A 突然增加到 16 A，i_2 突然从 0 增加到 16 A，电流的终值是 4 A。图 13.57 表示了 i_1 和 i_2 的曲线。

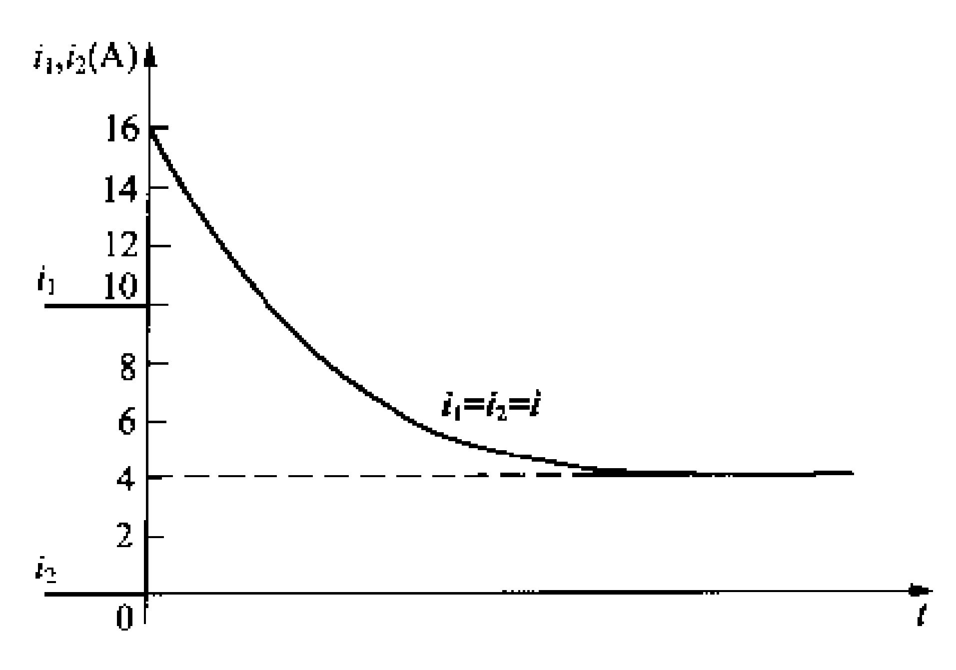


图 13.57　图 13.55 电路中电感电流对时间的曲线

也可以不采用叠加法求 i_1 和 i_2 的突变值。L_1 和 L_2 上的电压的总和为 $50\delta(t)$，因此，磁链的变化必然为 50，即：

$$\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 = 50 \tag{13.150}$$

因 $\lambda = Li$，上式可以表示为：

$$3\Delta i_1 + 2\Delta i_2 = 50 \tag{13.151}$$

但是，在开关打开后 i_1 和 i_2 必须是相等的，所以：

$$i_1(0^-) + \Delta i_1 = i_2(0^-) + \Delta i_2 \tag{13.152}$$

于是：

$$10 + \Delta i_1 = 0 + \Delta i_2 \tag{13.153}$$

根据式(13.151)和式(13.153)，求 Δi_1 和 Δi_2 得到：

$$\Delta i_1 = 6\ \mathrm{A} \tag{13.154}$$

$$\Delta i_2 = 16\ \mathrm{A} \tag{13.155}$$

这个表达式和前面的结果一致。

图 13.57 也表明，i_1 和 i_2 所得的结果在 $t=0$ 处将包含冲激。准确的说，i_1 包含 $6\delta(t)$，而 i_2 包含 $16\delta(t)$，图 15.8(a)，(b) 分别表示了 i_1 和 i_2 的结果。

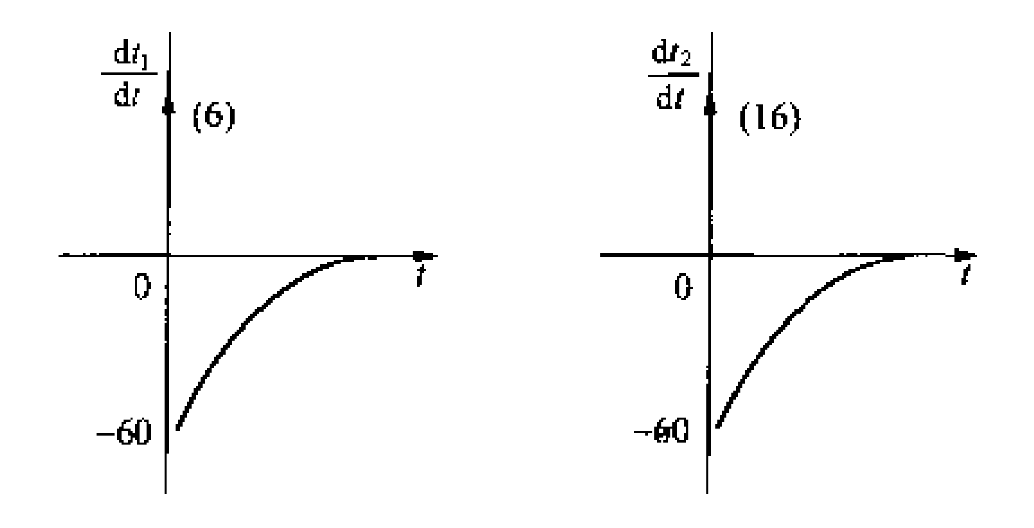


图 13.58 i_1 和 i_2 的结果

看式(13.148)，电压的冲激分量 $32\delta(t)$ 和 $\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t$ 在原点的冲激 $16\delta(t)$ 相符合，$60\mathrm{e}^{-5t}+60$ 这一项与 $t>0^+$ 时的响应一致：

$$v_o = 15i + 2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

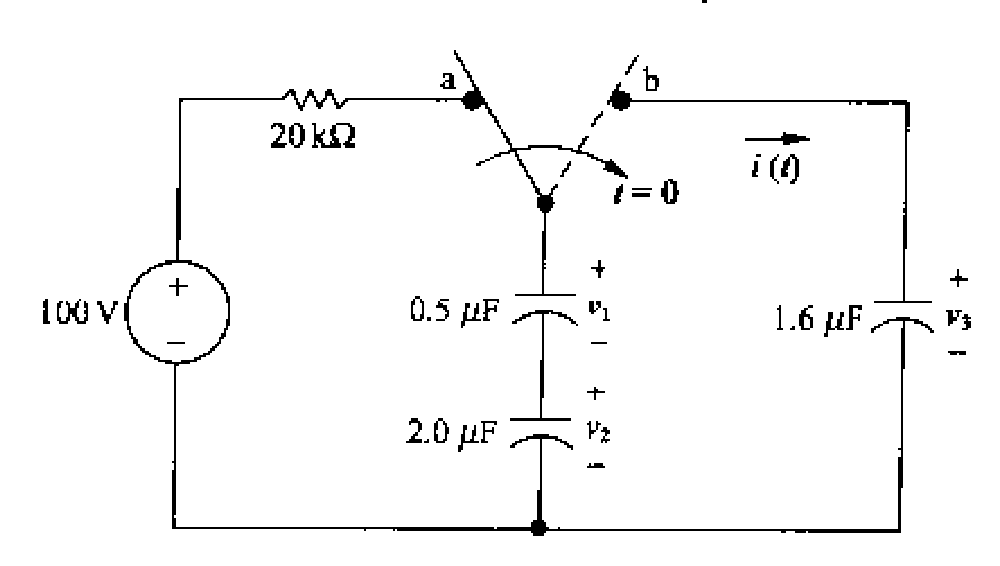
L_1 两端产生的电压冲激为 $18\delta(t)$，L_2 两端产生的冲激为 $32\delta(t)$，两个冲激之和为 $50\delta(t)$，因此，沿着网孔所有冲激的代数和为零。

总之，拉氏变换能正确计算开关动作所产生的冲激电流和冲激电压，然而，s 域等效电路必须是建立在 $t=0^-$ 时的初始条件下，也就是建立在开关引起的干扰之前就存在的初始条件下，只要简单地在 s 域中用电源的正确变换式代替电源，就可以用拉氏变换法正确地求出冲激源引起的响应。

练习题

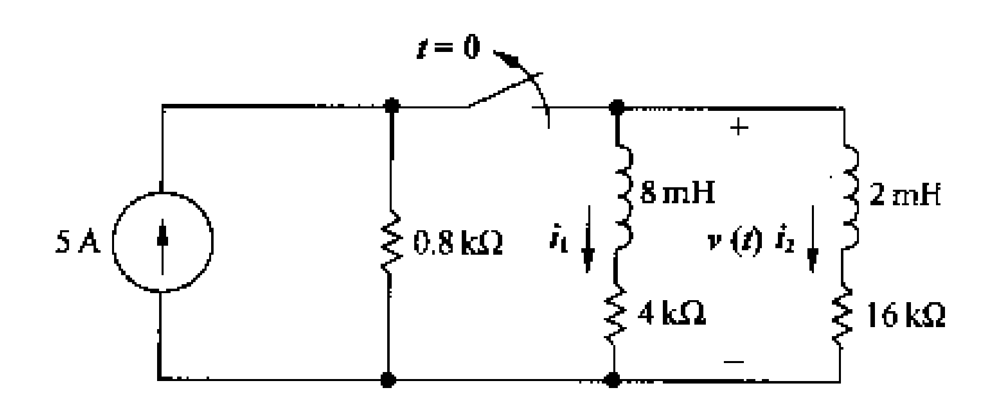
13.16 电路如图所示，开关处于 a 位置很久，在 $t=0$ 时刻，开关移向 b，试计算(a) $v_1(0^-)$，(b) $v_2(0^-)$，(c) $v_3(0^-)$，(d) $i(t)$，(e) $v_1(0^+)$，(f) $v_2(0^+)$，(g) $v_3(0^+)$。

答：(a) 80 V,(b) 20 V,(c) 0 V,(d) $32\delta(t)$ μA,(e) 16 V,(f) 4 V,(g) 20 V。



13.17 电路如图所示，开关闭合很久，在 $t=0$ 时开关打开，试计算(a) $i_1(0^-)$，(b) $i_2(0^+)$，(c) $i_2(0^-)$，(d) $i_2(0^+)$，(e) $i_1(t)$，(f) $i_2(t)$，(g) $v(t)$。

答：(a) 0.8 A,(b) 0.6 A,(c) 0.2 A,(d) −0.6 A,(e) $0.6e^{-2\times10^6t}u(t)$ A,(f) $-0.6e^{-2\times10^6t}u(t)$ A,(g) $-1.6\times10^{-3}\delta(t)-7200e^{-2\times10^6t}u(t)$ V。



小结

- 将元件伏安关系进行拉氏变换，可以将每个电路元件表示成 s 域的等效电路。
  - 电阻：$V=RI$
  - 电感：$V=sLI-LI_o$
  - 电容：$V=(1/sC)I+V_o/s$

  方程中 $V=\mathscr{L}\{v\}$，$I=\mathscr{L}\{I\}$，I_o 是电感的初始电流，V_o 是电容的初始电压。
- 将电路每个元件都用 s 域等效电路来代替，就可以对电路进行 s 域分析。用电子电路分析方法写出电路的代数方程就可以对所得的电路进行分析，表 13.1 总结了电阻、电感、电容的 s 域等效电路。
- 当已知电路初始条件时，对线性集总电路用 s 域分析法最适合求暂态响应，因为这种方法将微分方程化为代数方程，所以对含有多网孔和多节点方程问题的求解，可以先变换后求解，非常方便。
- 转移函数是电路输出与输入的 s 域的比值，可以表示为：

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

  其中 $Y(s)$为输出信号的拉氏变换，$X(s)$是输入信号的拉氏变换。
- $H(s)$和 $X(s)$的积可以展开为部分分式形式，$H(s)$和 $X(s)$的每个极点都对应展开式中的一

项。展开式中 $H(s)$极点对应的项为暂态响应分量,$X(s)$极点对应的项为稳态响应分量。如果电路的激励为单位冲激,那么电路的响应等于转移函数的拉氏反变换。

- 对非时变电路,如果输入延时 a 秒,那么输出函数也将延时 a 秒。
- 电路的输出 $y(t)$可以通过输入函数 $x(t)$与电路单位冲激响应的卷积来计算:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$$
$$= x(t) * h(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

卷积积分的图解法为响应的求解提供了非常方便的计算方法。

- 可以用电路的转移函数来计算正弦电源激励下电路的稳态响应,方法是将 $H(s)$中的 s 用 $\mathrm{j}\omega$ 代替,然后用复数表示幅度和相位,如果:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$H(\mathrm{j}\omega) = |H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\omega)}$$

那么:

$$y_{ss}(t) = A|H(\mathrm{j}\omega)|\cos[\omega t + \phi + \theta(\omega)]$$

- 拉氏变换分析法能正确计算开关操作和冲激电源引起的冲激电流和电压,但必须保证在 $t=0^-$ 时刻,建立 s 域等效电路,也就是说,建立开关动作之前所处状态下的等效电路。

习题

13.1 求出图 13.3 所示电路的诺顿等效电路。

13.2 对图 13.4 所示的电路,将 i 表示为端口电压 v 的函数,然后求出这个时域微积分方程的拉氏变换,最后求出该电路的 s 域等效电路。

13.3 求出图 13.7 所示电路的戴维南等效电路。

13.4 1 kΩ 电阻与 500 mH 电感串联后再与 0.4 μF 的电容并联,

(a) 将并联支路的 s 域等效阻抗表示为分式形式。

(b) 确定极点和零点的值。

13.5 10 kΩ 电阻、5 H 电感、200 nF 电容相串联,

(a) 将该串联支路的 s 域阻抗表示为分式。

(b) 求出阻抗的极点和零点。

13.6 5 kΩ 电阻、6.25H 电感、40 nF 电容的并联电路,

(a) 将其 s 域的并联阻抗表示为分式。

(b) 求出阻抗的极点和零点。

13.7 图 P13.7 所示电路,求 ab 端口等效阻抗的零点和极点。

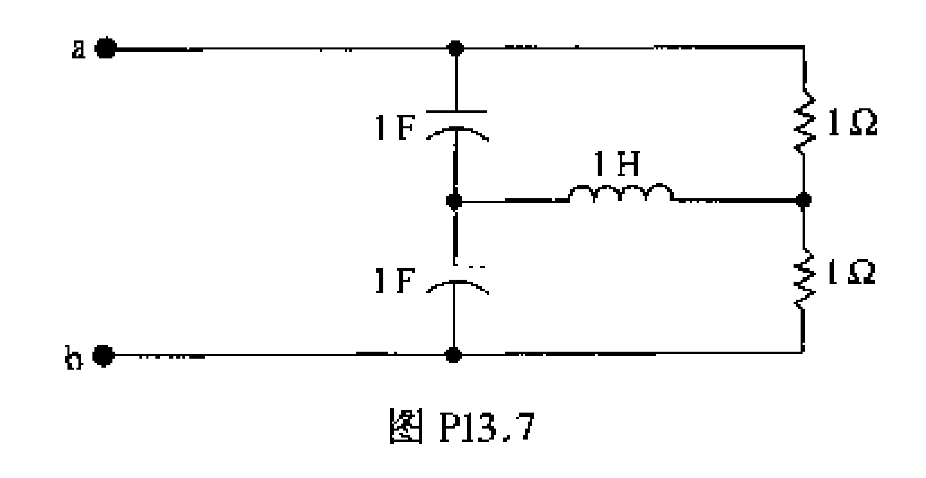


图 P13.7

13.8 图 P13.8 所示电路，求 ab 端口的等效阻抗的零点和极点。

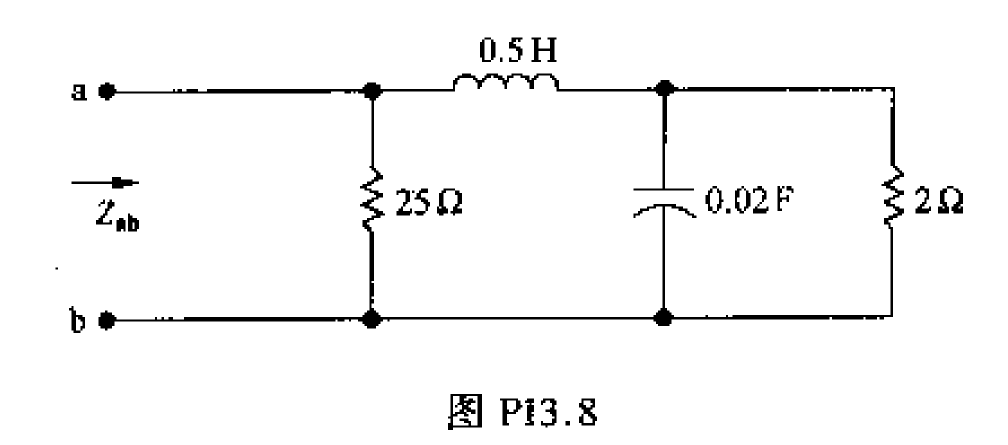


图 P13.8

P13.9 图 P13.9 所示电路，开关在 a 位置很久，在 $t=0$ 时刻，开关瞬时移到 b 位置。

(a) $t>0$ 时，建立其 s 域电路模型。

(b) 求 V_o。

(c) 求 I_L。

(d) 求 $t>0$ 时的 v_o。

(e) 求 $t>0$ 时的 i_L。

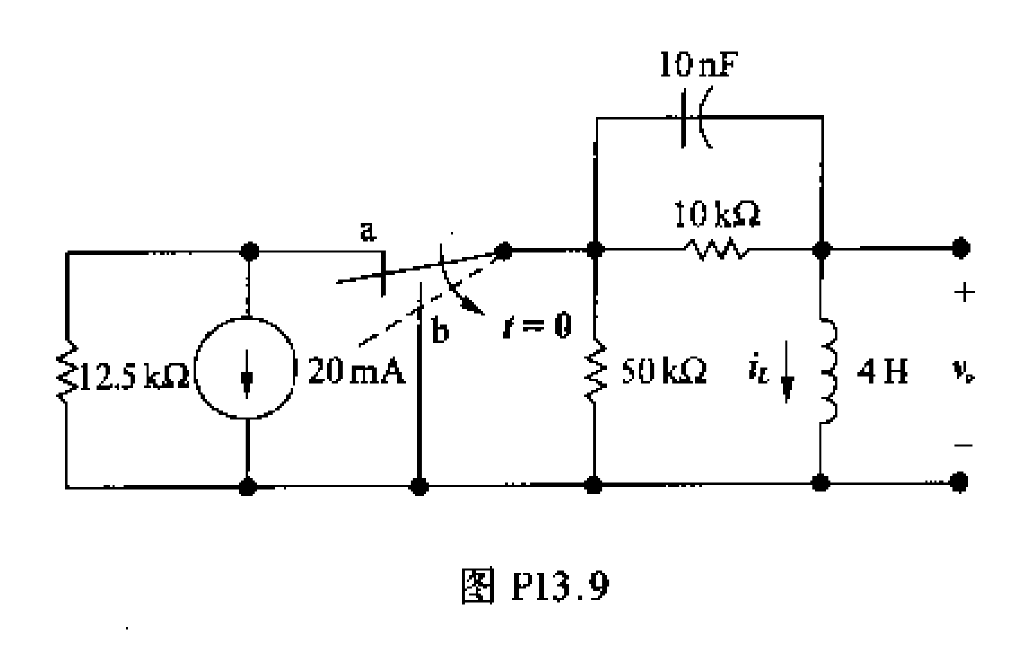


图 P13.9

P13.10 图 P13.10 所示电路，开关在 x 位置很长时间，在 $t=0$ 时开关瞬时移到 y 点，

(a) 建立起 $t>0$ 时的 s 域等效电路。

(b) 求 V_o。

(c) 求 v_o。

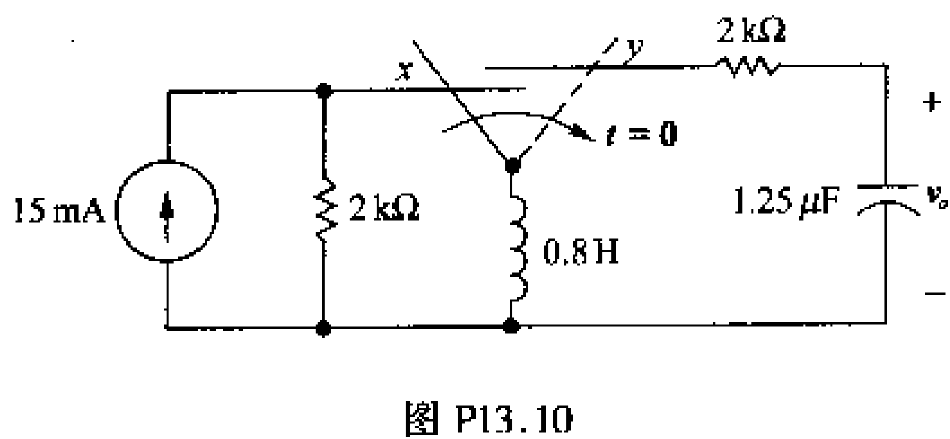


图 P13.10

P13.11 电路如图 P13.11 所示，若 $i_g=15u(t)$ A，求 v_o。在 $t=0$ 时电路无贮能。

P13.12 在图 P13.12 所示电路中，开关在 a 位置很长时间，在 $t=0$ 时瞬时移到 b 位置。

(a) 建立 $t>0$ 时的 s 域等效电路。

(b) 求 $I_o(s)$。

(c) 求 $t \geq 0$ 时的 $i_o(t)$。

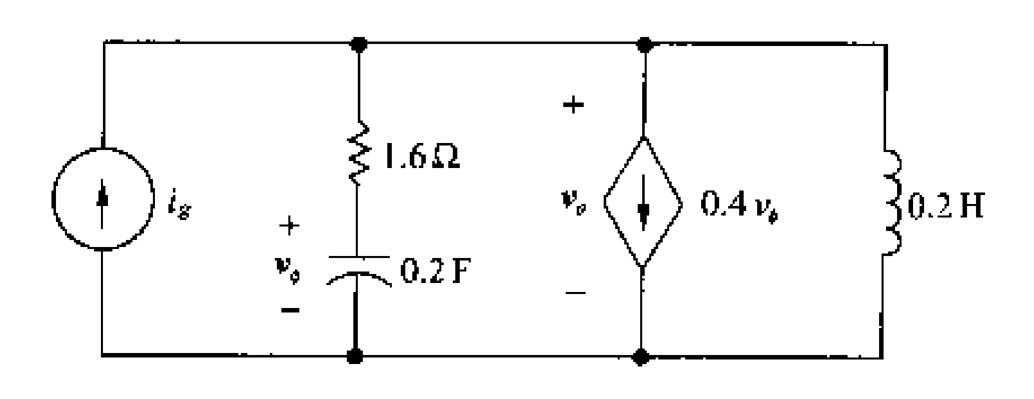


图 P13.11

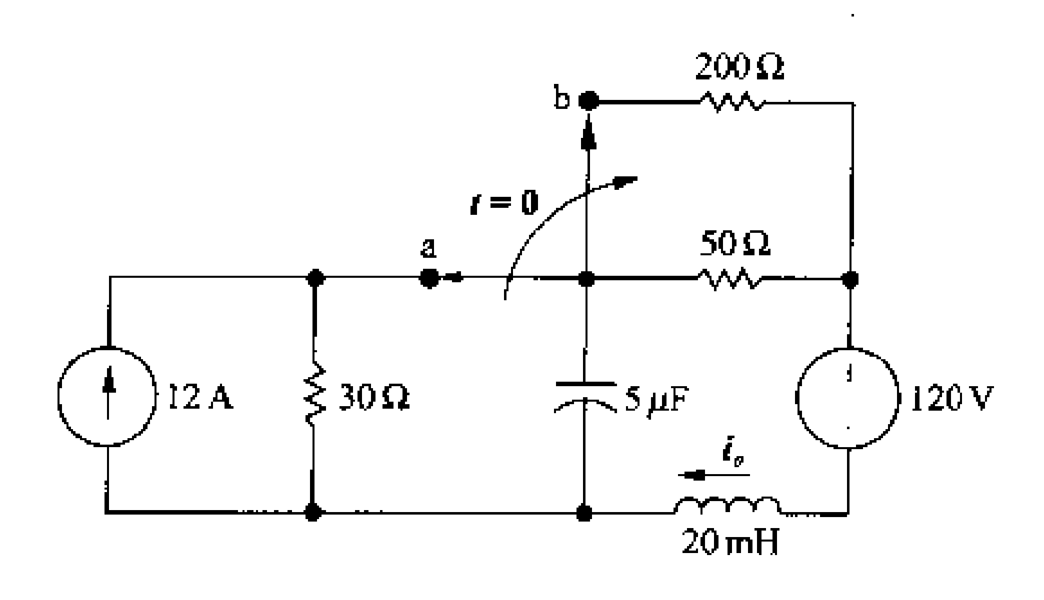


图 P13.12

P13.13 图 P13.13 电路在开关闭合前无贮能。

(a) 求 $t \geq 0$ 时的 v_o。

(b) 所得结果与电路性质一致吗？试加以解释。

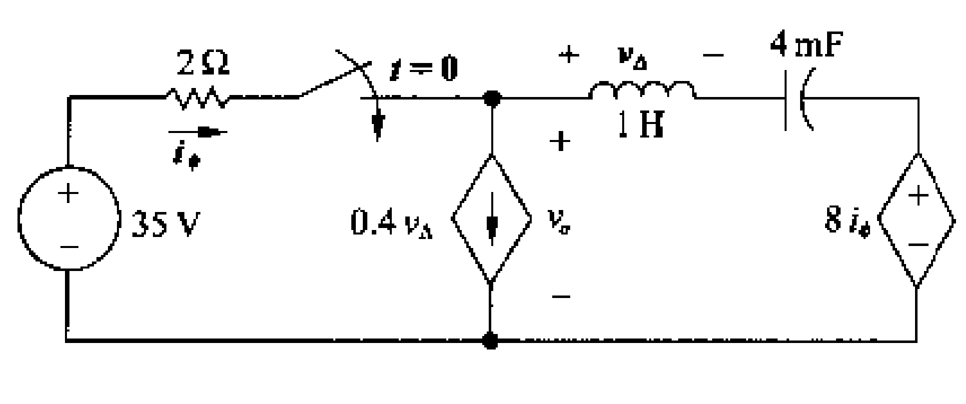


图 P13.13

P13.14 图 P13.14 中的合断开关在 a 位置很久，在 $t = 0$ 时开关移向 b 位置，求 $t \geq 0$ 时的 v_o。

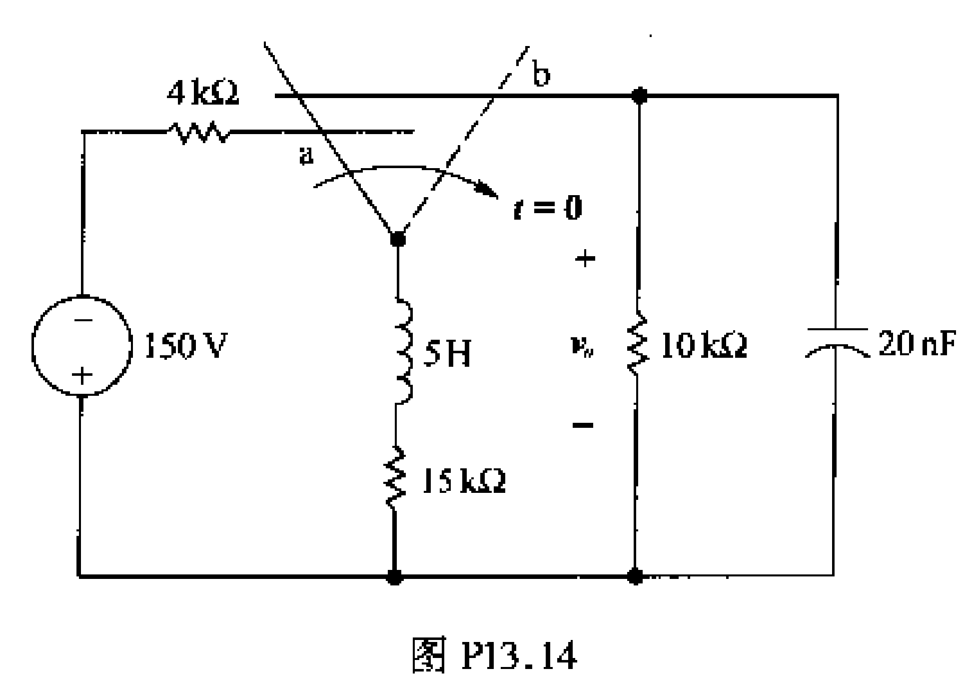


图 P13.14

P13.15 图 P13.15 中的合断开关在 $t=0$ 时移到 b 位置，之前在 a 位置很久。

(a) 建立 $t>0$ 时电路的 s 域等效电路。

(b) 求 I_o 和 i_o。

(c) 求 V_o 和 v_o。

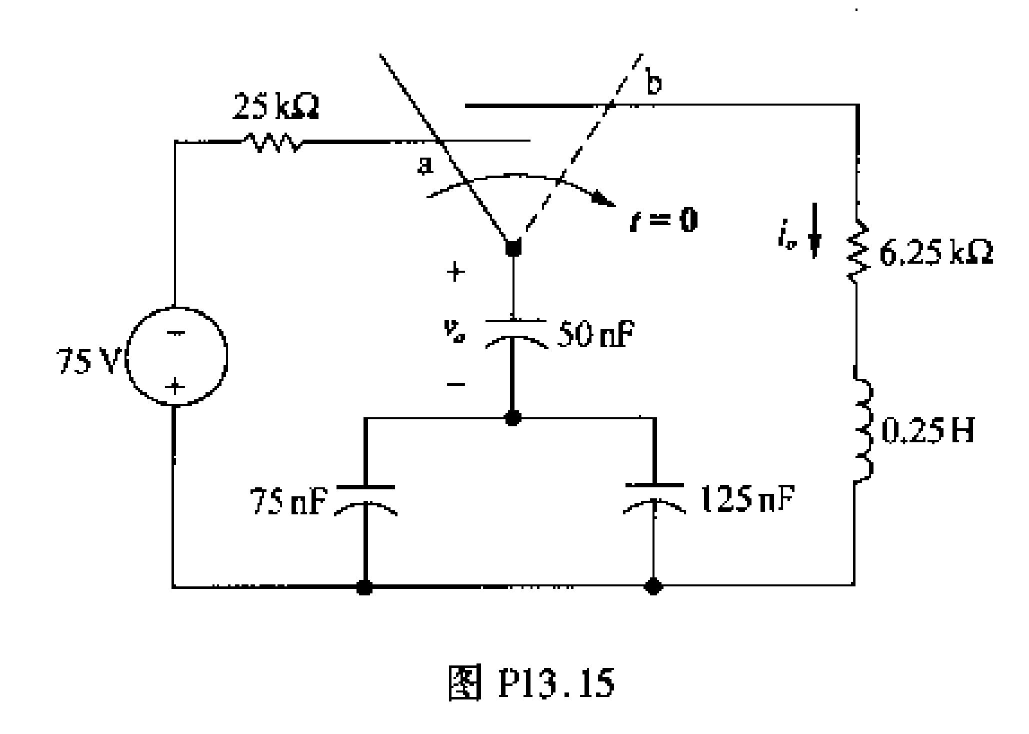


图 P13.15

P13.16 电路如图 P13.16 所示，开关在 $t=0$ 时刻打开，打开前闭合很久，求 $t\geq 0$ 时的 v_o。

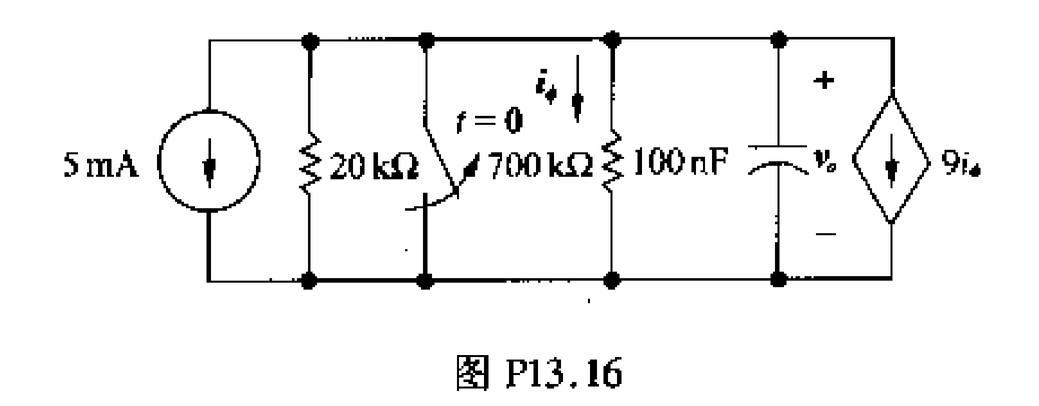


图 P13.16

P13.17 图 P13.17 电路中，开关闭合时电路无贮能。

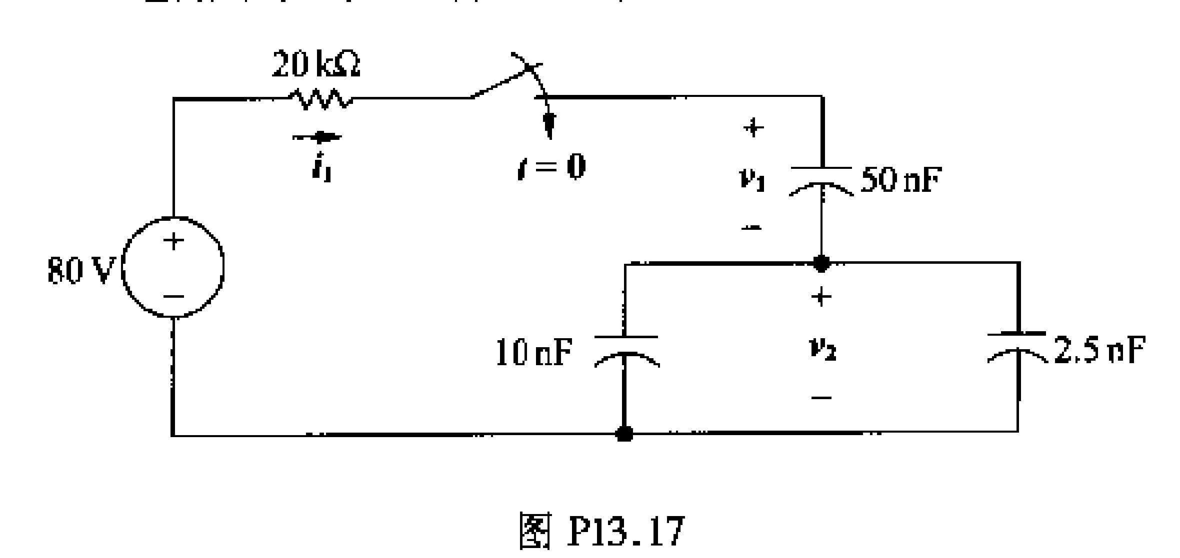


图 P13.17

(a) $t>0$ 时，建立 s 域等效电路。

(b) 求 I_1，V_1 和 V_2。

(c) 求 i_1，v_1 和 v_2。

(d) 所得结果与电路特性一致吗？试加以解释。

P13.18 (a) 求图 P13.18 电路中 V_o 的 s 域表达式。

(b) 用所得的表达式求 v_o 的初值和终值。

(c) 求 v_o 的时域表达式。

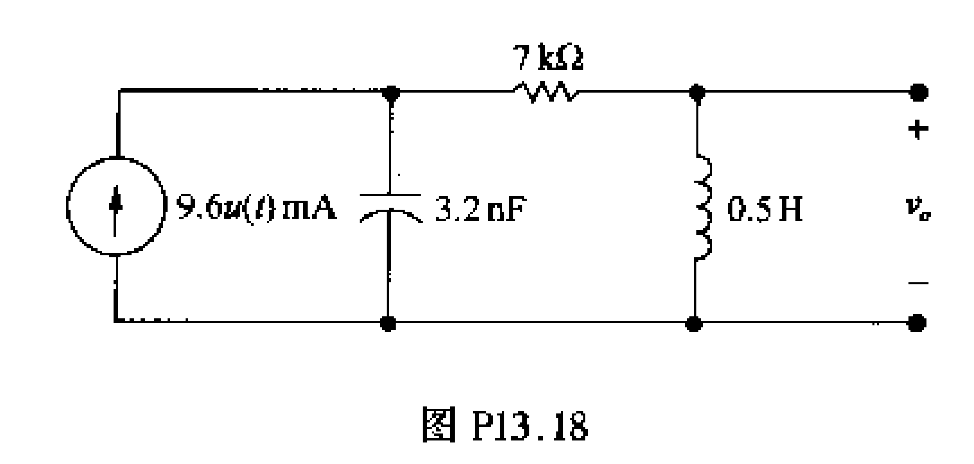


图 P13.18

P13.19 求图 P13.18 所示电路电容电流的时域表达式,设电容电流的参考方向向下。

P13.20 电路如图 P13.20 所示,在电压源开始作用到电路时电路中无贮能。

(a) 求 I_o 和 V_o。

(b) 求 $t \geq 0$ 时的 i_o 和 v_o。

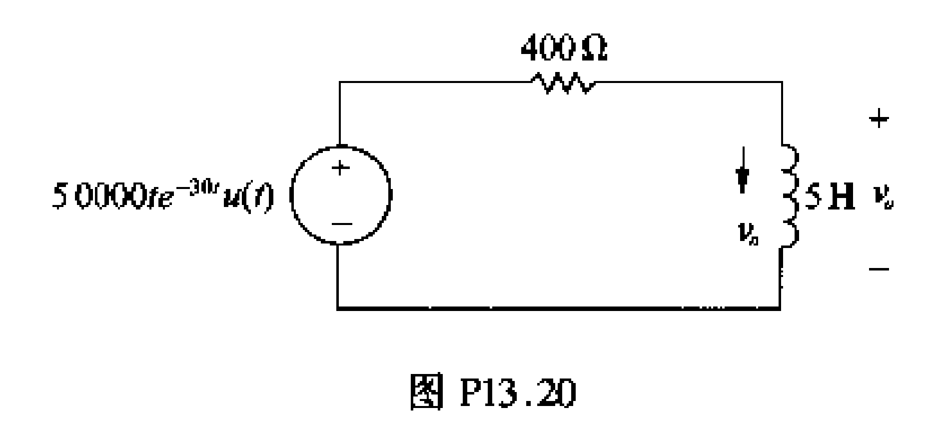


图 P13.20

P13.21 图 P13.21 所示电路,开关闭合很久,在 $t=0$ 时打开。

(a) 建立 $t>0$ 时的 s 域等效电路。

(b) 求 V_o。

(c) 求 $t \geq 0$ 时的 v_o。

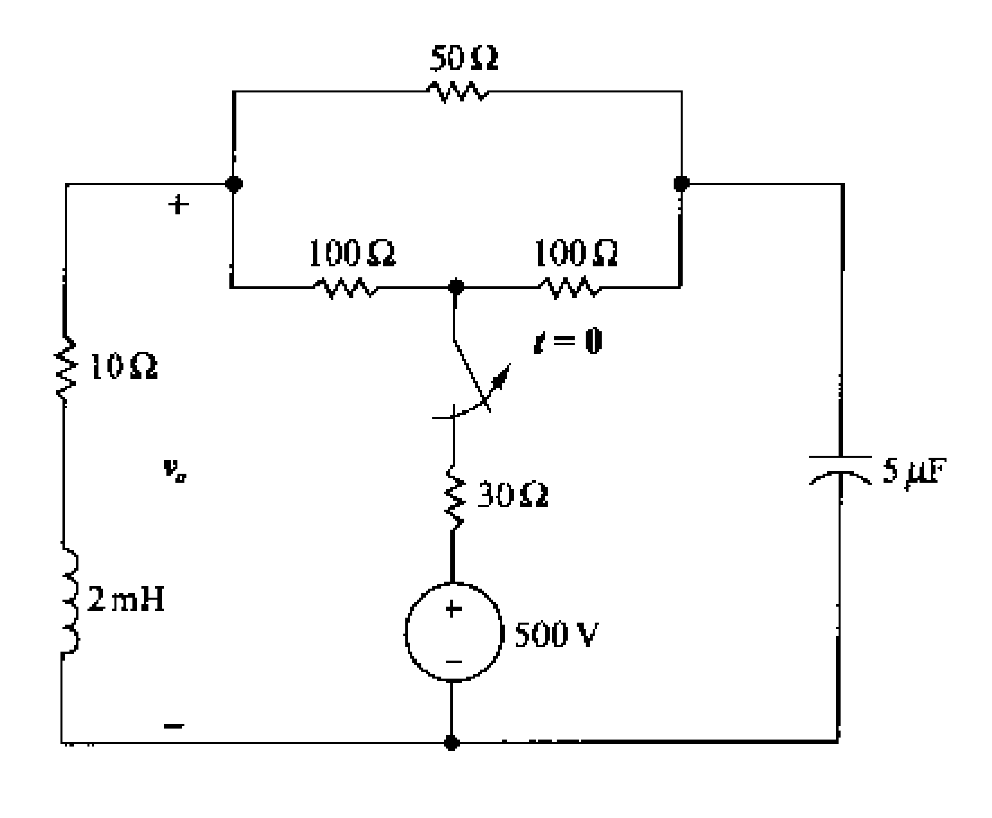


图 P13.21

P13.22 图 P13.22 所示电路,开关闭合已久,在 $t=0$ 时打开。

(a) 求 $v_o(t)$, $t \geq 0$。

(b) 求 $i_o(t)$, $t \geq 0$。

P13.23 图 P13.23 所示电路,开关在 a 位置已久,在 $t=0$ 时瞬间移到 b 位置。

(a) 求 V_o。

(b)求 v_o。

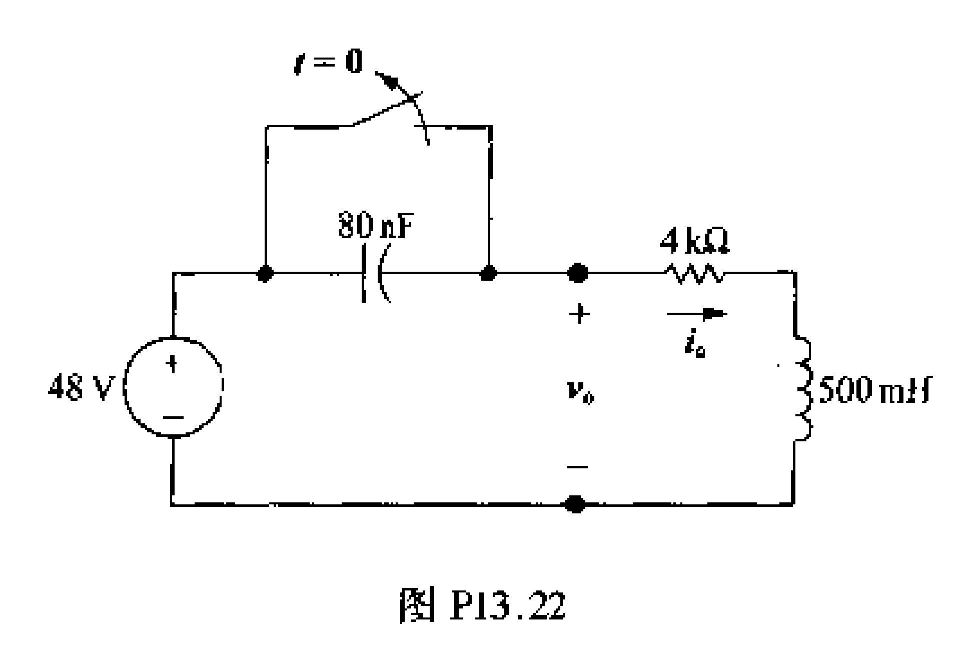


图 P13.22

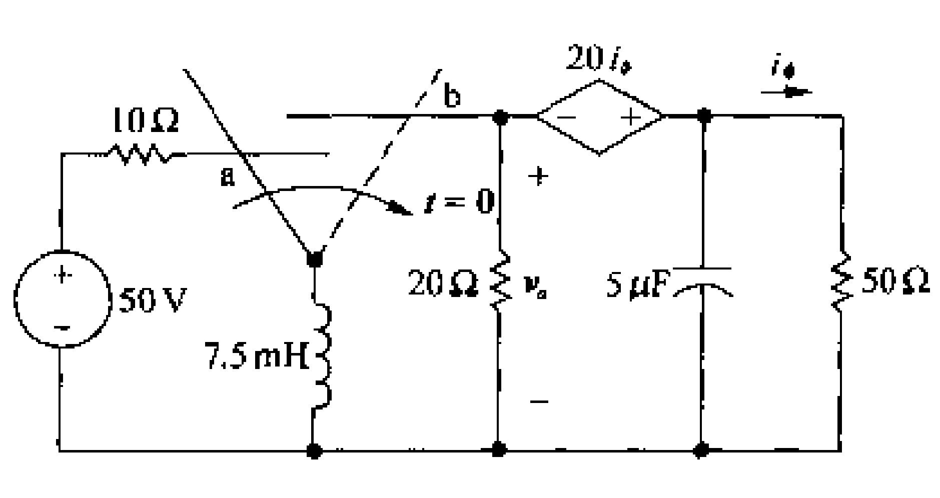


图 P13.23

P13.24　在图 P13.24 所示电路中，在 $t=0$ 时开关闭合，电路中无初始贮能，求 V_o 和 v_o。

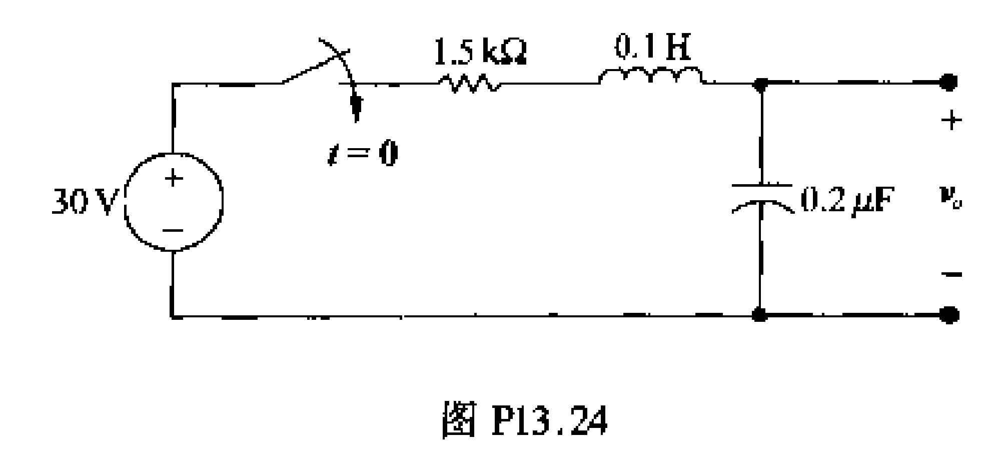


图 P13.24

P13.25　图 P13.24 所示电路，若开关闭合前电容具有初始电压 20 V，下端为高电位。求 V_o 和 v_o。

P13.26　如图 P13.26 所示，电路的初始贮能为零，理想电压源为 $600u(t)$ V。

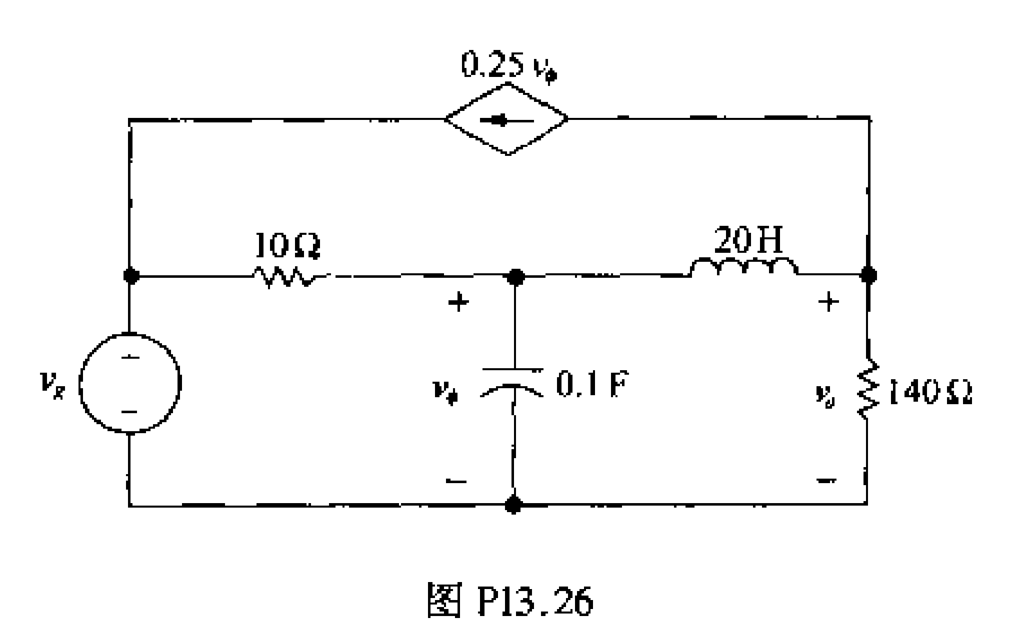


图 P13.26

(a) 求 $V_o(s)$。

(b) 用初值和终值定理求 $v_o(0^+)$和 $v_o(\infty)$。

(c) (b)所求结果与已知的电路值一致吗？请解释。

(d) 求 $v_o(t)$。

P13.27 图 P13.27 所示电路在电压源开始作用时无初始贮能，$v_g = 75u(t)$ V。

(a) 求 V_o 和 I_o。

(b) 求 v_o 和 i_o。

(c) 所得结果与电路特性一致吗？请解释。

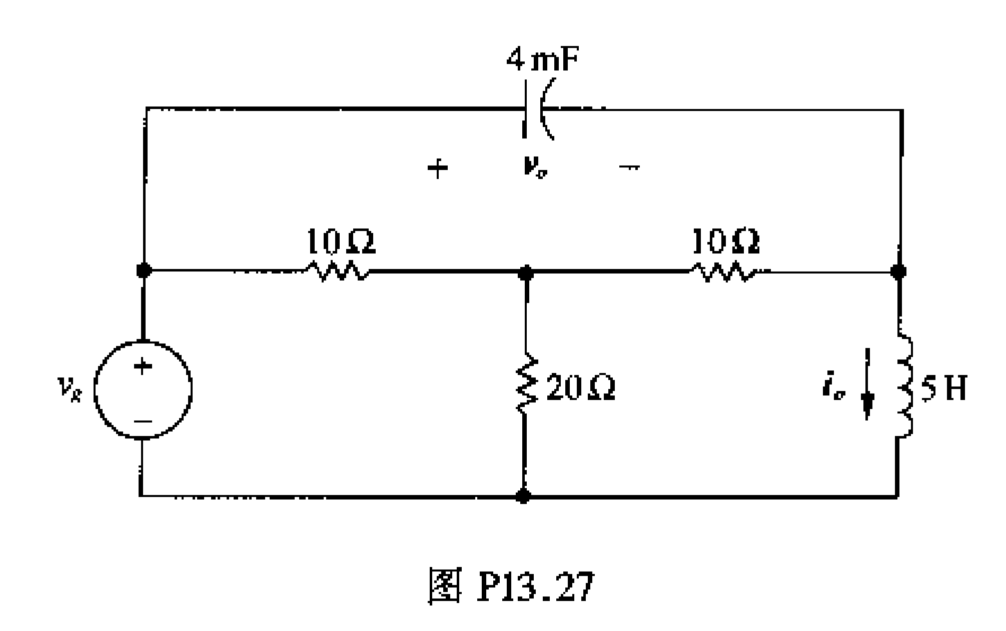


图 P13.27

P13.28 图 P13.27 所示电路在电压源开始作用时无初始贮能。

(a) 求 V_o。

(b) 求 v_o。

(c) 所得结果与电路特性一致吗？请解释。

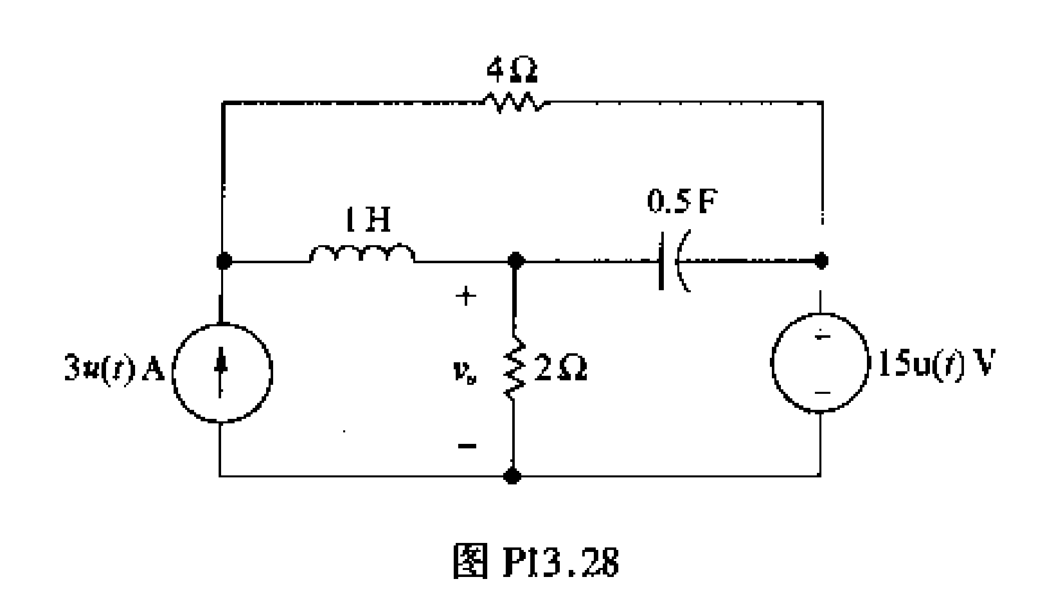


图 P13.28

P13.29 在电流源开始作用时，图 P13.29 所示电路中无贮能，

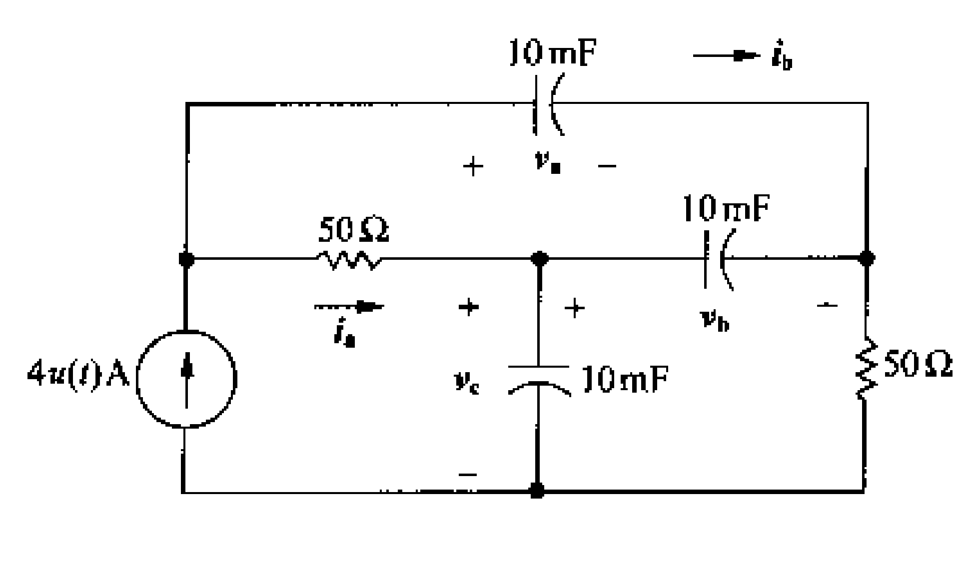


图 P13.29

(a) 求 I_a 和 I_b。

(b) 求 i_a 和 i_b。

(c) 求 V_a，V_b 和 V_c。

(d) 求 v_a，v_b 和 v_c。

(e) 假设电容的击穿电压为 1000 V，那么在电源作用后多久，其中的一个电容会击穿？

P13.30 在图 P13.30 所示电路中，电源开始作用前电路中无贮能。

(a) 求 $I_1(s)$和 $I_2(s)$。

(b) 用初值和终值定理验证 $i_1(t)$和 $i_2(t)$的初值和终值。

(c) 求 $t \geq 0$ 时的 $i_1(t)$和 $i_2(t)$。

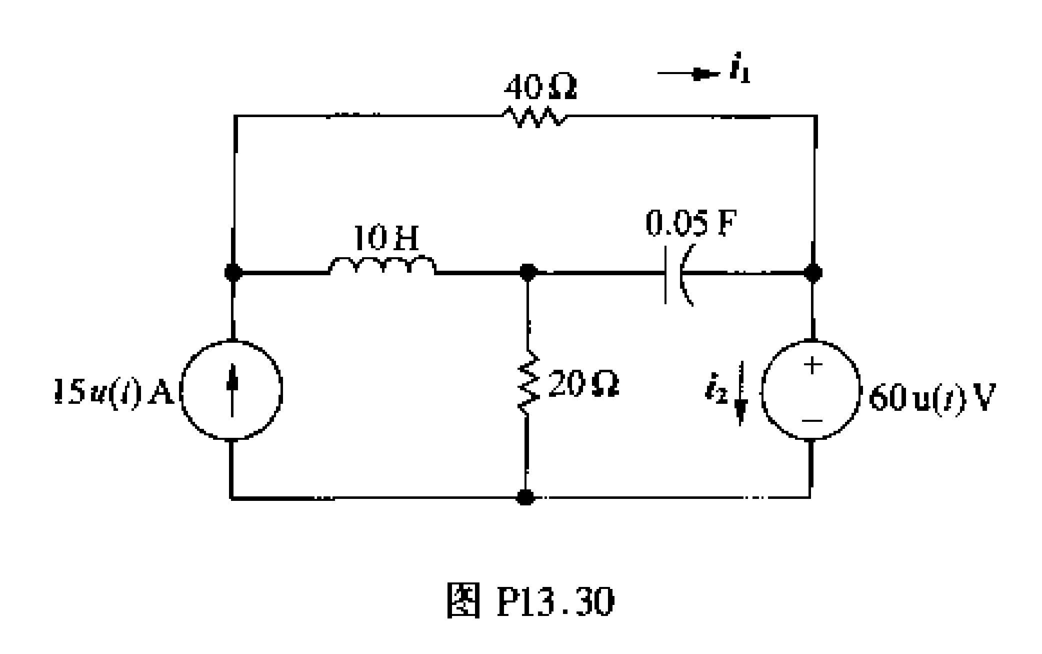


图 P13.30

P13.31 电路如图 P13.31 所示，已知电流源为 $i_g = 100u(t)$ A，在电源开始作用时电路无贮能。

(a) 求 $I_o(s)$。

(b) 用初值和终值定理求 $i_o(0^+)$和 $i_o(\infty)$。

(c) 试验证(b)所得结果是否与电路特性相一致。

(d) 求 $i_o(t)$。

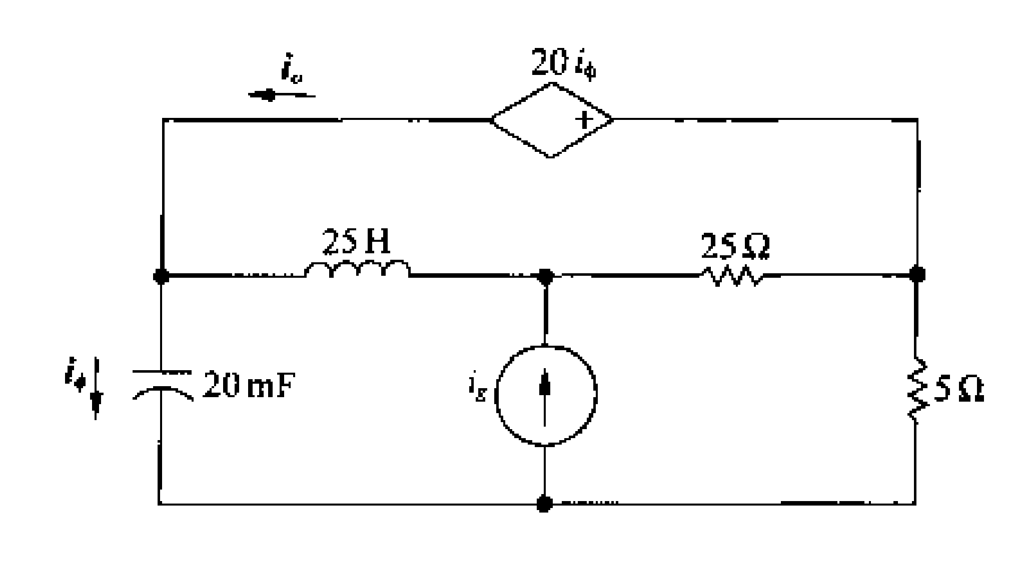


图 P13.31

P13.32 在 $t = 0^-$ 时，图 P13.32 电路中无贮能。

(a) 用节点电压法求 v_o。

(b) 求 i_o 的时域表达式。

(c) (a) 和(b)所得结果与电路特性一致吗？试加以解释。

13.33 根据式(13.65)说明在图 13.19 所示电路中，电容电流在 $0 < t < 200$ μs 时为正，在 $t > 200$ μs时为负。且在 $t = 200$ μs 时为零。这结果与 $dv_c/dt = 0$ 相一致。

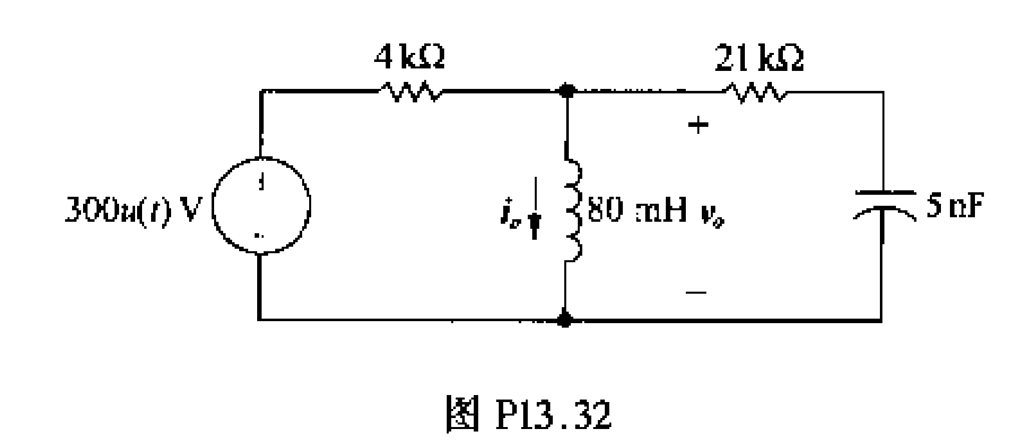


图 P13.32

13.34 如图 P13.34 所示电路,开关打开已久。正弦电压源为 $v_g = V_m\sin(\omega t+\phi)$。在 $t=0$时,开关闭合。当开关闭合时,电压表达式中的相角决定了此时的电压值。即 $v_g(0)=V_m\sin(\phi)$。

(a) 用拉氏变换法求 $t>0$ 时的 i。

(b) 用(a)所求表达式,求出开关闭合很久以后电流的表达式。

(c) 用(a) 所求表达式,求 i 的暂态分量表达式。

(d) 用相量法求 i 的稳态响应表达式。证明所得表达式与(b)中所得的等效。

(e) 若使开关闭合时,电流直接进入稳态,求 ϕ 值。

P13.35 图 P13.35 所示电路中两个开关同时动作,且在开关闭合瞬间电路无贮能,先将 ab 左端电路化成 s 域戴维南等效电路,然后再求 $t \geq 0^+$ 时的 $i(t)$。

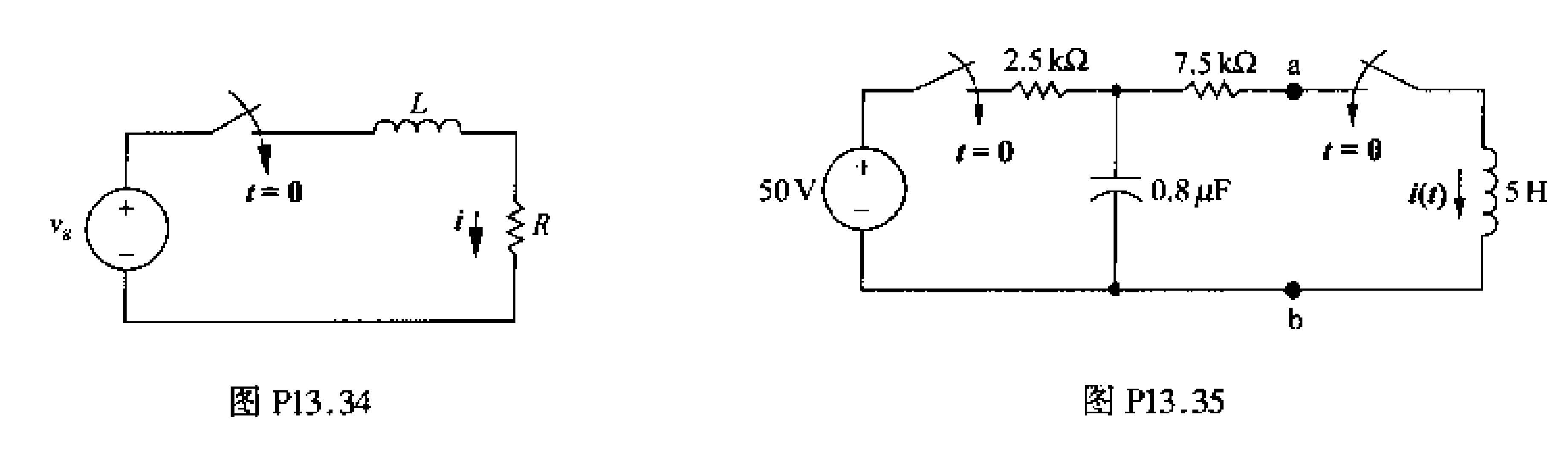


图 P13.34　　图 P13.35

P13.36 在图 P13.36 中的合断开关在 a 位置已久,在 $t=0$ 时瞬间移到 b 点,求 $t \geq 0$ 时的 i_o。

P13.37 在图 P13.37 所示电路中,开关闭合已久,在 $t=0$ 时开关打开,用拉氏变换法求 i_o。

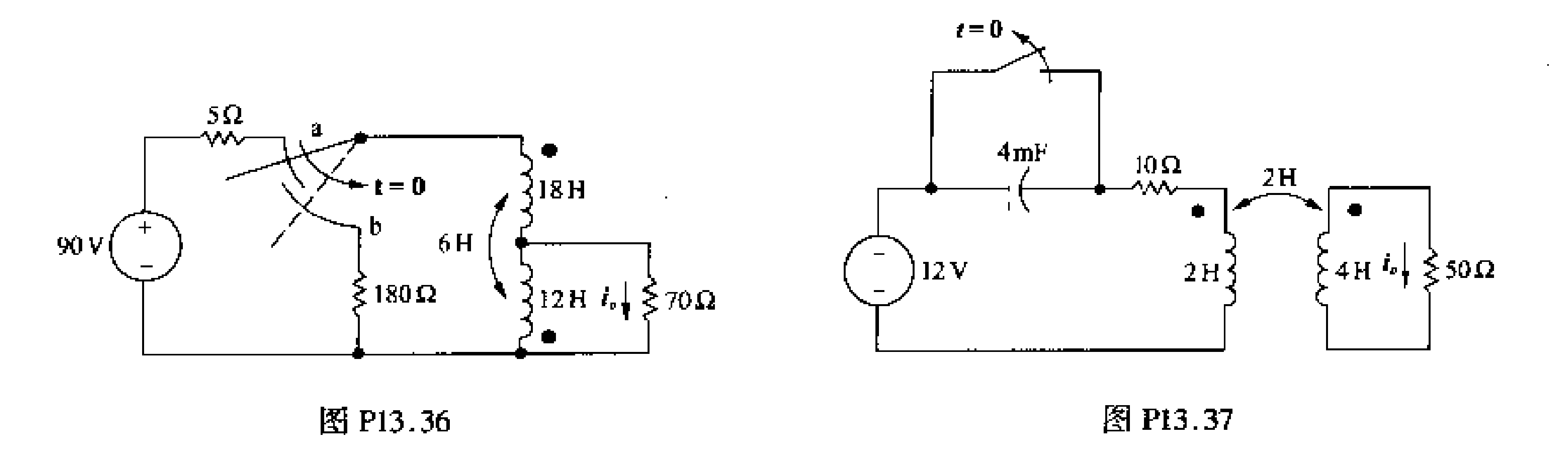


图 P13.36　　图 P13.37

P13.38 如图 P13.38 所示电路,耦合电感具有初始电流 3 A 和 2 A。

(a) 求电路中的初始贮能。

(b) 求 I_1 和 I_2。

(c)求 i_1 和 i_2。

(d) 求 600 Ω 和 1350 Ω 电阻所消耗的总能量。

(e) 当 90 mH 电感上的点在下端时，重做(a)～(d)。

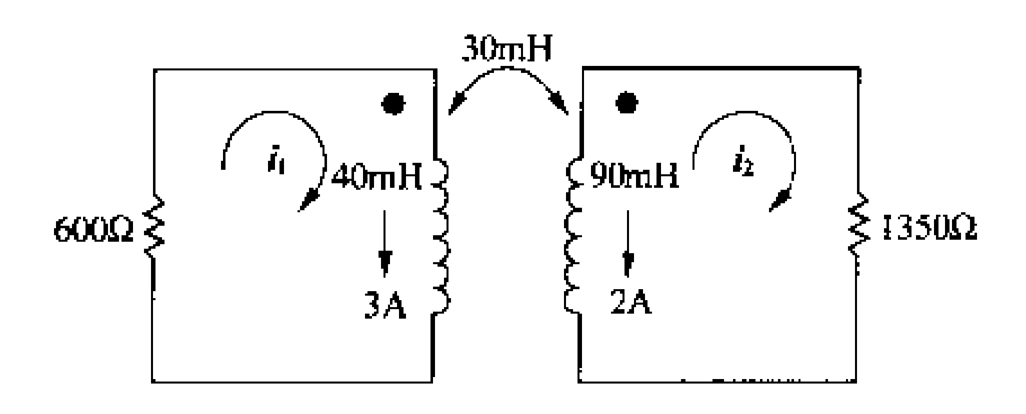


图 P13.38

P13.39 图 P13.39 所示电路，开关闭合时电路无贮能。

(a) 求 I_1。

(b) 用初值和终值定理求 $i_1(0^+)$和 $i(\infty)$。

(c) 求 i_1。

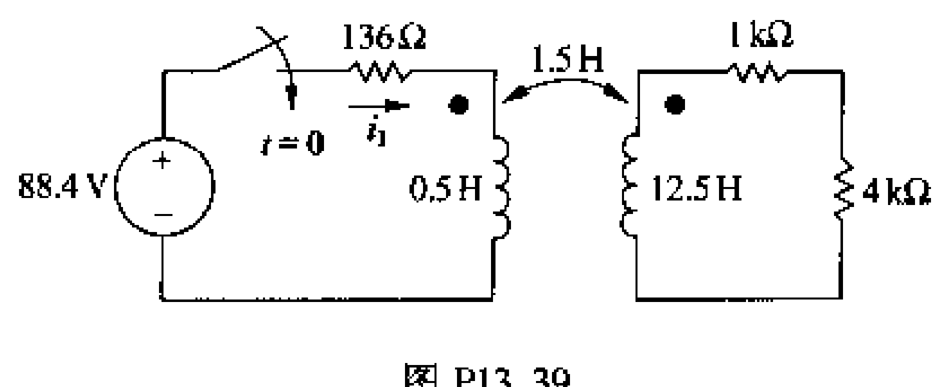


图 P13.39

P13.40 (a) 求如图 P13.39 所示电路 4000 Ω 电阻上的电流，参考方向向下。

(b) 如果 12.5 H 电感上的点在下端，重做(a)步。

P13.41 在图 P13.41 电路中，$t=0$ 时开关 1 闭合，同时合断开关由 a 移到 b。

(a) 建立 $t>0$ 时的 s 域等效电路。

(b) 求 I_2。

(c) 用初值和终值定理验证 i_2 的初值和终值。

(d) 求 $t \geqslant 0^+$ 时的 i_2。

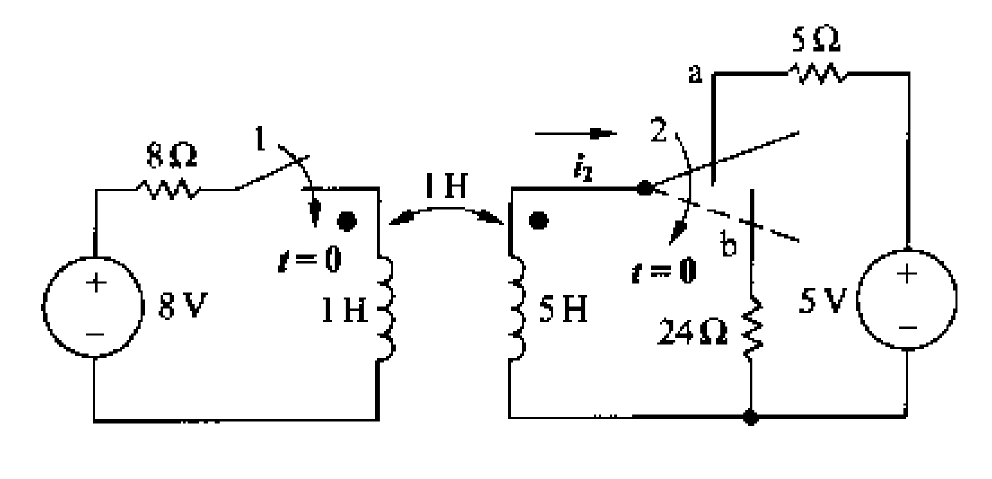


图 P13.41

P13.42 图 P13.42 中的运算放大器是理想的运放，当电路开始加电时电容无初始贮能。

(a) 若 $v_{g1}=16u(t)$ V，$v_{g2}=8u(t)$ V，求 v_o。

(b) 电源作用到电路后需要多少毫秒，理想运放会饱和？

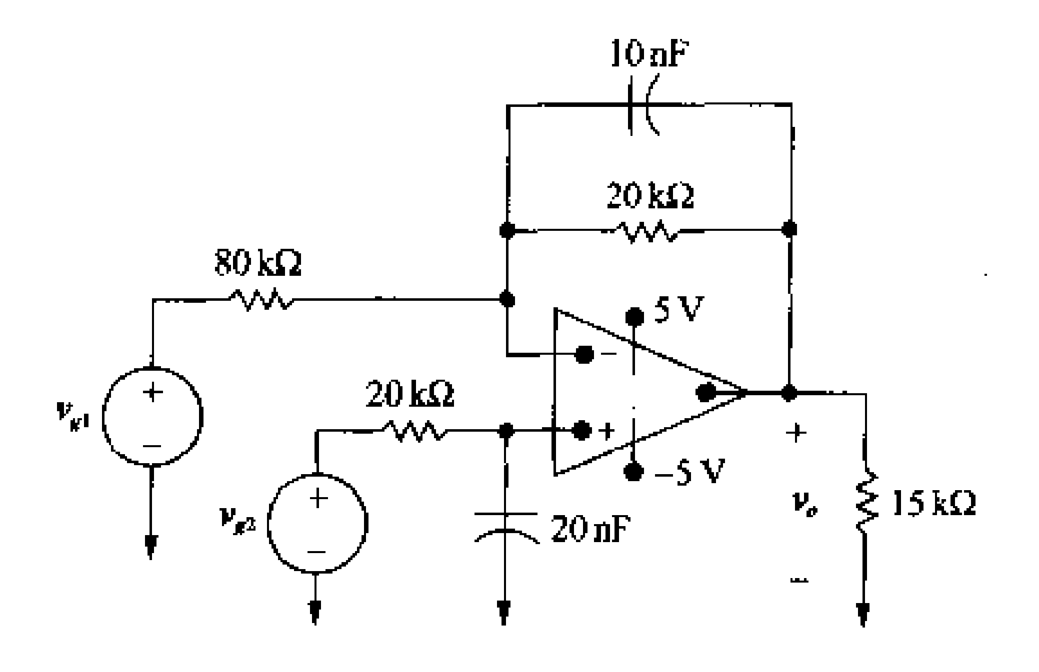


图 P13.42

P13.43 图 P13.43 电路中的运放为理想的,电路上电时无贮能,若 $v_g = 20000tu(t)$ V,求:

(a) V_o。

(b) v_o。

(c) 需多长时间才会使理想运放饱和。

(d) 要防止饱和,v_g 的变化率应为多少?

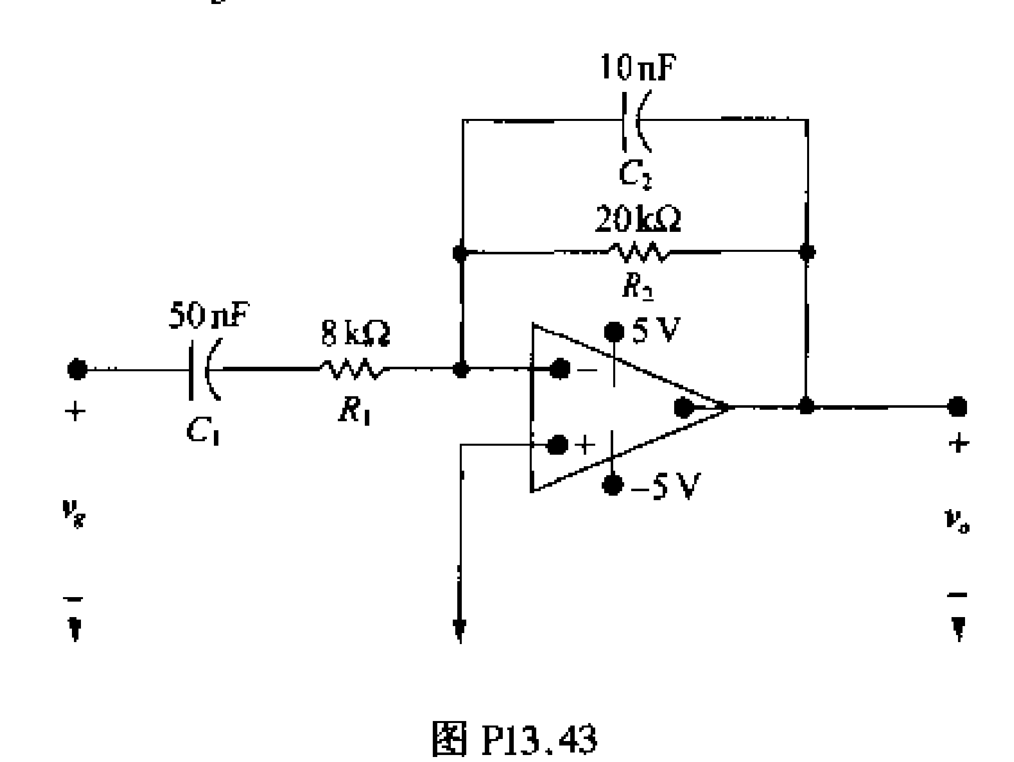


图 P13.43

P13.44 若图 P13.44 中的运放处在线性范围内,且 $v_g = 400u(t)m$ V,求 $v_o(t)$。

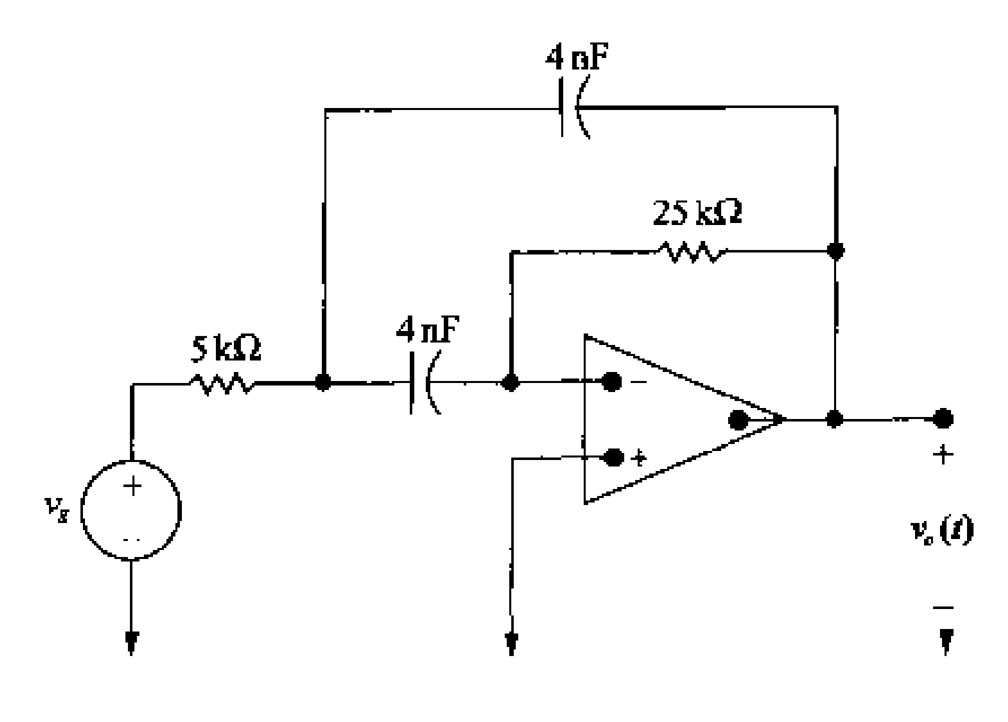


图 P13.44

P13.45 图 P13.45 中的运放是理想运放。$t=0$ 时电容中无贮能。若 $v_g = 180u(t)$ mV，求使运放达到饱和需多少毫秒？

P13.46 图 P13.46 中的运放是理想运放，电路加电时电容中无贮能，试求：

(a) V_o。

(b) v_o。

(c)运放饱和需要多久？

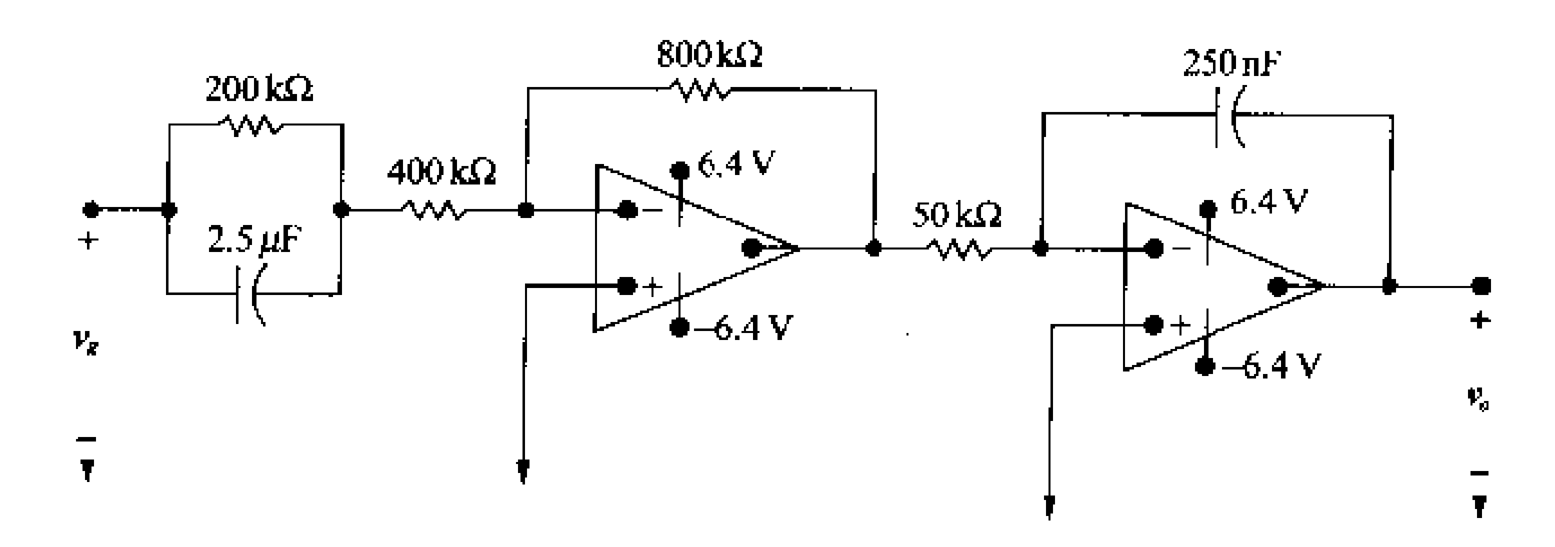


图 P13.45

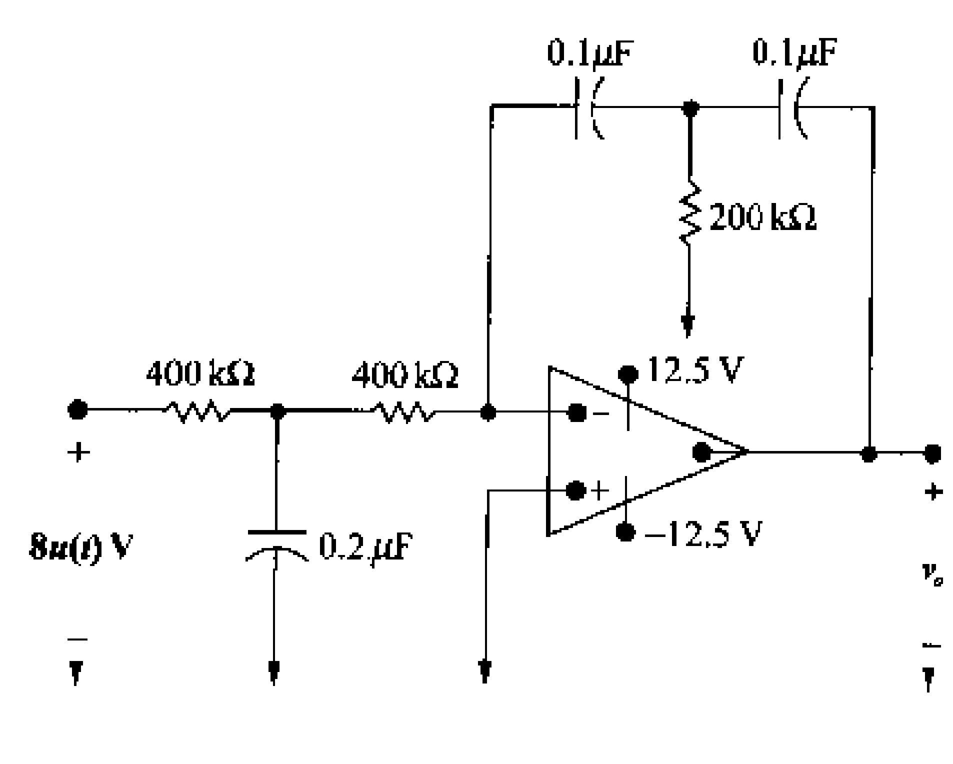


图 P13.46

13.47 验证由式(13.91)和式(13.92)所求 V_2 的表达式与式(13.90)所得结果一致。

P13.48 图 P13.48 所示电路在加电时，电路中无贮能。

(a) 用叠加原理求 V_o。

(b) 求 $t>0$ 时的 v_o。

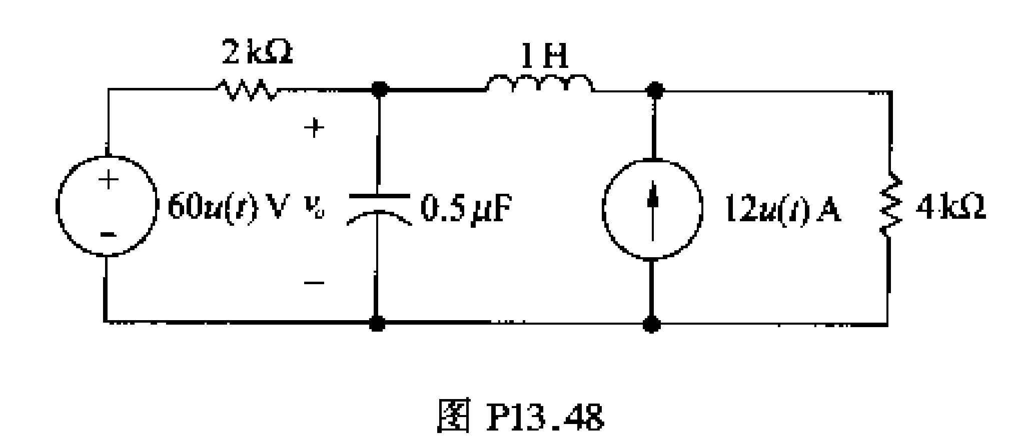


图 P13.48

13.49 对图 P13.49 所示各电路，求转移函数(V_o/V_i)的数学表达式。给出每个转移函数

的零点和极点值。

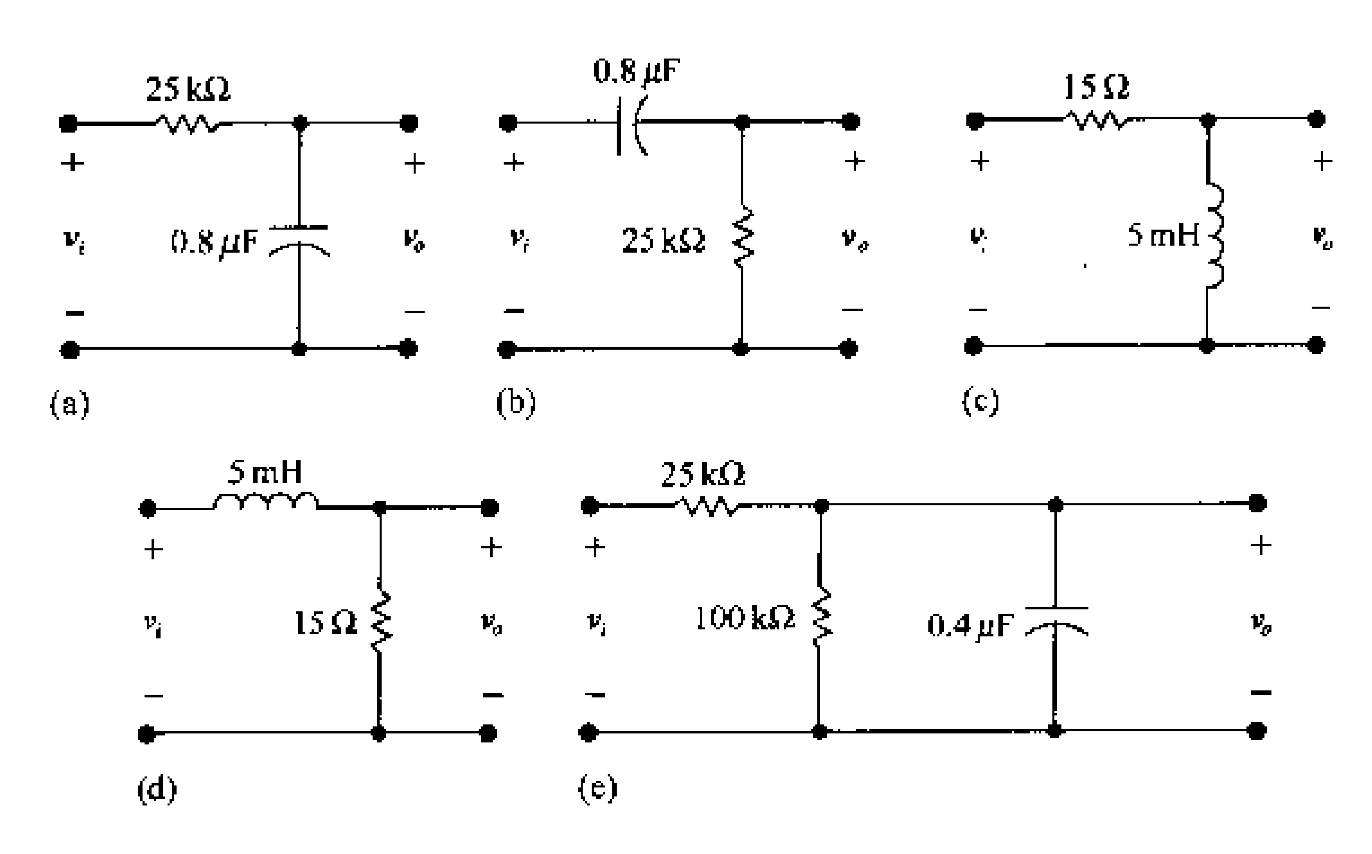


图 P13.49

13.50 图 P13.50 中的运放为理想运放,

(a) 求转移函数 $H(s) = V_o/V_g$ 的数学表达式。

(b) 求转移函数的每个零点和极点值。

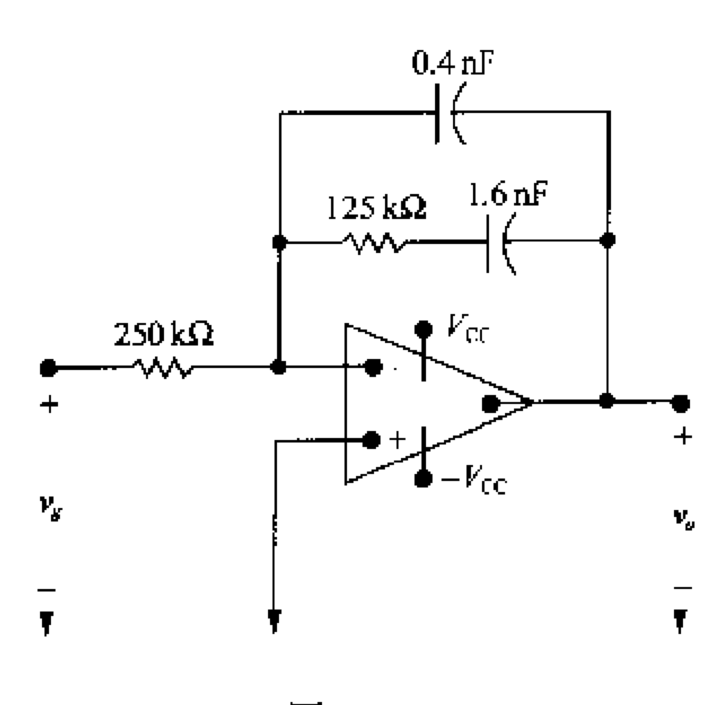


图 P13.50

M13.51 图 P13.51 中的运放为理想的运放,

(a) 求出转移函数 $H(s) = V_o/V_g$ 的数学表达式。

(b) 求出转移函数的各零点和极点值。

M13.52 在图 P13.52 所示电路中,运算放大器为理想运放。

(a) 求转移函数 $H(s) = V_o/V_g$ 的表达式。

(b) 求 $H(s)$的零点和极点。

M13.53 (a) 求图 P13.53 电路中的转移函数 $H(s) = V_o/V_i$ 的表达式。

(b) 求 $H(s)$的零点和极点。

13.54 在图 P13.54 所示电路中,i_o 是输出信号,v_g 是输入信号,求转移函数的零点和极点。

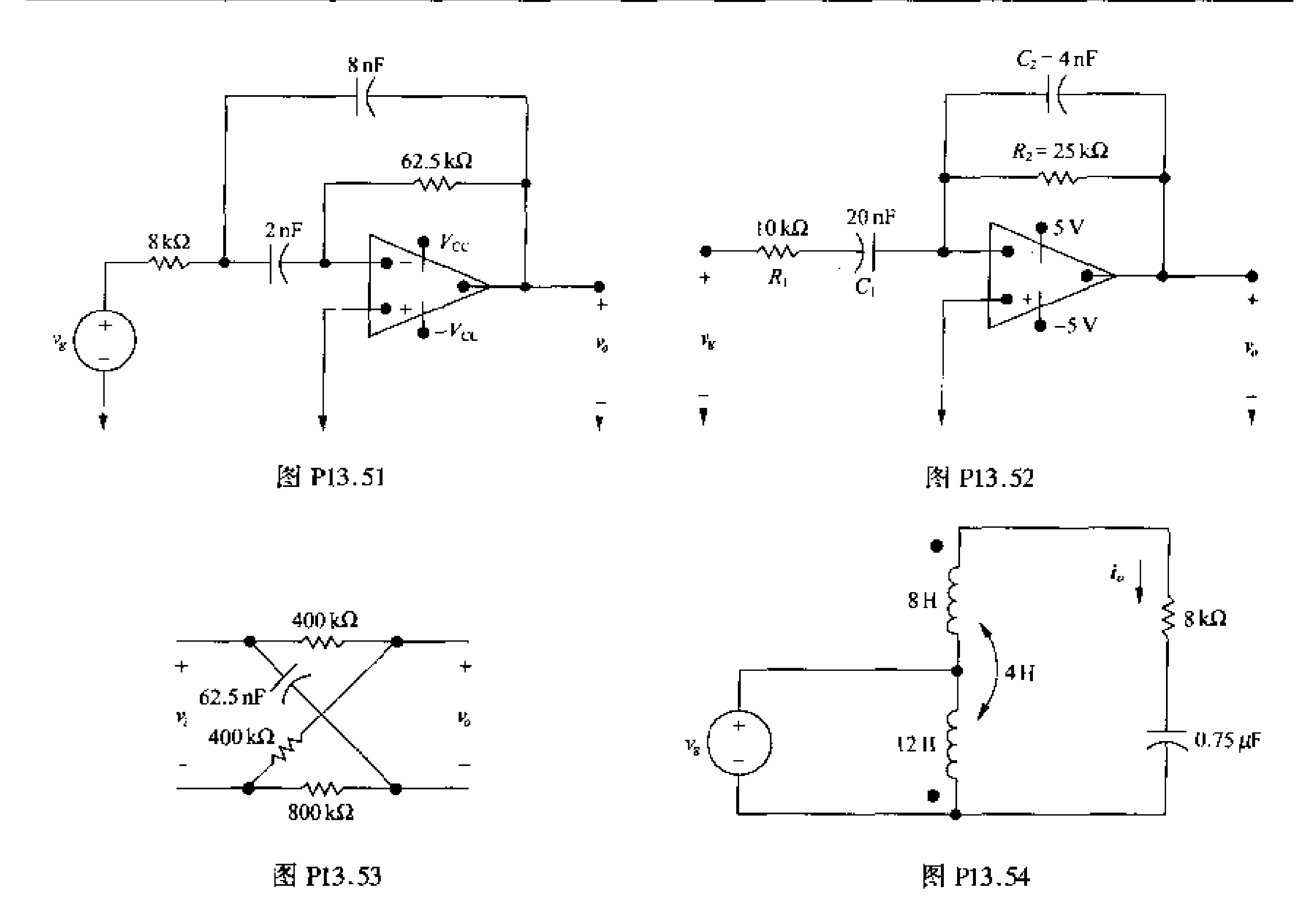


图 P13.51　图 P13.52

图 P13.53　图 P13.54

P13.55　在图 P13.55 所示电路中，开关打开时电路中无贮能，正弦电流源为 $60\cos 4000t$(mA)，i_o 为电路的响应。

(a) 求转移函数 I_o/I_g。

(b) 求 $I_o(s)$。

(c) 在不求 $i_o(t)$条件下，确定 $i_o(t)$的自然响应分量。

(d) 在不求 $i_o(t)$条件下，确定 $i_o(t)$的稳态响应分量

(e) 求出 $i_o(t)$，验证(c) 和(d) 步的结果。

P13.56　(a) 电路如图 P13.56 所示，求出转移函数 I_o/I_g 关于 μ 的表达式。

(b) 为使系统在有界输入下产生有界的输出，求 μ 所允许的最大值。

(c) 若 $i_g = 10u(t)$ A，求 $\mu = -0.5, 0, 1, 1.5$ 时的各 i_o。

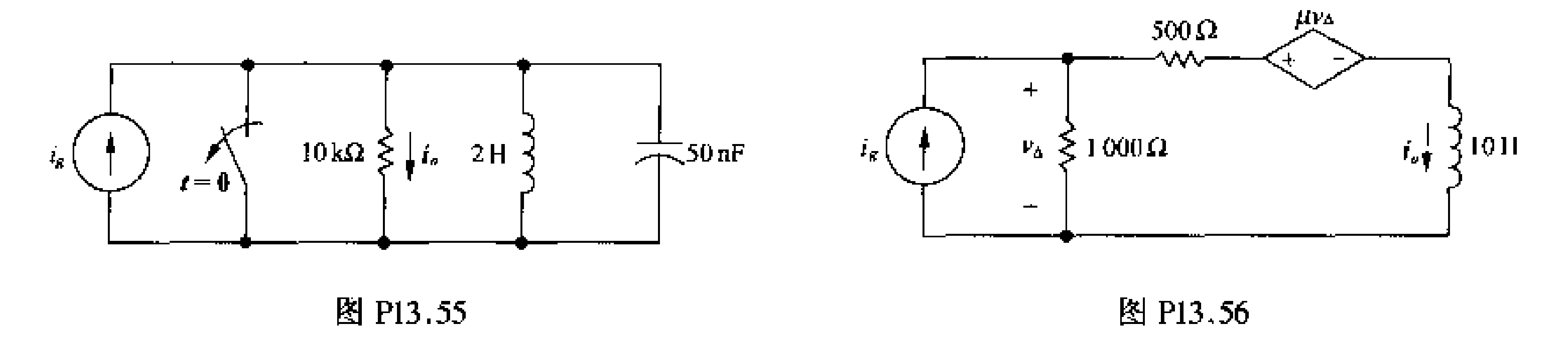


图 P13.55　图 P13.56

M13.57　(a) $x(t)$和 $h(t)$的波形如图 P13.57(a)所示，求 $h(t) * x(t)$。

(b) 当 $x(t)$变为图 P13.57(b)所示波形时，求 $h(t) * x(t)$。

(c) 当 $h(t)$变为图 P13.57(c) 所示波形时，求 $h(t)*x(t)$。

M13.58 (a) 已知 $y(t)=h(t)*x(t)$，当 $h(t)$和 $x(t)$为如图 P13.58(a)所示矩形脉冲时，求 $y(t)$。

(b) 当 $h(t)$为图(b)所示波形时，求 $y(t)$。

(c) 当 $h(t)$为图(c) 所示波形时，求 $y(t)$。

(d) 在同一个平面上画出(a)，(b)，(c) 步所得的各曲线。

(e) (d) 中所得各图正确吗？试加以解释。

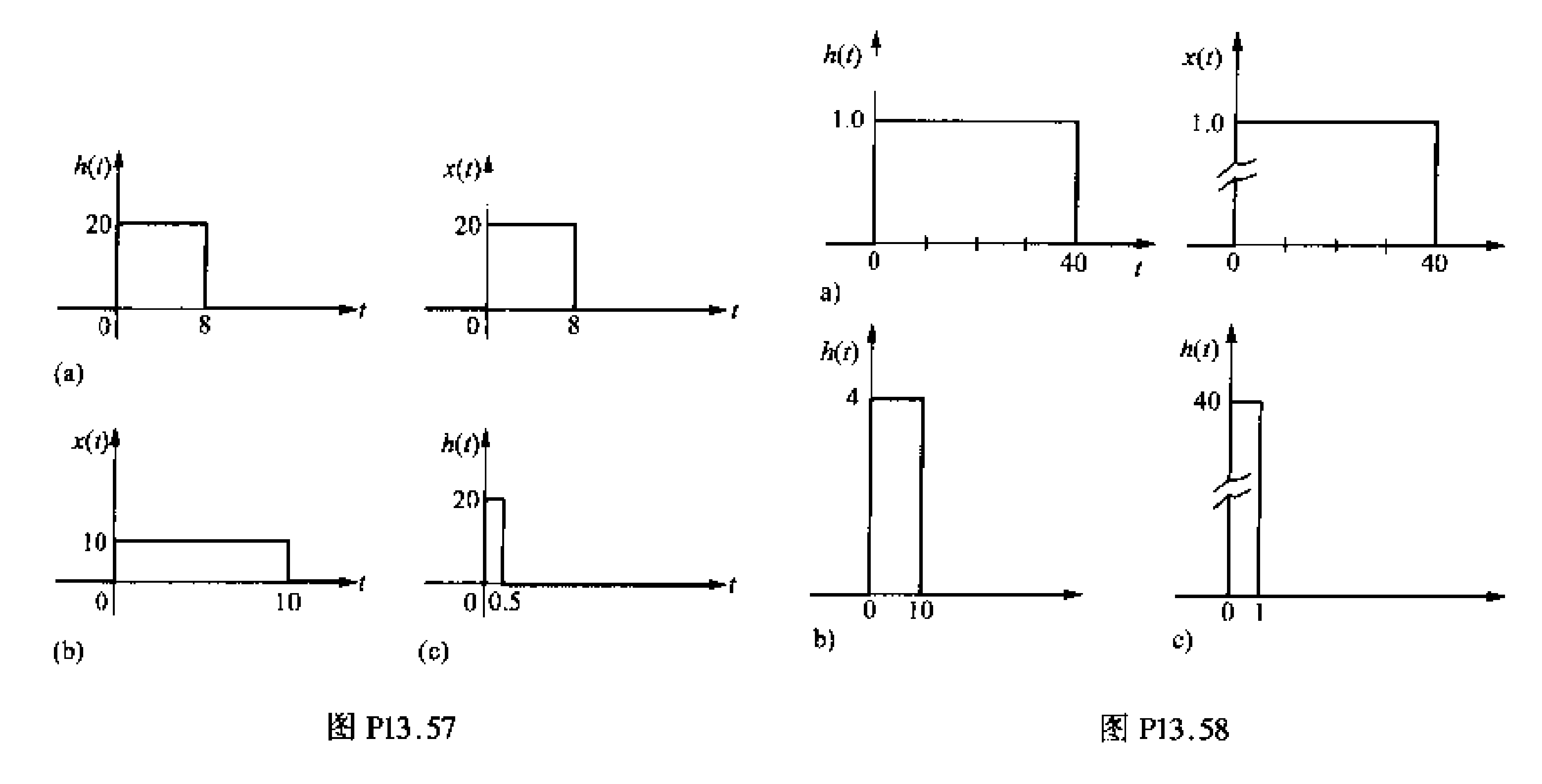


图 P13.57　　　　图 P13.58

M13.59 电路的电压冲激响应如图 P13.59(a)所示，电路输入信号为矩形脉冲，如图 P13.59(b)所示。

(a) 求输出电压的方程，注意每个方程所适用的时域范围。

(b) 画出 $0\leqslant t\leqslant 27$ s 时的 v_o 波形。

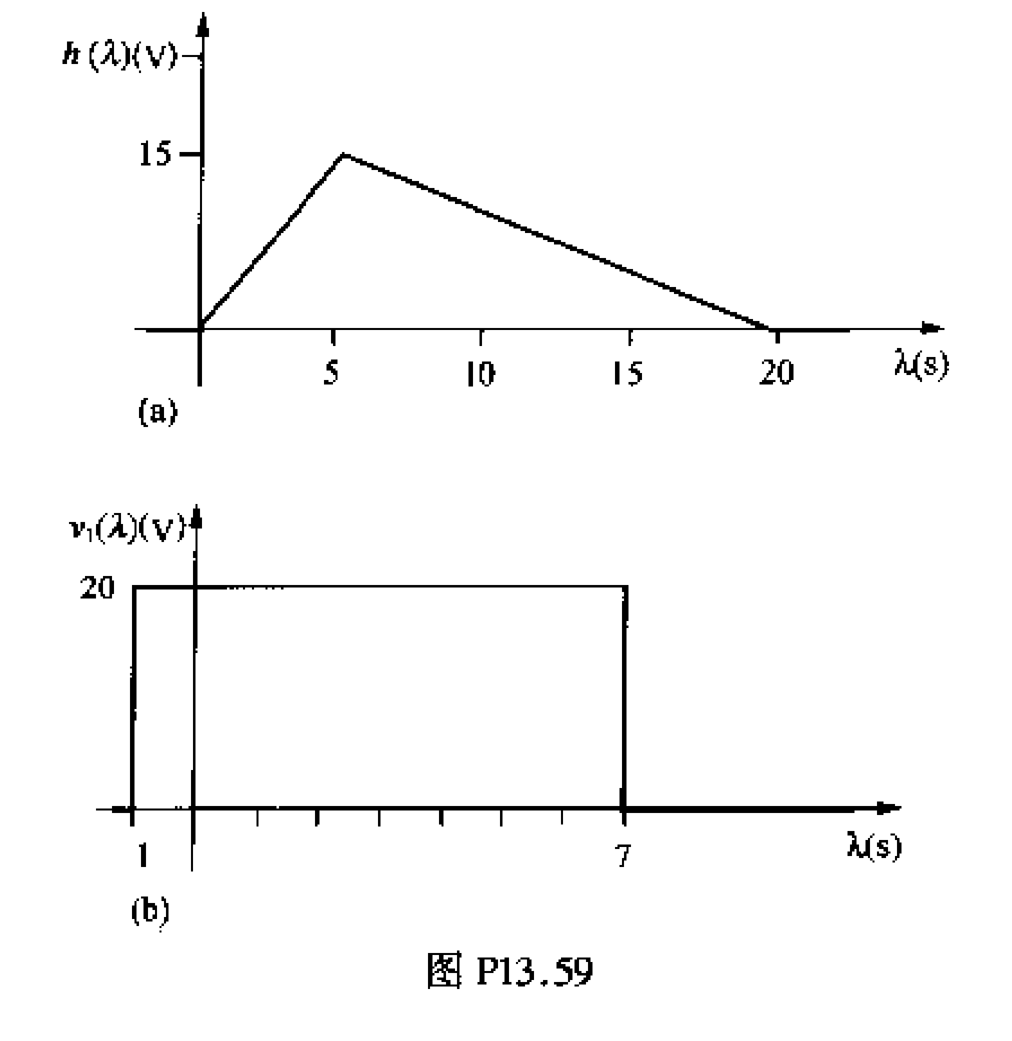


图 P13.59

13.60 假设电路的电压冲激响应波形如图 P13.60 所示，电压输入信号为阶跃信号 $4u(t)$ V。

(a) 用卷积积分计算出输出电压。

(b) 画出输出电压在 0 ~ 25 s 间的波形。

(c) 如果电压冲激响应曲线下的面积不变，宽度为 5 s，重复(a)，(b)两步。

(d) 哪个输出波形更接近于输入波形？(b)还是(c)？请解释。

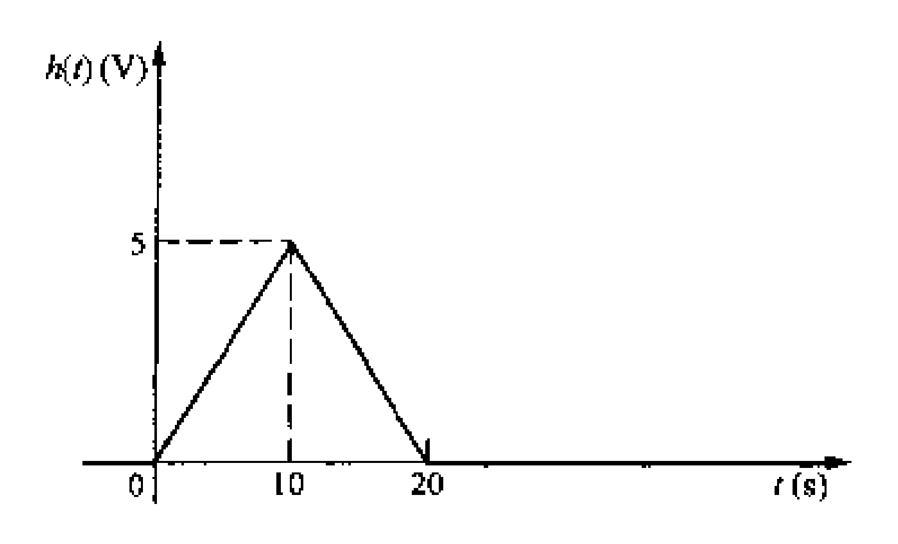


图 P13.60

M13.61 假设一个电路的电压冲激响应为：$h(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 10e^{-4t}, & t\geqslant 0\end{cases}$

(a) 若输入信号为 $10u(t)$ V，用卷积积分求输出信号。

(b) 若电压冲激响应为：

$$h(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 10(1-2t), & 0\leqslant t\leqslant 0.53\\ 0, & t\geqslant 0\end{cases}$$

重做(a)步。

(c) 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ s 区间内，画出输出电压对时间的曲线。

13.62 (a) 电路如图 P13.49(d) 所示，若输入电压为如图 P13.62 所示的矩形脉冲，用卷积积分求电路的输出电压。

(b) 在 $0\leqslant t\leqslant 100\ \mu$s 区间内，画出 $v_o(t)$对 t 的波形。

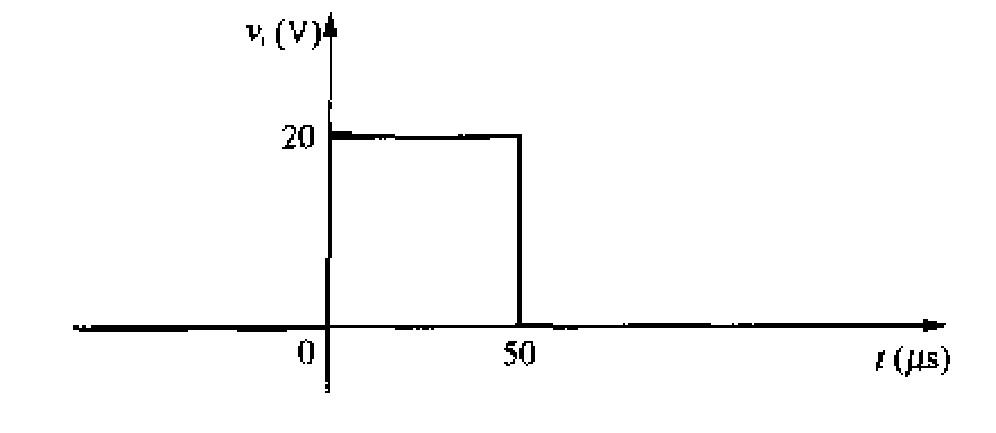


图 P13.62

13.63 (a) 假设在图 P13.49(d) 中的电阻变为 75 Ω，重做 13.62 题。

(b) 增大电阻会增加还是减小了电路的记忆性？

(c) 哪个电路更接近于传输输入电压的复制信号。

13.64 (a) 如果 i_g 为如图 P13.64 所示的脉冲，用卷积积分求电路 P13.64(a) 中的 i_o。

(b) 用卷积积分求 v_o。

(c) 计算 i_o 在 1^- ms, 1^+ ms, 4^- ms, 4^+ ms 时的值，并说明所求的 v_o 和 i_o 是正确的。

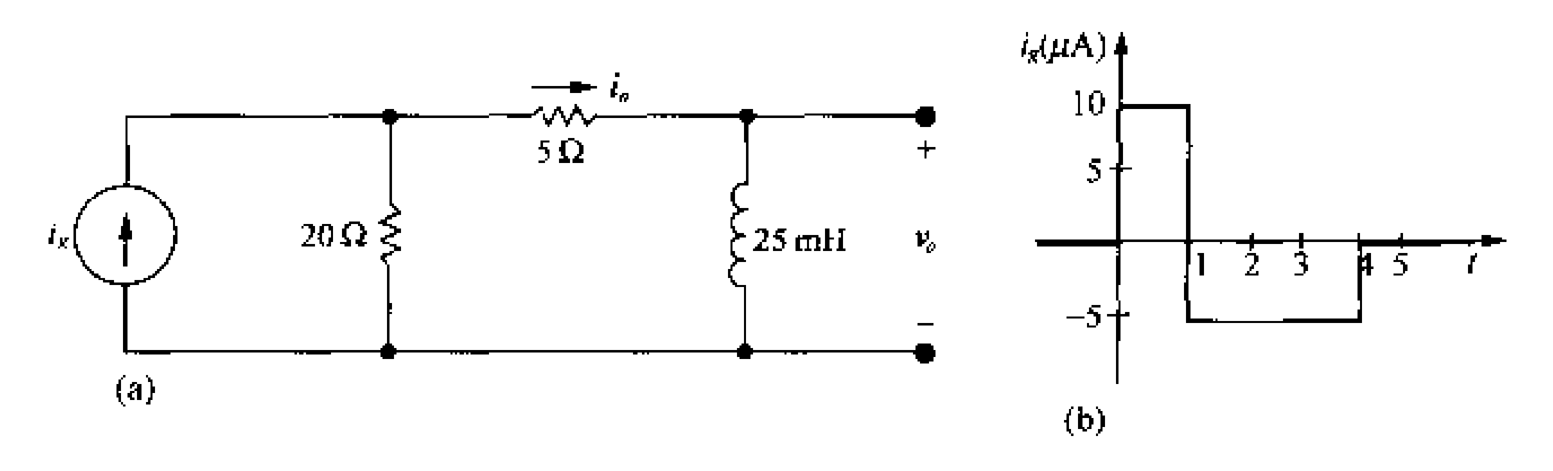


图 P13.64

13.65 正弦电压脉冲如图 P13.65(a)所示，将其作用到图 P13.65(b) 所示电路中，用卷积积分法求 $t = 2.2$ s 时 v_o 之值。

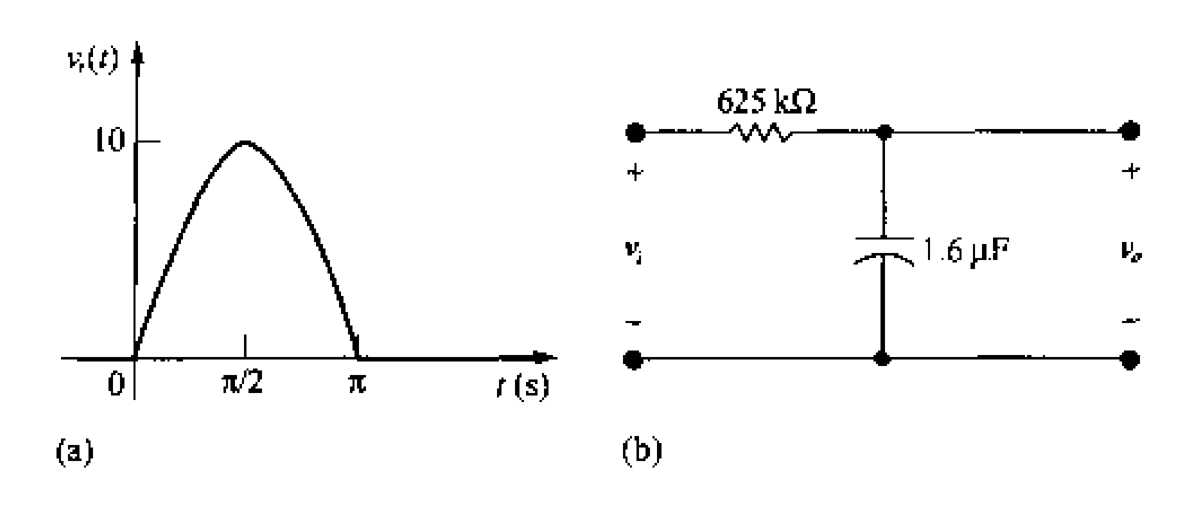


图 P13.65

13.66 (a) 求图 P13.66(a)所示电路的冲激响应，v_g 是输入信号，i_o 是输出信号。

(b) 已知 v_g 波形如图 P13.66(b)所示，用卷积积分求 i_o。

(c) i_o 的波形与 v_g 波形一样吗？为什么？

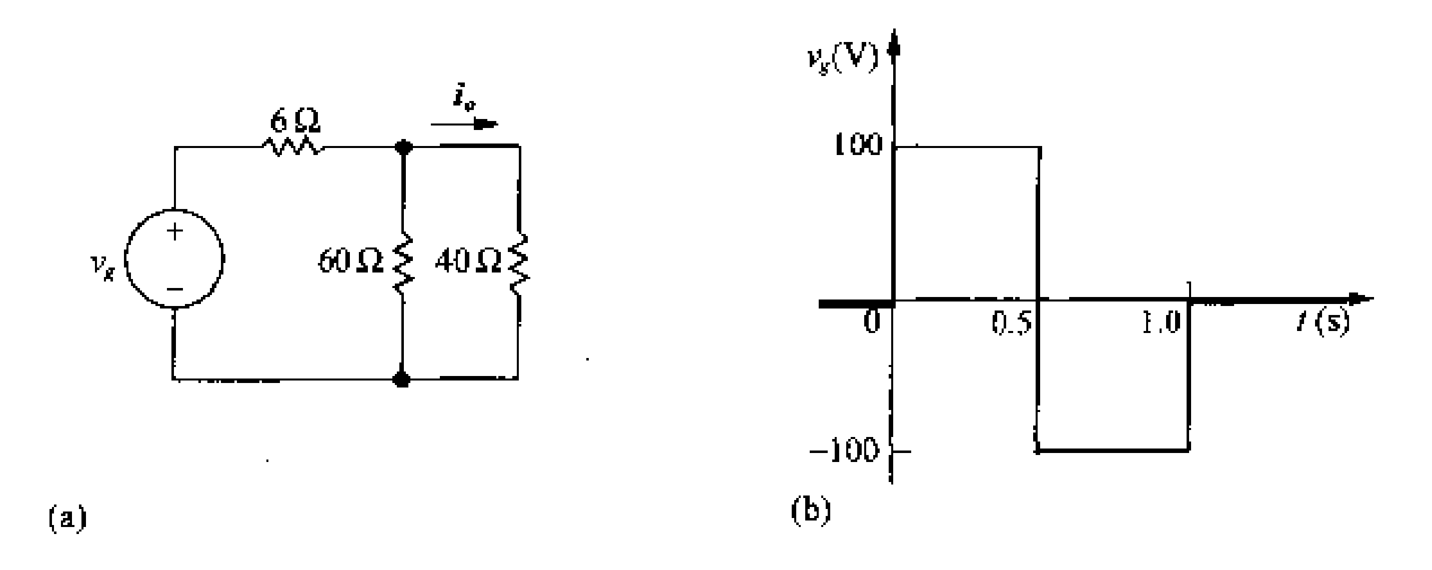


图 P13.66

13.67 (a) 电路如图 P13.67 所示，若 v_g 是输入信号，v_o 是输出信号，求电路的冲激响应。

(b) 假如电压源的波形如图 P13.66(b)所示，用卷积积分求 v_o。

(c) 在 $0 \leqslant t \leqslant 1.5$ s 区间内，画出 v_o 波形。

(d) v_o 波形与 v_g 波形一样吗？为什么？

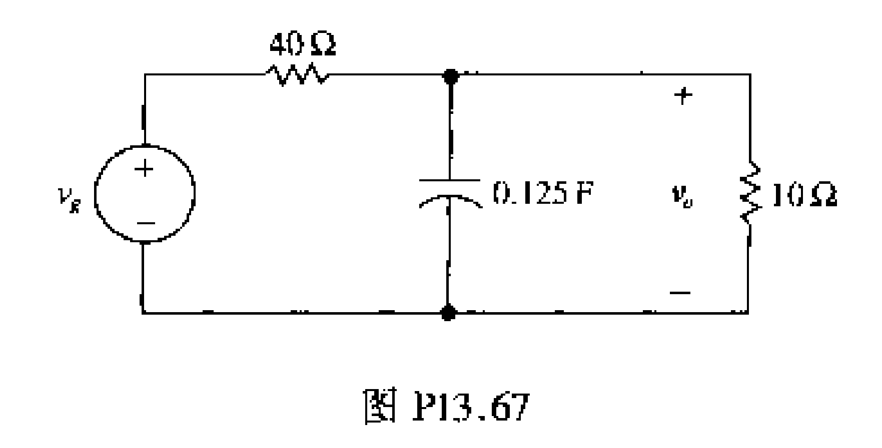


图 P13.67

13.68 电路如图 P13.68(a)所示，电流源波形如图 P13.68(b)所示，用卷积积分求 $t=7$ ms 时的 v_o 的值。

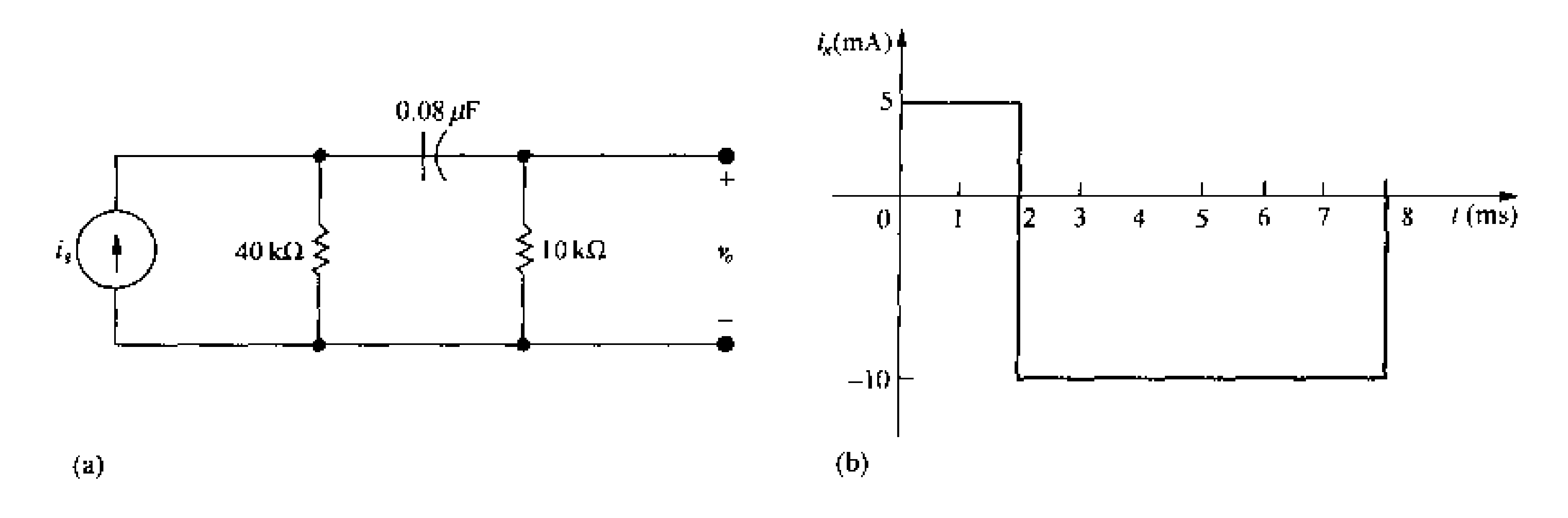


图 P13.68

M13.69 电路如图 P13.69 所示，输入电压为：

$$v_i = 10[u(t) - u(t-0.1)] \text{ V}$$

(a) 用卷积积分求 v_o。

(b) 在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ s 区间画出 v_o 曲线。

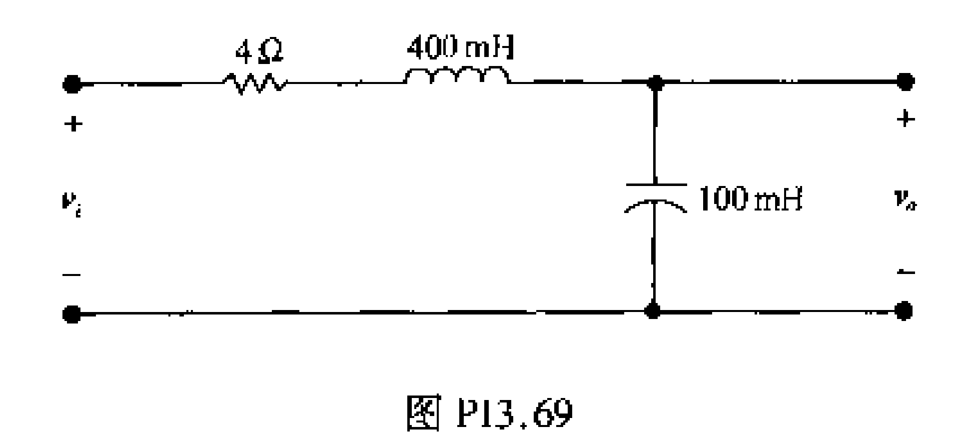


图 P13.69

13.70 电路如图 P13.70 所示，若 $v_i = 75u(t)$ V，用卷积积分计算 v_o。

13.71 (a) 证明，若 $y(t) = h(t) * x(t)$，则 $Y(s) = H(s)X(s)$。

(b) 若 $F(s) = \dfrac{a}{s(s+(a))^2}$，用(a)的结论求 $f(t)$。

M13.72 一个线性非时变电路的转移函数为：

$$H(s) = \frac{V_o}{V_g} = \frac{10^4(s+6000)}{s^2 + 875s + 88 \times 10^6}$$

若 $v_g = 12.5\cos(8000t)$ V，求 v_o 的稳态响应表达式。

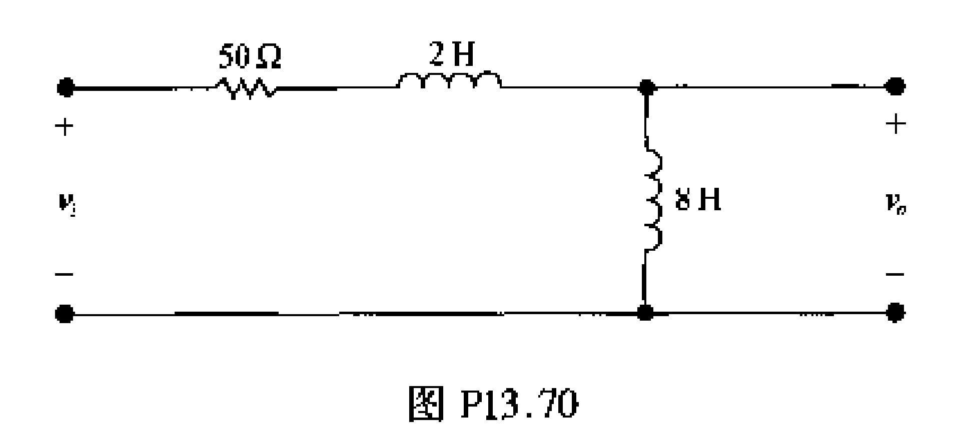


图 P13.70

13.73 在图 P13.73 所示电路中,在开关打开时刻,电感 L_1 的初始电流为 ρ,求:

(a) $v(t)$。

(b) $i_1(t)$。

(c) $i_2(t)$。

(d) $\lambda(t)$,$\lambda(t)$是电路的全部磁链。

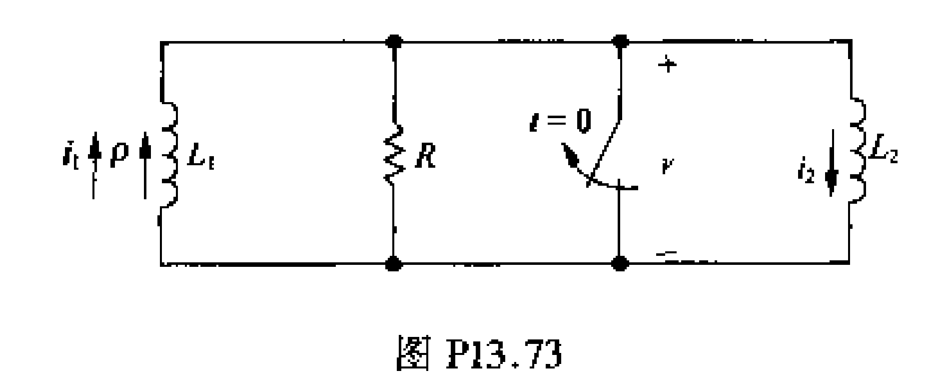


图 P13.73

13.74 (a) 在电路 P13.73 中,令 $R\to\infty$,用上题所得结论求 $v(t)$,$i_1(t)$和 $i_2(t)$。

(b) 在电路 P13.73 中,令 $R=\infty$,试用拉氏变换法求 $v(t)$,$i_1(t)$和 $i_2(t)$。

P13.75 图 P13.75 电路中的运算放大器是理想的。

(a) 求转移函数 V_o/V_g。

(b) 若 $v_g = 10u(t)$ V,求 v_o。

(c) 若 $v_g = 8\cos 2000t$ V,求 v_o 的稳态表达式。

P M13.76 在图 P13.76 所示电路中,运放为理想的,且工作在线性范围内。

(a) 计算转移函数 V_o/V_g。

(b) 如果 $v_g = 200\sqrt{10}\cos 8000t$ mV,求 v_o 的稳态表达式。

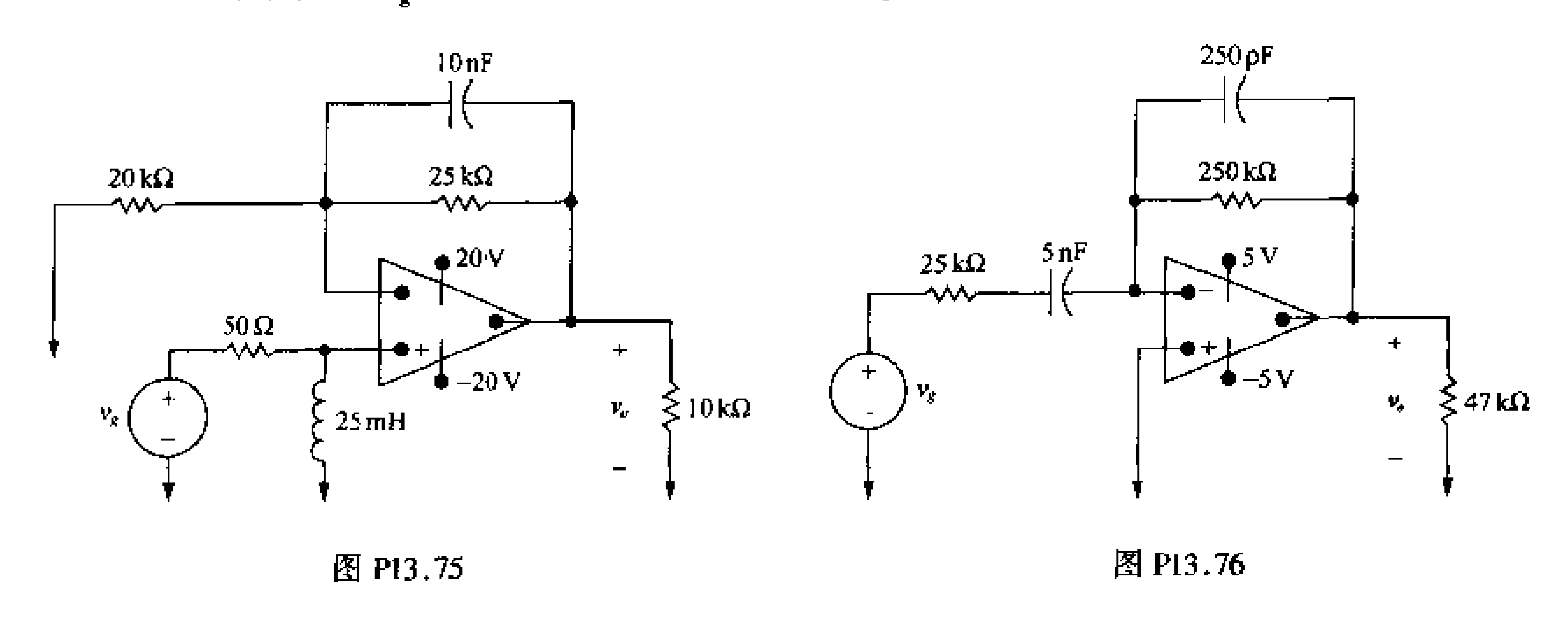


图 P13.75 图 P13.76

M13.77 当输入电压为 $240u(t)$ V 时，电路的响应为：

$$v_o = (75 - 100e^{-800t} + 25e^{-3200t})u(t)\ \text{V}$$

若激励为 $v_g = 40\cos 1600t$ V，求电路的稳态响应。

13.78 电路如图 13.47 所示，证明，当 V_oC_e 库仑的电荷量从 C_1 移到 C_2 后，每个电容的电压为 $C_1V_o/(C_1+C_2)$（提示：用电荷守恒定律）。

13.79 在图 P13.79 所示电路中，R_2 和 C_2 的并联代表示波器的输入电路，R_1 和 C_1 的并联是补偿头的电路模型，是连接示波器和电源的中间部件。当 10 V 电源通过补偿头作用到示波器上时，C_1 和 C_2 均无贮能。已知 $C_1 = 5$ pF，$C_2 = 20$ pF，$R_1 = 1$ MΩ，$R_2 = 4$ MΩ。

(a) 求 v_o。

(b) 求 i_o。

(c) 当 C_1 改为 80 pF 时，重做(a)和(b)。

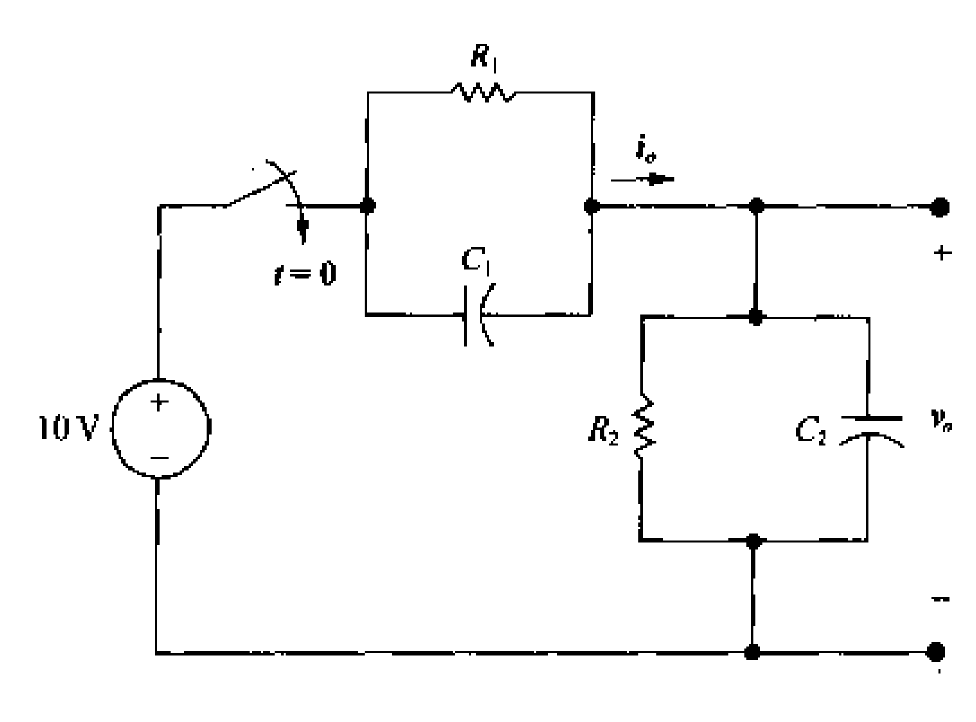


图 P13.79

13.80 图 P13.79 所示电路，证明：若 $R_1C_1 = R_2C_2$，v_o 将是电压源的比例放大。

13.81 图 P13.81 所示电路，开关闭合前打开已久。

(a) 求 $t \geq 0$ 时的 v_o 和 i_o。

(b) 验证所得结果与已知电路的特性一致。

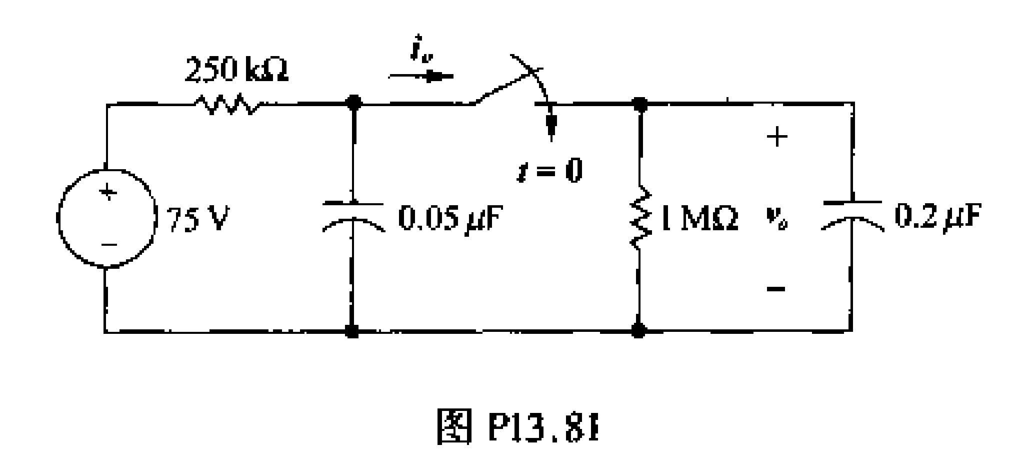


图 P13.81

13.82 在图 P13.82 所示电路中，当冲激电压源作用到电路中时，电路中无储能。

(a) 求 $t \geq 0$ 时的 $v_o(t)$。

(b) 所得结果与已知电路的特性一致吗？请解释。

13.83 在例 13.1 电路中，电压源改为单位冲激，即 $v_g = \delta(t)$。

(a) 冲激电压源给电容充电多少能量?

(b) 电容中贮能多少?

(c) 用转移函数求 $v_o(t)$。

(d) 证明(c)步所求响应和先给电容充电到 1000 V,然后再向电路放电所产生的响应一样,如图 P13.83 所示电路。

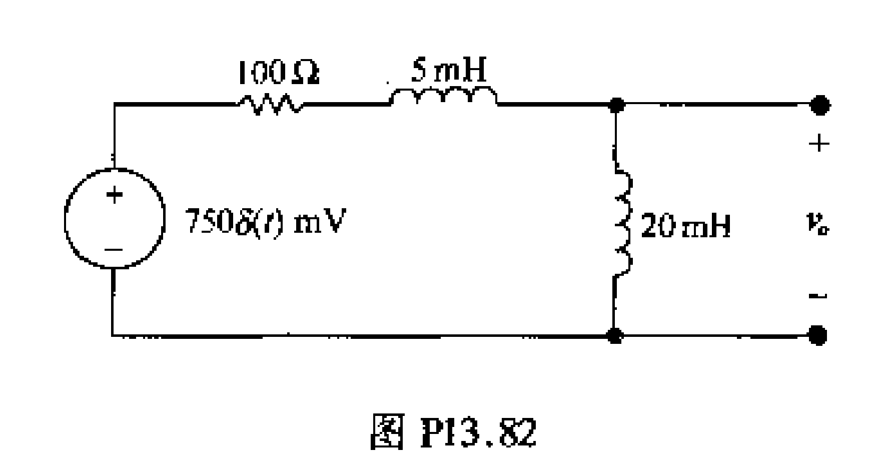


图 P13.82

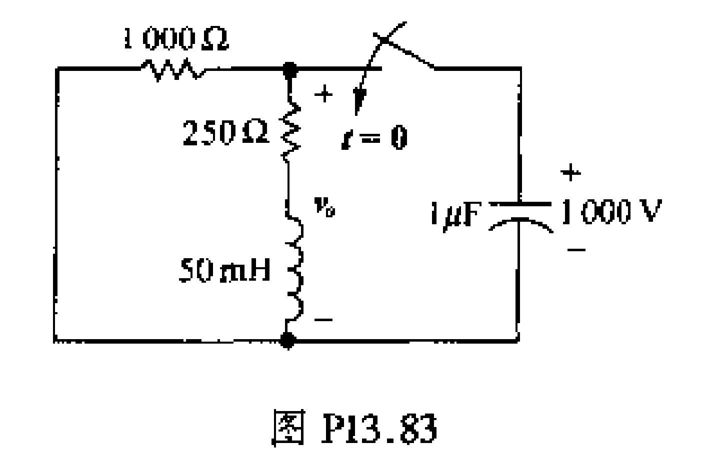


图 P13.83

13.84 对图 P13.84 所示电路,当冲激电压作用到电路上时电路无贮能。

(a) 求 $t \geqslant 0^+$ 时的 i_1。

(b) 求 $t \geqslant 0^+$ 时的 i_2。

(c) 求 $t \geqslant 0^+$ 时的 v_o。

(d) 所得各结果与电路的特性一致吗? 请解释。

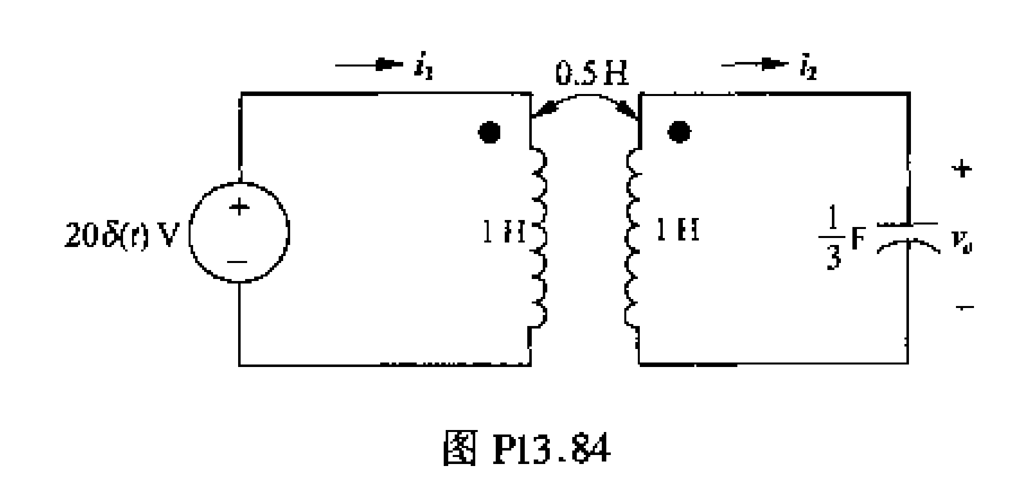


图 P13.84

13.85 对图 P13.85 所示电路,当冲激电流源作用时电路无贮能。

(a) 求 $t \geqslant 0^+$ 时的 v_o。

(b) 所得结果与电路特性一致吗? 请解释。

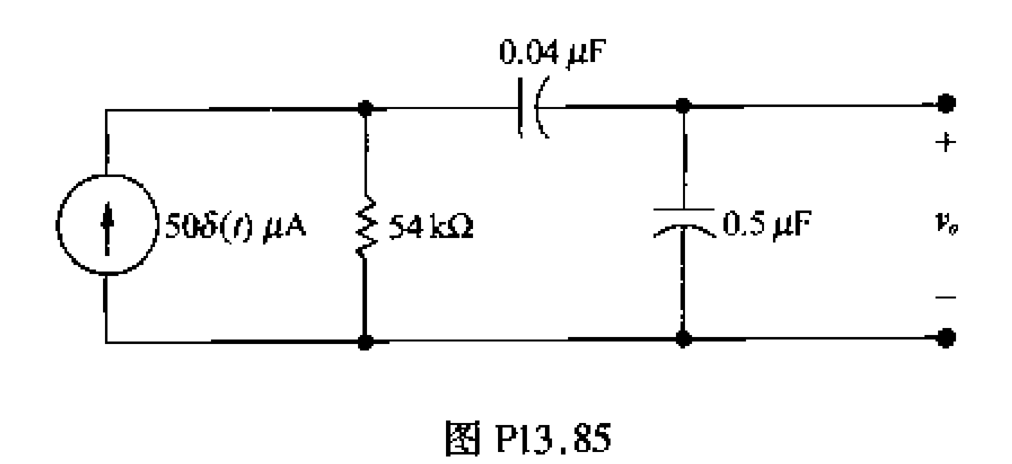


图 P13.85

第 14 章 选 频 电 路

实例

按键电话电路一

14 章将讨论电源频率变化时电路的性质。当电源频率变化时，电路特性也会发生变化，因为动态元件的阻抗是频率的函数。这种与频率相关的电路叫滤波器，滤波器在许多电子设备中都得到了应用。在收音机中，滤波器的作用是选择电台的信号，滤掉以不同频率传输的其他电台信号。在立体声设备中，滤波器用于调节高、低频声音信号的相对强度，滤波器还用在电话电路中。

在按键电话中，按键的时候会听到不同的音调，读者可能想知道这些音调是怎么告诉电话按了哪个键？究竟为什么使用音调？为什么音调听起来像音乐？电话是如何分辨按键音调和谈话或唱歌等声音的？

电话用来处理频率在 300 ~ 3000 Hz 的音频信号。因此，所有从电话到使用者之间的信号必须是可以听到的信号。包括拨号音和占线(忙)音。同样，所有从使用者到电话的信号也必须是可听到的信号，包括用户按键信号。区分是按键信号还是一般的声音信号是非常重要的，因此，采用了双音多频(DTMF)设计方法。当一个数字键被按下时，一个具有精确频率的独一无二的正弦波双音由电话端发送到电话系统中。DTMF 频率和计时特性将其与人的声音相区别。在交换系统中，电子电路检测音频信号，监听发送数字的双音信号。在后面对实例的讨论中，将给出 DTMF 滤波器的设计，以确定按了哪个键。

到目前为止，在正弦电路分析中，电源的频率都是常数。本章将分析电源频率的变化对电路中电压和电流的影响，分析结果就是电路的频率响应。

通过前面几章的学习，读者已经知道，电路的响应与电路中元件类型、连接方式、阻抗等有关。尽管正弦电源频率的改变没有使电子元件的类型或连接方式改变，但却改变了电容和电感的阻抗。因为这些元件的阻抗是频率的函数。正如后面将会看到的，如果正确选择电路元件、元件参数及与其他元件的连接方式，能构造出一种电路，这个电路能使处于某个频率范围内的输入信号得到输出，这种电路叫选频电路。许多通过电信号进行通信的设备，如电话、收音机、电视及卫星等都需要选频电路。

选频电路也叫滤波器，因为它能滤掉某些频率的信号，图 14.1 用简化方式表示了这种功能。严格地说，实际的选频电路并不能完全滤掉所选频率的信号。也就是说，滤波器只是衰减信号，即削弱或减小所有指定频带之外的输入信号。家用立体声音响设备可能有一个图式均

衡器，它就是一组滤波器电路的最好的例子。图式均衡器中的每个频带就是一个滤波器，它能放大处于频带内的声音，削弱频带外的声音。因此，图式均衡器能改变每个频带内的音量。



图 14.1 滤波器对输入信号进行处理产生输出信号

本章的分析将从四种主要类型的滤波器开始，即低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器。频率响应的分析以电路转移函数为起点，具有相同滤波功能的电路其电路转移函数也相似。15 章对滤波器电路设计，将要用到这种相似性。

本章最后将介绍波特图。波特图分析方法可以快速画出电路转移函数的幅频特性曲线和相频特性曲线。这种曲线可以大致反映出电路的实际频率响应，为电路的特性提供了强有力的可视化表示方法。

14.1 预备知识

回忆 13.7 节讨论过的内容，电路的转移函数为正弦激励下稳态响应的计算提供了简便的方法。当时，只考虑具有固定频率的电源。为研究电路的频率响应，用频率可变的正弦电源代替固定频率的正弦电源。因输出信号的振幅和相位与 $H(j\omega)$ 的振幅和相位有关，所以，转移函数仍然是非常有用的工具。

假设，改变正弦电源的频率，而不改变其振幅和相位角，那么，正弦电源频率的改变，会使转移函数的振幅和相位角发生变化，因此，输出信号的振幅和相位角也会变化。

为简便起见，先看选频电路。只关心输入和输出信号均为正弦电压的情况，如图 14.2 所示。我们感兴趣的转移函数是输出电压和输入电压的拉氏变换之比，即 $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$。但是读者应该知道，在某些情况下，输入、输出信号也可以是电流。

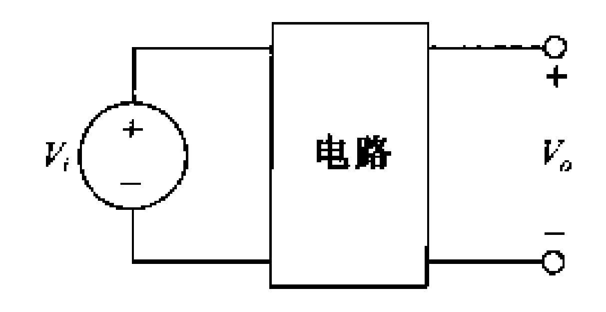


图 14.2 具有输入电压和输出电压的电路

从输入端到输出端能够通过的信号频带宽度叫通频带。电路将削弱并有效地阻止处于这个频带之外的输入电压，且不能在输出端输出。不在电路通频带内的频率范围叫阻带。选频电路是按通频带的位置分类的。

确定选频电路类型的方法之一是根据频率响应曲线，频率响应曲线表明了电路转移函数(幅值和相位)随电源频率的变化情况。

频率响应曲线包含两个部分：一是 $|H(j\omega)|$ 对频率 ω 的曲线，叫幅频特性曲线，二是相位角 $\theta(j\omega)$ 对频率 ω 的曲线，叫做相频特性曲线。

四种主要滤波器的理想频率响应曲线如图 14.3 所示。图(a) 和(b) 分别表示低通滤波器和高通滤波器的理想情况。这两种滤波器只有一个截止频率，该频率将频域分为一个通带和

一个阻带。低通和高通的定义就是根据幅频特性得出的。低通滤波器将低于截止频率的信号从输入端传输到输出端，而高通滤波器将高于截止频率的信号从输入端传输到输出端。因此，这里所说的高和低并不是指绝对的频率值，而是对截止频率而言的相对频率。

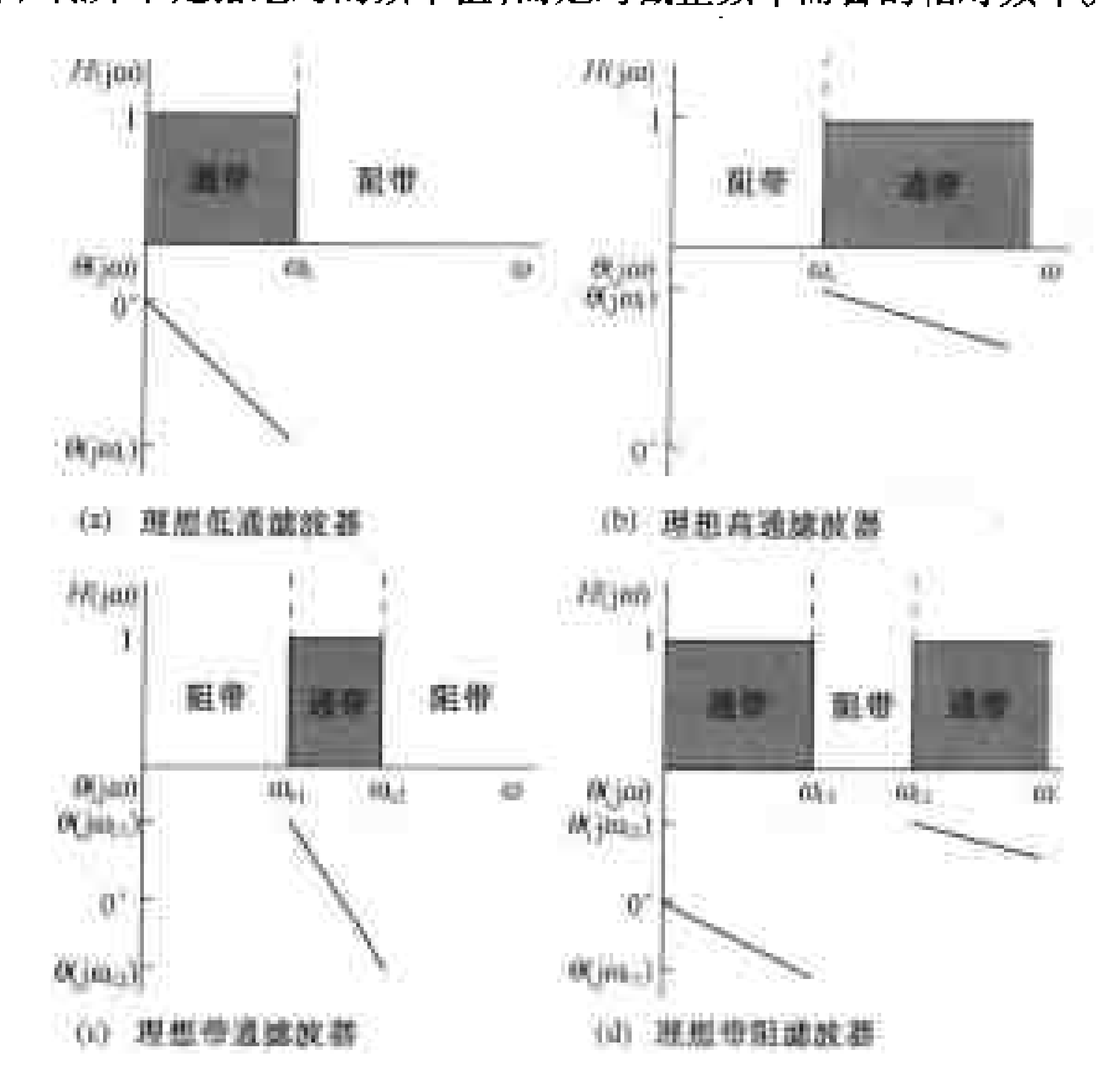


图 14.3　四种滤波电路的理想频率响应曲线

要注意的是从两条滤波曲线（带通和带阻）可以看出，理想滤波器的相位特性曲线在通带内与频率是线性关系。在通带外没有意义，因为在通带外其幅值为零。为避免失真，相位变化必须是线性的（见 16 章）。

另外两种滤波器，都有两个截止频率。图 14.3(c) 为带通滤波器的理想频率响应曲线。这种滤波器只能将处于两个截止频率之间的电源电压传输到输出端，图 14.3(d) 是理想带阻滤波器的频率响应曲线，它只能将处于两个截止频率之外的电源电压传输到输出端，阻止处于两个截止频率之间的电源电压的传输。

用本章讨论的电路可构造滤波器，一定要注意，幅频特性和相频特性不是无关的。也就是说，能满足某种幅频特性曲线的电路，同时就会产生相应的相频特性曲线，反之亦然。例如，一旦选择了具有某种要求的幅频特性电路，那么，相频特性相应地也就确定了。反过来说，如果选择了具有某种指定形式的相频特性电路，那么，幅频特性也就确定了。尽管有些选频电路的幅度和相位特性可以独立确定，互不影响，但这里不去讨论。

14.2 节将讨论四种类型滤波器中的一部分电路，它们只是可以起到滤波器作用的许多电路中的一小部分。要注意区分的是电路的哪些特点决定了滤波器的性质。仔细观察相同滤波功能的电路，其转移函数的形式。区分滤波器转移函数的形式对设计某种应用型的滤波电路会有很大的帮助。

本章所讨论的所有滤波器均为无源滤波器。所谓无源滤波器是指滤波功能只与无源元件

有关。无源元件是指电阻、电容、电感。这种滤波器能实现的最大输出振幅是 1,且阻抗与电源串联或与负载并联,与负载并联会使输出振幅减小。许多实际的滤波器要求增大输出的振幅,所以,无源滤波器有一些明显的缺点。本章讨论的无源滤波器中惟一能放大输出的是串联 *RLC* 谐振滤波器。第 15 章的主要内容是有源滤波电路,15 章将会有许多具有放大作用的滤波器可供选择。

14.2 低通滤波器

本节讨论两个低通滤波器的电路,即串联 *RL* 电路和串联 *RC* 电路,讨论电路的特性决定截止频率。

14.2.1 串联 *RL* 电路的定性分析

串联 *RL* 电路如图 14.4(a) 所示。电路输入的是频率变化的正弦电压源。输出为电阻两端的电压。假设电源的频率从很小开始逐渐增加,理想电阻的阻抗与频率无关,所以,电阻的作用不会改变,但是要考虑电感的作用是如何改变的。

电感的阻抗为 $j\omega L$,频率很低时,电感的阻抗相对于电阻的阻抗非常小,电感相当于短路。此时的低频是指满足 $\omega L << R$ 的任何频率。$\omega = 0$ 时的等效电路如图 14.4(b) 所示,在该等效电路中,输出电压和输入电压无论是幅度和相位角都相等。

随着频率的增加,电感的阻抗相对于电阻的阻抗将增加。电感阻抗的增加会使电感两端电压幅值增加,且输出电压幅值减小,同时,还使电感的电压和电流间的相位差发生变化,结果导致输入和输出电压的相位不同。输出电压的相位滞后于输入电压,并随着频率的增加,相位滞后接近 90 度。

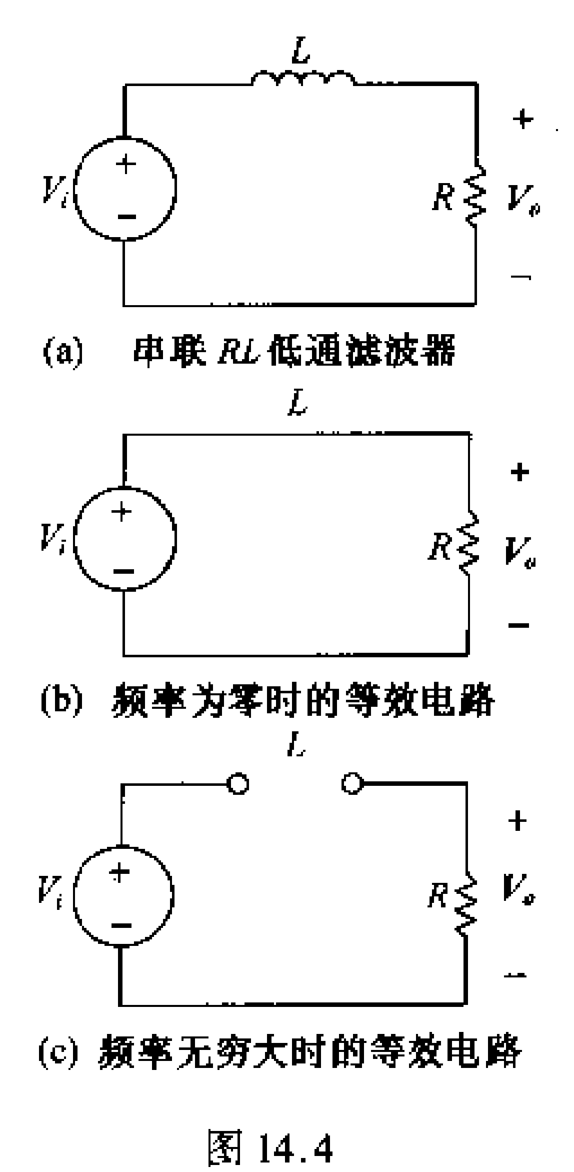


图 14.4

高频时,电感的阻抗相对于电阻的阻抗非常大,电感的作用相当于开路,安全切断了电路中的电流。高频是指满足 $\omega L >> R$ 时的所有频率。$\omega \to \infty$ 时的等效电路如图 14.4(c) 所示,其输出电压的幅值为零,其相位角比输入的相位角滞后 90 度。

根据输出电压幅值情况分析,该串联 RL 电路有选择性的将低频信号从输入端传输到输出端,并阻止高频信号到达输出端。因此,该电路对不同频率输入下的频率响应如图 14.5 所示,这两条曲线构成了图 14.4(a) 的频响曲线,上面的曲线表示 $|H(j\omega)|$ 随频率变化情况,下面的曲线表示 $\theta(j\omega)$ 随频率的变化情况。本章最后将给出频率响应曲线的正规画法。

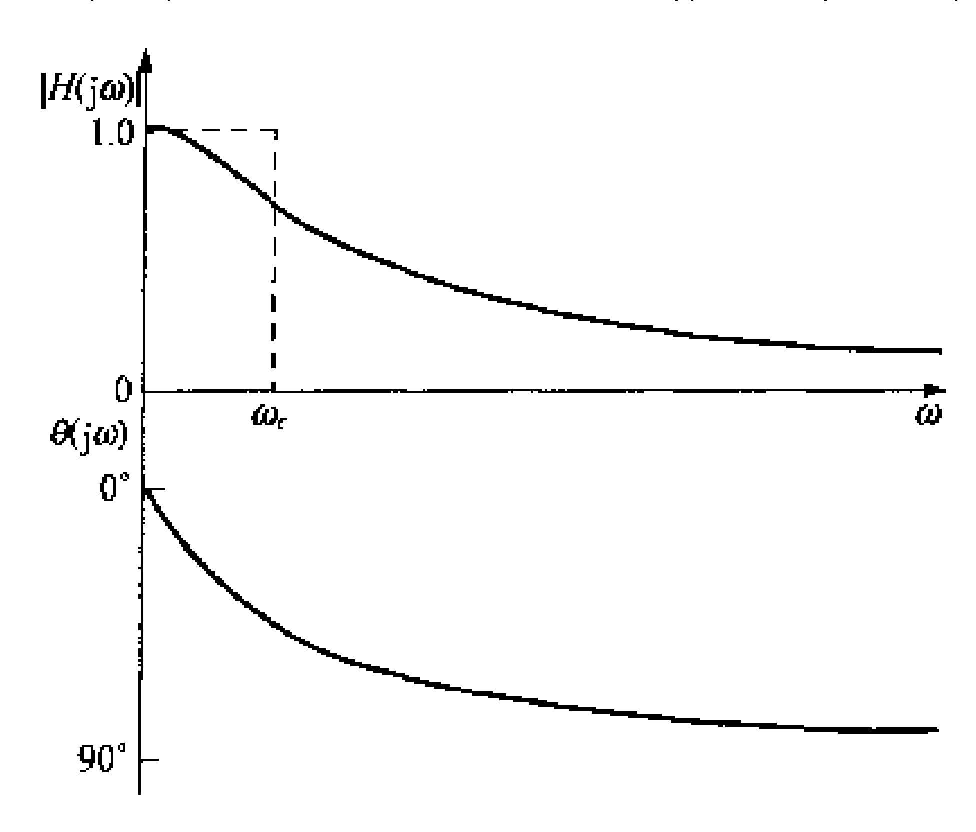


图 14.5　图 14.4(a) 所示串联 RL 电路的频率响应曲线

经过将图 14.3(a) 和图 14.5 进行对比,发现两者有明显差别。理想滤波器的幅度在截止频率 ω_c 处是不连续的,在通带内向通带外过渡时产生了跃变。人们希望滤波器能有这样的特性,但实际上是不可能的,不可能用实际的元件构造出这样的电路。因此,作为低通滤波器电路的幅频特性曲线,需要定义截止频率 ω_c 的含义。

14.2.2　截止频率的定义

在实际滤波电路的幅频特性曲线上无法找到一个频率,将通带和阻带明显区分,因此,需要定义截止频率 ω_c。电子工程人员广泛使用的截止频率定义是:转移函数的幅度由其最大值降为最大值的 $1/\sqrt{2}$ 时的频率:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}H_{max} \tag{14.1}$$

其中,H_{max} 是转移函数的最大幅值。由式(14.1)可知,实际滤波器的通频带定义为最大幅值到幅值为最大值 70.7% 的频率范围。

定义截止频率时,用到的常数 $1/\sqrt{2}$ 看起来像是任意选择的,但考虑到截止频率的其他方面时会发现这是一个合理的选择。回忆 10.5 节,任意电路提供给负载的平均功率与 V_L^2 成比例。此处 V_L 是负载两端电压的幅值:

$$P = \frac{1}{2}\frac{V_L^2}{R} \tag{14.2}$$

如果电源是一个正弦电压源 $V_i(j\omega)$,则负载电压也是一个正弦波,而且其幅值是频率 ω 的函数,将 P_{max}定义为负载电压幅值为最大时负载所获得的平均功率,即:

$$P_{max}=\frac{1}{2}\frac{V_{Lmax}^2}{R} \tag{14.3}$$

如果调整正弦电压源 $V_i(j\omega)$的频率,则当电路转移函数的幅值达到最大值时,负载电压也达到最大值:

$$V_{Lmax}=H_{max}|V_i| \tag{14.4}$$

考查电压源频率为 ω_c 时,平均功率是多少。根据式(14.1)可以确定负载电压幅值在 ω_c 时为:

$$\begin{aligned}|V_L(j\omega_c)|&=|H(j\omega_c)||V_i|\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}H_{max}|V_i|\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}V_{Lmax}\end{aligned} \tag{14.5}$$

将式(14.5)代入式(14.2)得:

$$\begin{aligned}P(j\omega_c)&=\frac{1}{2}\frac{|V_L^2(j\omega_c)|}{R}\\&=\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}V_{Lmax}\right)^2}{R}\\&=\frac{1}{2}\frac{V_{Lmax}^2/2}{R}\\&=\frac{P_{max}}{2}\end{aligned} \tag{14.6}$$

式(14.6)表明,当频率为 ω_c 时,电路提供的平均功率是最大平均功率的二分之一,ω_c也叫半功率点频率,因此,在通带内,传递给负载的功率至少是其最大平均功率的 50%。

14.2.3 串联 RL 电路的定量分析

既然已经定义了实际滤波电路的截止频率,就可以分析串联 RL 电路,找出低通滤波器的元件参数与截止频率的关系。根据图 14.4(a) 所示的 s 域等效电路模型,假设初始条件为零,其等效电路如图 14.6 所示 。

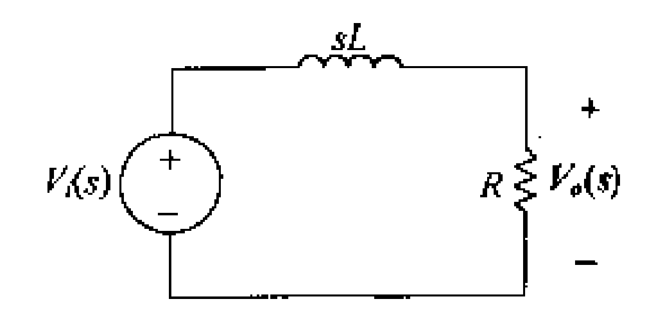


图 14.6 图 14.4(a) 的 s 域等效电路模型

该电路的电压转移函数为:

$$H(s)=\frac{\frac{R}{L}}{s+\frac{R}{L}} \tag{14.7}$$

为研究频率响应，令式(14.7)中的 $s=\mathrm{j}\omega$，则：

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\frac{R}{L}}{\mathrm{j}\omega+\frac{R}{L}} \tag{14.8}$$

将式(14.8)分为两个方程，第一个方程定义转移函数的振幅，是频率的函数；第二个方程定义转移函数的相位，也是频率的函数，即：

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\omega^2+\left(\frac{R}{L}\right)^2}} \tag{14.9}$$

$$\theta(\mathrm{j}\omega)=-\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \tag{14.10}$$

仔细观察式(14.9)，该式为图 14.5 所示的幅度特性曲线提供了量化依据，当 $\omega=0$ 时，分子和分母相等，所以 $|H(\mathrm{j}0)|=1$ 。这表明，当 $\omega=0$ 时，输入电压完全传输到输出端，电压的幅度没有任何变化。

当频率增加时，式(14.9)的分子不变，分母变大，这样 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 的值将随频率的增加而减小，如图 14.5 所示。同样，随着频率的增加，相位角也会从直流时的 0°开始减小，其值为负，正如式(14.10)所示。

当 $\omega=\infty$ 时，式(14.9)的分母趋向于无穷大，所以 $|H(\mathrm{j}\infty)|=0$，如图 14.5 所示。在 $\omega\to\infty$ 时，相位角达到了极限值 -90°。正如式(14.10)表示，与图 14.5 所示的相位曲线相同。

利用式(14.9)。可以计算截止频率 ω_c，记住 ω_c 是定义为 $|H(\mathrm{j}\omega_c)|=(1/\sqrt{2})H_{max}$ 时的频率，对低通滤波 $H_{max}=|H(\mathrm{j}0)|$，如图 14.5 所示。因此，对 14.4(a) 所示的电路：

$$|H(\mathrm{j}\omega_c)|=\frac{1}{\sqrt{2}}|1|=\frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\omega_c^2+\left(\frac{R}{L}\right)^2}} \tag{14.11}$$

解式(14.11)，求得 ω_c 为：

$$\omega_c=\frac{R}{L} \tag{14.12}$$

式(14.12)得出了重要的结论。只要适当选择 R 和 L 的参数，截止频率 ω_c 可以设置成任何需要的值。因此，可以设计出具有任何要求的截止频率的低通滤波器。例 14.1 说明了式(14.12)的设计作用。

例 14.1　心电图研究心脏产生的电信号，这些信号含有心脏跳动的节律，这些节律可用心电图仪测出，这种仪器要监测到频率为 1 Hz 的周期信号(正常的心律是 72 次/秒)。这种仪器工作在具有正弦波噪音信号的环境中，这些噪音信号的基频为 60 Hz，噪音信号的能量集中在该频率下。

试选择图 14.4(a) 电路中的 R 和 L 的值。使电路能用在心电图仪中,滤掉频率在 10 Hz 以上的所有信号,且传输频率在 1 Hz 左右来自心脏的电信号。然后计算频率为 1 Hz,10 Hz,60 Hz时输出电压振幅,并考查滤波器的性能。

解:

该问题是选择 R,L 的值构成低通滤波器,使其截止频率为 10 Hz,由式(14.12)可知,要产生截止频率 ω_c,R 和 L 值不能单独确定,为此,选择电感值为 100 mH。利用式(14.12)计算 R 值,得到所要求的截止频率之前,需将截止频率的单位从 Hz 转换为 rad/s:

$$\omega_c = 2\pi(10) = 20\pi \text{ rad/s}$$

结合 $L = 100$ mH 计算 R 的值,使低通滤波器的截止频率为 10 Hz。

$$\begin{aligned} R &= \omega_c L \\ &= (20\pi)(100\times 10^{-3}) \\ &= 6.28\Omega \end{aligned}$$

用方程 $|V_o| = |H(jw)|\cdot|V_i|$ 计算 V_o 的幅值:

$$\begin{aligned} |V_o(\omega)| &= \frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\omega^2+\left(\frac{R}{L}\right)^2}}|V_i| \\ &= \frac{20\pi}{\sqrt{\omega^2+400\pi^2}}|V_i| \end{aligned}$$

表 14.1 列出了频率分别为 1 Hz,10 Hz 和 60 Hz 时计算出的幅值。正如所预料的一样,因电路是低通滤波器,所以低频时输入和输出的幅值相等。在截止频率处时,输出电压的幅值已从通带幅值 1 降为 $1/\sqrt{2}$。在 60 Hz 时,输出电压的幅值已降为 1/6,完成了削弱噪声的功能,不会干扰心电图的测量信号。

表 14.1 各频率下输入和输出电压的幅值

各频率下输入输出幅值		
f(Hz)	$\lvert V_i\rvert$(V)	$\lvert V_o\rvert$(V)
1	1.0	0.995
10	1.0	0.707
60	1.0	0.164

14.2.4 串联 RC 电路

串联 RC 电路如图 14.7 所示,该电路能起到低通滤波器的作用。

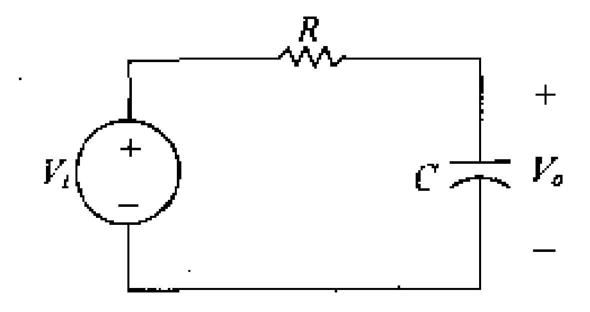


图 14.7 串联 RC 低通滤波器

可以通过定性分析手段对串联 RC 电路进行分析。定性分析是解决问题的重要步骤,在滤波器分析中应该养成定性分析的习惯。定性分析可以预测滤波器的特性(低通、高通等),也能预测转移函数的一般形式。如果计算出的转移函数与定性预测的形式一样,那么就可以继续进行重要的精确分析。

电路的输出定义为电容两端的电压。与串联 RL 电路的定性分析一样,用三个频率考查图 14.7 中串联 RC 电路特性:

1. 零频率:电容的阻抗无穷大,电容相当于开路,因此,输入和输出电压相等。
2. 频率从零开始增加:电容的阻抗相对于电阻的阻抗增加,电源电压在阻性阻抗和容性阻抗之间进行分压。输出电压小于电源电压。
3. 无穷大频率:电容的阻抗为零,相当于短路,因此,输出电压为零。根据输出电压相对于频率的变化分析,可知串联 RC 电路是一个低通滤波器。例题 14.2 定量地讨论了该电路。

例 14.2　电路如图 14.7 所示的串联 RC 电路:

(a) 求电源电压和输出电压间的转移函数。

(b) 求串联 RC 电路截止频率的方程。

(c) 选择 R 和 C 值,构成一个截止频率为 3 kHz 的低通滤波器。

解:(a) 为求转移函数的表达式,首先建立图 14.7 电路的 s 域等效模型,如图 14.8 所示。

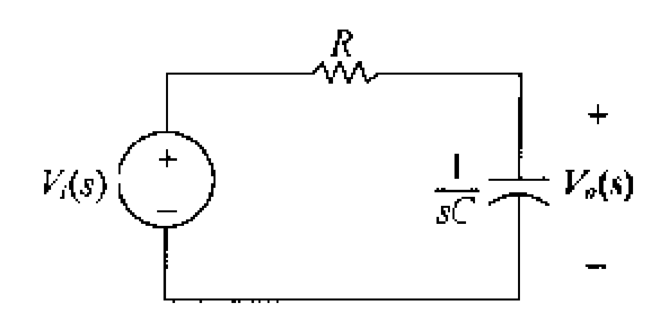


图 14.8　图 14.7 所示电路的 s 域等效模型

根据 s 域等效电路的分压公式得:

$$H(s)=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$$

再用 jω 代替 s,计算代替后复数表达式的幅值:

$$|H(j\omega)|=\frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2}}$$

(b) 在截止频率 ω_c 处 $|H(j\omega)|$ 等于 $(1/\sqrt{2})H_{max}$。对低通滤波器而言,$H_{max}=H(j0)$,

(c) 由(b)的结果可知:截止频率由 R 和 C 确定,故 R 和 C 不能同时计算,因此,选 $C=1\ \mu\text{F}$。如果要选择一个元件的值,首先应选择电容,而不选 R 或 L,因为现有电容的值要比电阻和电感的值小得多。注意:一定要将给定的频率 3 kHz 转换为 $(2\pi)3$ krad/s,即:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\omega_c C} \\ &= \frac{1}{(2\pi)(3\times10^3)(1\times10^{-6})} \\ &= 53.05\Omega \end{aligned}$$

图 14.9 列出了讨论过的两种低通滤波器。转移函数在形式上非常相似,只是截止频率不同。事实上,可用一般的形式来表达。

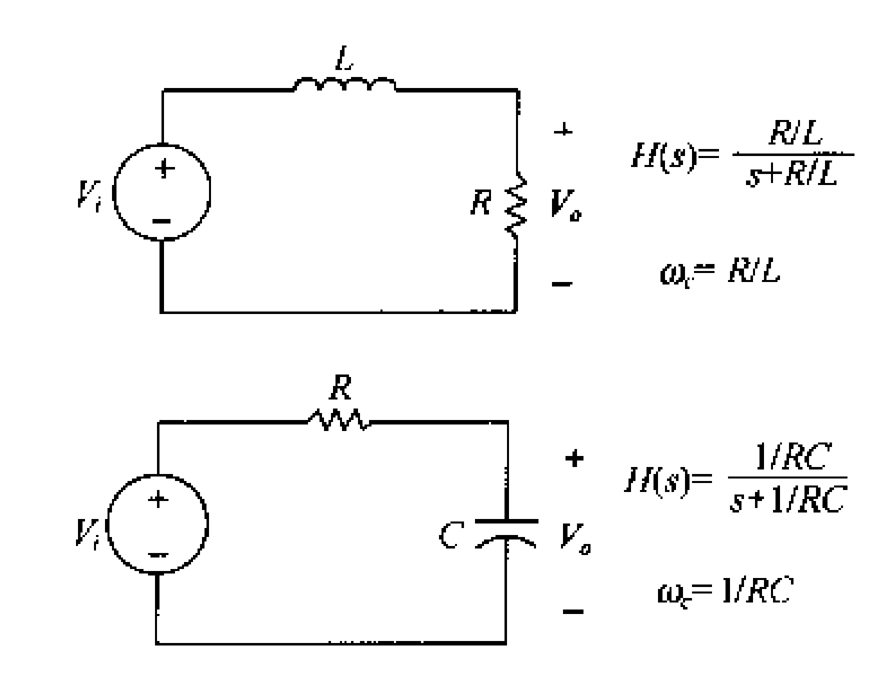


图 14.9 两个低通滤波器,串联 RL 电路和串联 RC 电路以及各自的转移函数和截止频率

两个低通滤波器的转移函数为:

$$H(s)=\frac{\omega_c}{s+\omega_c} \tag{14.13}$$

任何具有式(14.13)形式的电压比的电路都可以作为低通滤波器,且其截止频率为 ω_c。在本章最后给出了具有这种电压比电路的习题。

14.2.5 频域和时域的关系

特别要注意另一个非常重要的关系,在第 6 章已经讨论过一阶 RL 和 RC 电路的自然响应,这些电路的一个重要参数是时间常数 τ,该参数描述了时间响应的特点。RL 电路,时间常数为 L/R(见式(7.14)),RC 电路,时间常数为 RC(见式(7.24))。比较这些电路的时间常数和截止频率,注意到:

$$\tau = 1/\omega_c \tag{14.14}$$

与拉氏变换讨论的一样,这是电路的时间响应和频率响应之间相互关系的直接结论。在 14.6 节的卷积积分中讨论的记忆性和加权性表明,当 $\omega_c\to\infty$ 时,滤波器没有记忆性,输出近似于输入信号的比例复制。也就是没表现有滤波器功能。当 $\omega_c\to0$ 时,滤波器增加了记忆性,因为表现了滤波功能,输出是输入信号的失真。

练习题

14.1 串联 RC 低通滤波器,要求截止频率为 8 kHz,电阻 $R=10\ \text{k}\Omega$。计算电容 C 值。
答:1.99 nF。

14.2 串联 RL 低通滤波器,截止频率为21 kHz,电阻为 $R=5\ \text{k}\Omega$。求(a) L,(b) 50 kHz 时的 $|H(j\omega)|$,(c) 50 kHz 时的 $\theta(j\omega)$。
答:(a) 0.40 H,(b) 0.04,(c) $-87.71°$。

14.3 高通滤波器

下面讨论两个高通滤波器,仍然是串联 RL 电路。同是串联电路,根据所选输出电压的不同,既可以作为高通滤波器,又可以作为低通滤波器。确定元件值与滤波器截止频率的关系。

14.3.1 串联 RC 电路的定性分析

串联 RC 电路如图 14.10 (a) 所示,与图 14.7 的低通电路比较,该电路的输出为电阻两端的电压,而非电容的电压,因此,改变电容阻抗的输出结果与低通电路不同。

当 $\omega=0$ 时,电容相当于开路,因此,电阻上无电流通过,如图 14.10 (b),在该电路中,电阻上无电压降,电路将低频电源电压滤掉。

当电源电压频率增加时,电容的阻抗相对于电阻的阻抗减小,且电源电压分配到电容和电阻上,输出电压的幅值开始增加。

当电源频率 $\omega\to\infty$ 时,电容相当于短路,所以电容两端没有电压,如图 14.10(c) 所示,在该电路中,输入和输出电压相等。

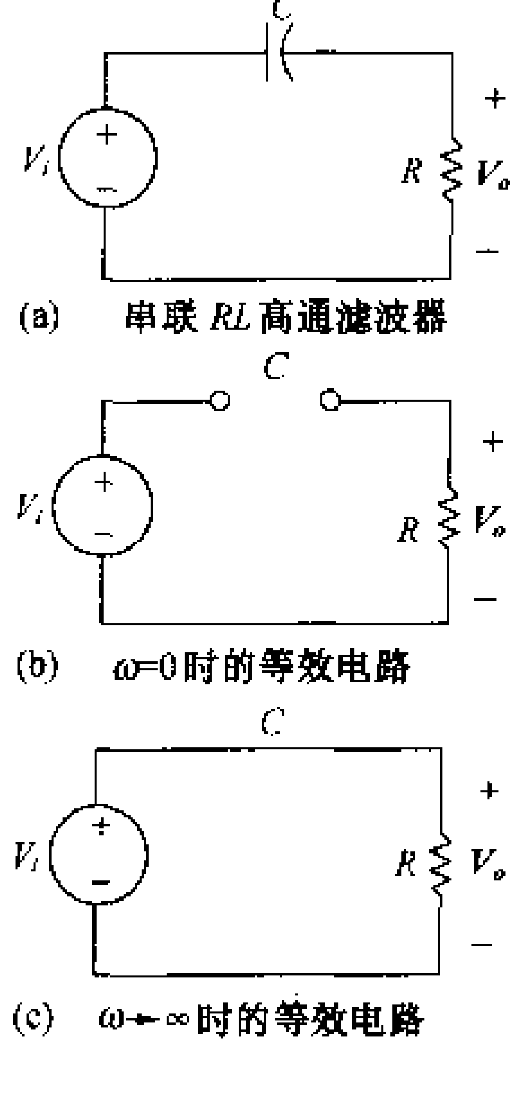


图 14.10

当电源频率变化时,电源和输出电压之间的相位也变化。当 $\omega \to \infty$ 时,输入电压等于输出电压,所以,相位差为零。当电源频率减小且电容的阻抗增加时,电容上的电压和电流间产生相移。这使电源与输出电压之间产生了相位差,输出电压的相位超前于电源的相位。当 $\omega = 0$ 时,这个相位差达到其 90°最大值。

根据上述定性分析可知,当输出定义为电阻两端电压时,串联 RC 电路相当于一个高通滤波器。元件和联接方式与低通串联 RC 电路一样,只是输出端选择不同。因此,电路的滤波特性与输出端定义、电路元件、元件参数以及连接方式有关。

图 14.11 表示了串联 RC 高通滤波器的频率响应曲线,其中,虚线代表理想高通滤波器的幅度特性。下面将对该电路进行定量分析。

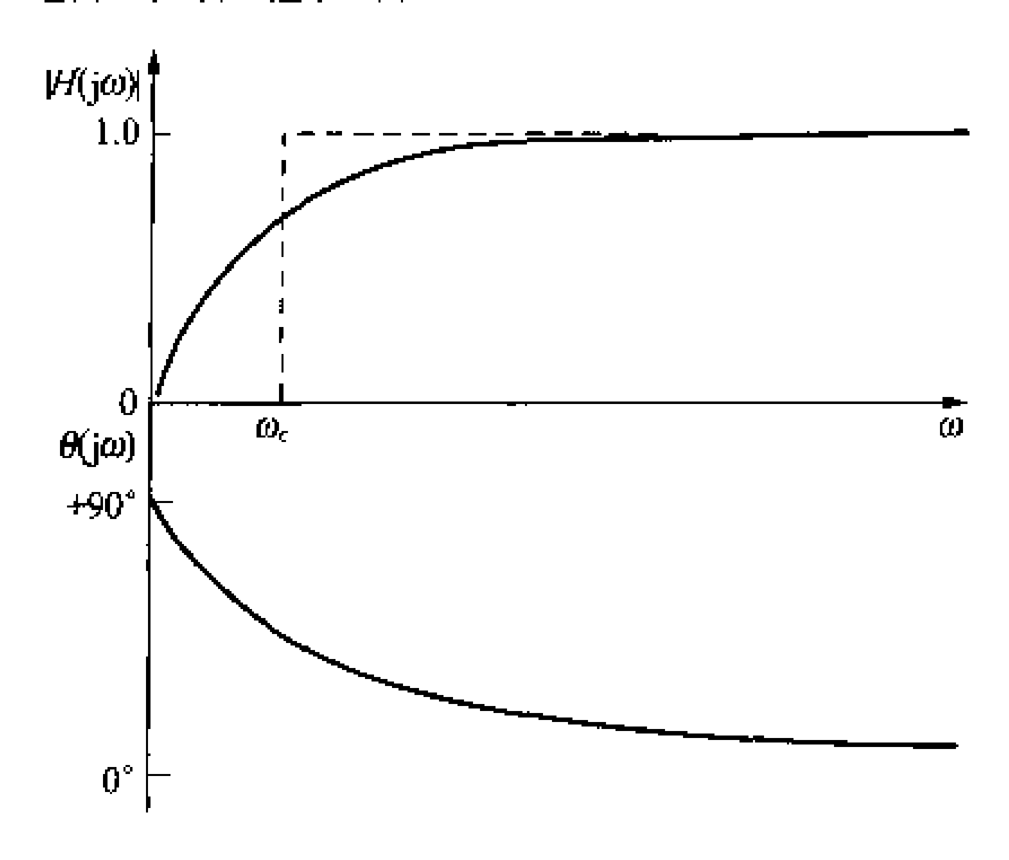


图 14.11 图 14.10 (a) 所示串联 RC 电路的频率响应曲线

14.3.2 串联 RC 电路的定量分析

建立图 14.10 (a) 所示电路的 s 域等效模型,该模型如图 14.12 所示。应用 s 域分压公式写出转移函数:

$$H(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

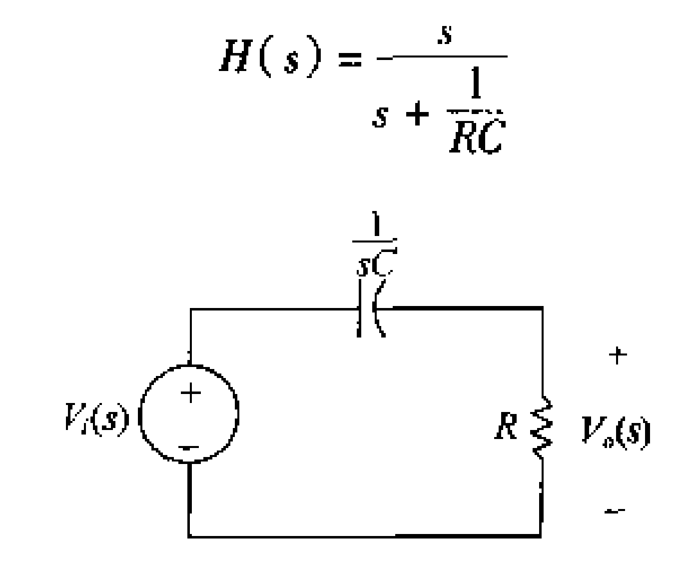


图 14.12 图 14.10(a) 的 s 域等效电路

令 $s = j\omega$,得:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{RC}} \tag{14.15}$$

将式(14.15)分为两个方程,一个是描述转移函数幅值的方程,另一个是描述转移函数相位角的方程:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} \qquad (14.16)$$

$$\theta(j\omega) = 90° - \arctan\omega RC \qquad (14.17)$$

式(14.16)和式(14.17)确定了频率响应的形式,如图 14.11 所示。根据式(14.16),可以计算出串联 RC 高通滤波器的截止频率。考虑到在截止频率处时,转移函数的幅值是 H_{max} 的 $1/\sqrt{2}$ 倍。对高通滤波器,$H_{max} = |H(j\omega)|_{\omega\to\infty} = |H(j\infty)|$,正如图 14.11 所示。设式(14.16)的左边等于 $1/\sqrt{2}|H(j\infty)|$,可建立起关于 ω_c 的方程。对该电路 $|H(j\infty)| = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} \qquad (14.18)$$

解式(14.18),求得 ω_c 为:

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \qquad (14.19)$$

式(14.19)表明串联 RC 电路的截止频率为 $1/RC$。不论该电路配置为低通滤波器见图 14.7,还是高通滤波器见图 14.10 (a) ,截止频率的结果一样。这是必然的,因为该电路与前面所得的电路时间常数和截止频率之间的关系相一致。

例 14.3 分析了串联 RL 电路,该电路配置为高通滤波器。例 14.4 讨论了电感并联一个负载电阻时的情况。

例 14.3　图 14.13 所示的串联 RL 电路也可以起高通滤波的作用:

(a) 求电路转移函数的表达式。

(b) 用(a) 得出的结果求串联 RL 电路截止频率的方程。

(c) 选择 R 和 L 值。使该电路为高通滤波器,其截止频率为 15 kHz。

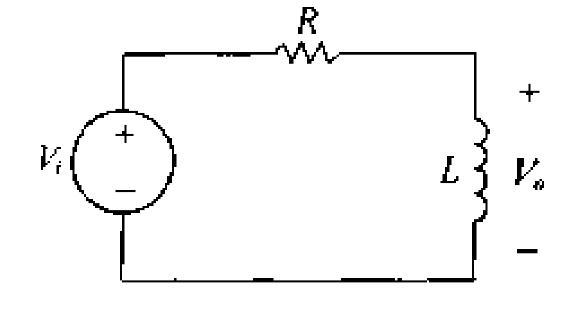


图 14.13　例 14.3 电路

解:

(a) 首先建立串联 RL 电路的 s 域等效模型如图 14.14 所示,再利用 s 域等效模型的分压公式求得转移函数:

$$H(s) = \frac{s}{s + \frac{R}{L}} \qquad \text{令 } s = j\omega \text{ 得:}$$

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+\dfrac{R}{L}}$$

该方程与串联 RC 高通滤波器的转移函数形式相同。

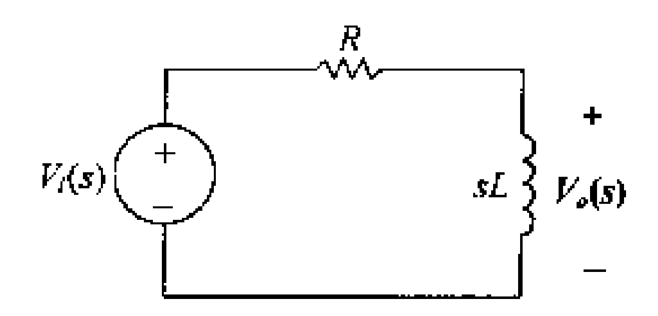


图 14.14 图 14.13 所示电路的 s 域等效模型

(b) 为求截止频率的表达式,先计算 $H(j\omega)$的幅值:

$$|H(j\omega)|=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\left(\dfrac{R}{L}\right)^2}}$$

然后,与前面的方法一样,根据截止频率的定义,使方程的左边等于$(1/\sqrt{2})H_{max}$。注意到对高通滤波器,$H_{max}=|H(j\infty)|$,对串联 RC 电路,$|H(j\infty)|=1$。解方程,求截止频率:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2+\left(\dfrac{R}{L}\right)^2}}$$

$$\omega_c=\frac{R}{L}$$

结果与计算出的串联 RL 低通滤波器的截止频率相同。

(c) 由上式所得的 ω_c 的方程可知,单独确定 R 和 L 值是不可能的。因此,任选一个电阻值 R 为 500 Ω,注意将截止频率的单位转换为 rad/s:

$$L=\frac{R}{\omega_c}$$

$$=\frac{500}{(2\pi)(15\ 000)}$$

$$=5.31\ \text{mH}$$

例 14.4 在 RL 高通滤波器的电感两端并联一负载电阻,如图 14.15 所示。

(a) 确定图 14.15 电路的转移函数。

(b) 用例 14.3 (c) 电路中的 R 及 L 值,并令 $R_L=R$,画出带负载的 RL 高通滤波器的幅度曲线。

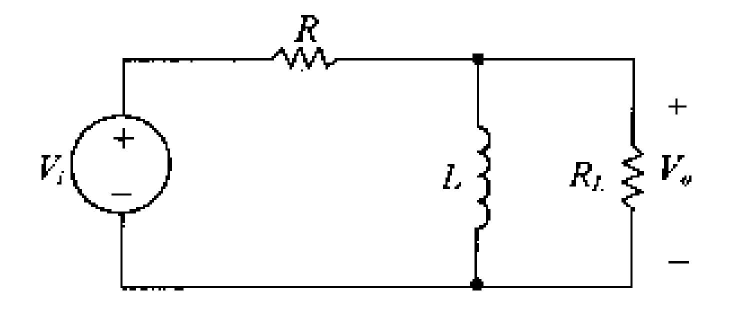


图 14.15 例 14.4 电路

解：

(a) 将图 14.15 所示电路转化为 s 域模型，如图 14.16，利用电感和负载并联后的分压作用，计算转移函数：

$$H(s)=\frac{\dfrac{R_LsL}{R_L+sL}}{R+\dfrac{R_LsL}{R_L+sL}}=\frac{\left(\dfrac{R_L}{R+R_L}\right)s}{s+\left(\dfrac{R_L}{R+R_L}\right)\dfrac{R}{L}}=\frac{Ks}{s+\omega_c}$$

其中：

$$K=\frac{R_L}{R+R_L}$$

$$\omega_c=KR/L$$

注意：ω_c 是带负载滤波器的截止频率。

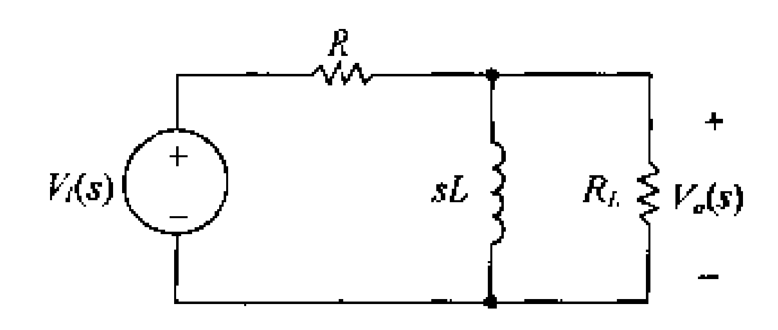


图 14.16　图 14.15 电路的 s 域等效模型

(b) 对于例 14.3 (c) 所示的无负载高通滤波器，通带的幅值为 1，截止频率为 15 kHz。带负载 RL 高通滤波器，$R=R_L=500\ \Omega$，所以 $K=1/2$。这样，带负载滤波器通带幅值为 $(1)(1/2)=1/2$，截止频率为 $(15000)(1/2)=7.5$ kHz。带负载和无负载电路的幅度曲线如图 14.17 所示。

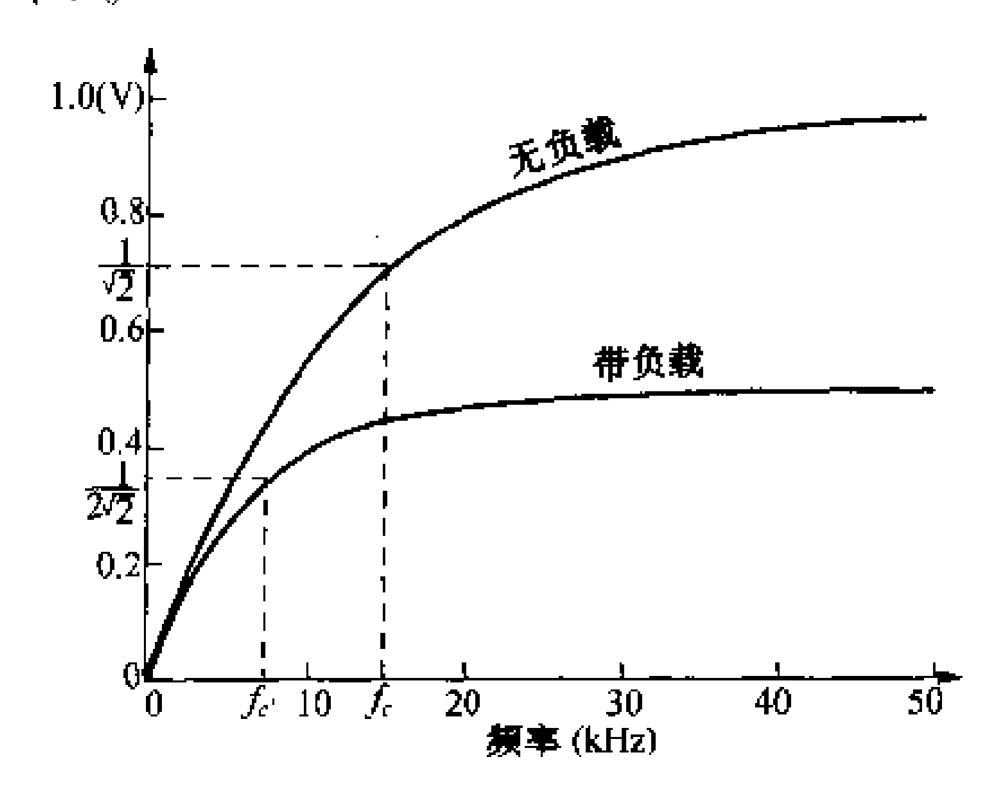


图 14.17　图 14.13 的无负载 RL 高通滤波器和图 14.14 的带负载 RL 高通滤波器的幅度特性曲线

将例 14.3 的无负载滤波器和例 14.4 的带负载滤波器的转移数进行对比,发现有相同的形式:

$$H(s)=\frac{Ks}{s+K\left(\frac{R}{L}\right)}$$

对于无负载滤波器,$K=1$,有负载滤波器,$K=R_L/(R+R_L)$。当 $R_L=\infty$ 时,相当于电路无负载电阻时,有负载电路的 K 值会减小并与无负载电路的 K 值相等。两种滤波器的截止频率可直接由其转移函数求出,即 $\omega_c=K(R/L)$,对无负载电路,$K=1$,对有负载电路,$K=R_L/(R+R_L)$。另外,当 $R_L=\infty$ 时,有负载电路的截止频率会减小为无负载电路的截止频率。因 $R_L/(R+R_L)<1$,负载电阻的作用是使通带的幅值减小 K 倍,使截止频率减小且为相同的倍数。在本章开始时已经分析并得到了这个结论。无源高通滤波器能得到的最大输出幅值是 1,而在滤波器中加一负载,如例 14.4 会减小输出幅值,当需要增加通频带内信号的幅值时,必须用有源滤波器,在第 15 章将讨论。

负载对滤波器转移函数的影响给电路的设计带来困难。首先选择一个具有代表性的转移函数,然后设计一个具有该转移函数的滤波器。也许读者并不知道带负载后滤波器会有何变化,但不管怎样,无论带不带负载,总是希望滤波器的转移函数没有变化,本章所讨论的无源滤波器无法实现这种要求。

图 14.18 总结了讨论过的高通滤波电路。

仔细观察两个高通滤波器的表达式 $H(s)$,发现在形式上非常相似,只是分母不同。与式(14.13)一样处理,将两个高通滤波器转移函数用一般形式表示:

$$H(s)=\frac{s}{s+\omega_c} \tag{14.20}$$

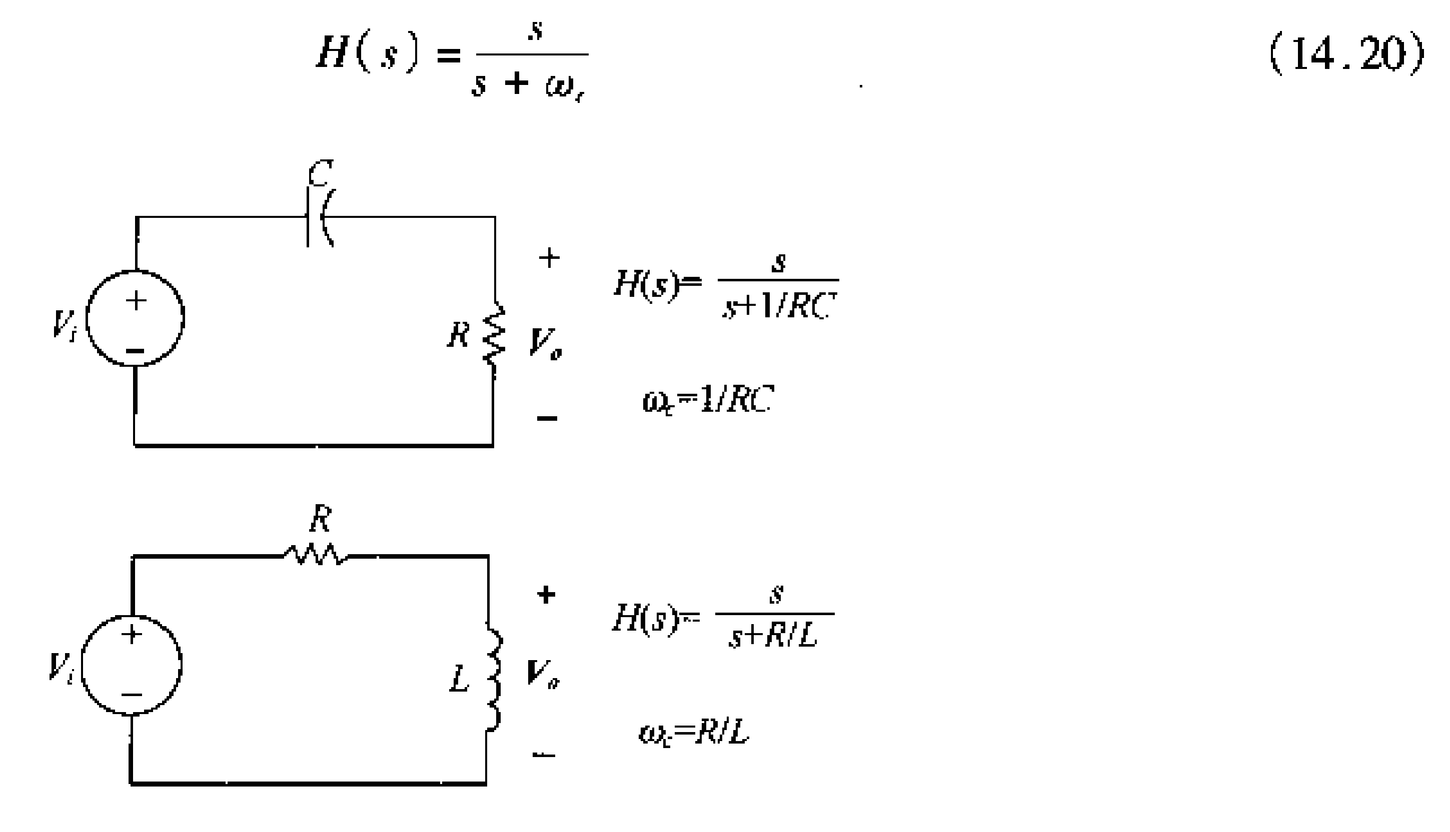


图 14.18 两个高通滤波器,串联 RC 和串联 RL 电路以及其转移函数和截止频率

对于任何电路,只要具有式(14.20)形式的转移函数,该电路就是一个截止频率为 ω_c 的高通滤波器。本章最后将给出具有这种电压比的电路。

需要注意到其他方面的重要关系。如串联 RC 电路,无论是用做高通滤波器还是低通滤波器,其截止频率是不变的,串联 RL 电路也一样。前边已经提到过同一个滤波器电路的时间常数和截止频率的关系。因此,截止频率是电路的特征参数。它的值只和电路的元件、元件的

值、以及元件的联接方式有关。

练习题

14.3　串联 RL 高通滤波器，$R=5\ \text{k}\Omega$，$L=3.5\text{mH}$，该滤波器的截止频率为多少？

答：1.43 Mrad/s

14.4　串联高通滤波器，电容 $C=1\ \mu\text{F}$，当 R 为 (a) 100 Ω，(b) 5 kΩ，(c) 30 kΩ 时计算其截止频率。

答：(a) 10 krad/s，(b) 200 rad/s，(c) 33.33 rad/s。

14.5　串联低通滤波器，其负载电阻与电容并联，求其转移函数。

答：$H(s)=\dfrac{\dfrac{1}{RC}}{s+\dfrac{1}{KRC}}$，$K=\dfrac{R_L}{R+R_L}$。

14.4　带通滤波器

下面讨论的是带通滤波器，带通滤波器能将某一频率范围内的电压传输到输出端，滤掉该频率范围外的电压，这种滤波器要比前面讨论的低通和高通滤波器复杂得多。在图 14.3(c) 中已经看到，理想带通滤波器有两个截止频率 ω_{c1} 和 ω_{c2}，这两个频率确定了通频带。对实际的带通滤波器而言，其截止频率是转移函数的幅值等于 $(1/\sqrt{2})H_{max}$ 时的频率。

14.4.1　中心频率、带宽、品质因数

表征带通滤波器性质的重要参数有三个，第一个参数是中心频率 ω_o，当电路的转移函数分母为纯实数时的频率值。中心频率也叫谐振频率，与第 8 章中二阶电路自然响应的频率相同，其实这是同一个频率。当电源的频率等于谐振频率时，激励函数的频率与电路自然响应的频率相等，称电路处于谐振状态。中心频率是通频带的几何中心。即 $\omega_o=\sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$。带通滤波器在中心频率处转移函数的幅值最大($H_{max}=|H(j\omega_o)|$)。

第二个参数是带宽 β，即通频带的宽度。第三个参数是品质因数，它是中心频率与带宽的比，品质因数表明了通频带宽度与频率在横轴上的位置无关，同时也表明幅度特性曲线的形状与频率无关。

带通滤波器有 5 个特征参数：ω_{c1}，ω_{c2}，ω_o，β 和 Q，但只有其中的两个参数是独立的。换句话说，一旦能确定其中任何两个参数，就可以根据它们之间的依赖关系计算出另外三个参数。这里，先分析一个带通滤波器，再仔细定义其数值。下面讨论两个 RLC 带通滤波电路，然后得出所有特征参数表达式。

14.4.2　串联 RLC 电路的定性分析

图 14.19 (a) 所示为串联 RLC 电路。下面讨论改变电源频率对输出电压的影响。和前面讨论的电路相同，电源频率的改变会导致电容和电感阻抗的变化。因电路中既含电感又含电容，因此，定性分析将比较复杂。

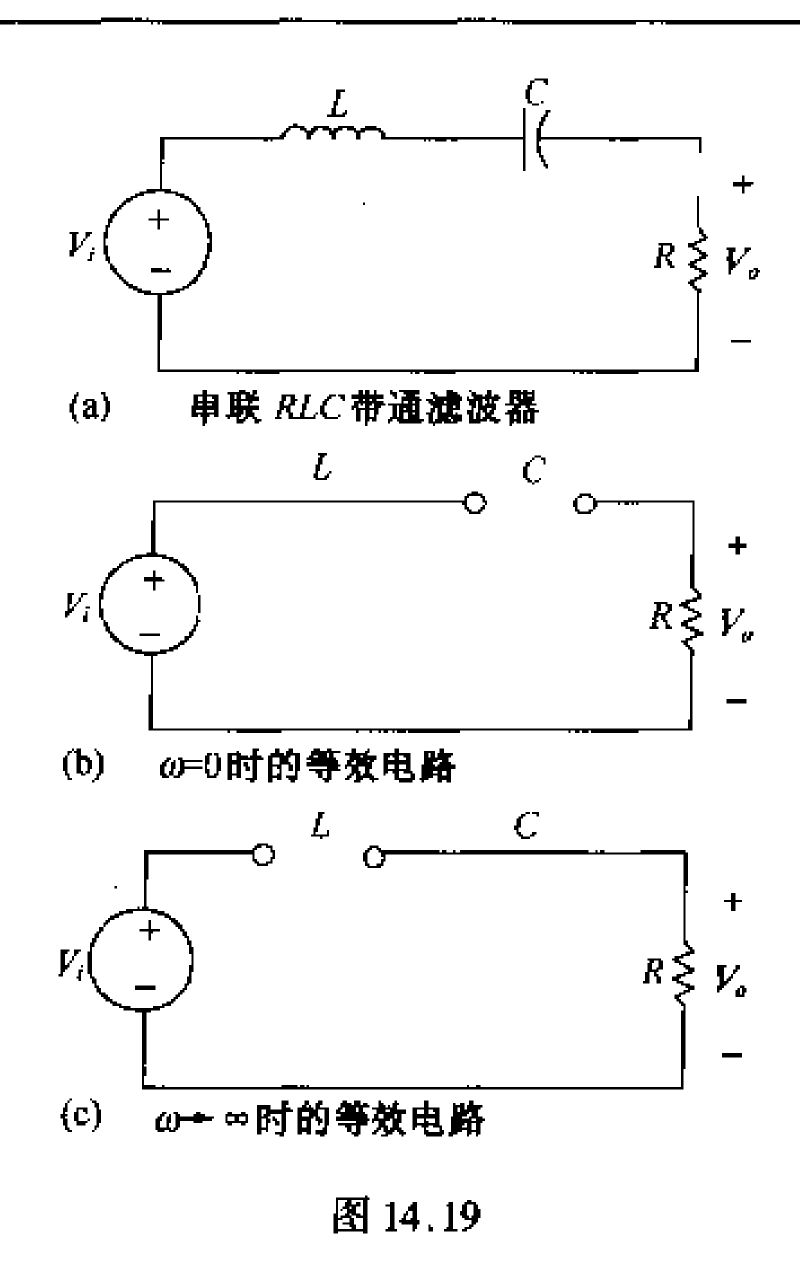


图 14.19

当 $\omega=0$ 时,电容相当于开路,电感相当于短路,其等效电路如图 14.19 (b) 所示,电容的阻抗阻止电流到达电阻,导致输出电压为零。

当 $\omega\to\infty$ 时,电容相当于短路,而电感相当于开路,其等效电路如图 14.19(c) 所示,电感阻止电流到达电阻,输出电压仍然为零。

但频率在 $0\sim\infty$ 范围内会如何变化呢? 在这两个极限之间,电容和电感均有有限的阻抗。在此区间内,电源提供的电压在电容和电感上均有下降,一些电压会到达电阻上。考虑到电容的阻抗为负,电感的阻抗为正。因此,在某一频率上,电容的阻抗和电感的阻抗会大小相等,符号相反,两部分阻抗抵消,造成输出电压等于电源电压。这一特殊频率就是中心频率 ω_o。在中心频率的两边,输出电压均小于电源电压。注意,在 ω_o 处,电容和电感的串联相当于短路。

电压幅值比的曲线如图 14.20 所示。图中重叠在串联 RLC 转移函数幅度特性曲线上的虚线是理想低通滤波器的幅度曲线。

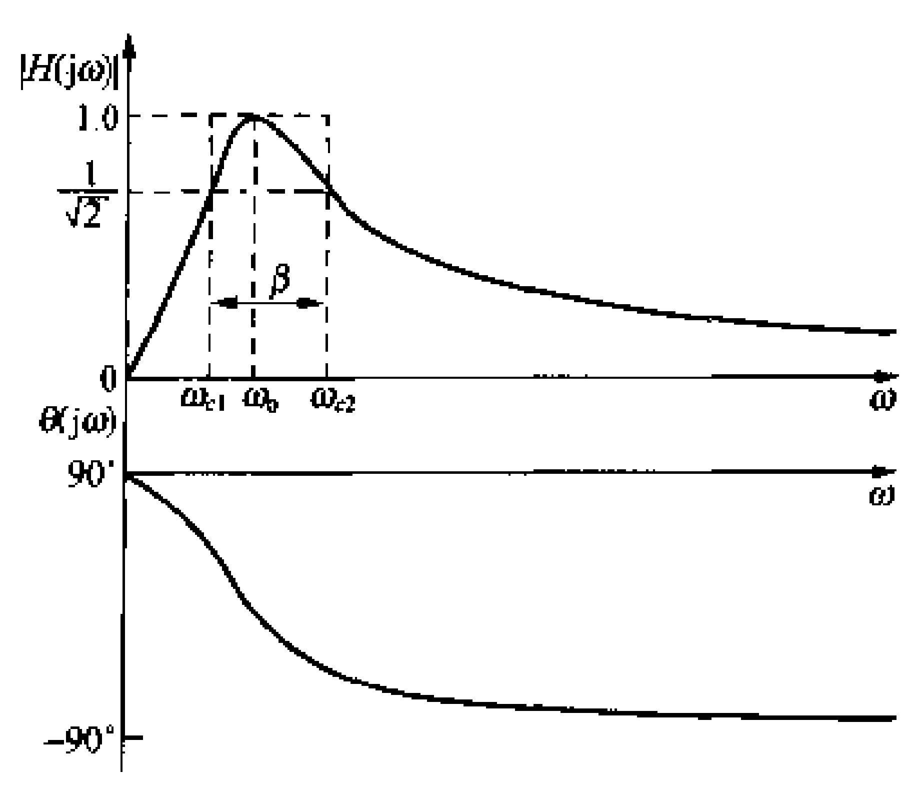


图 14.20 图 14.19 所示串联 RLC 带通滤波器的频率响应曲线

现在,讨论输出电压相位的变化情况。在输出电压与电源电压相等的频率点,输出电压的相位角与电源电压相位角相等。当频率降低时,电容造成的相位角大于电感造成的相位角。因电容产生的相移为正,所以输出电压的总相位角为正。当频率非常低时,输出电压的相位角的最大值为 90°。

相反,如果频率从中心频率开始增加,则电感造成的相位角比电容造成的相位角大。而电感是负相移,所以输出电压的总相位为负。当频率非常高时,输出电压的相位角达到负的最大值 -90°,相位曲线如图 14.20 所示。

14.4.3 串联 *RLC* 电路的定量分析

首先,画出串联 *RLC* 电路的 s 域等效模型如图 14.21 所示。

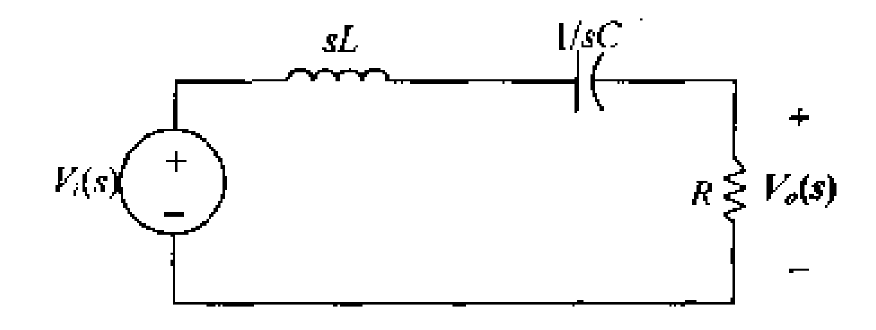


图 14.21　图 14.19 (a) 所示的 s 域等效模型

用 s 域分压公式写出转移函数方程:

$$H(s)=\frac{\left(\frac{R}{L}\right)s}{s^2\left(\frac{R}{L}\right)s+\frac{1}{LC}} \tag{14.21}$$

同样,令 $s=\mathrm{j}\omega$ 并代入式(14.21),得出转移函数的幅值和相位角的方程:

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{\omega\frac{R}{L}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\omega\frac{R}{L}\right)^2}} \tag{14.22}$$

$$\theta(\mathrm{j}\omega)=90°-\arctan\left(\frac{\omega\frac{R}{L}}{\frac{1}{LC}-\omega^2}\right) \tag{14.23}$$

计算 *RLC* 带通滤波器的五个特征参数。中心频率定义为电路转移函数的分母为纯实数时的频率,当电压源的频率使电容与电感阻抗之和为零时,图 14.19 (a) 所示串联 *RLC* 电路的转移函数为实数:

$$\mathrm{j}\omega_oL+\frac{1}{\mathrm{j}\omega_oC}=0 \tag{14.24}$$

解方程,求 ω_o 为:

$$\omega_o=\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{14.25}$$

计算截止频率 ω_{c1} 和 ω_{c2}。在截止频率处,转移函数的幅值为 $(1/\sqrt{2})H_{max}$。因 $H_{max}=|H(\mathrm{j}\omega_o)|$,将式(14.25)代入式(14.22)中可计算出 H_{max}:

$$H_{max}=|H(j\omega_o)|$$

$$=\frac{\omega_o\dfrac{R}{L}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC}-\omega_o^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega_o R}{L}\right)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{1}{LC}}\dfrac{R}{L}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC}-\dfrac{1}{LC}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{1}{LC}}\dfrac{R}{L}\right)^2}}=1$$

设式(14.22)的左侧等于$(1/\sqrt{2})H_{max}$(等于$(1/\sqrt{2}$),开始计算 ω_c:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\omega_c\dfrac{R}{L}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC}-\omega_c^2\right)^2+\left(\omega_c\dfrac{R}{L}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_c\dfrac{L}{R}-\dfrac{1}{\omega_c RC}\right)^2+1}} \tag{14.26}$$

整理式(14.26),得:

$$\pm 1=\omega_c\frac{L}{R}-\frac{1}{\omega_c RC} \tag{14.27}$$

将式(14.27)整理为二次方程:

$$\omega_c^2 L\pm\omega_c R-1/C=0 \tag{14.28}$$

由式(14.28)可求得四个截止频率值。其中两个为正数,有意义,这两个频率定义了这个滤波器的通频带:

$$\omega_{c1}=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\frac{1}{LC}\right)} \tag{14.29}$$

$$\omega_{c2}=\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\frac{1}{LC}\right)} \tag{14.30}$$

可用式(14.29)和式(14.30)验证,中心频率是两个截止频率的几何平均值:

$$\omega_o=\sqrt{\omega_{c1}\cdot\omega_{c2}}$$

$$=\sqrt{\left[-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\frac{1}{LC}\right)}\right]\left[\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\frac{1}{LC}\right)}\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{14.31}$$

带通滤波器的带宽定义为两个截止频率之差。因 $\omega_{c2}>\omega_{c1}$,因此,用式(14.30)减去式(14.29)计算带宽:

$$\beta=\omega_{c2}-\omega_{c1}$$

$$=\left[\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\frac{1}{LC}\right)}\right]-\left[-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\frac{1}{LC}\right)}\right]$$

$$=\frac{R}{L} \tag{14.32}$$

品质因数(五个特征参数的最后一个)定义为中心频率与带宽之比,用式(14.25)和式(14.32)得:

$$Q=\omega_o/\beta$$
$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{LC}}}{\frac{R}{L}}$$
$$=\sqrt{\frac{L}{CR^2}} \tag{14.33}$$

现在,已得到了串联 *RLC* 带通滤波器的五个特性参数:(1) 两个截止频率 ω_{c1} 和 ω_{c2},确定了通频带;(2) 中心频率 ω_o,此频率处转移函数的幅值最大;(3) 带宽 β,是通频带宽度的指标;(4) 品质因数 Q,带宽的第二个指标。前面已经提到,在设计中只有两个参数能够独立定义,并且知道品质因数是根据中心频率和带宽定义的,因此,可以根据中心频率和带宽写出截止频率的方程:

$$\omega_{c1}=-\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\omega_o^2} \tag{14.34}$$

$$\omega_{c2}=\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\omega_o^2} \tag{14.35}$$

该方程的变换式表达了截止频率与品质因数和中心频率的关系:

$$\omega_{c1}=\omega_o\cdot\left[-\frac{1}{2Q}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right] \tag{14.36}$$

$$\omega_{c2}=\omega_o\cdot\left[\frac{1}{2Q}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right] \tag{14.37}$$

此问题在本章结尾的例题 14.11 中有论述。

下面的例子说明了带通滤波器的设计,介绍了另一个 *RLC* 带通滤波器电路,并讨论了电源电阻对串联 *RLC* 带通滤波器特性参数的影响。

例 14.5　图式均衡器是一个音频放大器,它可以选择不同频域内的信号进行不同级别的放大。对图 14.19 (a) 的串联 *RLC* 电路,选择 R,L,C 值构成带通电路,使其能通过的输入信号的频率范围在 1~10 kHz 之间。该由路可用在图式均衡器中,在放大之前从较宽的音频带(0~20 kHz)中选择 1~10 kHz 内的信号。

解:

要计算 R,L,C 的值来构成带通滤波器,其截止频率为 1 kHz 和 10 kHz,有多种解法。例如,利用式(14.29)和式(14.30),即根据 R,L,C 确定 ω_{c1} 和 ω_{c2}。这些方程的形式较复杂,代数运算也比较复杂。因此,下面用截止频率 ω_{c1},ω_{c2} 计算中心频率 ω_o,然后用品质因数的定义计算 Q,最后用式(14.33)计算 R。尽管这种方法包含多个独立的计算步骤,但每步计算都相当简单。

无论用什么方法,只能提供两个方程,不足以求出三个未知数。因此,需要选择一个 R,L

或 C 值,然后用两个所选择的值计算出其他元件的值。此处选电容值为 1 μF,因为电容可选择范围受到更多的限制,而电感、电阻受到的限制较少。

计算中心频率为:

$$\begin{aligned} f_o &= \sqrt{f_{c1}f_{c2}} \\ &= \sqrt{(1000)(10000)} \\ &= 3\ 162.28\ \text{Hz} \end{aligned}$$

然后,用所得的中心频率和所选择的电容值计算电感值,用式(14.31)前必须将频率的单位转换为 rad/s:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\omega_o^2 C} \\ &= \frac{1}{[2\pi(3162.28)]^2(10^{-6})} \\ &= 2.533\ \text{mH} \end{aligned}$$

品质因数是中心频率与带宽之比,而带宽是两截止频率之差。所以:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{f_o}{f_{c2}-f_{c1}} \\ &= \frac{3162.28}{10000-1000} \\ &= 0.3514 \end{aligned}$$

用式(14.33)计算电阻 R:

$$R = \sqrt{\frac{L}{CQ^2}} = \sqrt{\frac{0.0025}{(10^{-6})(0.3514)^2}} = 143.24\ \Omega$$

为验证所有元件是否符合要求,将元件代入式(14.29)和式(14.30),发现:

$$\omega_{c1} = 6283.19\ \text{rad/s}\ (1000\ \text{Hz}),$$

$$\omega_{c2} = 62831.85\ \text{rad/s}\ (10000\ \text{Hz})$$

满足计算要求。

此例再次说明滤波器的五个参数中只有两个可以独立确定,其余三个参数总可以由所定义的两个参数计算得出。同样,这五个参数都与五个元件的值有关,而其中只有两个元件值可以独立确定。

例 14.6 (a) 计算转移函数表达式,说明图 14.22 所示 RLC 电路也是一带通滤波器。

(b) 计算中心频率 ω_o

(c) 计算截止频率 ω_{c1}、ω_{c2}、带宽 β 和品质因数 Q。

(d) 若已知中心频率为 5 kHz,带宽为 200 Hz,电容 $c = 5$ μF,求元件 R 和 L 值.

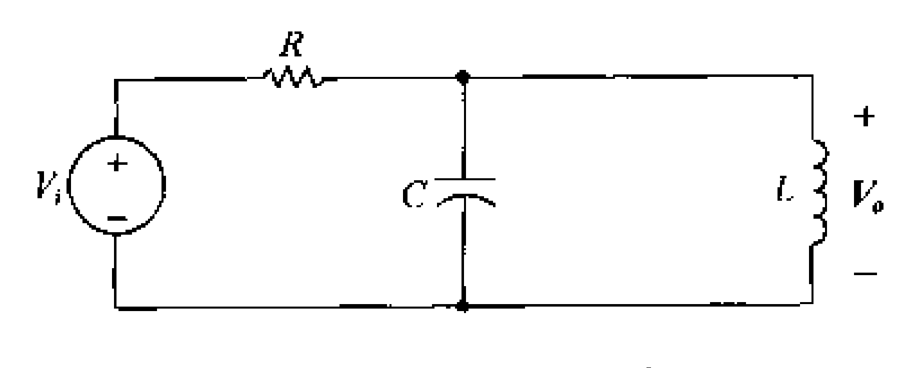


图 14.22 例 14.6 电路

解：

(a) 画出图 14.22 电路的 s 域等效模型，如图 14.23 所示。

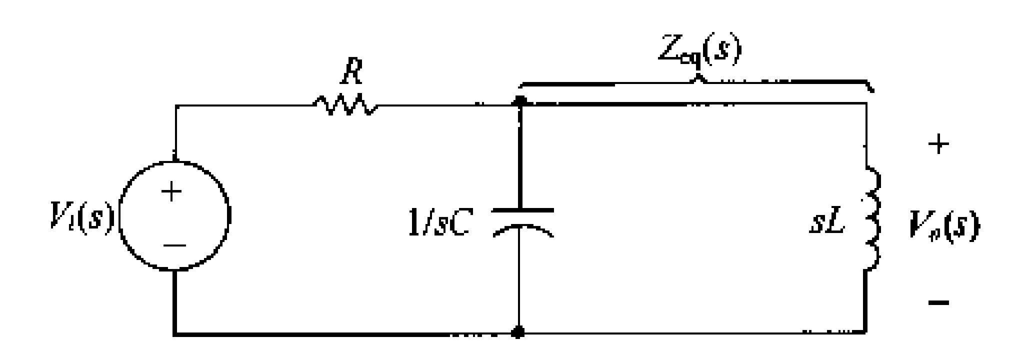


图 14.23　图 14.22 所示电路的 s 域等效模型

首先计算出 L 和 C 并联部分的等效阻抗 $Z_{eq}(s)$，如图 14.23 所示。再利用分压公式就可以计算出等效模型的转移函数：

$$Z_{eq}(s)=\frac{\frac{L}{C}}{sL+\frac{1}{sC}}$$

现在：

$$H(s)=\frac{\frac{s}{RC}}{S^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}$$

(b) 为计算中心频率 ω_o，需要计算转移函数幅值的最大值，将 $s=j\omega$ 代入 $H(s)$ 中：

$$|H(j\omega)|=\frac{\frac{\omega}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega RC-\frac{1}{\omega\frac{L}{R}}\right)^2}}$$

当：

$$\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2=0$$

转移函数的幅值最大。

因此：

$$\omega_o=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

并且：

$$H_{max}=|H(j\omega_o)|=1$$

(c) 在截止频率处，转移函数的幅值为 $(1/\sqrt{2})H_{max}=(1/\sqrt{2})$，将该常数代入幅值方程的左侧，然后化简，得到：

$$\left[\omega_c RC - \frac{1}{\omega_c \frac{L}{R}}\right] = \pm 1$$

将上式两端平方,得到两个截止频率的二次方程,可得到 4 个解。其中两个解为正,具有物理意义,有意义的两项为:

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

由截止频率计算带宽:

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{1}{RC}$$

最后,用品质因数的定义求品质因数 Q:

$$Q = \omega_o/\beta = \sqrt{\frac{R^2 C}{L}}$$

需要再一次注意的是,对带通滤波器而言,根据中心频率和带宽可以确定截止频率:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}$$

(d) 用(c) 中关于带宽的方程计算电阻 R 值,设给定电容为 5 μF,注意单位的转换:

$$R = \frac{1}{\beta C} = \frac{1}{(2\pi)(200)(5\times 10^{-6})} = 159.15\ \Omega$$

用(c) 中关于中心频率的方程和电容值计算电感值:

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = \frac{1}{[2\pi(5000)]^2(5\times 10^{-6})} = 202.64\ \mu\text{H}$$

例 14.7 对所讨论过的带通滤波器,假设电压源为理想电源,即电源无串联电阻。尽管这种假设常常是合理的,但有些时候不合理,比如当 R, L, C 的等效阻抗的幅值与电源阻抗接近时。下面讨论电源电阻 R_i 不等于零时,对串联 RLC 带通滤波器性质的影响。

(a) 确定图 14.24 所示电路的转移函数。

(b) 画出图 14.24 电路的幅度曲线,R, L, C 取值与例 14.5 相同,且设 $R_i = R$。在同一坐标中画出例 14.15 中电路的幅度特性曲线。

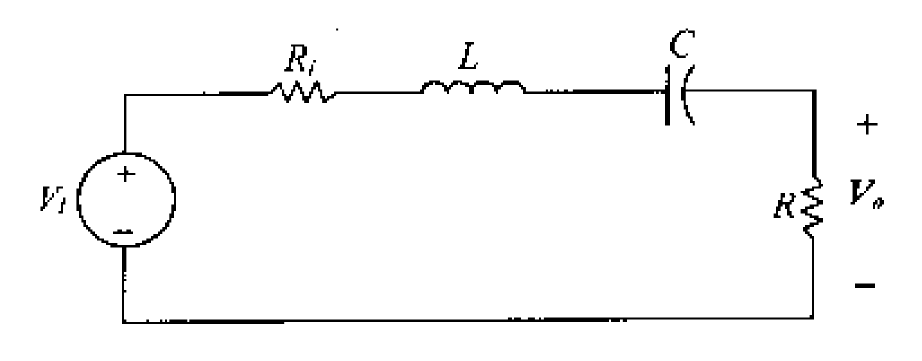


图 14.24　例 14.7 电路

解：

(a) 画出图 14.24 所示电路的 s 域等效模型，如图 14.25 所示，现在用分压公式求得转移函数为：

$$H(s)=\frac{\frac{R}{L}s}{s^2+\left(\frac{R+R_i}{L}\right)s+\frac{1}{LC}}$$

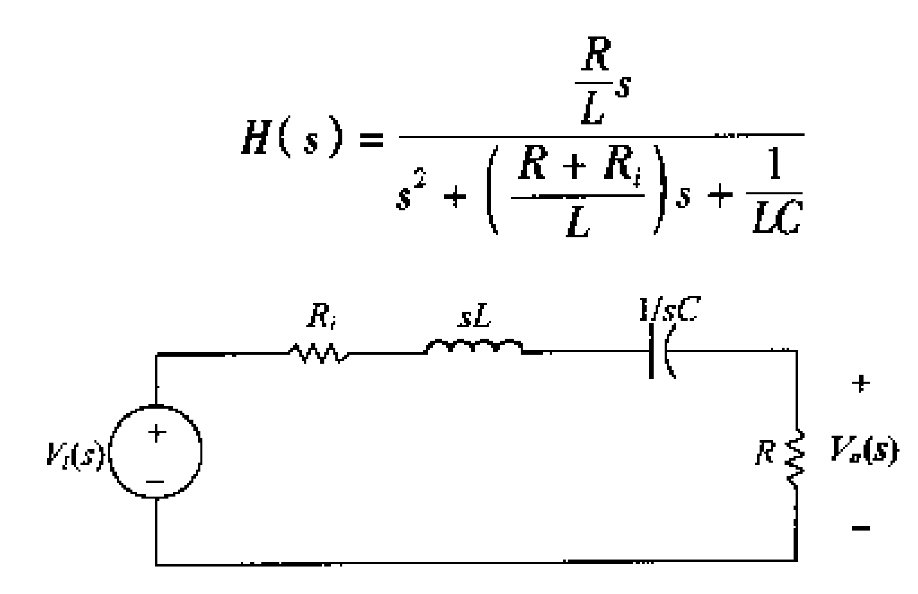


图 14.25　图 14.24 电路的 s 域等效模型

令 $s=j\omega$ 并计算转移函数的幅值：

$$|H(j\omega)|=\frac{\frac{R}{L}\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\omega\frac{R+R_i}{L}\right)^2}}$$

当转移函数幅值最大时，频率为中心频率 ω_o，即：

$$\omega_o=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

在中心频率处，最大幅值为：

$$H_{\max}=|H(j\omega_o)|=\frac{R}{R_i+R}$$

设转移函数的最大幅值等于 $(1/\sqrt{2})H_{\max}$，可计算出截止频率：

$$\omega_{c1}=-\frac{R+R_i}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R+R_i}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_{c2}=\frac{R+R_i}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R+R_i}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}$$

根据截止频率，计算带宽为：

$$\beta=\frac{R+R_i}{L}$$

最后，根据中心频率和带宽计算品质因数得：

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R + R_i}$$

通过以上分析,可以写出电源电阻非零时,串联 *RLC* 带通滤波器的转移函数为:

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}$$

其中:

$$K = \frac{R}{R + R_i}$$

当 $R_i = 0$ 时,$K = 1$,且转移函数为:

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}$$

(b) 例 14.5 中的电路中,其中心频率 3162.28 Hz,带宽为 9 kHz,最大幅值为 1。而对同一个电路,R,L,C 值不变,令 $R_i = R$,则中心频率为 3162.28 kHz,带宽 $\beta = (R + R_i)/L =$ 18 kHz,且 $H_{max} = 1/2$。将这两个带通滤波器的幅值特性曲线画在同一个图 14.26 中。

如果将 $R_i = 0$ 和 $R_i \neq 0$ 时两个带通滤波器的特性参数进行比较,则会发现:

- 中心频率相同。
- $R_i \neq 0$ 时,转移函数的最大幅值比 $R_i = 0$ 时的小。
- $R_i \neq 0$ 时,其带宽比 $R_i = 0$ 时的大,因此,这两种电路的截止频率和品质因数也不同。
- 串联 *RLC* 带通滤波器增加非零电源内阻后,不会改变其中心频率,但会使带宽增加,通频带的幅值减小。

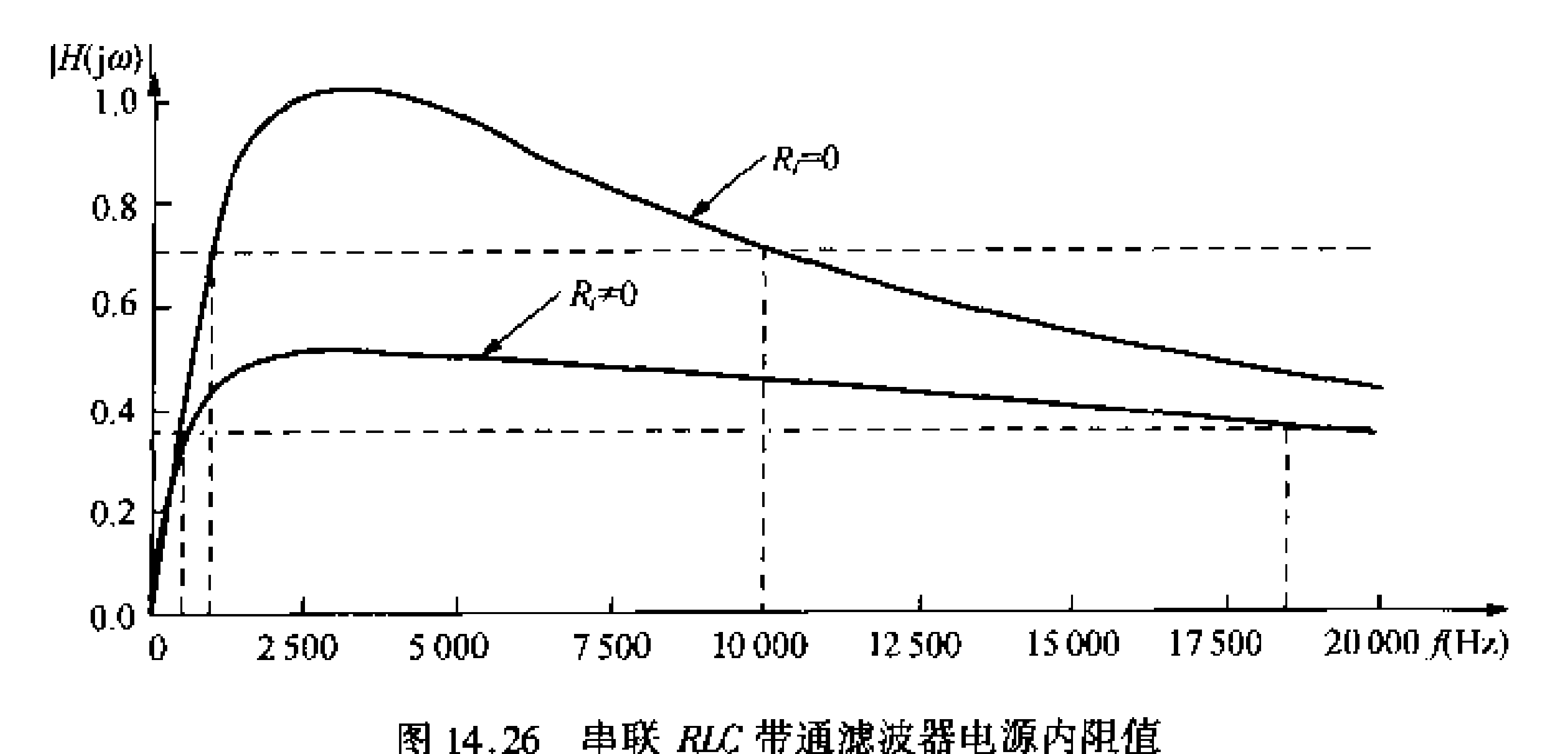


图 14.26 串联 *RLC* 带通滤波器电源内阻值为零和非零时的幅值特性曲线

如果对高通滤波器加上负载电阻,会遇到同样的问题。在进行滤波器设计时,希望无论与电压源相关的内阻如何,滤波器的滤波特性没有变化。但实际上,由于附加了电源的电阻,由无源元件构成的滤波器的滤波特性会发生改变。第 15 章讨论后会发现,有源滤波器的设计方法非常合适这种要求。

图 14.27 总结了上面讨论过的两种 *RLC* 带通滤波器,它们的转移函数具有相同的形式,可用一般式来表示这两种带通滤波器的转移函数:

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2} \tag{14.38}$$

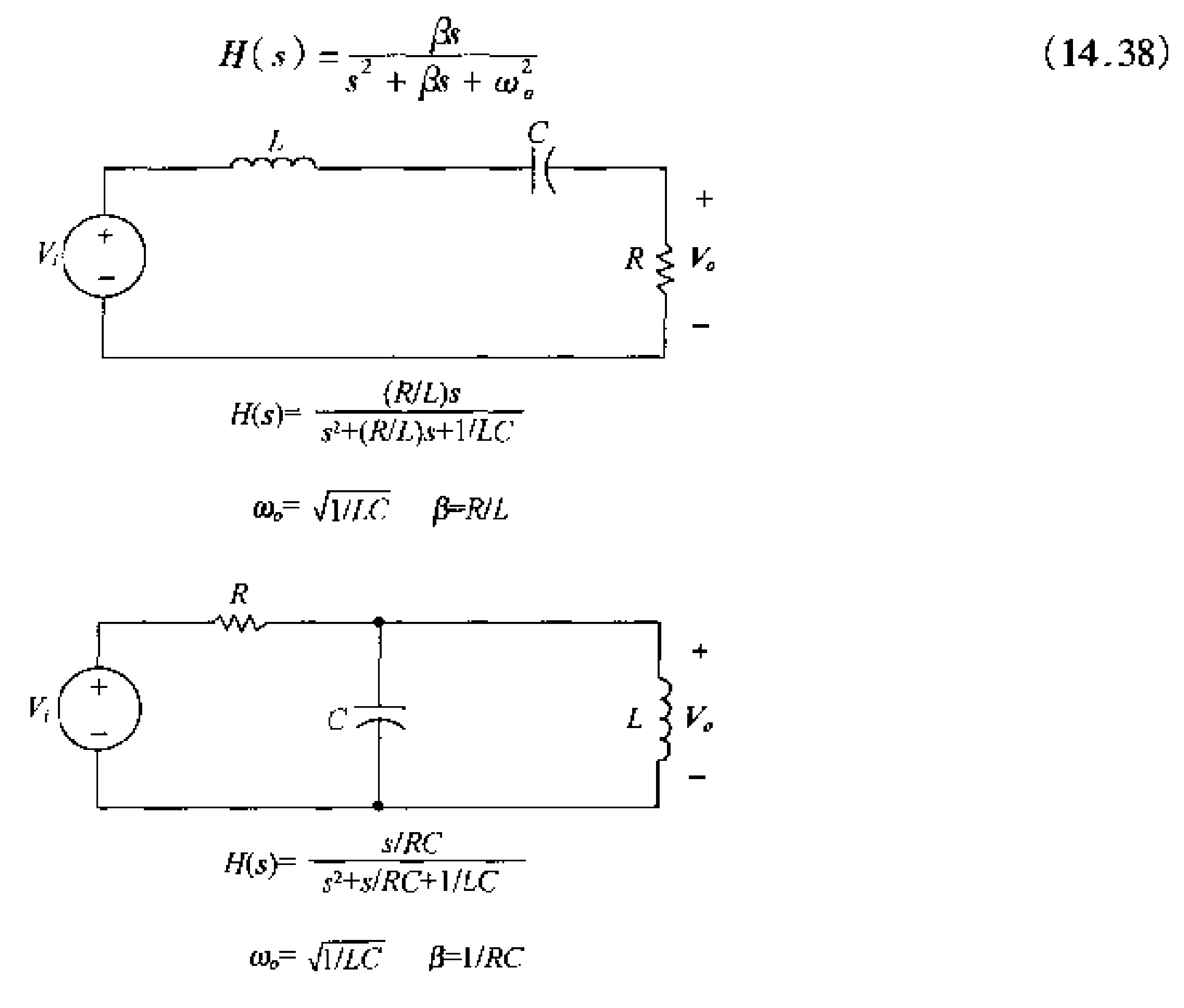


图 14.27　两种 *RLC* 带通滤波器和转移函数表达式、中心频率及其带宽

任何具有式(14.38)形式转移函数的电路都是带通滤波器，其中 ω_o 为中心频率，β 为带宽。

例 14.7 表明，转移函数也可以写成下面的形式：

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2} \tag{14.39}$$

其中 K 和 β 的取值与电压源的串联内电阻为零或非零有关。

14.4.4　时域与频域的关系

通过对图 14.19 (a) *RLC* 串联电路的讨论表明，描述 *RLC* 带通滤波器频率响应的参数与描述时域响应参数之间有一定的关系。第 8 章的分析说明电路的自然响应是由衰减系数和谐振频率确定的，电路的元件参数是根据式(8.58)和式(8.59)给出的。为方便起见，将其列出：

$$\alpha = \frac{R}{2L} \text{ rad/s} \tag{14.40}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ rad/s} \tag{14.41}$$

因此，同一个参数 ω_o 既用来描述时域响应特性，又用来描述频率响应特性，这就是中心频率又叫谐振频率的原因。带宽与衰减常数间关系可表示为如下关系：

$$\beta = 2\alpha \tag{14.42}$$

RLC 串联电路的自然响应有三种形式：欠阻尼、过阻尼和临界阻尼。从过阻尼向欠阻尼的转化点为 $\omega_o^2 = \alpha^2$。根据式 (14.42)中 α 与 β 的关系以及品质因数的定义可知，当 $Q = 1/2$ 时，响应从过阻尼向欠阻尼转化。因此，如果电路的频率响应在 ω_o 处具有尖锋，则表明该电

路具有高品质因数 Q 和窄带宽,则其自然响应必为欠阻尼情况。相反,如果电路的频率响应具有宽的带宽和低的品质因数,则其自然响应必为过阻尼情况。

练习题

14.6 带通滤波器电路如图 14.19 (a) 所示,$C=0.1\ \mu F$,$\omega_o=12\ kHz$,$Q=6$,计算 R,L 值。

答:$L=1.76\ mH$,$R=22.10\ \Omega$。

14.7 带通滤波器电路如图 14.22,$R=250\ \Omega$,$\omega_o=2\ kHz$,$\beta=500\ Hz$ 求 L,C 值。

答:$L=4.97\ mH$,$C=1.27\ \mu F$。

14.8 重新计算例 14.6(d) 电路中元件值,使电路的频率响应不变。已知 $C=0.2\ \mu F$。

答:$L=5.07\ mH$,$R=3.98\ k\Omega$。

14.9 重新计算例题 14.6(d) 电路中的元件值,使该电路的品质因数不变。中心频率为 2 kHz,已知 $C=0.2\ \mu F$。

答:$R=9.95\ k\Omega$,$L=31.66\ mH$。

14.5 带阻滤波器

这里将讨论第四种形式的滤波器——带阻滤波器。带阻滤波器可以将两个截止频率外侧的电源电压信号传输到输出端,将截止频率内的电源电压在传输到输出端之前衰减。带通滤波器和带阻滤波器在频域中的功能是互补的。

带阻滤波器和带通滤波器一样,也具有同样的特性参数。即两个截止频率、中心频率和品质因数。另外,其中的两个可以独立确定。

下一节将讨论两个带阻滤波器电路,然后计算每个电路的元件与特性参数之间关系的方程。

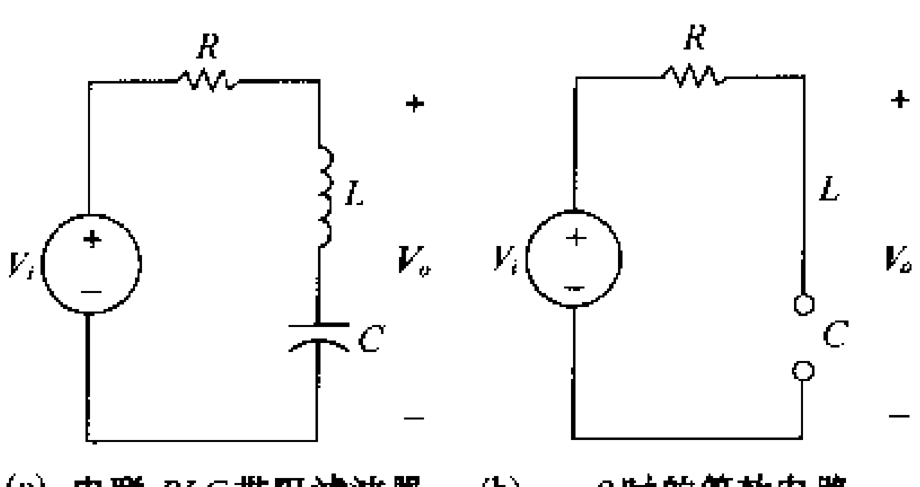
14.5.1 串联 *RLC* 电路的定性分析

图 14.28 (a) 画出了串联 *RLC* 电路,尽管电路元件和联接方式与图 14.19 (a) 所示的串联 RLC 带通滤波器的相同。但与图 14.28 (a) 电路有一重要差别,即输出电压是电容与电感串联的电压。与高通和低通滤波器讨论时的结论相同,输出电压的定义不同,同一电路可产生不同的滤波作用。

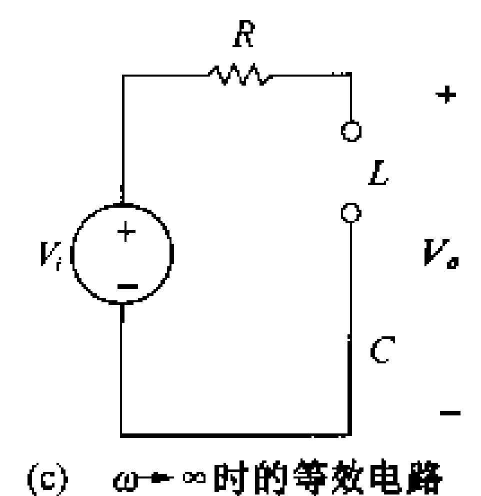
当 $\omega=0$ 时,电感相当于短路,电容相当于开路,当 $\omega\rightarrow\infty$ 时,情况正好相反。图 14.28 (b) 为 $\omega=0$ 时的等效电路。图 14.28 (c) 为 $\omega\rightarrow\infty$ 时的等效电路。在两等效电路中,输出电压均为开路电压,因此,输出和输入电压具有相等的幅值。该串联 *RLC* 带阻滤波器电路具有两个通频带,一个是小于低截止频率段,另一个是大于高截止频率段。

在两个通频带之间,两元件串联后具有无穷大的符号相反的阻抗。当频率从零开始增加时,电感阻抗增加,电容阻抗减小。当 ωL 接近于 $1/\omega_c$ 时,输出与输入之间的相位差也趋近于 $-90°$。一旦当 ωL 超过 $1/\omega_c$,相位差会跳变为 $90°$。并且当 ω 继续增加时相位差又接近于零。

在两通带之间的某一处,电感和电容的阻抗大小相等而符号相反,在该频率处,电容和电感的串联组合相当于短路。因此,输出电压的幅值必为零,这个频率就是串联 *RLC* 带阻滤波器的中心频率。



(a) 串联 RLC 带阻滤波器 (b) $\omega=0$ 时的等效电路



(c) $\omega\to\infty$ 时的等效电路

图 14.28

图 14.29 是图 14.28 (a) 串联 RLC 带阻滤波器的频率响应曲线。其幅度曲线和图 14.3 (d) 的理想带阻滤波器的幅度曲线相重叠。定性分析确定幅度和相位曲线的形状，下面进行电路的定量分析以确定其频率响应，并计算描述这些响应特性的参数。

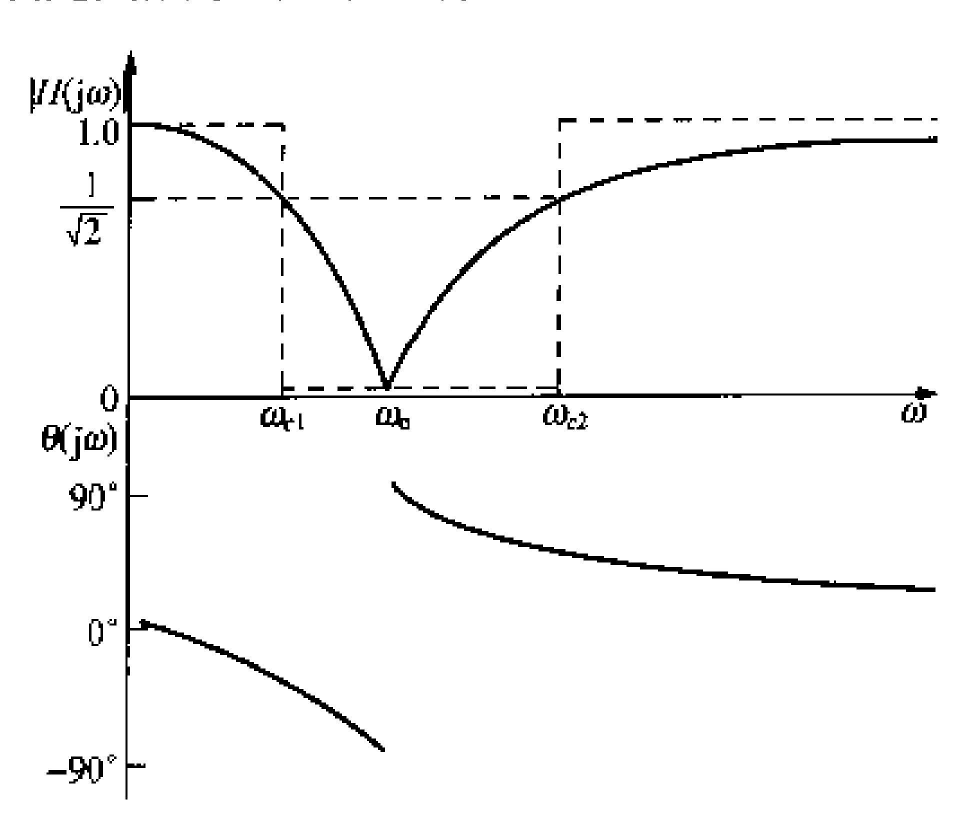


图 14.29 图 14.28 (a) 所示串联 RLC 带阻滤波器电路的频率响应曲线

14.5.2 串联 RLC 电路的定量分析

如图 14.30 所示是转换后的 s 域模型。用分压公式写出转移函数：

$$H(s)=\frac{sL+\frac{1}{sC}}{R+sL+\frac{1}{sC}}=\frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \tag{14.43}$$

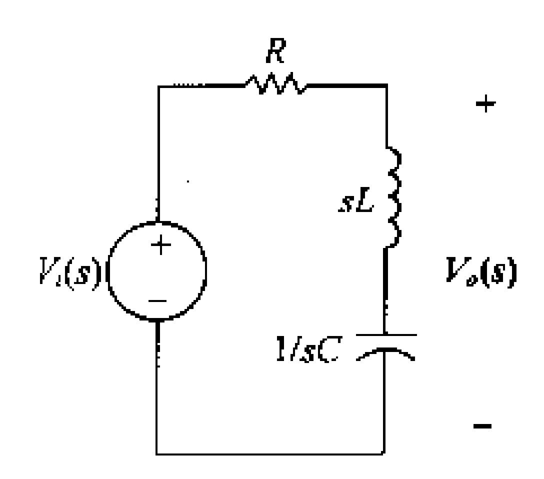


图 14.30 图 14.28 (a) 电路的 s 域模型

令 $s=\mathrm{j}\omega$ 并代入式(14.43),得出转移函数的幅度和相位角方程:

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{\left|\frac{1}{LC}-\omega^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\omega R}{L}\right)^2}} \tag{14.44}$$

$$\theta(\mathrm{j}\omega)=-\arctan\left(\frac{\frac{\omega R}{L}}{\frac{1}{LC}-\omega^2}\right) \tag{14.45}$$

式(14.44)和式(14.45)确定了频率响应的形状,如图 14.29 所示。

用图 14.30 电路计算中心频率。带阻滤波器中心频率的定义为电容和电感的阻抗之和为零时的频率,而带通滤波器在中心频率点其幅值最大。带阻滤波器的中心频率不在通带内,而是在阻带内,得出其中心频率为:

$$\omega_o=\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{14.46}$$

将式(14.46)代入式(14.44),得到 $|H(\mathrm{j}\omega_o)|=0$。

截止频率、带宽和品质因数的定义方式与带通滤波器中的定义完全相同。将方程(14.44)的左侧用 $(1/\sqrt{2})H_{max}$ 代替,然后计算出截止频率 ω_{c1} 和 ω_{c2}。带阻滤波器的 $H_{max}=|H(\mathrm{j}0)|=|H(\mathrm{j}\infty)|$,且图 14.28 (a) 的串联 RLC 带阻滤波器 $H_{max}=1$。因此得:

$$\omega_{c1}=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}} \tag{14.47}$$

$$\omega_{c2}=\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}} \tag{14.48}$$

用截止频率求出带宽的表达式 β:

$$\beta=R/L \tag{14.49}$$

最后,用中心频率和带宽求出品质因数的方程为:

$$Q=\sqrt{\frac{L}{R^2C}} \tag{14.50}$$

与带通滤波器一样,也可以用带宽和中心频率来表示出截止频率:

$$\omega_{c1}=-\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\omega_o^2} \tag{14.51}$$

$$\omega_{c2}=\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\omega_o^2} \tag{14.52}$$

变换该方程，用中心频率和品质因数表达截止频率：

$$\omega_{c1} = \omega_o \cdot \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \right] \tag{14.53}$$

$$\omega_{c2} = \omega_o \cdot \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \right] \tag{14.54}$$

例 14.8 说明了串联 RLC 带阻滤波器的设计过程。

例 14.8 电路如图 14.28 (a) 所示，试计算 $R, L, \omega_{c1}, \omega_{c2}$ 和 Q 值，使其构成带阻滤波器，且带宽为 250 Hz，中心频率为 750 Hz，电容取 100 nF。

解：

先计算该滤波器的品质因数，由品质因数定义得：

$$Q = \omega_o / \beta = 3$$

用式(14.46)计算 L 值，将 ω_o 的单位转换为 rad/s：

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\omega_o^2 C} \\ &= \frac{1}{[2\pi(750)]^2(100 \times 10^{-9})} \\ &= 450 \text{ mH} \end{aligned}$$

用式(14.49)计算 R 值：

$$\begin{aligned} R &= \beta L \\ &= 2\pi(250)(450 \times 10^{-3}) \\ &= 707\ \Omega \end{aligned}$$

根据式(14.51)和式(14.52)计算两个截止频率为：

$$\begin{aligned} \omega_{c1} &= -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2} \\ &= 3\ 992.0 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{c2} &= \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2} \\ &= 5\ 562.8 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

其截止频率为 635.3 Hz 和 885.3 Hz。截止频率的差为 250 Hz，与定义的带宽一致。截止频率的几何平均值为 750 Hz，与定义的中心频率相一致。

可以想到，另一个带阻滤波器电路是并联 *RLC* 电路，并联 *RLC* 电路的分析留在例 14.26 中。并联 *RLC* 和串联 *RLC* 带阻滤波器的结果列在图 14.31 中。与其他类型的滤波器分析一样，带阻滤波器转移函数有其一般形式，其中的常数项用 β 和 ω_o 表示：

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \beta s + \omega_o^2} \tag{14.55}$$

该方程在滤波器设计中非常有用，任何具有这种转移函数的电路均可作为带阻滤波器。

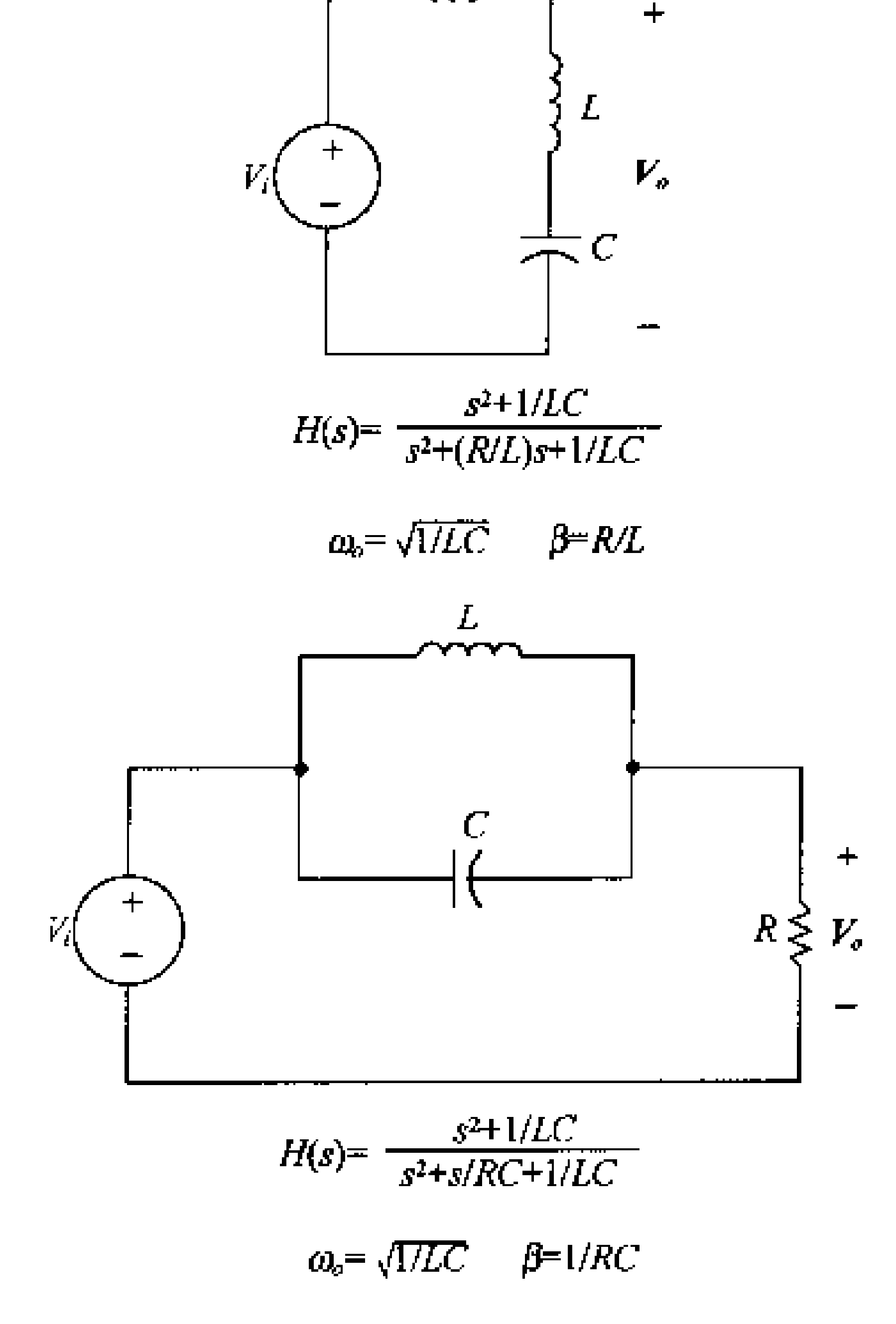


图 14.31 两个 RLC 带阻滤波器和两个转移函数方程、中心频率、带宽

练习题

14.10 利用图 14.28 (a) 所示电路设计一带阻滤波器,其中心频率为 4 kHz,品质因数为 5,电容为 500 nF,求 R,L 值。

答:$L = 3.17$ mH, $R = 14.92\ \Omega$

14.11 用上题电路重新设计一带阻滤波器,其中心频率 20 kHz,品质因数仍为 5,电阻取 100 Ω,试计算 L 和 C 值。

答:$L = 3.98$ mH, $C = 15.92$ nF。

14.6 波特图

读者已经知道,频率响应曲线是电路分析的一个重要工具。到目前为止,还只是定性地画出了频率响应图,并未讨论如何定量画频率响应图。画频率响应图的最有效的方法是用计算机,用计算机可以画出精确的 $|H(j\omega)| - \omega$ 和 $\theta(j\omega) - \omega$ 曲线。有时,先用波特图画出响应曲线,再用计算机精确画出该曲线会有帮助。

波特图或波特图曲线是一种图像技术,增加对频率响应的感性认识。为纪念 H.W.Bode 所做的先驱工作而命名。某些电路转移函数的零极点是分开的,对于这种电路的频率响应分

析，波特图显得非常有用。

与定性画出的频率响应曲线一样，波特图也包含两个部分，一个是表示转移函数的幅值如何随频率变化的曲线，另一个是表示转移函数的相位角如何随频率变化的曲线。在波特图中，为了扩大频率轴所表示的宽度和精度，其波形曲线画在半对数平面上。在幅度和相位图中，频率在横轴用对数值画，纵轴上的幅度和相位角用线性比例画。

14.6.1 一阶实数零极点

为简化波特图的绘制，先讨论 $H(s)$ 的所有零极点均为一阶实数的情况，然后再讨论具有复根和重复零极点的情况。下面以特殊的 $H(s)$ 表达式开始进行讨论：

$$H(s)=\frac{K(s+z_1)}{s(s+p_1)} \tag{14.56}$$

得出：

$$H(j\omega)=\frac{K(j\omega+z_1)}{j\omega(j\omega+p_1)} \tag{14.57}$$

画波特图的第一步是将 $H(j\omega)$ 的表达式变为标准形式，即将零点和极点提到前面：

$$H(j\omega)=\frac{Kz_1(1+j\omega/z_1)}{p_1(j\omega)(1+j\omega/p_1)} \tag{14.58}$$

然后令 K_o 代表常量 Kz_1/p_1，同时用极坐标形式表示 $H(j\omega)$：

$$\begin{aligned}H(j\omega)&=\frac{K_o|1+j\omega/z_1|\angle\Psi_1}{|\omega|\angle 90^\circ|1+j\omega/p_1|\angle\beta_1}\\&=\frac{K_o|1+j\omega/z_1|}{|\omega||1+j\omega/p_1|}\angle(\Psi_1-90^\circ-\beta_1)\end{aligned} \tag{14.59}$$

由(14.59)得：

$$|H(j\omega)|=\frac{K_o|1+j\omega/z_1|}{\omega|1+j\omega/p_1|} \tag{14.60}$$

$$\theta(\omega)=\Psi_1-90^\circ-\beta_1 \tag{14.61}$$

由定义得相位角 Ψ_1 和 β_1 为：

$$\Psi_1=\arctan\omega/z_1 \tag{14.62}$$

$$\beta_1=\arctan\omega/p_1 \tag{14.63}$$

波特图包含两个 ω 的函数，即式(14.60)表示的幅度曲线和式(14.61)表示的相位曲线。

14.6.2 直线型幅度曲线

幅度特性含有因数的乘、除运算，这些因数与转移函数的零极点有关。如果用对数值表示转移函数的幅值，可以将乘除运算转化为加减运算，这种对数值就叫分贝。以分贝表示的转移函数幅值为：

$$A_{dB}=20\log_{10}|H(j\omega)| \tag{14.64}$$

表 14.2 给出了幅度的实际值与近似值之间的转换关系。

表 14.2　实际幅值及其近似值

A_{dB}	A	A_{dB}	A
0	1.00	30	31.62
3	1.41	40	100.00
6	2.00	60	10^3
10	3.16	80	10^4
15	5.62	100	10^5
20	10.00	120	10^6

用分贝值表示式(14.60),得:

$$A_{dB} = 20\ \log_{10}\frac{K_o\,|1 + j\omega/z_1|}{\omega\,|1 + j\omega/p_1|}$$
$$= 20\ \log_{10}K_o + 20\log_{10}|1 + j\omega/z_1|$$
$$- 20\ \log_{10}\omega - 20\log_{10}|1 + j\omega/p_1| \tag{14.65}$$

画出式(14.65)的波特图,关键是先分别画出方程中各项的图,然后将各部分进行叠加合成。在任何情况下各部分曲线都可以用直线近似画出,因此,各个独立部分很容易画出。

$20\ \log_{10}K_o$ 的图形是一条水平的直线,K_o 不是 ω 的函数。当 $K_o > 1$ 时,该项为正,当 $K_o = 1$ 时,该项为零,当 $K_o < 1$ 时,该项为负。

$20\ \log_{10}|1 + j\omega/z_1|$ 的图形是两条直线。当 ω 很小时,$|1 + j\omega/z_1|$ 的幅值约为 1。因此:

$$20\ \log_{10}|1 + j\omega/z_1| \to 0 \qquad ,当\ \omega \to 0 \tag{14.66}$$

当 ω 较大时,$|1 + j\omega/z_1|$ 的幅值约为 ω/z_1,因此:

$$20\ \log_{10}|1 + j\omega/z_1| \to 20\ \log_{10}(\omega/z_1) \qquad ,当\ \omega \to \infty \tag{14.67}$$

当频率以对数比例表示时,$20\ \log_{10}(\omega/z_1)$ 是一条直线,其斜率为 20 dB/10 倍频程(一个 10 倍频程是频率从 1 ~ 10),该直线与 0 dB 轴的交点为 $\omega = z_1$,该频率值称为转折频率。根据式(14.66)和式(14.67)可以画出一阶零点的幅度曲线,如图 14.32 所示。

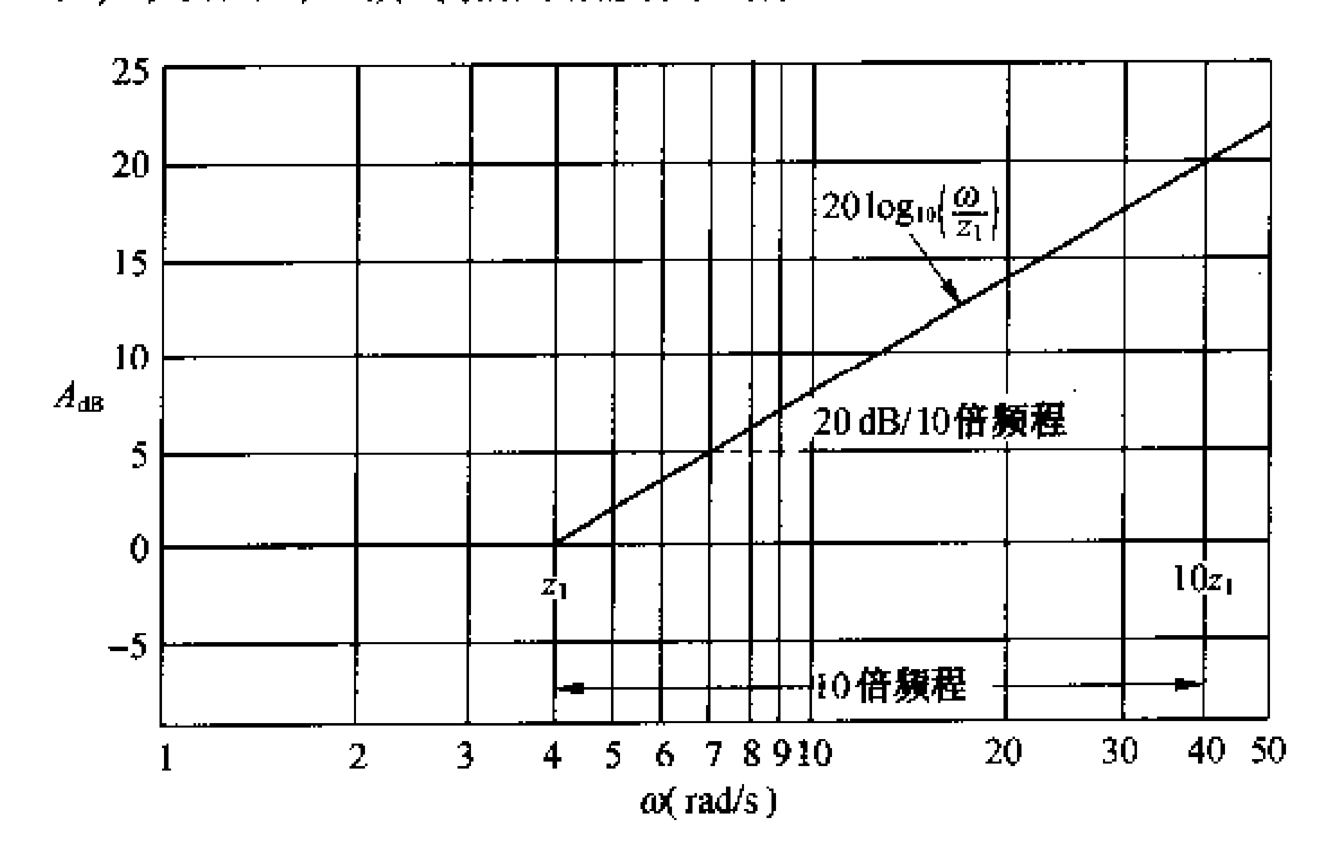


图 14.32　一阶零点幅度曲线的直线近似图形

$-20\log_{10}\omega$ 的图形是一条直线，其斜率为 -20 dB/10 倍频程。在 $\omega=1$ 处与 0 dB 轴相交。两条直线近似表示了 $-20\log_{10}|1+j\omega/p_1|$ 的图形。当 $\omega=p_1$ 时，第二条直线与 0 dB 轴相交。当 ω 值较大时，直线 $20\log_{10}(\omega/p_1)$ 的斜率为 -20 dB/10 倍频程。图 14.33 画出了一阶极点幅度曲线的近似图形。

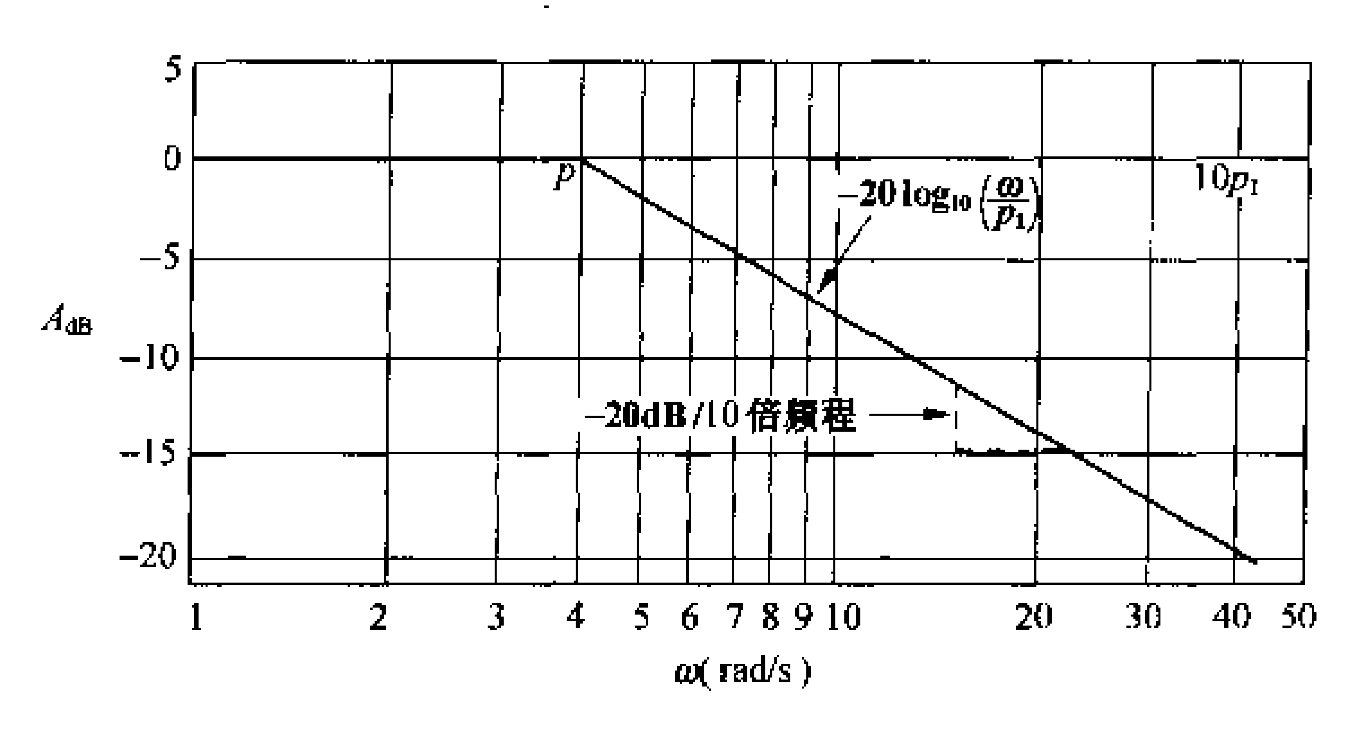


图 14.33　一阶极点幅度曲线的近似图形

图 14.34 表示的是式(14.65)的波特图。其中 $K_o=\sqrt{10}$，$z_1=0.1$ rad/s，$p_1=5$ rad/s，方程中的每一项在图中均标出，可以验证，各部分叠加形成标有 $20\log_{10}|H(j\omega)|$ 的曲线。


例 14.9 说明了求具有一阶零极点的转移函数直线型幅度曲线的过程。

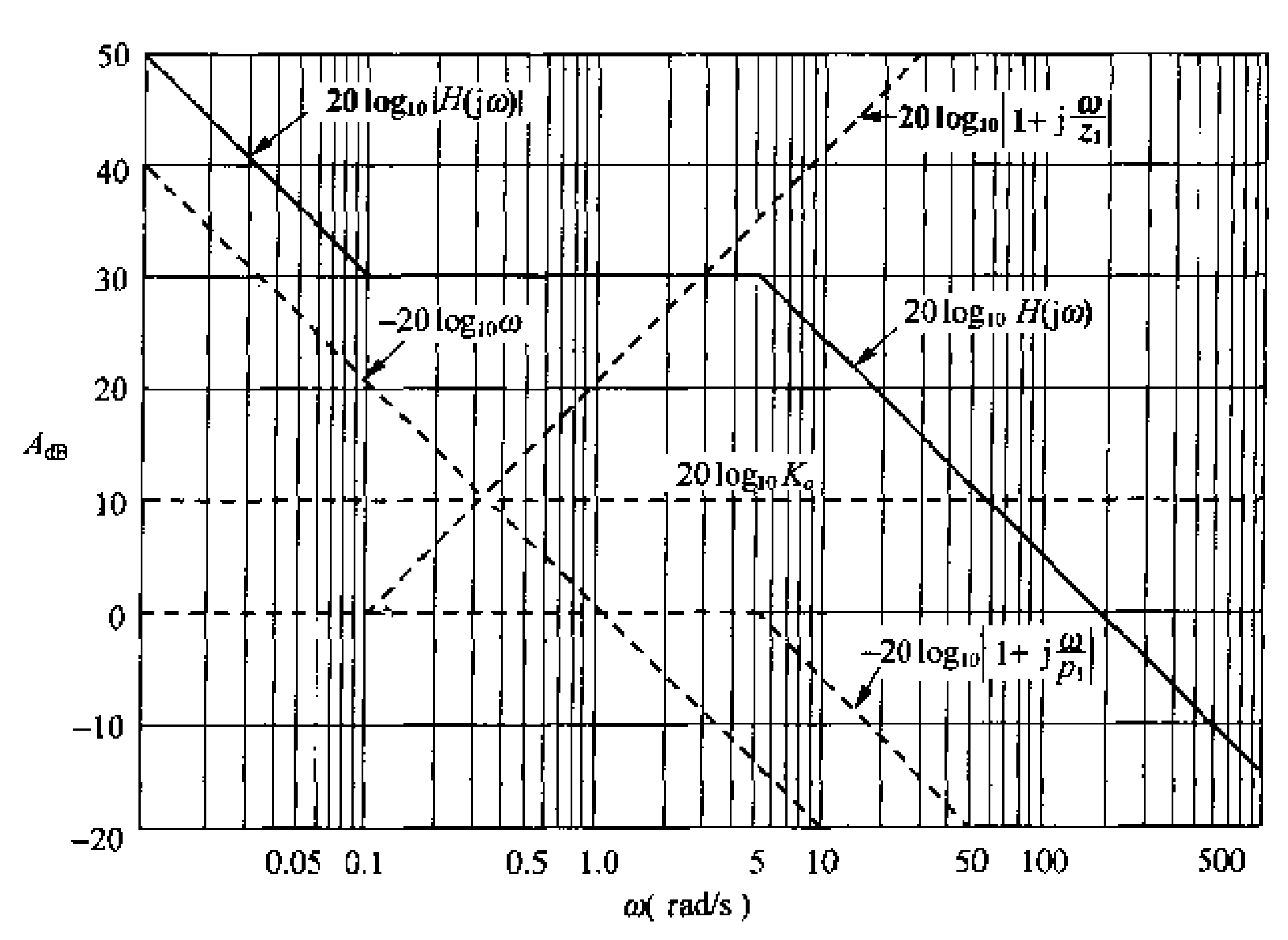


图 14.34　式(14.65)幅度曲线的近似图形

例 14.9　电路如图 14.35 所示。

(a) 计算其转移函数 $H(s)$。

(b) 画出其波特图的幅度曲线。

(c) 计算 $\omega=50$ rad/s 和 $\omega=1000$ rad/s 时的 $20\log_{10}|H(j\omega)|$ 的值。

(d) 标出 (c) 计算出的直线图上的点。

(e) 设 $v_i(t)=5\cos(500t+15°)$ V,用所求波特图确定此时的输出 $V_o(t)$的幅值。

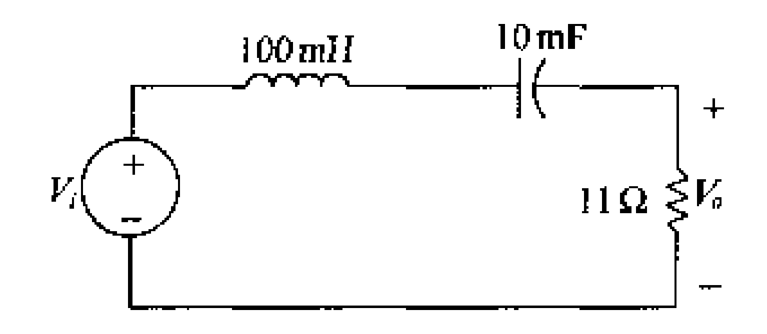


图 14.35 例 14.9电路

解:

(a) 建立其 s 域模型,用 s 域分压公式计算出:

$$H(s)=\frac{(R/L)s}{s^2+(R/L)s+\frac{1}{LC}}$$

代入电路中各元件值得:

$$H(s)=\frac{110s}{s^2+110s+1\ 000}=\frac{110s}{(s+10)(s+100)}$$

(b) 先写出转移函数的标准形式:

$$H(j\omega)=\frac{0.11j\omega}{[1+j(\omega/10)][1+j(\omega/100)]}$$

以分贝形式表示转移函数的幅值:

$$\begin{aligned}A_{dB}&=20\log_{10}|H(j\omega)|\\&=20\log_{10}0.11+20\log_{10}|j\omega|\\&\quad-20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{10}\right|-20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{100}\right|\end{aligned}$$

图 14.36 画出了其直线图,每个部分对总幅值产生的影响非常清楚地表示出来。

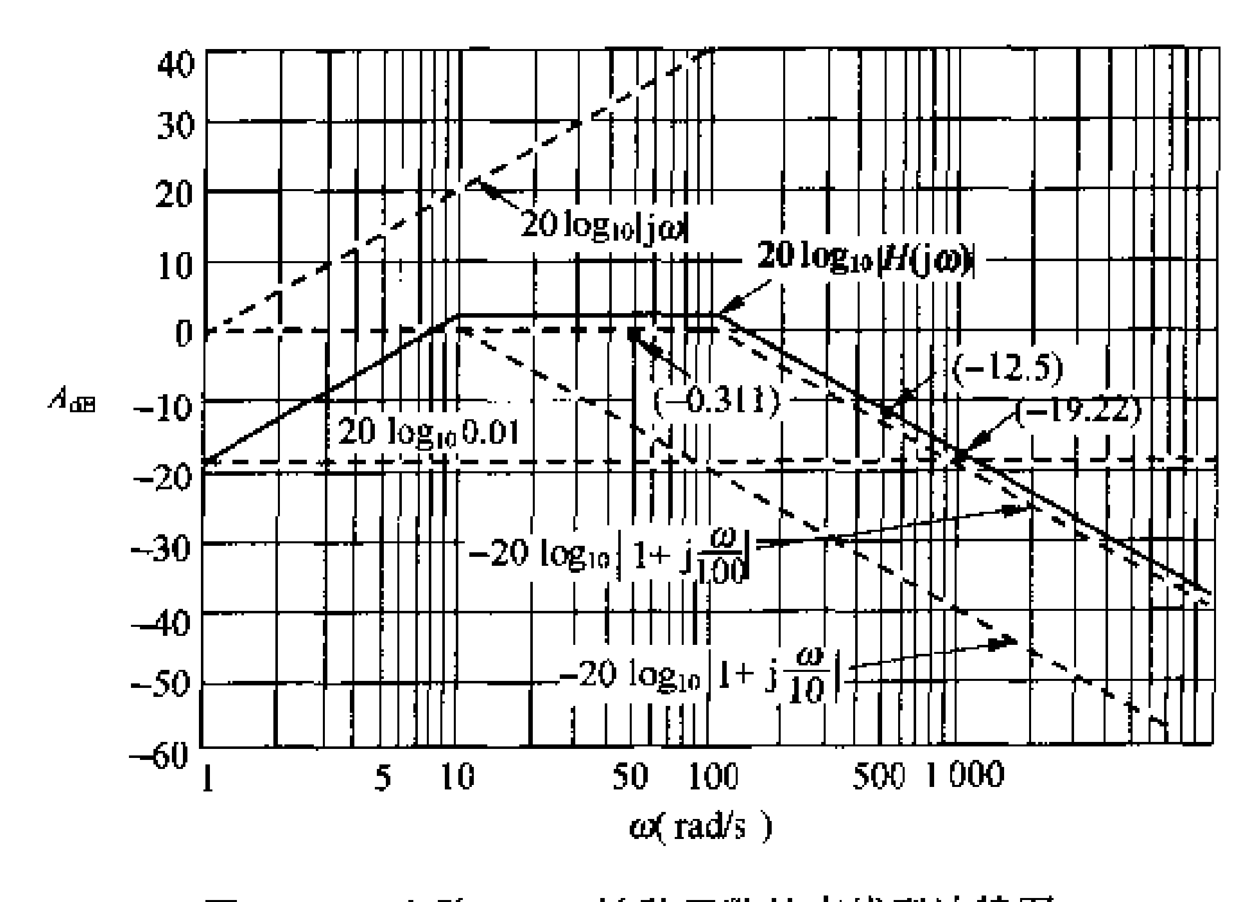


图 14.36 电路 14.35 转移函数的直线型波特图

(c) 得出:

$$H(\mathrm{j}50)=\frac{0.11(\mathrm{j}50)}{(1+\mathrm{j}5)(1+\mathrm{j}0.5)}$$
$$=0.9648\underline{/-15.25^\circ}$$
$$20\log_{10}|H(\mathrm{j}50)|=20\log_{10}0.9648$$
$$=-0.311\ \mathrm{dB}$$
$$H(\mathrm{j}1000)=\frac{0.11(\mathrm{j}1000)}{(1+\mathrm{j}100)(1+\mathrm{j}10)}$$
$$=0.1094\underline{/-83.72^\circ}$$
$$20\log_{10}0.1094=-19.22\ \mathrm{dB}$$

(d) 见图 14.36。

(e) 由图 14.36 可以看到，当 $\omega=500$ rad/s 时，A_{dB}的值为 -12.5 dB。所以：

$$|A|=10^{(-12.5/20)}=0.24$$

和

$$V_{mo}=|A|V_{mi}=(0.24)(5)=1.19\ \mathrm{V}$$

可以将 $\omega=500$ rad/s 代入式$|H(\mathrm{j}\omega)|$中求得$|H(\mathrm{j}\omega)|$的实际值：

$$H(\mathrm{j}500)=\frac{0.11(\mathrm{j}500)}{(1+\mathrm{j}50)(1+\mathrm{j}5)}=0.22\underline{/-77.54^\circ}$$

在该电源作用下，实际输出电压的幅值为：

$$V_{mo}=|A|V_{mi}=(0.22)(5)=1.1\ \mathrm{V}$$

14.6.3 精确的幅度曲线

修正幅度在转折频率、1.5 倍转折频率、2 倍转折频率时的值可以得到精确的幅度特性曲线。在转折频率处，实际的分贝值是：

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{dB}_c}&=\pm20\log_{10}|1+\mathrm{j}1|\\&=\pm20\log_{10}\sqrt{2}\\&\approx\pm3\ \mathrm{dB}\end{aligned}\tag{14.68}$$

在 0.5 倍转折频率处：

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{dB}_{c/2}}&=\pm20\log_{10}\left|1+\mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right|\\&=\pm20\log_{10}\sqrt{5/4}\\&\approx\pm1\ \mathrm{dB}\end{aligned}\tag{14.69}$$

在 2 倍转折频率处：

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{dB}_{2c}}&=\pm20\log_{10}|1+\mathrm{j}2|\\&=\pm20\log_{10}\sqrt{5}\\&\approx\pm7\ \mathrm{dB}\end{aligned}\tag{14.70}$$

在式(14.68)~(14.70)中，“+”号适用一阶零点，“-”号适用于一阶极点。直线型幅度曲线在转折频率和半转折频率处的值均为 0 dB，在 2 倍频处为 ±6 dB。因此，修正值在转折频率处为 ±3 dB，在半倍和 2 倍转折频率处为 ±1 dB，图 14.37 标出了修正值。

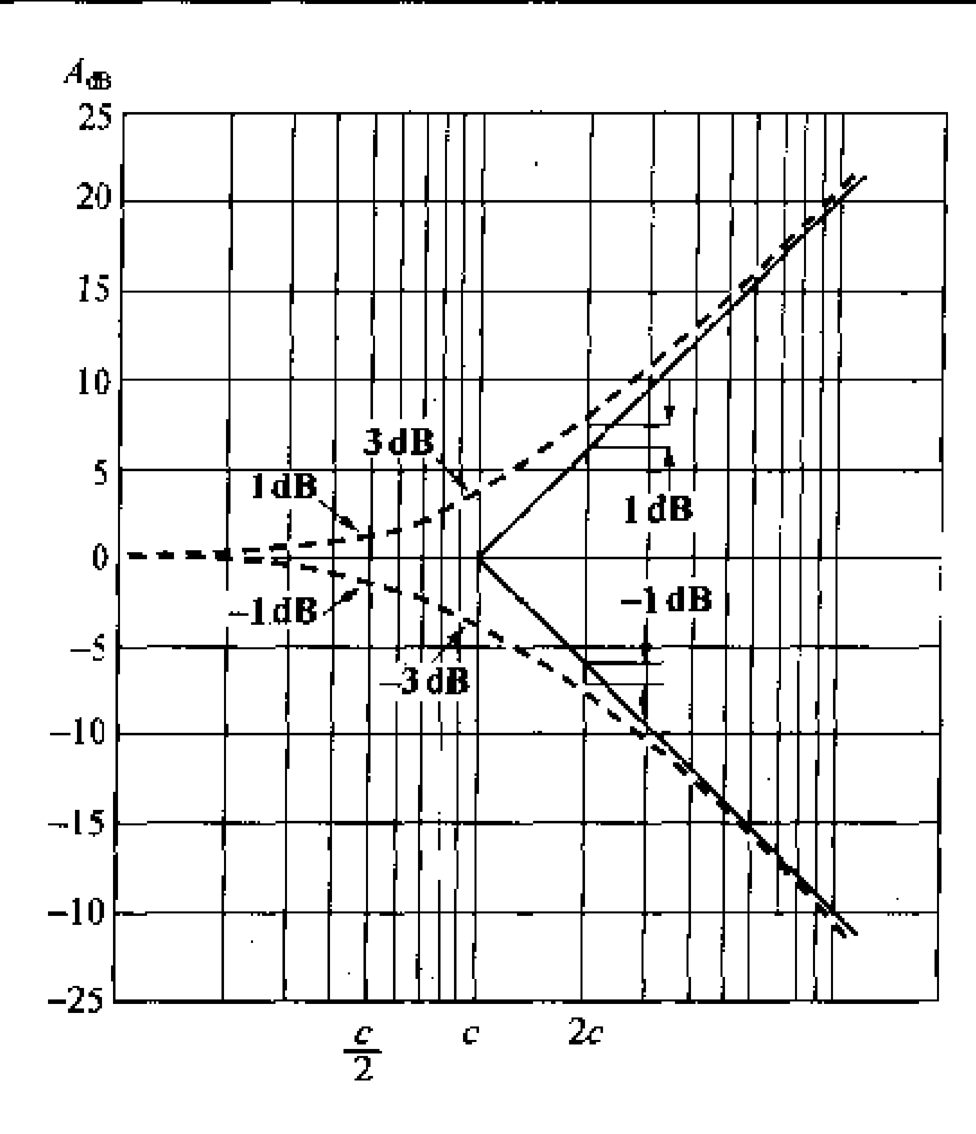


图 14.37 一阶零极点的修正幅度曲线

频率从 2 变到 1 叫倍频程。20 dB/10 倍频程相当于 6.02 dB/倍频程。在画图时，相当于 6.02dB/倍频程。这样，计算出的修正值在转折频率之上和之下是一致的。若转移函数的零极点分开较远，插入修正值得出精确的幅度曲线是件容易的事。但如果零极点的间隔很近，那么重叠的修正值很难计算，最好先用直线图估画出幅度特性，然后用计算机精确计算各关键频率点的幅值。

14.6.4 直线型相位角曲线

用直线型估算方法也可以画出相位曲线。当转移函数为常数 K_o 时，相位角为零。当一阶零极点位于原点时，其相位角为常数 ±90°。当一阶零极点不在原点时，估算直线型曲线，按下面的方法处理：

(a) 小于 1/10 转折频率时，相位角为 0°。

(b) 大于 10 倍转折频率时，相位角为 ±90°。

(c) 在 1/10～10 倍转折频率之间，相位角为直线，当频率为 1/10 转折频率时为 0°，在转折频率处为 ±45°，在 10 倍转折频率处为 90°。

以上各步中，"+"号适用于一阶零点，"-"号适用于一阶极点。图 14.38 画出了一阶零极点的直线型相位曲线。

图中虚线画出了相位随频率的精确变化情况。可见近似曲线和实际曲线非常靠近，两条曲线之间最大误差值为 6°。

图 14.39 画出了式(14.56)所描述的转移函数的近似相位图。式(14.61)给出了相位角方程，方程中 $z_1 = 0.1$ rad/s，$p_1 = 5$ rad/s。

例 14.10 给出了用直线型近似法求相位曲线的过程。

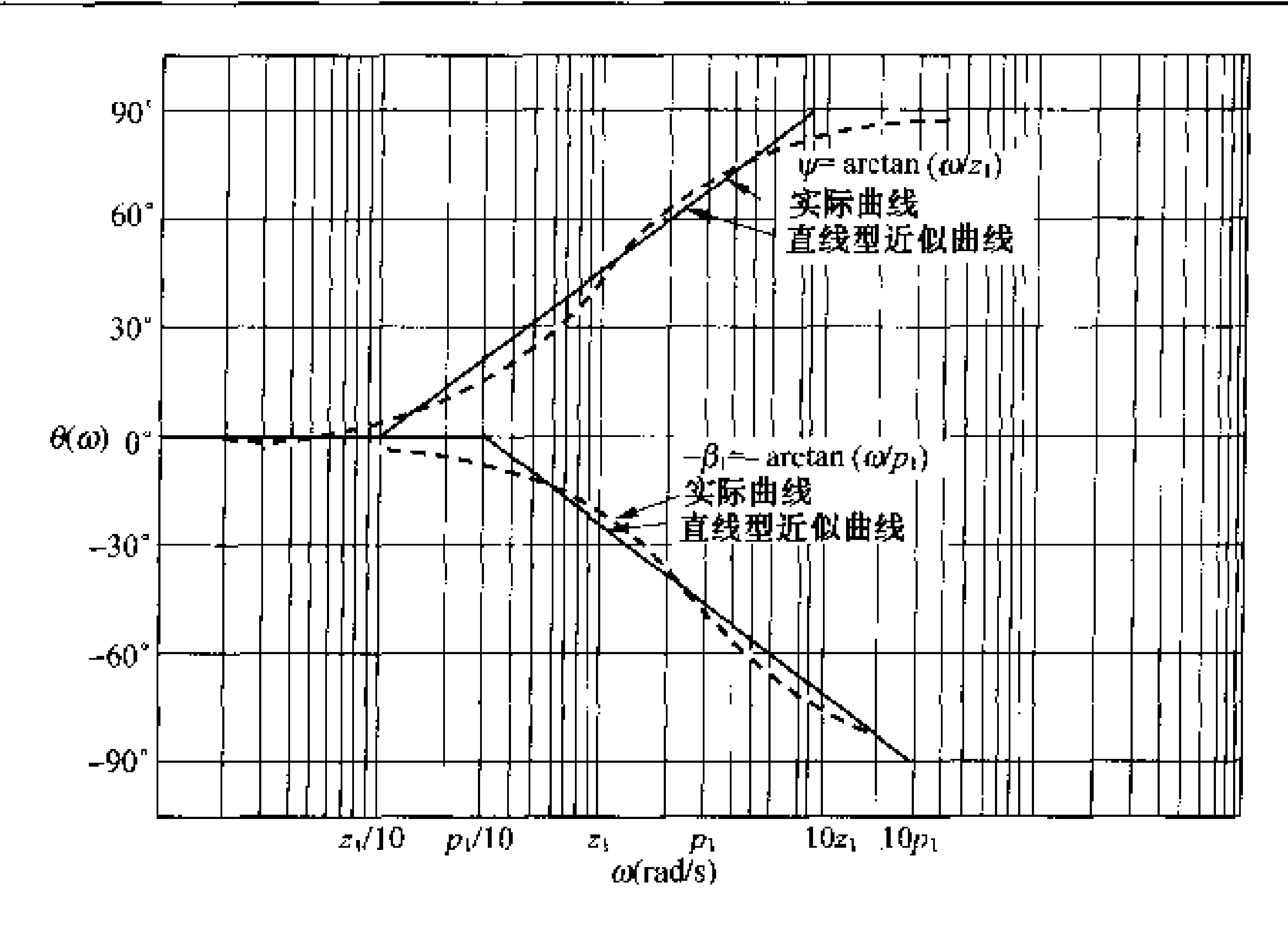


图 14.38　一阶零极点相位特性曲线

例 14.10　(a) 画出例 14.9 转移函数的直线型相位曲线图。

(b) 计算 $\omega=50,500,1000$ rad/s 时的相位角 $\theta(\omega)$值。

(c) 在图 (a) 中画出 (b) 中计算出的值。

(d) 若输入电压为 $V_i(t)=50\cos(500t-25°)$ V,试用例 14.9(e) 和本例(b) 的结果计算稳态输出电压。

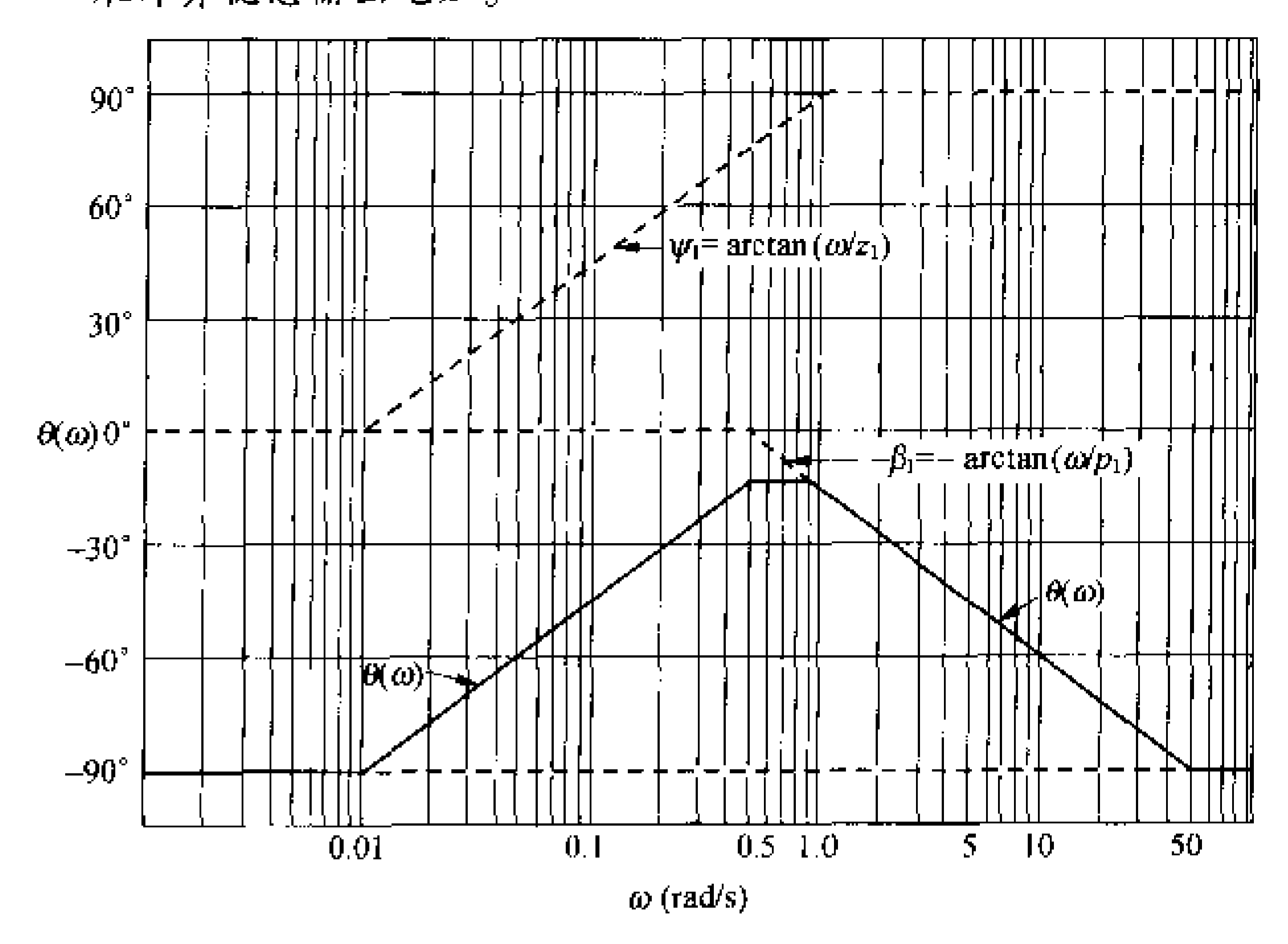


图 14.39　式(14.56)的直线型近似相位曲线

解:

(a) 由例 14.9 可知:

$$H(j\omega)=\frac{0.11(j\omega)}{[1+j(\omega/10)][1+j(\omega/100)]}$$

$$=\frac{0.11|j\omega|}{|1+j(\omega/10)||1+j(\omega/100)|}\underline{/(\Psi_1-\beta_1-\beta_2)}$$

因此：

$$\theta(\omega)=\Psi_1-\beta_1-\beta_2$$

其中：$\Psi_1=90°,\beta_1=\arctan(\omega/100)$。图 14.40 画出了 $\theta(\omega)$的直线型近似图。

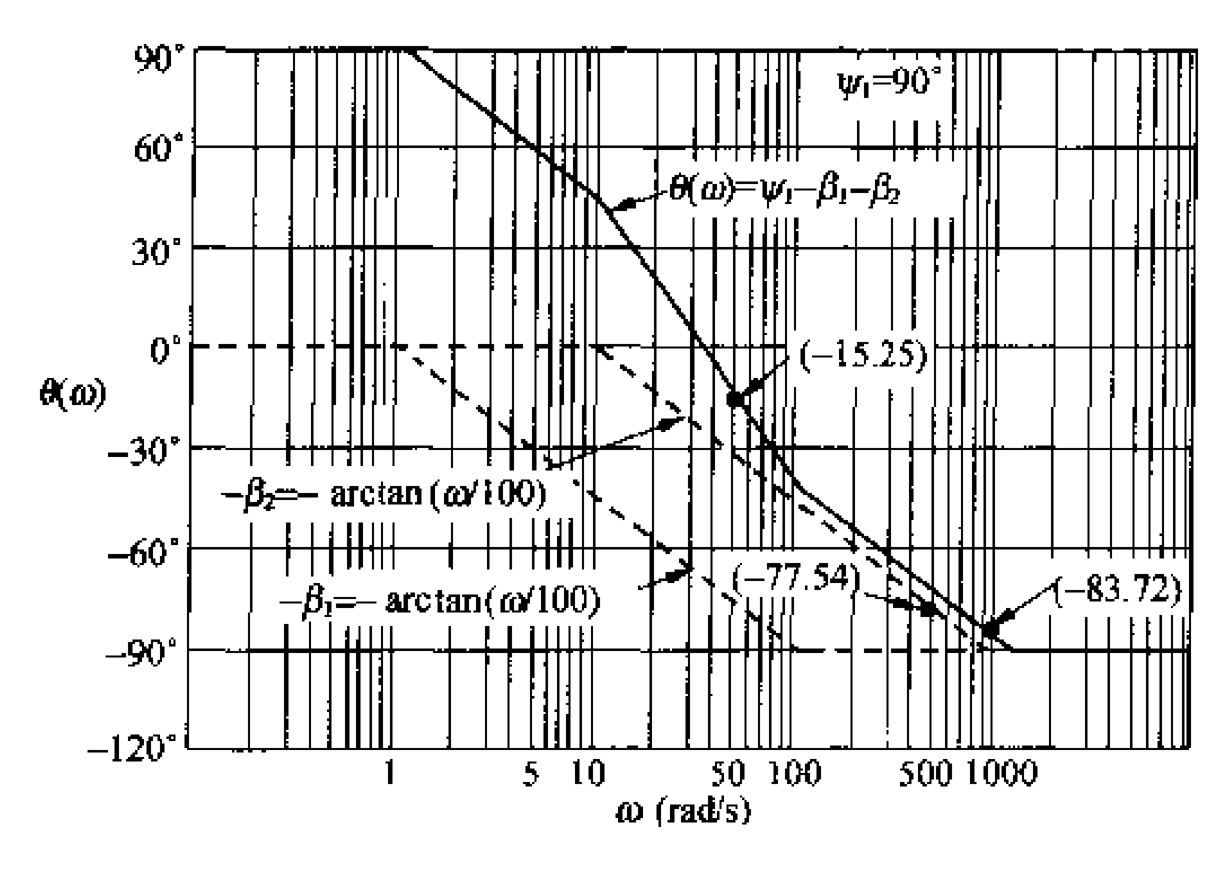


图 14.40 例 14.10 (a) 的直线近似图

(b) 有：

$$H(j50)=0.96\underline{/-15.25°}$$

$$H(j500)=0.22\underline{/-77.54°}$$

$$H(j1000)=0.11\underline{/-83.72°}$$

这样：

$$\theta(j50)=-15.25°,\theta(j500)=-77.54°,\theta(j1000)=-83.72°$$

(c) 见图 14.40。

(d) 有：

$$V_{mo}=|H(j500)|V_{mi}=(0.22)(10)=2.2\ \text{V}$$

和

$$\theta_o=\theta(\omega)+\theta_i=-77.54°-25°=-102.54°$$

因此：

$$v_o(t)=2.2\cos(500t-102.54°)\ \text{V}$$

练习题

14.12 转移函数的表达式为：

$$H(s)=\frac{10^5(s+5)}{(s+100)(s+5\,000)}$$

(a) 在$|H(j\omega)|-\omega$ 直线型近似曲线基础上，估算 (a) $H(j\omega)$最大幅值的分贝数。

(b) 在 $\omega>0$ 范围内，$H(j\omega)$的幅值在何处等于 1。

答：(a) 26 dB，(b) 98 krad/s。

14.13 用直线型近似曲线估算练习题 14.12 中转移函数的相位角。

估算 $\omega = 30, 50, 100, 5000$ rad/s 时的相位角。

计算 $\omega = 30, 50, 100, 5000$ rad/s 时相位角的实际值。

答：(a) 58.5°，58.5°，45°，-45°；(b) 63.49°，57.15°，40.99°，-43.91°。

14.7 波特图：复极点和零点

在画幅度和相位图时，对 $H(s)$ 表达式中的复极点和零点要特别注意。先讨论有一对复极点的幅度和相位图画法，一旦了解了处理复极点的规则后，复零点的处理也就清楚了。

$H(s)$ 的复极点总是以共扼复数的形式出现，对含有复极点的转移函数，画幅度和相位图的第一步是将共扼复数对转化成单一的二次项，这样，处理方程为：

$$H(s) = \frac{K}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} \tag{14.71}$$

先将分母 $(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)$ 写为：

$$(s+\alpha)^2+\beta^2 = s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2 \tag{14.72}$$

在画波特图时，再将二次项写成更为一般的形式：

$$s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2 = s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 \tag{14.73}$$

对两种形式进行比较表明：

$$\omega_n^2 = \alpha^2+\beta^2 \tag{14.74}$$

和

$$\zeta\omega_n = \alpha \tag{14.75}$$

参数 ω_n 是二次项的转折频率，ξ 是二次项的阻尼系数，其临界值是 1。若 $\xi<1$，二次项的根是复数，则用式(14.73)表达复极点。若 $\xi\geqslant 1$，则将二次项分解为 $(s+p_1)(s+p_2)$，然后根据14.6节的讨论画幅度和相位图。假设 $\zeta<1$，将式(14.71)重写为：

$$H(s) = \frac{K}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{14.76}$$

将分子分母同除以极点和零点，以标准形式写出式(14.76)。对二次项分子分母同除以 ω_n，则有：

$$H(s) = \frac{K}{\omega_n^2}\frac{1}{1+(s/\omega_n)^2+2\zeta(s/\omega_n)} \tag{14.77}$$

进而得出：

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1-(\omega^2/\omega_n^2)+j(2\zeta\omega/\omega_n)} \tag{14.78}$$

其中：

$$K_o = \frac{K}{\omega_n^2}$$

在谈论式(14.78)的幅度和相位图之前，为方便起见，将 ω/ω_n 用新的变量 u 代替，则：

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1-u^2+j2\zeta u} \tag{14.79}$$

以复数形式写出 $H(j\omega)$：

$$H(j\omega)=\frac{K_o}{|(1-u^2)+j2\zeta u\ \underline{/\beta_1}} \tag{14.80}$$

由此得：

$$\begin{aligned}A_{dB}&=20\log_{10}|H(j\omega)|\\&=20\log_{10}K_o-20\log_{10}|(1-u^2)+j2\zeta u|\end{aligned} \tag{14.81}$$

和

$$\theta(\omega)=-\beta_1=-\arctan\frac{2\zeta u}{1-u^2} \tag{14.82}$$

14.7.1　幅度曲线

二次项对 $H(j\omega)$幅度的影响是通过 $-20\log_{10}|1-u^2+j2\zeta u|$体现的，因 $u=\omega/\omega_n$，所以，当 $\omega\to0$ 时，$u\to0$，当 $\omega\to\infty$ 时，$u\to\infty$。为表示出 ω 在 0 至 ∞ 内变化时，注意到：

$$\begin{aligned}-20\log_{10}|1-u^2)+j2\zeta u|&=-20\log_{10}\sqrt{(1-u^2)^2+4\zeta^2u^2}\\&=-10\log_{10}[u^4+2u^2(2\zeta^2-1)+1]\end{aligned} \tag{14.83}$$

当 $u\to0$，则有：

$$-10\log_{10}[u^4+2u^2(2\zeta^2-1)+1]\to0 \tag{14.84}$$

当 $u\to\infty$，则有：

$$-10\log_{10}[u^4+2u^2(2\zeta^2-1)+1]\to-40\log_{10}u \tag{14.85}$$

根据式(14.84)和式(14.85)，可以得出含有两段直线的近似幅度曲线，当 $\omega<\omega_n$ 时，直线沿着 0 dB 轴，当 $\omega>\omega_n$ 时，直线斜率为 -40 dB/10 倍频程。这两直线的交点在 0 dB 轴上的 $u=1$ 处或 $\omega=\omega_n$ 处。图 14.41 表示出了 $\zeta<1$ 时二次项的直线型近似图。

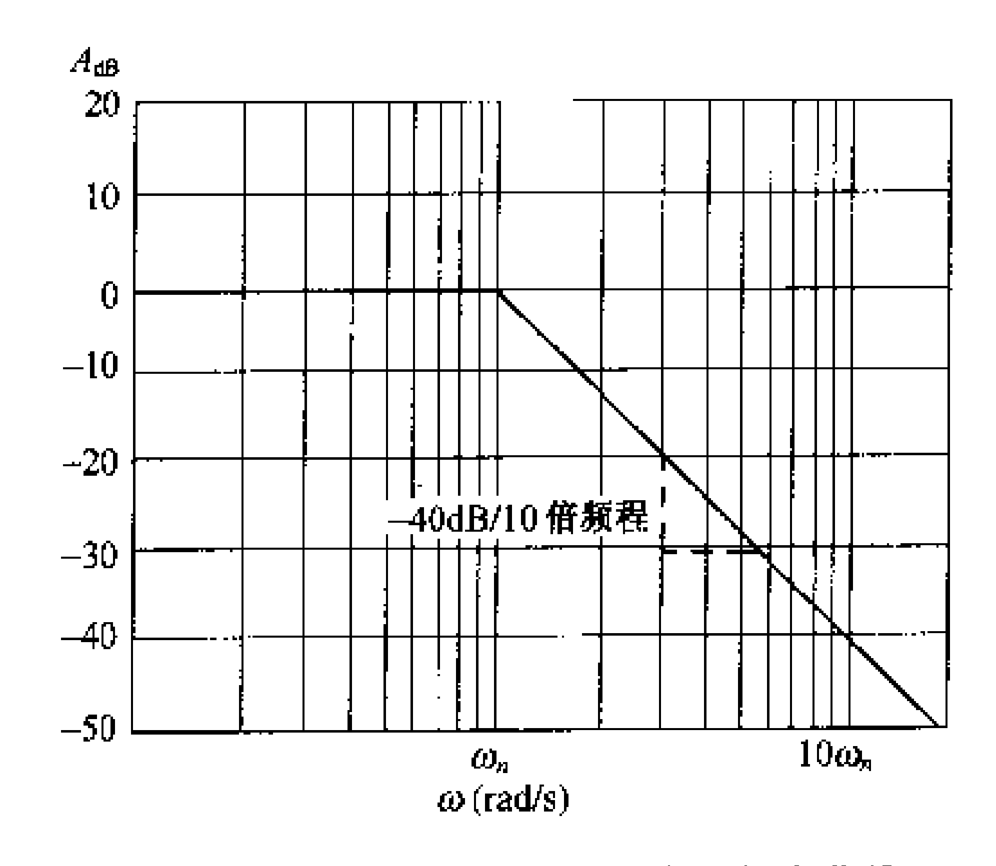


图 14.41　具有一对共扼复极点的幅度曲线

14.7.2　直线型幅度曲线的修正

具有一对复极点的直线型幅度曲线的修正不像一阶实极点曲线的修正那么容易，因为修正要根据阻尼系数 ζ 来确定，图 14.42 表明了 ζ 对幅度曲线的影响。

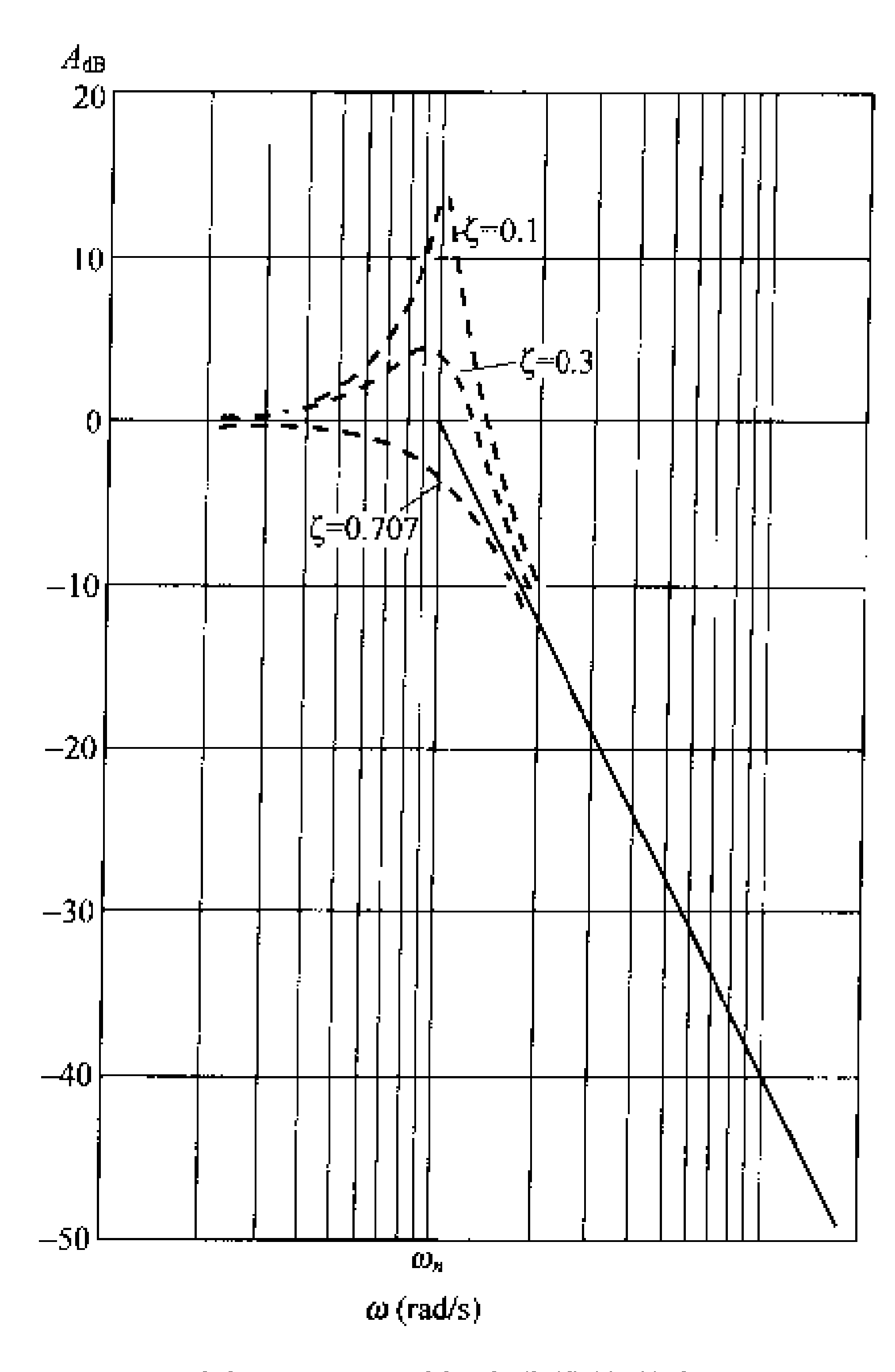


图 14.42 ζ 对幅度曲线的影响

由图 14.42 可以看到，当 ζ 很小时，在转折频率 ω_n 附近出现一较大幅度峰值，当 $\zeta \geqslant 1/\sqrt{2}$ 时，修正的幅度曲线全部处于直线型近似曲线之下。为了画出曲线，在实际的曲线上确定 4 个点来修正近似曲线。四个对应点的频率为：(1)转折频率的一半，(2)幅值达到峰值时的频率，(3)转折频率，(4)幅值为零的频率。图 14.43 画出了这四个点。

在转折频率的一半处(点 1)，实际幅值是：

$$A_{dB}(\omega_n/2) = -10\log_{10}(\zeta^2 + 0.5625) \tag{14.86}$$

幅值的峰值点(点 2)频率：

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \tag{14.87}$$

且其峰值为：

$$A_{dB}(\omega_p) = -10\log_{10}[4\zeta^2(1-\zeta^2)] \tag{14.88}$$

在转折频率(点 3)处，实际幅值是：

$$A_{dB}(\omega_n) = -20\log_{10}2\zeta \tag{14.89}$$

修正幅度曲线与 0 dB 轴的交点(点 4)在：

$$\omega_0 = \omega_n\sqrt{2(1-2\zeta^2)} = \sqrt{2}\omega_p \tag{14.90}$$

式(14.86)、式(14.89)和式(14.90)是根据式(14.83)得出的。$u = 0.5$ 和 $u = 1.0$ 时，分别计算式(14.83)得出式(14.86)和(14.89)。式(14.90)是将符合 $u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1 = 1$ 的 u 值代

入式(14.83)得出的。式(14.87)的求解过程是:将式(14.83)对 u 求导,并令导数为零,求得 u 值,得到式(14.87),式(14.88)是将前边的 u 值代入式(14.83)得到的。

例 14.11 给出具有一对复极点转移函数的幅度曲线的绘制过程。

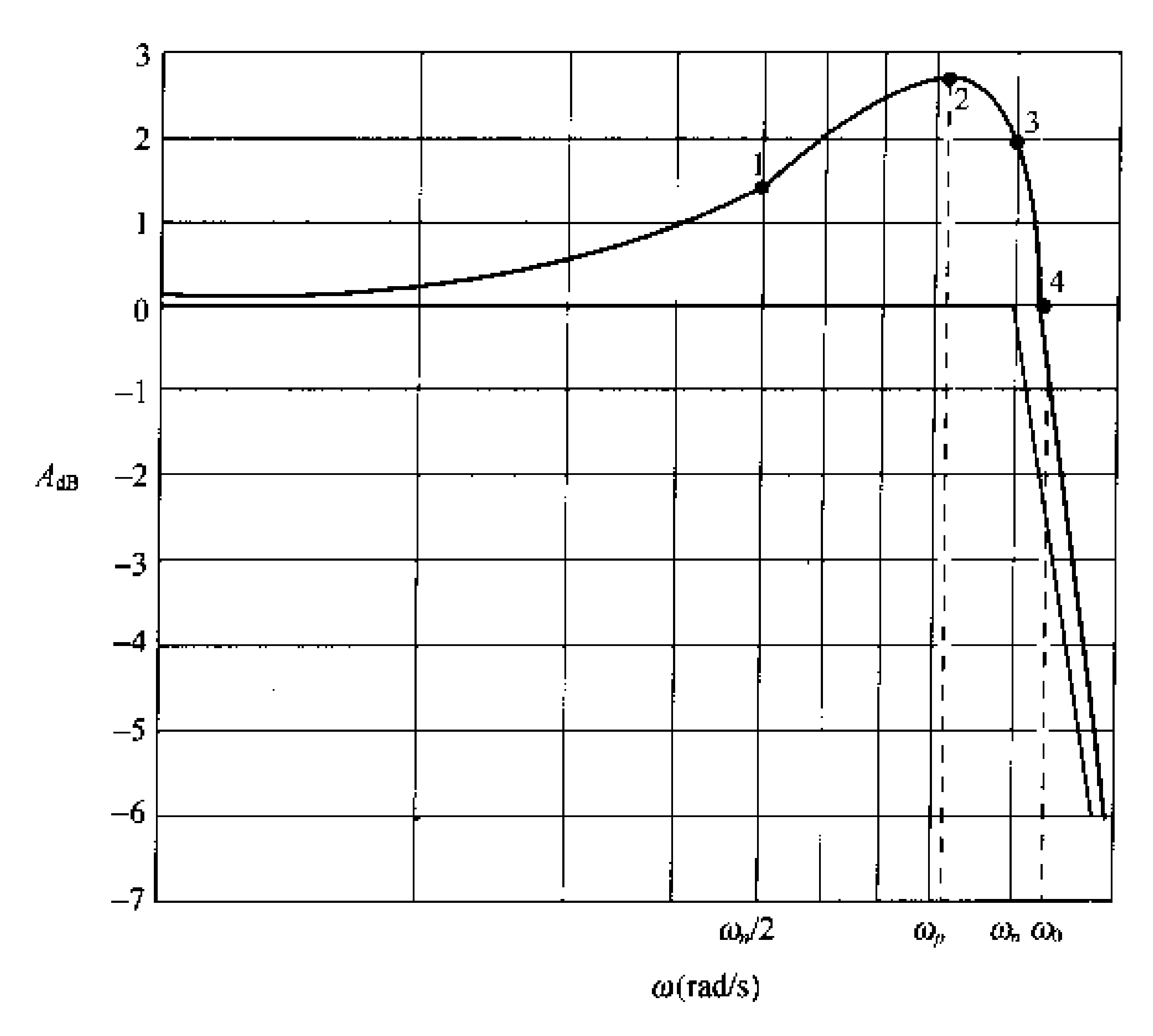


图 14.43 具有一对复极点的幅度修正曲线上的四个点

例 14.11 计算图 14.44 电路的转移函数。

(a) 转折频率的值为多少(rad/s)?

(b) K_0 值为多少?

(c) 阻尼系数的值为多少?

(d) 画出频率范围在 10~500 rad/s 内的直线型幅度曲线。

(e) 计算并画出 $\omega_n/2, \omega_p, \omega_n, \omega_0$ 处幅度的实际分贝值。

(f) 根据直线型幅度曲线,说明图 14.44 所示电路所代表的滤波器类型,并估算其截止频率 ω_c。

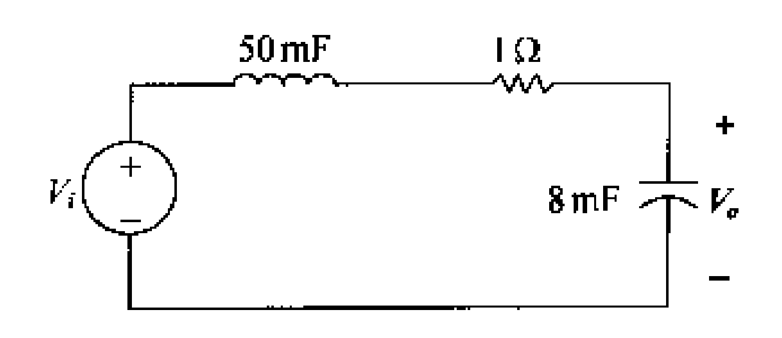


图 14.44 例 14.11 的电路

解:

将图 14.14 所示电路转换为 s 域模型,利用 s 域分压公式得:

$$H(s)=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\left(\frac{R}{L}\right)s+\frac{1}{LC}}$$

代入元件的值得到：

$$H(s)=\frac{2500}{s^2+20s+2500}$$

(a) 由 $H(s)$的表达式得，$\omega_n^2=2500$，所以，$\omega_n=50\text{rad/s}$。

(b) 根据定义，得 K_o 为 $2500/\omega_n^2$ 或 1。

(c) s 的系数为 $2\zeta\omega_n$，所以：

$$\zeta=\frac{20}{2\omega_n}=0.20$$

(d) 见图 14.45。

(e) 实际的幅值为：

$$A_{\text{dB}}(\omega_n/2)=-10\log_{10}(0.6025)=2.2\text{ dB}$$

$$\omega_p=50\sqrt{0.92}=47.96\text{ rad/s}$$

$$A_{\text{dB}}(\omega_p)=-10\log_{10}(0.16)(0.96)=8.14\text{ dB}$$

$$A_{\text{dB}}(\omega_n)=-20\log_{10}(0.4)=7.96\text{ dB}$$

$$\omega_0=\sqrt{2}\omega_p=67.82\text{ rad/s}$$

$$A_{\text{dB}}(\omega_0)=0\text{ dB}$$

图 14.45 表示出了修正曲线。

(f) 图 14.45 清楚地表明，该电路是低通滤波器，在截止频率处，转移函数的幅值 $|H(j\omega_c)|$比最大幅值小 3 dB。由修正曲线可知，截止频率大致出现在 55 rad/s 处，与直线型波特图所确定的值基本相等。

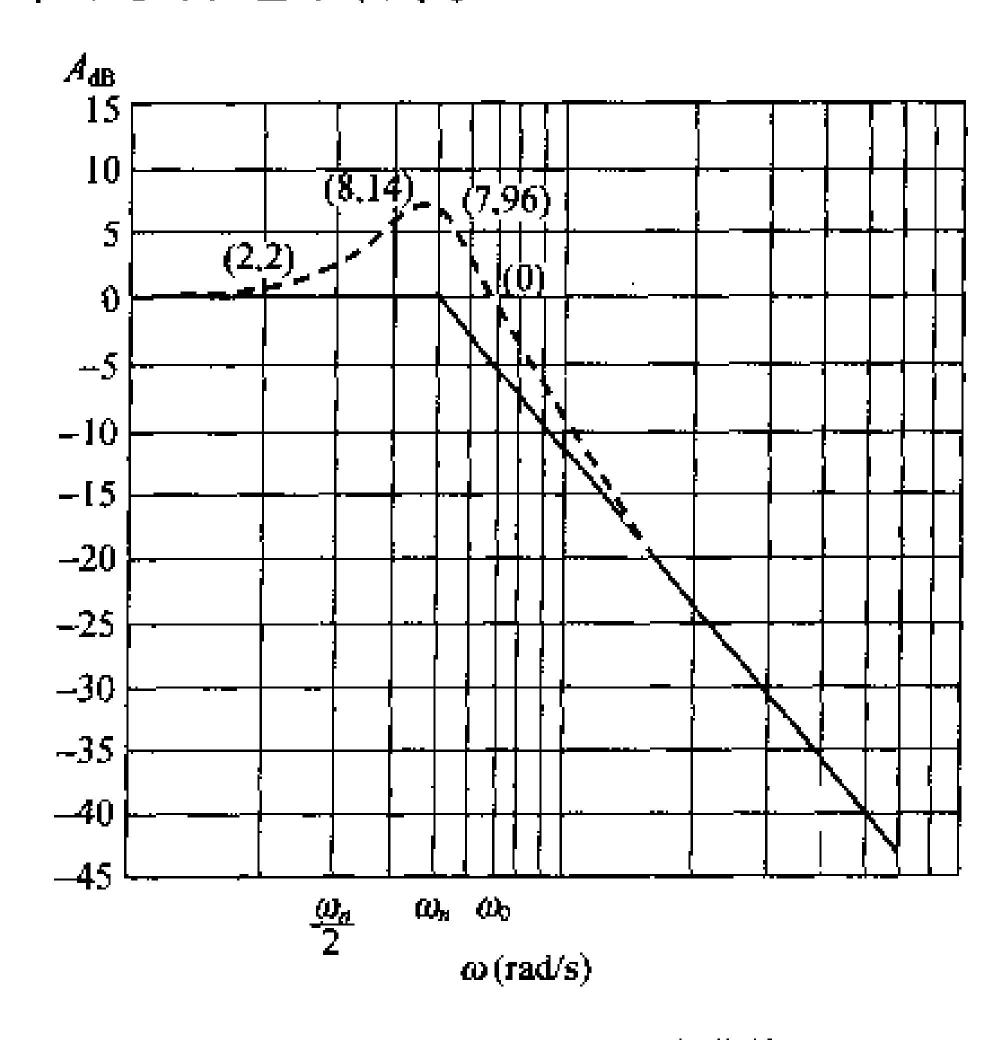


图 14.45　例 14.11 的幅度曲线

14.7.3 相位曲线

具有共扼复极点的相位曲线是式(14.82)的曲线。在0频率处相角为零,在转折频率处相角为-90°。当$\omega(u)$很大时,相位接近于-180°。与幅度曲线情况一样,ζ在确定相位曲线精确位置时是非常重要的参数,当ζ值很小时,相位在转折频率处快速变化。图14.46表明了ζ对相位曲线的影响。

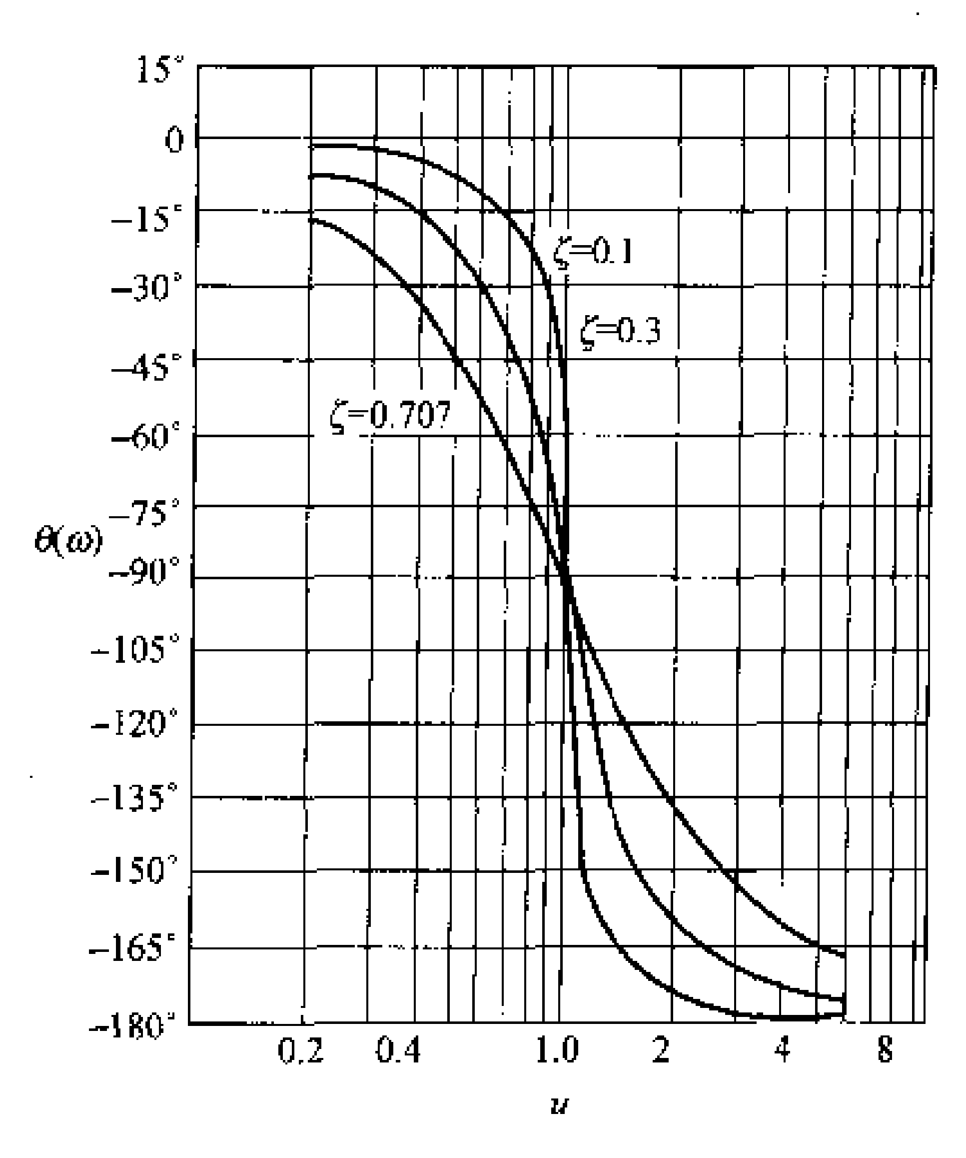


图14.46 ζ对相位曲线的影响

也可以画出具有一对共扼复极点时直线型近似相位曲线,方法是在转折频率处画一条切线与相位曲线在0°和-180°直线相交。相位曲线在-90°处具有一个斜率为-2.3 rad/s的10倍频程切线,它与0°和-180°处的切线分别在$u_1=4.81^{\zeta}$和$u_2=4.81^{-\zeta}$处相交。图14.47描述了$\zeta=0.3$时的直线型近似相位曲线和实际的相位曲线,两曲线的对比表明,近似曲线在转折频率附近是比较合理的。但在u_1和u_2附近误差较大。例14.12总结了波特图。

例14.12 (a) 计算图14.48电路的转移函数。

(b) 画出$20\log_{10}|H(j\omega)|$的直线型近似幅度曲线。

(c) 用该直线型近似曲线确定电路所代表的滤波器类型,并估算截止频率。

(d) 实际截止频率是多少?

(e) 画出$H(j\omega)$的直线型相位曲线。

(f) 根据(c)求出在截止频率处$\theta(\omega)$的值。

(g) 在截止频率处,$\theta(\omega)$的实际值是多少?

解:

(a) 将图14.48电路转换成s域模型,然后根据s域分压公式得:

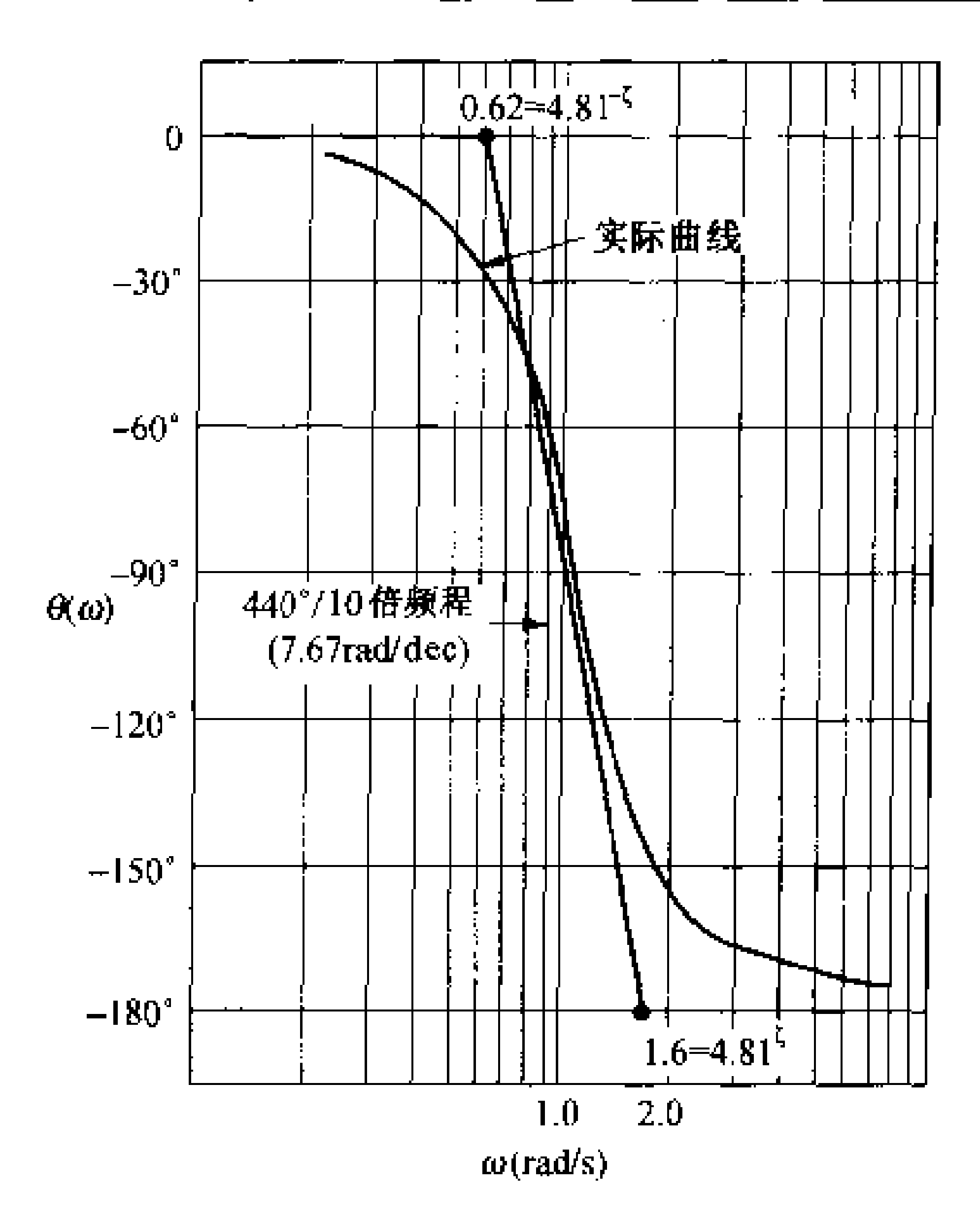


图 14.47 具有一对复极点的直线型近似相位曲线

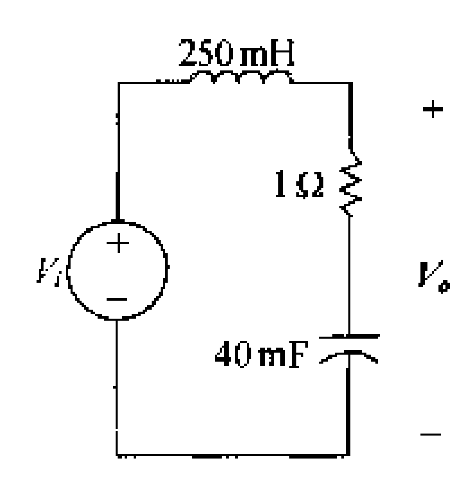


图 14.48 例 14.12 电路

$$H(s)=\frac{\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

将电路中的元件值代入上述方程,得:

$$H(s)=\frac{4(s+25)}{s^2+4s+100}$$

(b) 画波特图的第一步是将 $H(\mathrm{j}\omega)$化成标准形式,因 $H(s)$含有二次项,先计算 ζ 值,发现 $\zeta=0.2$, $\omega_n=10$,所以:

$$H(s)=\frac{s/25+1}{1+(s/10)^2+0.4(s/10)}$$

因此:

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{|1+\mathrm{j}\omega/25|\underline{/\Psi_1}}{|1-(\omega/10)^2+\mathrm{j}0.4(\omega/10)|\underline{/\beta_1}}$$

对于二次项 $u=\omega/10$，$H(\mathrm{j}\omega)$幅值的分贝值为：

$$A_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|1+\mathrm{j}\omega/25| - 20\log_{10}\left[\left|1-\left(\frac{\omega}{10}\right)^2+\mathrm{j}0.4\left(\frac{\omega}{10}\right)\right|\right]$$

而相位角为：

$$\theta(\omega) = \Psi_1 - \beta_1$$

此处：

$$\Psi_1 = \arctan(\omega/25)$$

$$\beta_1 = \arctan\frac{0.4(\omega/10)}{1-(\omega/10)^2}$$

图 14.49 画出了幅度曲线。

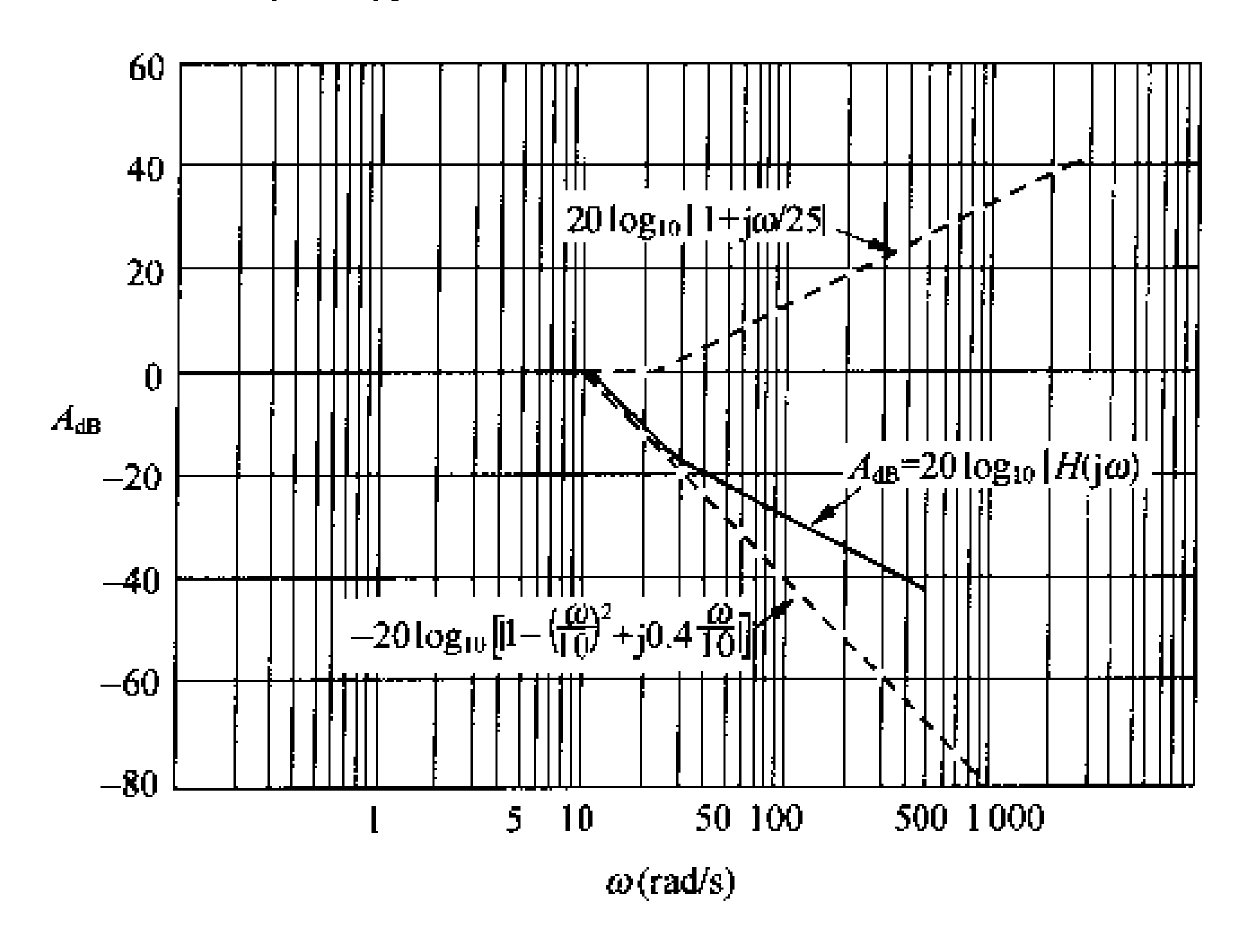


图 14.49　例 14.42 的幅度曲线

(c) 由图 14.49 可知，此电路为一低通滤波器，在截止频率处，$H(\mathrm{j}\omega)$的幅度比通带的幅值小 3 dB。由图可确定截止频率约为 13 rad/s。

(d) 为求解实际截止频率，用 $\mathrm{j}\omega$ 代替 $H(s)$中的 s，计算 $H(\mathrm{j}\omega)$的表达式。令$|H(\mathrm{j}\omega_c)| = (1/\sqrt{2})H_{\max} = 1/\sqrt{2}$，求 ω_c。首先：

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{4(\mathrm{j}\omega)+100}{(\mathrm{j}\omega)^2+4(\mathrm{j}\omega)+100}$$

然后：

$$|H(\mathrm{j}\omega_c)| = \frac{\sqrt{(4\omega_c)^2+100^2}}{\sqrt{(100-\omega_c^2)^2+(4\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

求得 ω_c 为：$\omega_c = 16$ rad/s。

(e) 图 14.50 为相位曲线，在 1.0 rad/s 与 2.5 rad/s 之间直线段的斜率与 2.5 rad/s 至 100 rad/s之间的斜率不相等。

(f) 根据图 14.50 的相位曲线，估算出相位角在 16 rad/s 的截止频率处为 −65°。

(g) 将 $H(s)$中的 s 用 j16 代替，可算出截止频率处的实际相位角：

$$H(\mathrm{j}16)=\frac{4(\mathrm{j}16+25)}{(\mathrm{j}16)^2+4(\mathrm{j}16)+100}$$

计算相角得：

$$\theta(\omega_c)=\theta(\mathrm{j}16)=-125.0°$$

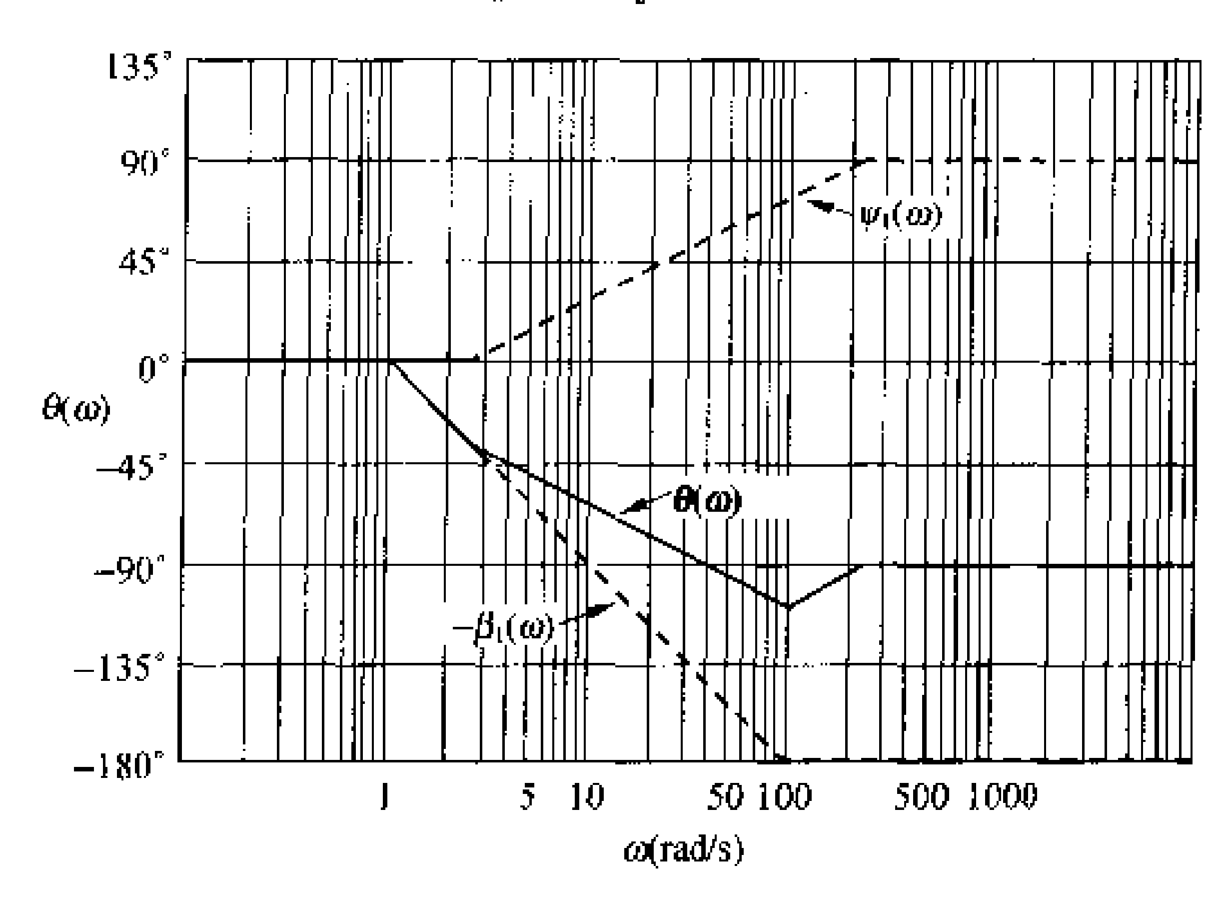


图 14.50 例 14.12 的相位曲线

估算的相角误差较大，一般情况下，直线型相位曲线在相角变化的频带内不能给出满意的结果。直线型相位曲线只是在确定相角的一般特性时使用，不能用来估算特殊频率下的实际相位角。

练习题

14.14 一个电流转移函数的数学表达式为：

$$H(s)=\frac{I_o}{I_i}=\frac{25\times10^8}{s^2+20000s+25\times10^8}$$

求：

(a) 转移频率。

(b) 阻尼系数 。

(c) $H(\mathrm{j}\omega)$为 1 时的频率。

(d) $H(\mathrm{j}\omega)$的最大分贝值。

(e) 峰值时的频率 。

(f) 在转移频率一半处 $H(\mathrm{j}\omega)$的幅度。

答：(a) 50 krad/s，(b) 0.2，(c) 67.82 krad/s，(d) 8.14 dB，(e) 47.96 krad/s，(f)2.20 dB。

14.15 一个电压转移函数的数学表达式为：

$$H(s)=\frac{V_o}{V_i}=\frac{32\times10^5}{s^2+400s+64\times10^4}$$

(a) 用直线型幅度曲线找出使 $H(\mathrm{j}\omega)$的幅度为 1 时的频率。

(b) 在(a) 中求出的频率处，实际的幅值为多少？

(c) $H(\mathrm{j}\omega)$的最大幅值是多少分贝？

(d) 输出电压达到最大幅值时的频率是多少?

(e) 若电压源的幅值为10V,输出电压的最大值是多少伏?

答:(a) 1800 rad/s, (b) 1.19, (c) 20.28 dB, (d) 748.33 rad/s, (e) 103.28 V。

实例

按键电话电路二

在前面的实例中,已经描述了"双音多频"系统(DTMF)。当按键电话的键被按过后,该系统发送信号。下面的例子设计了一个DTMF接收器,即一个解码电路,该电路能将按键发出的声音解码,并确定是哪个键被按过。

设计前,需要更好地理解DTMF系统。正如图14.51所示,电话上的键排列成行和列,通过按键产生的双音与键所在的行和列有关。键所在的行确定了它的低频音,所在的列确定了它的高频音。例如,按"6"键产生频率为770 Hz和1447 Hz的正弦信号。

在电话交换设备中,DTMF中的带通滤波器首先检测来自低频组和高频组的音量是否是同步出现的,排除许多不是DTMF的无关音频信号,如果双音存在于两个频带中,就可以用滤波器选择每个频带中的可能出现的音频,使频率解码对单一按键信号进行判断,为防止误判断,还需要进行其他必要的检测。这些检测有,每个频带只有一种音是合理的,高频音和低频音的开始与结束的同步误差在几个毫秒之内是合理的,高频和低频信号的振幅相互之间非常接近。

有读者会问,对DTMF音的高频组为什么用带通滤波器而不用高通滤波器,对低频组为什么不用低通滤波器?因为电话系统将300Hz~3 kHz以外的频带用于其他信号的传输,如电话铃信号。带通滤波器可以防止检测到其他信号而造成误操作。

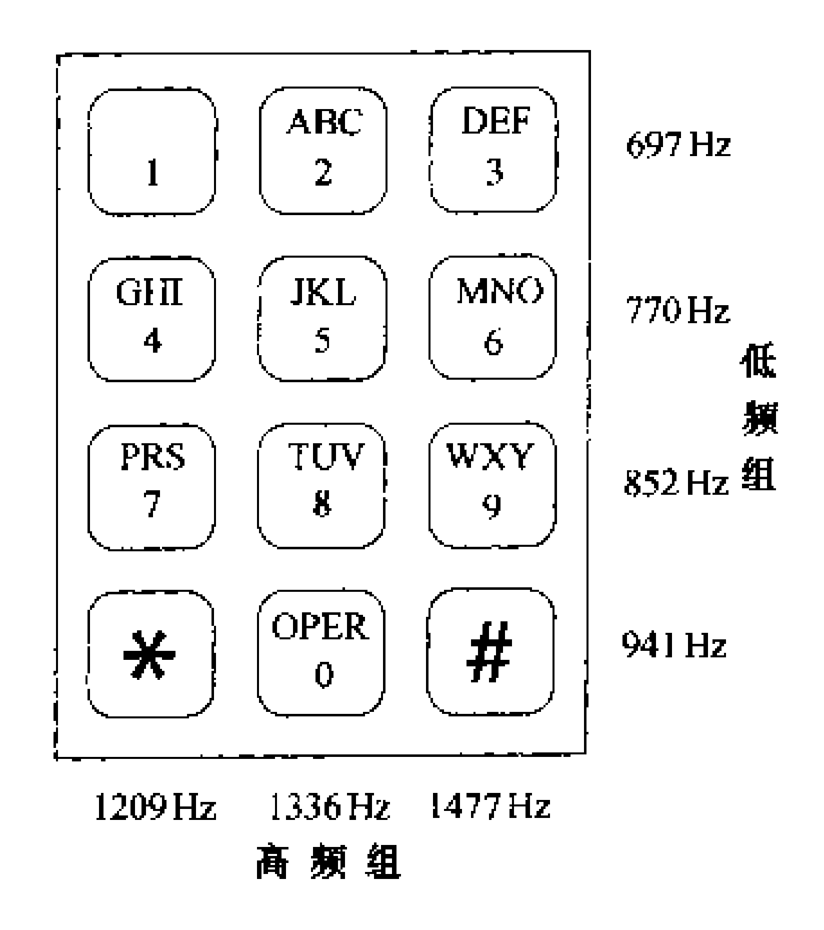


图14.51 电话的键所在行和列产生的不同声音

例 设计一个串联 *RLC* 带通滤波器(见图14.27)检测低频音。

(a) 计算 L 和 C 的值,使截止频率在DTMF低频带的边沿处,在标准电话电路中电阻值是

600 Ω。

(b) 相对于带通滤波器最大幅值来说，每个低音频率处电路的输出幅值是多少？

(c) 在高频组的最低频率处，电路输出的幅值是多少？

解：

(a) 用截止频率：

$$\omega_{c1} = 2\pi(697) = 4379.38 \text{ rad/s}$$
$$\omega_{c2} = 2\pi(941) = 5912.48 \text{ rad/s}$$

计算的滤波器带宽为：

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = 1533.10 \text{ rad/s}$$

根据式(14.32)计算出的电感为：

$$L = \frac{R}{\beta} = \frac{600}{1533.10} = 0.39 \text{ H}$$

根据式(14.31)计算出的电容为：

$$C = \frac{1}{L\omega_{c1}\omega_{c2}} = \frac{1}{(0.39)(4379.38)(5912.48)} = 0.10\ \mu\text{F}$$

(b) 在低频组中的最外边两个频率处(697 Hz,941 Hz)，幅值为：

$$|V_{697\text{Hz}}| = |V_{941\text{Hz}}| = \frac{|V_P|}{\sqrt{2}} = 0.707|V_P|$$

因为这是两个截止频率，在其他两个低音频率处，可用式(14.32)计算出的带宽代入式(14.22)计算幅值：

$$|V| = (|V_P|)(|H(j\omega)|) = |V_P|\frac{\omega\beta}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega\beta)^2}}$$

因此：

$$\begin{aligned}|V_{770\text{Hz}}| &= |V_P| \\ &= \frac{(4838.05)(1533.10)}{\sqrt{(5088.52^2 - 4838.05^2)^2 + [(4838.05)(1533.10)]^2}} \\ &= 0.948|V_P|\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}|V_{852\text{ Hz}}| &= |V_P| \\ &= \frac{(5353.27)(1533.10)}{\sqrt{(5088.52^2 - 5353.27^2)^2 + [(5353.27)(1533.10)]^2}} \\ &= 0.948|V_P|\end{aligned}$$

两个幅值相等，并不是巧合，在 DTMF 系统中两个频带是经过精心选择的，以期达到预期的线性滤波器特性。也就是说，经过频带的合理选择，使其响应与线性滤波器产生的响应相等。多数音乐的音阶是由音调组成的，而音调就是依据上述原理形成的，应当注意的是，各音符之间的间隔应当是等宽的。因此，DTMF 音使我们想起了音符，电话按键就像演奏音乐一样。

和音乐音阶不同的是 DTMF 所选的频率是不相关的，也就是说，任何一个频率都不能用任何其他频率的线性组合来生成。

(c) 高频组与低频组最近的频率音是 1209 Hz，具有该频率音的幅值为：

$$|V_{1209\text{Hz}}| = |V_P| \frac{(7596.37)(1533.10)}{\sqrt{(5088.52^2 - 7596.37^2)^2 + [(7596.37)(1533.10)]^2}} = 0.344|V_P|$$

该值小于低频段处的幅值，因而保证了频带的有效分离。实际上，这种结果有点不现实。因为，在上述计算中忽略了一个事实，就是高频段音的幅值要比低频音的幅值大，以补偿电话系统中的其他滤波器。

小结

选频电路或叫滤波器，能使某些频率的信号到达输出端而削弱其他频率的信号，使它们不能到达输出端。通带包含通过信号的频率。阻带包含被削弱信号的频率。

- 截止频率 ω_c，是频率轴上定义的一个点，它将通带和阻带分离，在截止频率处，转移函数的幅值等于最大值的 $1/\sqrt{2}$倍。
- 低通滤波器：使频率低于 ω_c 的信号通过，消弱频率高于 ω_c 的信号，任何具有下面形式的转移函数都可作为低通滤波器：

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

- 高通滤波器：使频率高于 ω_c 的信号通过，消弱频率低于 ω_c 的信号，任何具有下面形式的转移函数的系统都可作为高通滤波器：

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}$$

- 带通滤波器和带阻滤波器都具有两个截止频率 ω_{c1}，ω_{c2}。这些滤波器的特性由中心频率 ω_o、带宽 β 和品质因数 Q 来描述，这些参数的定义如下：

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

$$Q = \omega_o / \beta$$

- 带通滤波器将处于通频带之内(即 ω_{c1}和 ω_{c2})的信号通过，削弱通频带以外的信号。任何具有下面形式转移函数的系统均可作为带通滤波器：

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

- 带阻滤波器：频率在阻带之间(ω_{c1}和 ω_{c2})的信号被削弱，阻带之外的信号通过，任何具有下面形式转移函数的系统均可作为带阻滤波器：

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \beta_s + \omega_o^2}$$

- 无源滤波器的输出端加负载会改变通带的幅值和位置，从而改变其滤波器特性，以非零内电阻的电源代替理想电压源也会改变通带的幅值和位置，从而改变电路的滤波特性。

● 波特图是在半对数平面上画出的频率响应曲线,其幅值的单位为 dB,相角的单位是度,频率是 10 倍频程,直线型近似波特图的画法可以快速画出转移函数的频率响应。

习题

14.1 (a) 求图 P14.1 低通滤波器的截止频率(Hz)。

(b) 计算 $H(j\omega)$在 ω_c,$0.2\omega_c$ 和 $8\omega_c$ 时的值。

(c) 若 $v_i = 480 \cos \omega t$(mV),写出 $\omega = \omega_c$,$0.2\omega_c$,$8\omega_c$ 时的稳定输出 v_o。

14.2 (a) 求图 P14.2 所示 RL 滤波器的截止频率(Hz)。

(b) 计算 $H(j\omega)$在 ω_c,$0.3\omega_c$ 和 $3\omega_c$ 时的值。

(c) 若 $v_i = 50 \cos \omega t$ V,写出 $\omega = \omega_c$,$\omega = 0.3\omega_c$ 和 $\omega = 3\omega_c$ 时输出的稳态表达式。

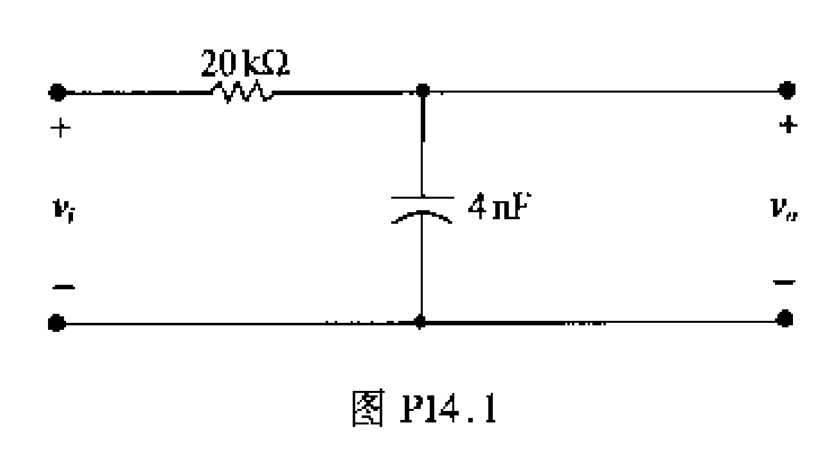


图 P14.1

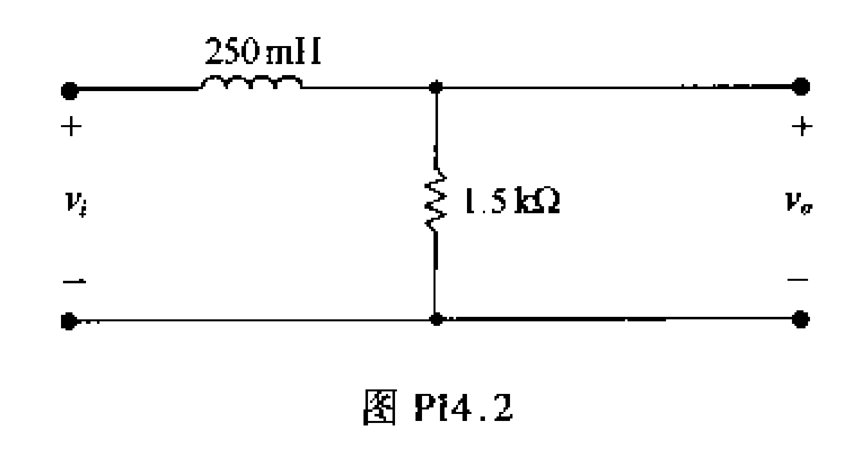


图 P14.2

M14.3 在图 14.7 电路中,电阻 R_L 与电容并联,带负载的低通滤波器电路如图 P14.3 所示。

(a) 求电压转移函数的表达式 V_o/V_i。

(b) 频率为何值时,$H(j\omega)$的幅值最大?

(c) $H(j\omega)$的最大幅值是多少?

(d) 频率为何值时,$H(j\omega)$的幅值等于最大值的 $1/\sqrt{2}$倍?

(e) 假设 $R_L = 300$ kΩ,$C = 4$ nF,$R = 20$ kΩ,求 ω_c,$H(j0)$,$H(j\omega_c)$,$H(j0.2\omega_c)$和 $H(j8\omega_c)$。

M14.4 假设在图 14.4 (a) 的电路中加一串联电阻 R_L,如图 P14.4 所示的低通滤波器。

(a) 求 $H(s) = V_o/V_i$ 的表达式。

(b) 频率为何值时,$H(j\omega)$的幅值最大?

(c) $H(j\omega)$的最大幅值为多少?

(d) 频率为何值时,$H(j\omega)$的幅值为其最大值的 $1/\sqrt{2}$倍?

(e) 假设 $R_1 = 75$ Ω,$L = 250$ mH,$R = 1.5$ kΩ。求 ω_c,$H(j\omega_c)$,$H(j0.3\omega_c)$和$H(j3\omega_c)$

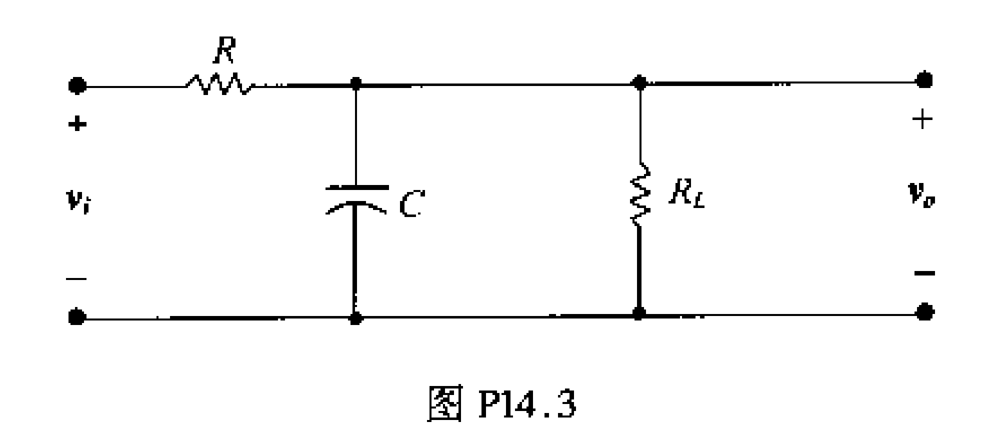


图 P14.3

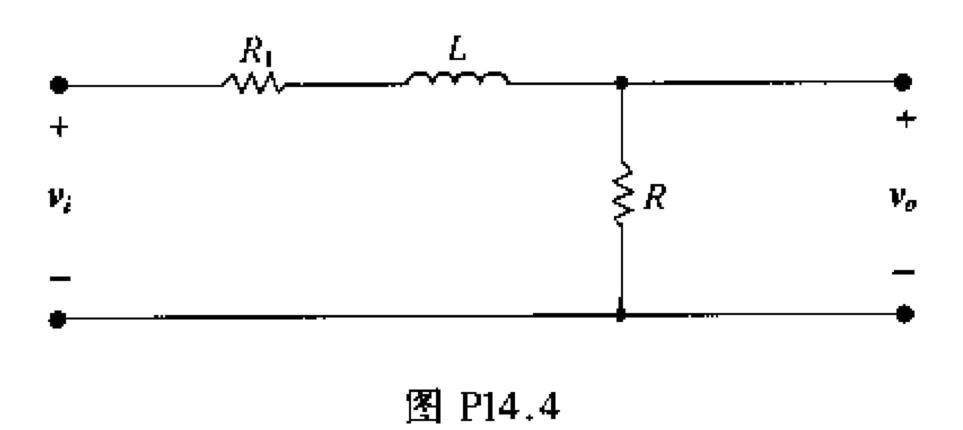


图 P14.4

P◆◇14.5 用一个 25 nF 的电容设计一个截止频率为 160 krad/s 的低通滤波器。

(a) 求截止频率的赫兹值。

(b) 求滤波器的电阻值。

(c) 假设截止频率的误差不大于 8%,那么与输出端相接的负载电阻的最小值为多少?

(d) 用(c) 计算出的电阻接到输出端,则当 $\omega=0$ 时,$H(j\omega)$的幅值为多少?

P◆◇14.6 用一个 25 mH 的电感设计一个 RL 低通滤波器,该无源滤波器的截止频率为 2500 Hz。

(a) 求电阻值。

(b) 一个 750 Ω 的负载电阻接到滤波器的输出端,则带负载滤波器的转折频率和截止频率各为多少赫兹?

14.7 (a) 计算图 P14.7 所示高通滤波器的截止频率(Hz)。

(b) 算出 ω_c,$0.1\omega_c$ 和 $10\omega_c$ 处的$H(j\omega)$。

(c) 若 $v_i=800\cos\omega t$ mV,写出 ω_c 在 ω_c,$0.1\omega_c$ 和 $10\omega_c$ 处稳态输出 v_o 的表达式。

M14.8 电阻 R_c 与图 14.10(a) 所示电路中的电容串联,新产生的高通滤波器电路如图 P14.8 所示。

(a) 求 $H(s)=V_o/V_i$ 的表达式。

(b) 频率为何值时 $H(j\omega)$的幅值最大?

(c) $H(j\omega)$的最大幅值是多少?

(d) 频率为何值时,$H(j\omega)$的幅值为最大值的 $1/\sqrt{2}$倍?

(e) 若 $R_c=10$ kΩ,$C=2.5$ nF,$R=40$ kΩ,试计算 ω_c,$H(j\omega_c)$,$H(j0.1\omega_c)$,$H(j10\omega_c)$。

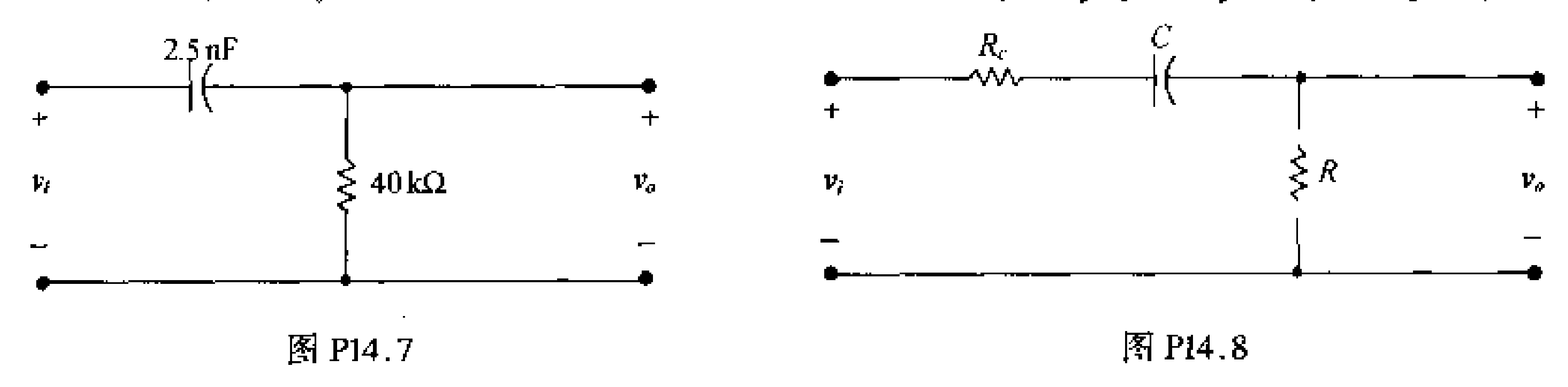


图 P14.7　　　　图 P14.8

P◆◇14.9 用 25 mH 的电感设计一个截止频率为 160 krad/s 的 RL 高通滤波器。

(a) 求电阻值。

(b) 假设滤波器与纯电阻负载相连,截止频率不低于 150 krad/s,求与滤波器输出端相接的负载电阻的最小值。

P◆◇14.10 用 20 nF 的电容设计一个截止频率为 800 Hz 的高通滤波器。

(a) 求电阻值。

(b) 一个 68 kΩ 的电阻与滤波器输出端相连,带负载滤波器截止频率为多少赫兹?

14.11 试证明由式(14.36)和式(14.37)给出的带通滤波器截止频率的变换形式可以由式(14.34)和式(14.35)得出。

P M14.12 图 P14.12 所示的带通滤波器,求(a) ω_o, (b) f_o, (c) Q, (d) ω_{c1}, (e) f_{c1}, (f)ω_{c2}, (g)f_{c2}, (h)β。

P M14.13 对图 P14.13 所示的带通滤波器,计算(a) f_o,(b) Q,(c) f_{c1},(d) f_{c2},(e) β。

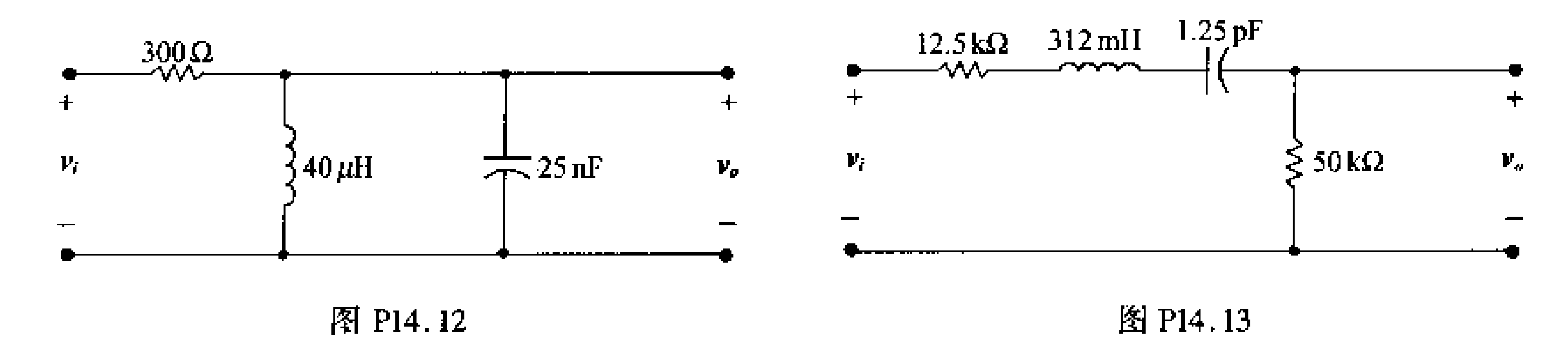


图 P14.12　　　图 P14.13

14.14 图 P14.13 所示电路的输入电压为 800 cos ωt(mV),计算当(a) $\omega=\omega_o$,(b) $\omega=\omega_{c1}$,(c) $\omega=\omega_{c2}$时的输出电压。

14.15 一带通滤波器中心频率或谐振频率为 80 krad/s,品质因数为 8,求其带宽、上截止频率、下截止频率。所有单位用 kHz 表示。

14.16 计算带通滤波器的中心频率、带宽和品质因数。该滤波器的上截止频率为 200 krad/s,下截止频率为 180 krad/s。

P M14.17 电路如图 P14.17 所示,求:

PM(a) ω_o。

(b) β。

(c) Q。

(d) 当 $v_i=750\cos\omega_o t$(mV)时,求 V_o 的稳态表达式。

(e) 证明当 R_L 的单位为兆欧时,其品质因数为:

$$Q=\frac{25}{[1+(1.25)/R_L]}$$

(f) 画出当 1 MΩ$\leqslant R_L \leqslant$40 MΩ 时的 $Q-R_L$ 曲线。

14.18 图 P14.17 中的元件参数为 $R=100$ kΩ, $C=4$ pF, $L=400$ μH,品质因数不低于 9,求允许的最小 R_L 值。

P◆◇14.19 用一个 20 nF 的电容设计一个 *RLC* 带通滤波器,如图 14.19(a) 所示,中心频率为 20 kHz,品质因数为 5。

(a) 求 R 和 L 的值。

(b) 下截止频率为多少(kHz)?

(c) 上截止频率为多少(kHz)?

(d) 滤波器的带宽为多少(kHz)?

P◆◇14.20 用一个 25 nF 电容设计一个带通滤波器,如图 14.22 所示,其品质因数为 10,中心频率为 50 krad/s。

(a) 求 R 和 L 的值。

(b) 计算上、下截止频率的值 (kHz)。

(c) 计算带宽的值(Hz)。

14.21 该习题的目的是考查图 14.22 所示电路的输出端接电阻性负载后对系统品质因数和带宽的影响。带负载滤波器电路如图 P14.21 所示。

(a) 计算 P14.21 所示电路的转移函数 V_o/V_i。

(b) 求系统带宽的表达式。

(c) 将带负载后带宽(β_L)表示为未带负载时带宽(β_U)的函数。

(d) 求系统品质因数的表达式。

(e) 将带负载后的品质因数 Q_L 表示为未带负载时品质因数 Q_U 的表达式。

(f) 求转折频率 ω_{c1} 和 ω_{c2} 的表达式。

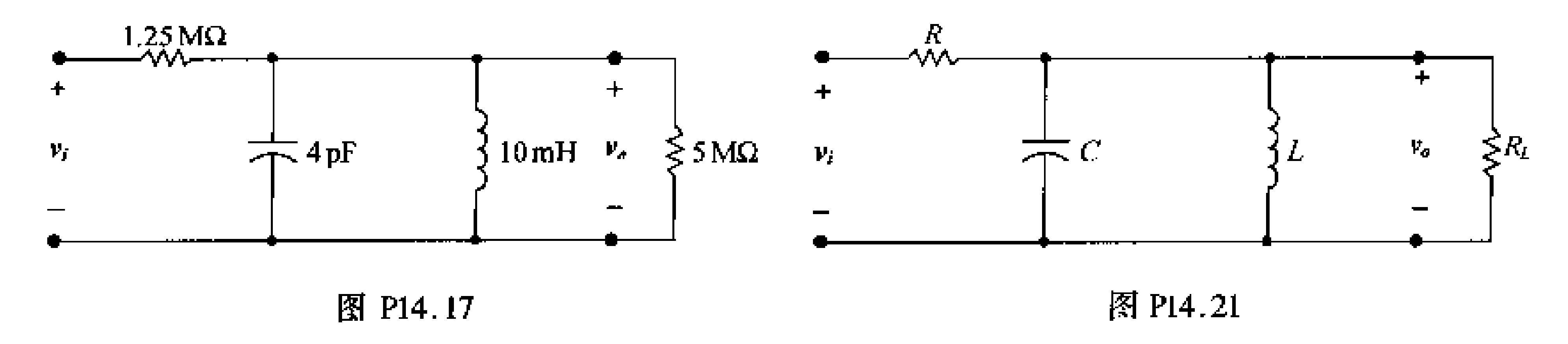


图 P14.17　　图 P14.21

14.22 一系统的框图包含正弦电压源、RLC 串联带通滤波器及负载,如图 P14.22 所示。正弦电压源的内阻抗为 36 + j0 Ω,负载的阻抗为 320 + j0 Ω,RLC 串联带通滤波器的电容为 5 nF,中心频率为 250 krad/s,品质因数为 10。

(a) 画出系统的电路图。

(b) 确定系统中滤波器部分的 R 和 L 值。

(c) 系统总的品质因数为多少?

(d) 系统总的带宽为多少(Hz)?

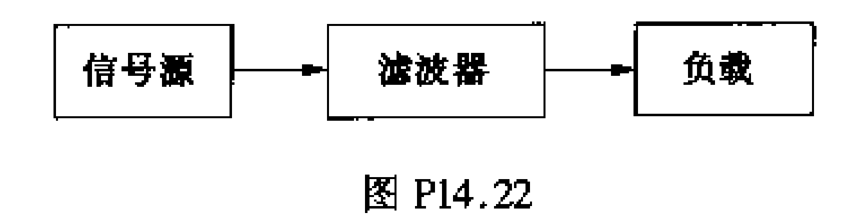


图 P14.22

14.23 该习题的目的是为了讨论如图 14.28 (a) 所示的带阻滤波器,该滤波器的输出端接阻性负载后对滤波器性能影响的情况,带负载滤波器如图 P14.23 所示:

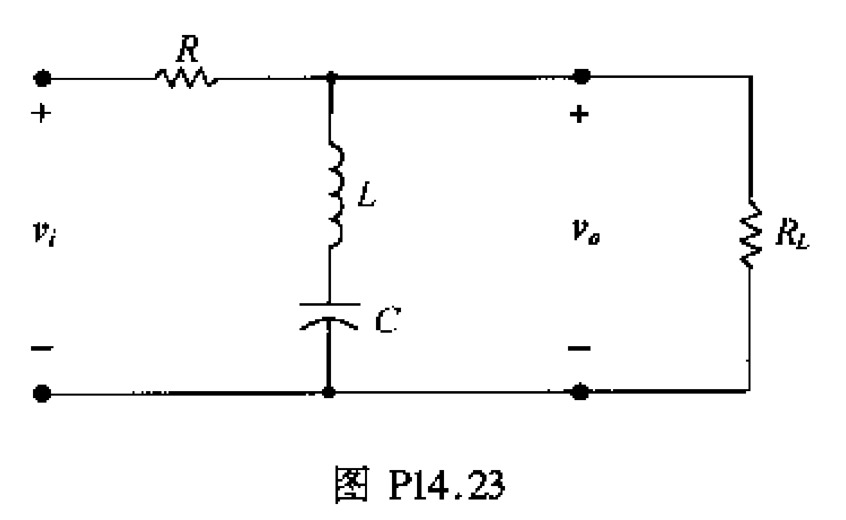


图 P14.23

(a) 写出电压转移函数 V_o/V_i。

(b) 中心频率的表达式。

(c) 带宽的表达式。

(d) 品质因数的表达式。

(e) 计算 $H(j\omega)$。

(f) 计算 $H(j0)$。

(g) 计算 $H(j\infty)$。

(h) 转移频率 ω_{c1} 和 ω_{c2} 的表达式。

P M14.24 图 P14.23 所示电路参数为 $R = 30\ \Omega$, $L = 1\ \mu\text{H}$, $C = 4\ \text{pF}$, $R_L = 150\ \Omega$。

(a) 求 ω_o、β(MHz)和品质因数。

(b) 计算 $H(j0)$ 和 $H(j\infty)$。

(c) 求 f_{c1} 和 f_{c2}。

(d) 证明若 R_L 以 Ω 为单位,电路的品质因数为 $Q = \frac{50}{3}[1+(30/R_L)]$。

(e) 当 10 Ω ≤ R_L ≤ 300 Ω 时,画 $Q - R_L$ 图 。

P14.25 图 P14.23 所示带阻滤波器电路的负载电阻为 20 kΩ,中心频率为 4 Mrad/s,电容为 5pF。当频率很高和很低时,正弦输出电压的幅值至少为正弦输入电压幅值的 80%。

(a) 确定 R,L 值。

(b) 电路的品质因数是多少?

14.26 (a) 证明图 P14.26 所示电路为一带阻滤波器(定性分析)。

(b) 用滤波器的电压转移函数对(a) 进行定性分析。

(c) 求滤波器中心频率的表达式。

(d) 求截止频率 ω_{c1} 和 ω 的表达式。

(e) 求滤波器带宽的表达式。

(f) 求电路品质因数的表达式。

P14.27 图 P14.27 所示为带阻滤波器,计算:

(a) ω_o, (b) f_o, (c) Q, (d) ω_{c1}, (e) f_{c1}, (f) ω_{c2}, (g) f_{c2}, (h) β(kHz)。

P◇14.28 用 0.1 μF 的电容设计带阻滤波器,如图 P14.28 所示,滤波器的中心频率为50 kHz,品质因数为 8,求:

(a) R 和 L 的值。

(b) 上、下转折频率或截止频率(kHz)。

(c) 滤波器带宽(Hz)。

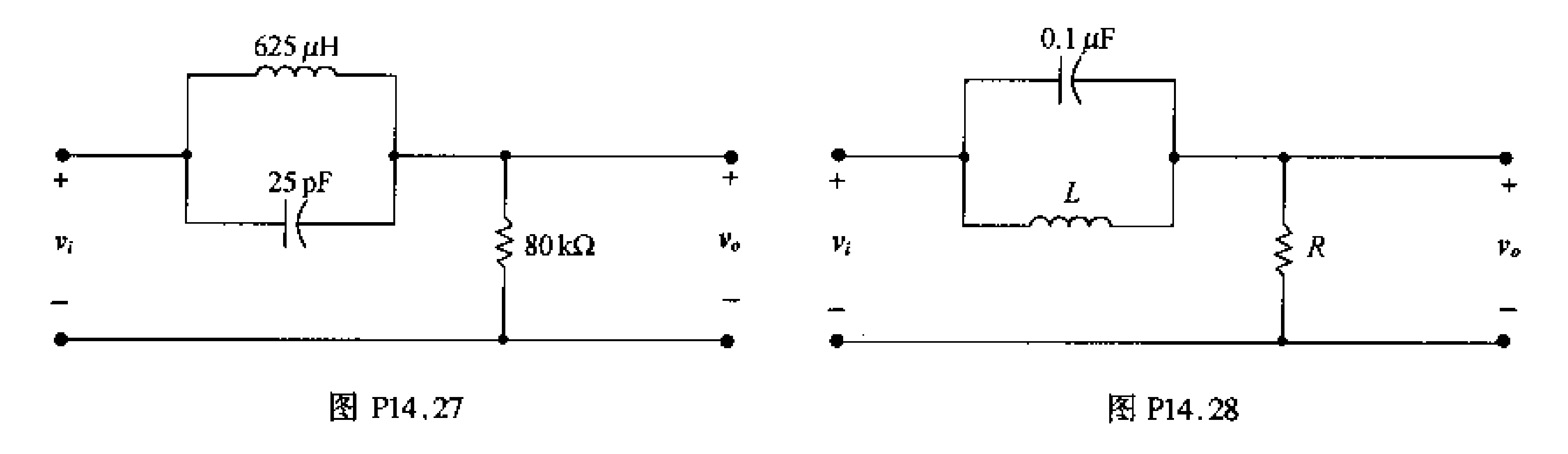


图 P14.27　　　　图 P14.28

P14.29 假设习题 14.28 的带阻滤波器带负载电阻 932 Ω。求:

(a) 带负载电路的品质因数。

(b) 带负载电路的带宽(kHz)。

(c) 上截止频率是多少 kHz?

(d) 下截止频率是多少 kHz?

14.30 给定一个电压转移函数 :

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{4\times10^6}{s^2+500s+4\times10^6}$$

(a) 频率(rad/s)为何值时,电压之比 V_o/V_i 等于 1?

(b) 频率为何值时,该比值最大?

(c) 电压比的最大值是多少?

P14.31 (a) 求图 P14.31 所示电路转移函数 V_o/V_g 的表达式。

(b) 画(a) 所求转移函数的修正幅度曲线。

(c) 频率为何值时幅度最大?

(d) 幅度的最大分贝值是多少?

(e) 频率为何值时,幅度比最大值小 3 dB?

(f) 电路的带宽为多少?

(g) 计算图中各频率点的实际幅值,核对曲线结果。

图 P14.31

P14.32 用波特图说明当 R_x 从 0 变到 ∞ 时,习题 9.69 所示电路的特性。

P14.33 画出习题 13.49 所求转移函数的直线型幅度和相位近似曲线。

P14.34 画出习题 13.53 所得电压转移函数的直线型幅度和相位近似曲线。

14.35 (a) 求图 P14.35 所示电路 a,b 端的电阻。

(b) 当输出功率是 330 Ω 电阻两端功率时,求网络的功率损失。

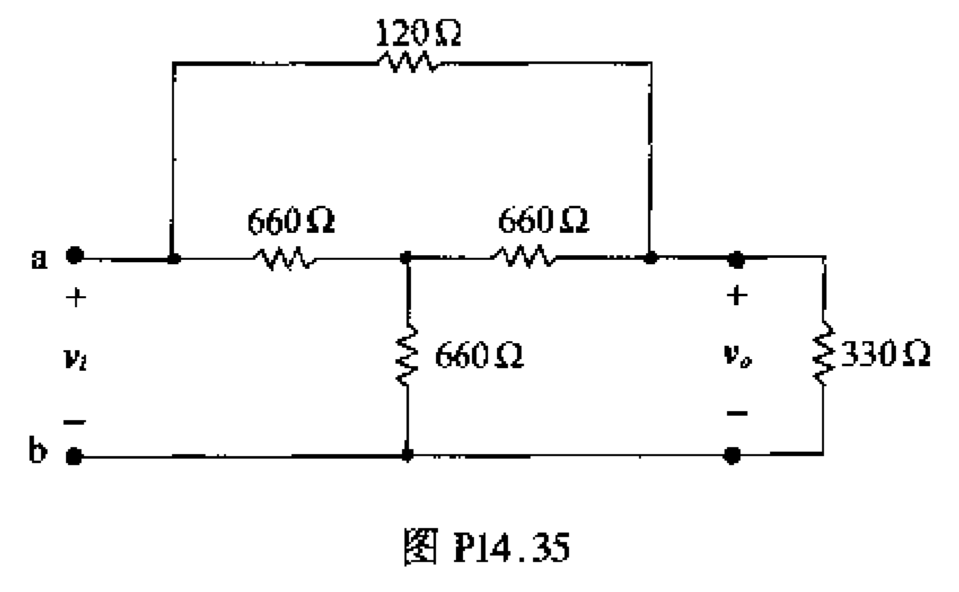
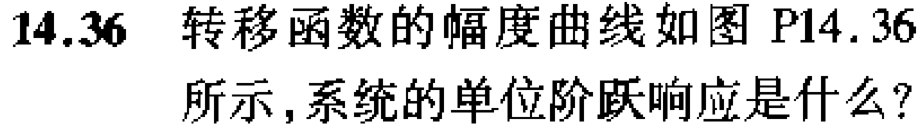
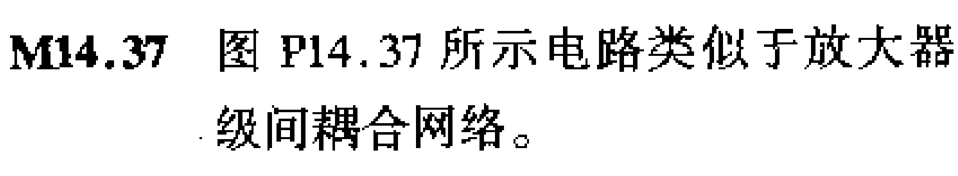


图 P14.35



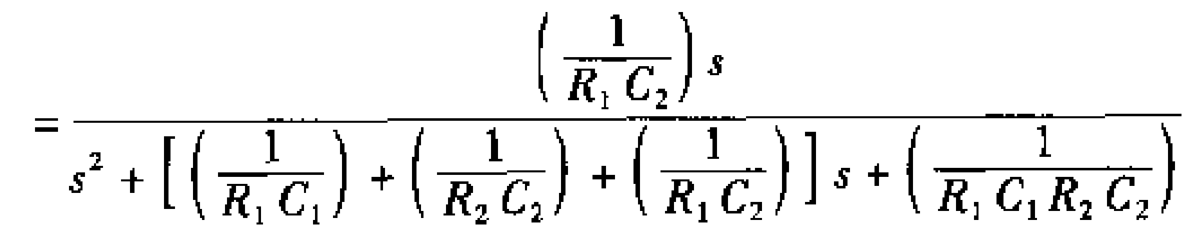
14.36 转移函数的幅度曲线如图 P14.36 所示,系统的单位阶跃响应是什么?



M14.37 图 P14.37 所示电路类似于放大器级间耦合网络。

(a) 证明:

$$H(s)=\frac{V_o}{V_i}$$



$$=\frac{\left(\frac{1}{R_1C_2}\right)s}{s^2+\left[\left(\frac{1}{R_1C_1}\right)+\left(\frac{1}{R_2C_2}\right)+\left(\frac{1}{R_1C_2}\right)\right]s+\left(\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}\right)}$$

(b) 若 $R_1=40\ \text{k}\Omega, C_1=0.1\ \mu\text{F}, C_2=250\ \text{pF}, R_2=10\ \text{k}\Omega$,写出 $H(s)$的数学表达式。

(c) 给出 $H(s)$零极点的值;

(d) 给出 s 远小于最高转折频率,或者说是接近最低转折频率时 $H(s)$的近似表达式。

(e) 给出当 s 远大于最低转折频率时 $H(s)$的近似表达式。

(f) 说明由(d) 得出的表达式和图 P14.37 电路在低频时 C_2 被忽略时的转移函数一致。

(g) 说明由(e) 得出的表达式和图 P14.37 电路在高频时,C_1 被忽略的转移函数一致。

该习题说明当电路参数已知时,在不同频率范围内可以使用不同的电路模型。通常放大器的等效电路可分为低频、中频、高频等效电路。

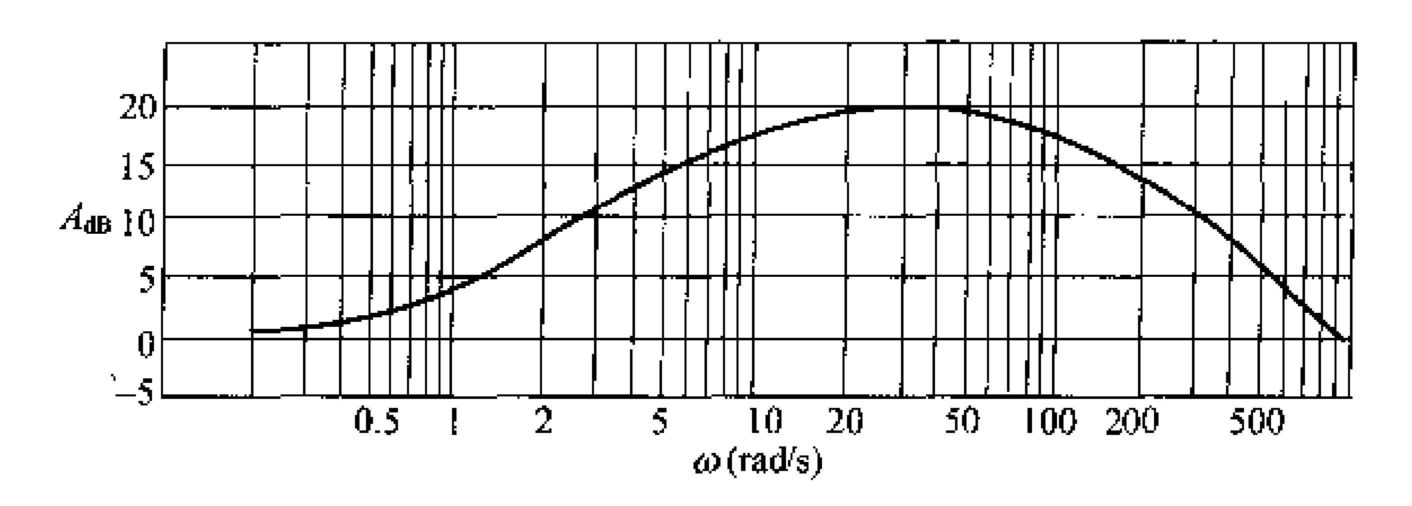


图 P14.36

◆◇**14.38** 设计 DTMF 高频段滤波器与在实例中设计低频段滤波器过程是一样的，只是在设计中要包含第四个高频音 1633 Hz。对 DTMF 音低音中的最高音，滤波器响应的幅度是什么？

◆**14.39** 用于电话振铃的 20 Hz 信号必须具有非常大的幅值才能产生足够大的响铃信号，相对于低频段 DTMF 信号而言，响铃信号的幅值为多大时，才能使实例中滤波器的响应不大于 DTMF 最大音量的一半？

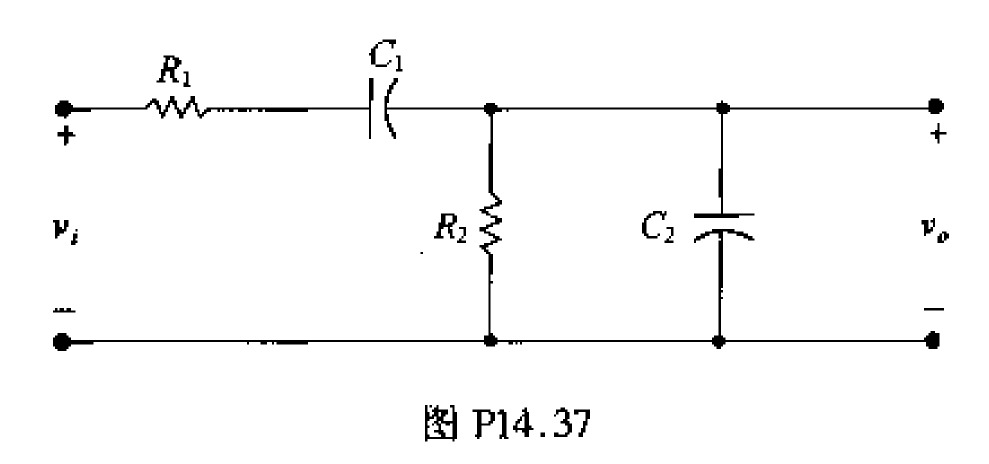


图 P14.37

第 15 章　有源滤波器电路

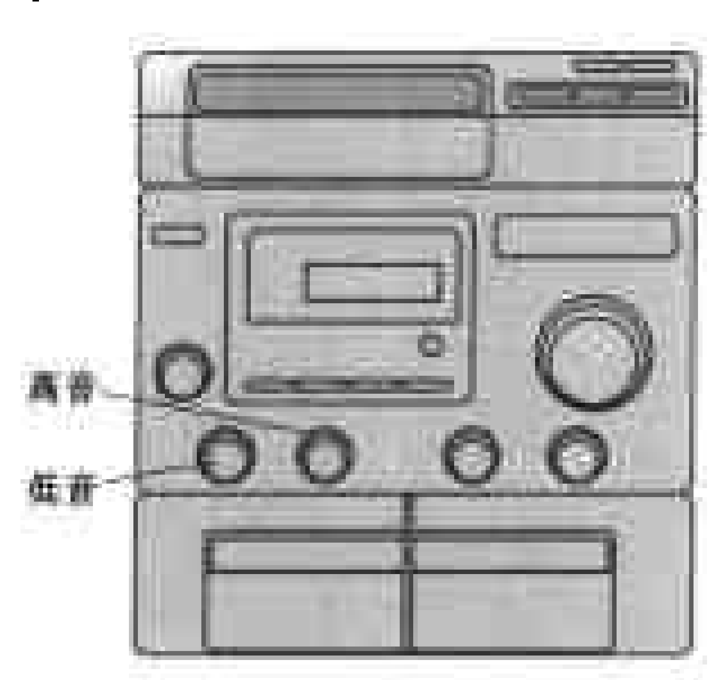
实例

低音音量控制一

本章继续讨论选频电路，正如 14 章所述，电路的性质与正弦输入的频率有关。多数选频电路都可按 14 章的定义分为以下四种，即低通、高通、带通和带阻滤波器。14 章讨论的电路用电源、电阻、电容和电感组成。本章的电路会用到理想运算放大器，读者会发现用理想运算放大器的优点。

音频电子系统如收音机、磁带机、CD 机都分别标有“高音”和“低音”各自独立的音量控制钮。使用者可以独立选择高音或低音控制，独立控制高频和低频音量的特点可使听者按自己喜欢的方式调整，比单一音量控制方式优越。因此，放大和削弱控制电路指的就是音调控制电路。

在后面的实例中，给出由一个运算放大器、电阻、电容组成的低音控制电路，且通过可调电阻控制低频信号的放大。



到目前为止，已经讨论了无源滤波电路，即滤波器电路只是由电阻、电感、电容组成，无源滤波电路的应用受到限制。有源滤波电路是使用了理想运算放大器的滤波电路，相比无源滤波器有许多优点。例如，有源滤波器不用电感就能形成带通和带阻滤波器。因电感通常较大、重、成本高，而且磁场可能会影响期望的频率响应特性，有源滤波器正是大家所希望的电路。

分析 14 章所有滤波器电路的转移函数，就会发现最大幅值不超过 1。尽管无源谐振滤波器在谐振频率处能进行电压和电流的放大，但一般情况下无源滤波器没有放大的能力，其输出

幅值不会超过输入的幅值。这种结果并不奇怪,因为 14 章中许多转移函数都是通过电压比和电流比得出的。而有源滤波器能控制放大器,这在无源滤波器中是无法进行的。

无源滤波器的截止频率和通带幅度会因阻性负载的加入而改变,但在有源滤波器中,因理想运放的特性,使这种情况不会出现。当放大倍数、负载种类、物理尺寸在设计中成为重要参数时,就会采用有源滤波器实现设计。

15 章讨论了一部分采用理想运放的滤波器。读者将会看到这些理想运放电路克服了无源滤波电路的缺点,同时还说明基本运放构成的滤波器电路如何连接,如何实现特定的频率响应并获得更理想的滤波特性。在整章中假定每个运放都是理想运放。

15.1　一阶低通和高通滤波器

如图 15.1 所示电路,现对其进行定性分析,当电源频率变化时,只有电容的阻抗受到影响。在频率很低时,电容相当于开路,而运放相当于一个具有放大倍数为 $-R_2/R_1$ 的放大器,在较高频率处,电容相当于短路,运放的输出端接地。图 15.1 中的运放电路相当于一个具有通带放大倍数 $-R_2/R_1$ 的低通滤波器。

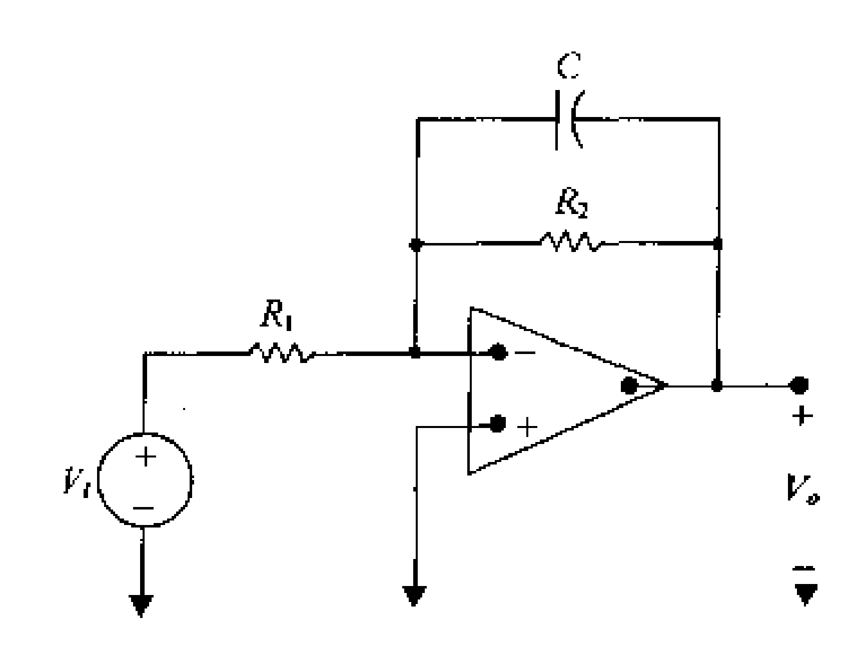


图 15.1　一阶低通滤波器

为验证这一定性分析,计算转移函数 $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$,将图 15.1 画成一般形式的电路,如图 15.2 所示。此处输入通道上的阻抗(Z_i)就是电阻 R_1,反馈通道上的阻抗(Z_f)是电阻 R_2 与电容 C 的并联。

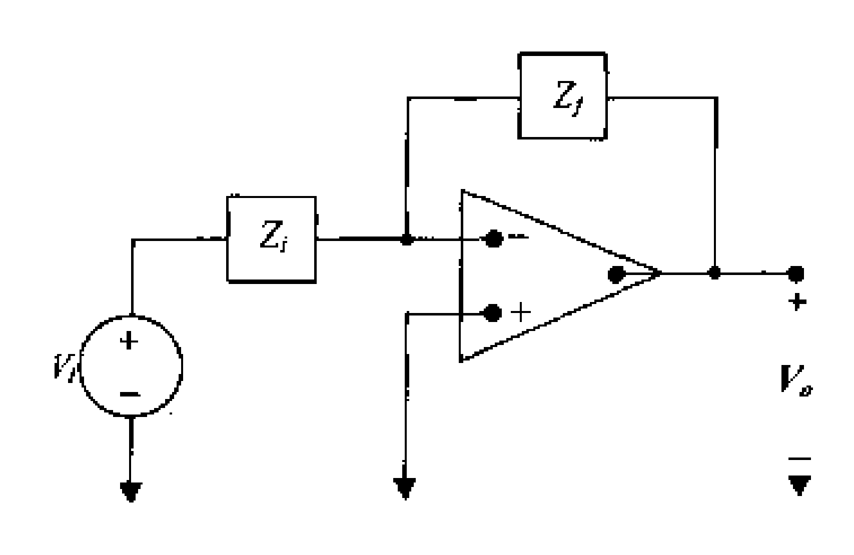


图 15.2　一般运放电路

图 15.2 的电路与第 5 章中的转换放大电路相似,因此转移函数为 $-Z_f/Z_i$,这样图 15.1 所

示电路的转移函数为：

$$H(s)=\frac{-Z_f}{Z_i}$$

$$=\frac{-R_2 \parallel \left(\frac{1}{sC}\right)}{R_1}$$

$$=-K\frac{\omega_c}{s+\omega_c} \tag{15.1}$$

其中：

$$K=\frac{R_2}{R_1} \tag{15.2}$$

和

$$\omega_c=\frac{1}{R_2 C} \tag{15.3}$$

式(15.1)与14章中低通滤波器方程的形式一样，重要的差别就是放大倍数 K 由 R_2/R_1 代替，因此，运放构成的低通滤波器其通带放大系数和截止频率可以独立确定，正如例15.1那样。

例 15.1 图15.1所示电路，计算 C 和 R_2 值且产生一个低通滤波器，已知 $R_1=1\ \Omega$，通带放大系数为1，截止频率为1 rad/s。求该滤波器的转移函数，并画出滤波器响应的波特图幅度曲线。

解：

根据式(15.2)给出的通带放大系数，以及 R_1 和 R_2 之间的关系式，可以计算 R_2：

$$R_2=KR_1$$

$$=(1)(1)$$

$$=1\ \Omega$$

式(15.3)可用来计算指定频率下的电容：

$$C=\frac{1}{R_2\omega_c}$$

$$=\frac{1}{(1)(1)}$$

$$=1\ \mathrm{F}$$

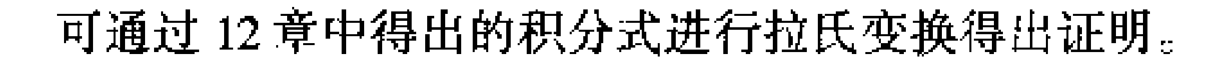
由式(15.1)得出低通滤波器的转移函数：

$$H(s)=-K\frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

$$=\frac{-1}{s+1}$$

$|H(j\omega)|$ 的波特图如图15.3所示。这是所谓的原型低通运放滤波器，因它用的电阻、电容均为1，而且其截止频率也是1rad/s。在下一节读者会看到，在用实际元件值完成具有预定频率响应的滤波器设计中，原型滤波器是一个非常好的开始。

读者可能会发现图15.1所示电路和第7章介绍的积分放大器电路一样，其实它们的确是同一个电路，因此，时域中的积分和频域中的低通滤波器是一致的。积分和低通滤波器的关系


可通过 12 章中得出的积分式进行拉氏变换得出证明。

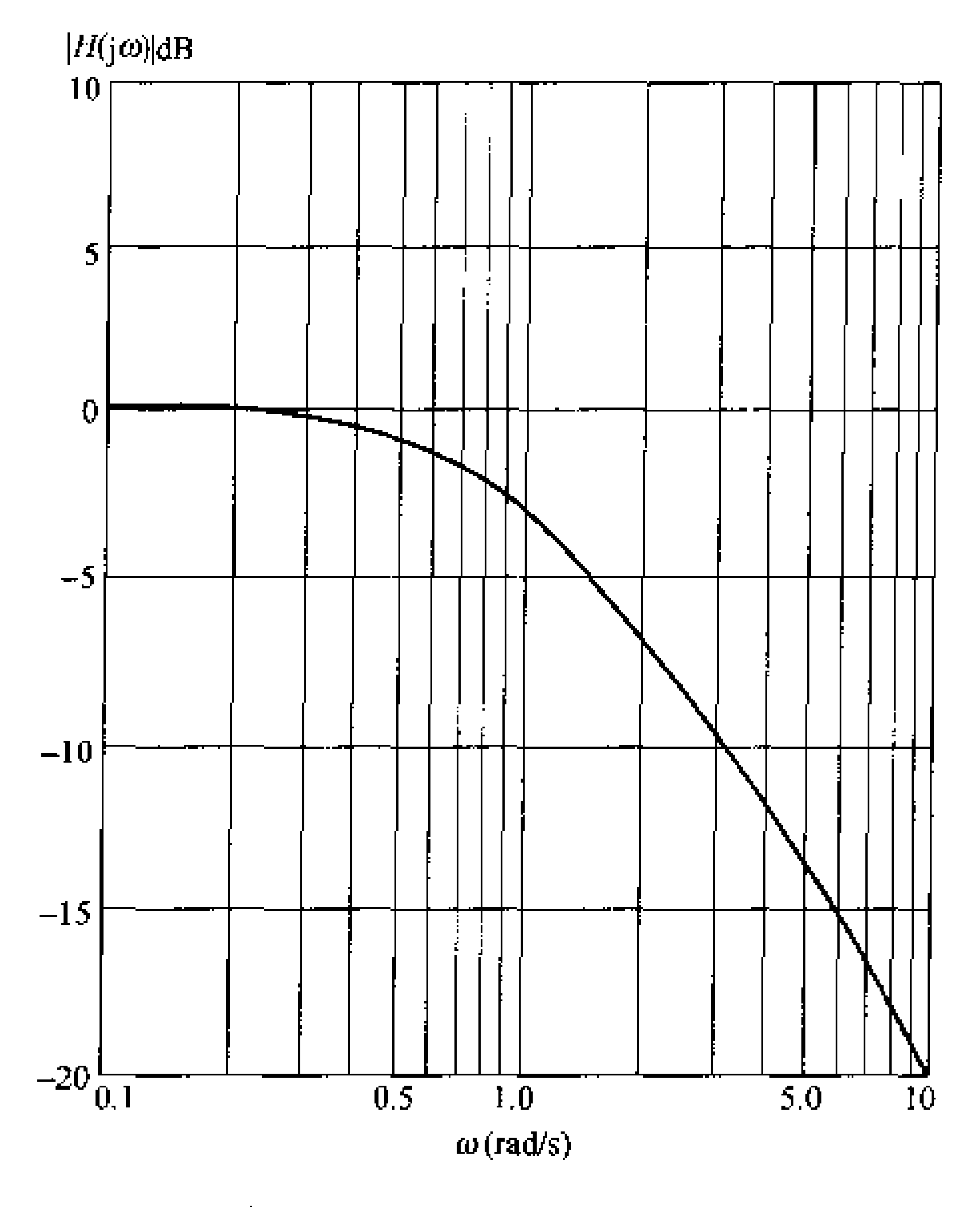


图 15.3　例 15.1 的低通滤波器的幅度波特图曲线

图 15.4 所示电路是一阶高通滤波器，该电路也具有图 15.2 所示电路的一般形式，只是它的输入通路阻抗是 R_1 和 C 的串联，而反馈通路的阻抗是 R_2，因此该电路的转移函数为：

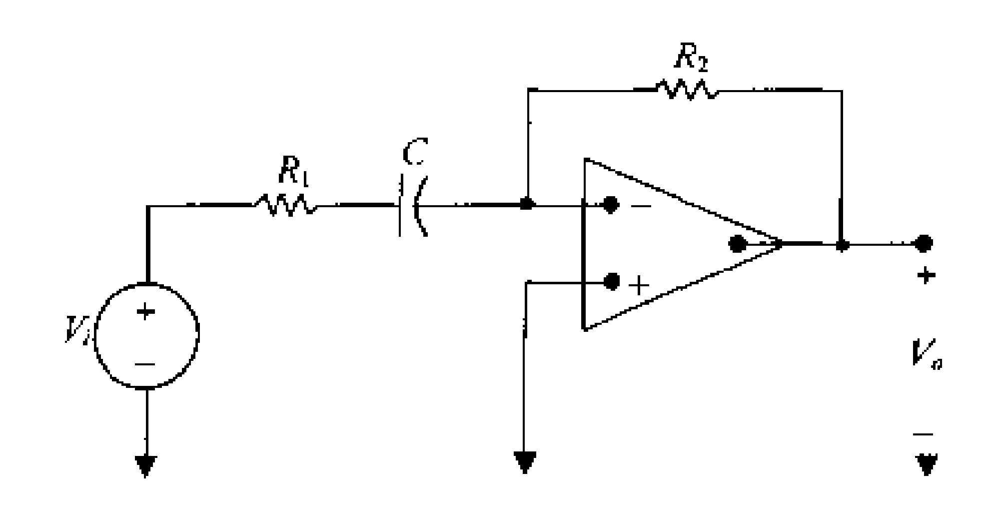


图 15.4　一阶高通滤波器

$$H(s)=\frac{-Z_f}{Z_i}$$

$$=\frac{-R_2}{R_1+\frac{1}{sC}}$$

$$=-K\frac{s}{s+\omega_c} \tag{15.4}$$

其中：

$$K = \frac{R_2}{R_1} \tag{15.5}$$

并且:

$$\omega_c = \frac{1}{R_1 C} \tag{15.6}$$

另外,式(15.4)表示的转移函数形式和式(14.20)表示的无源高通滤波器转移函数的形式相同,并且有源滤波器可以使通带放大系数大于 1。

例 15.2 讨论了有源滤波器的设计,它要求频率响应必须符合给定的波特图。

例 15.2 图 15.5 表示了高通滤波器波特图的幅度曲线。用图 15.4 所示的有源高通滤波器电路计算 R_1 和 R_2 的值,使其产生指定幅度响应。电容为 0.1 μF,若一个 10 kΩ 的负载加到这个滤波器上,幅度响应将如何变化?

解:

先写出图 15.5 所示幅度曲线的转移函数,通带放大系数是 20 dB,因此,$K = 10$,另外,3 dB 点的频率为 500 rad/s。式(15.4)是高通滤波器的转移函数,因此,该转移函数为:

$$H(s) = \frac{-10s}{s+500}$$

令该式与式(15.4)相等,就可计算 R_1 和 R_2:

$$H(s) = \frac{-10s}{s+500} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}s}{s+\frac{1}{R_1 C}}$$

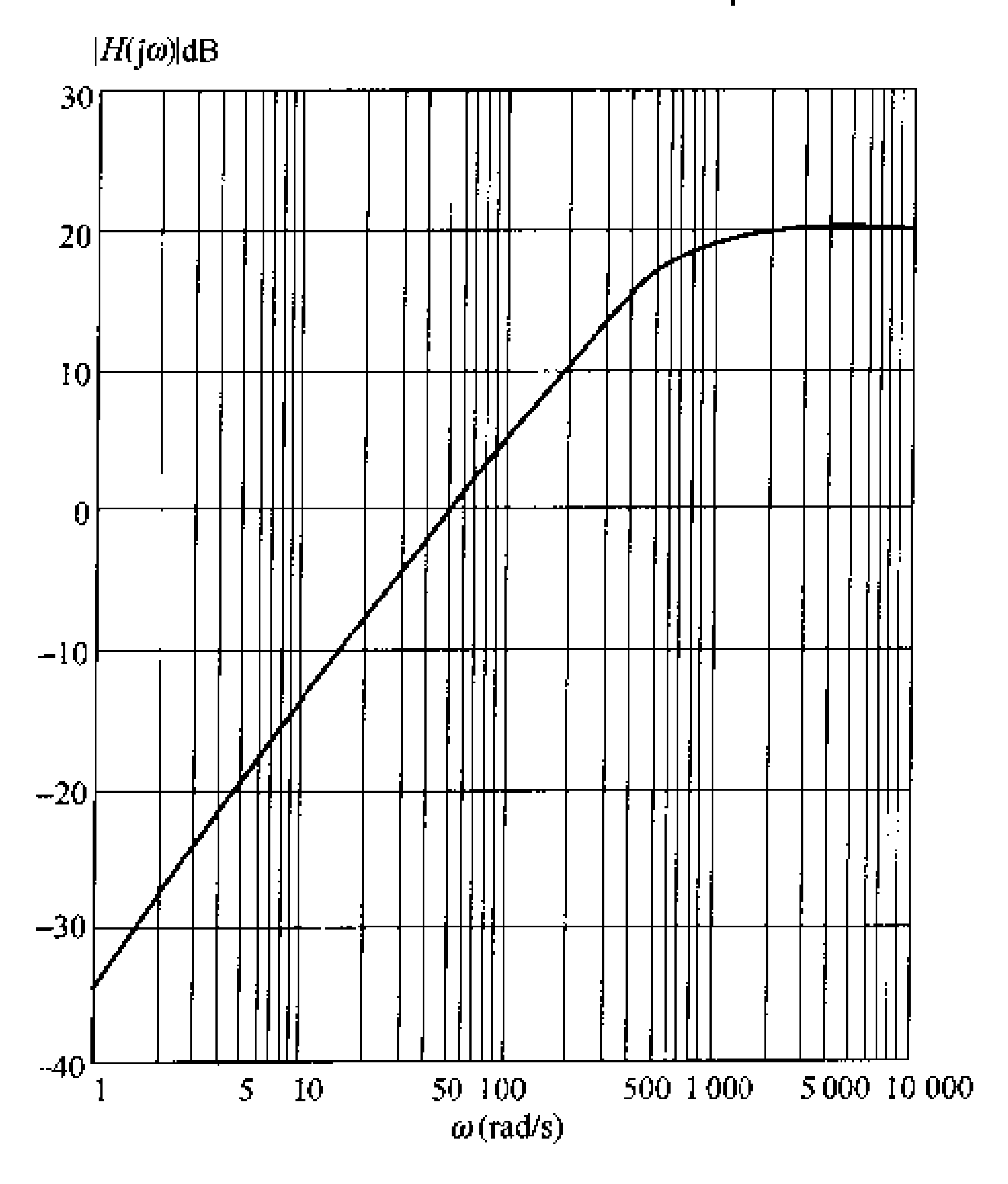


图 15.5 例 15.2 的高通滤波器波特图幅度响应曲线

令分子和分母相等并化简，得两个方程：

$$10 = \frac{R_2}{R_1}$$

$$500 = \frac{1}{R_1 C}$$

代入给定的电容 C 值得：

$$R_1 = 20\ \text{k}\Omega$$

$$R_2 = 200\ \text{k}\Omega$$

电路如图 15.6 所示。

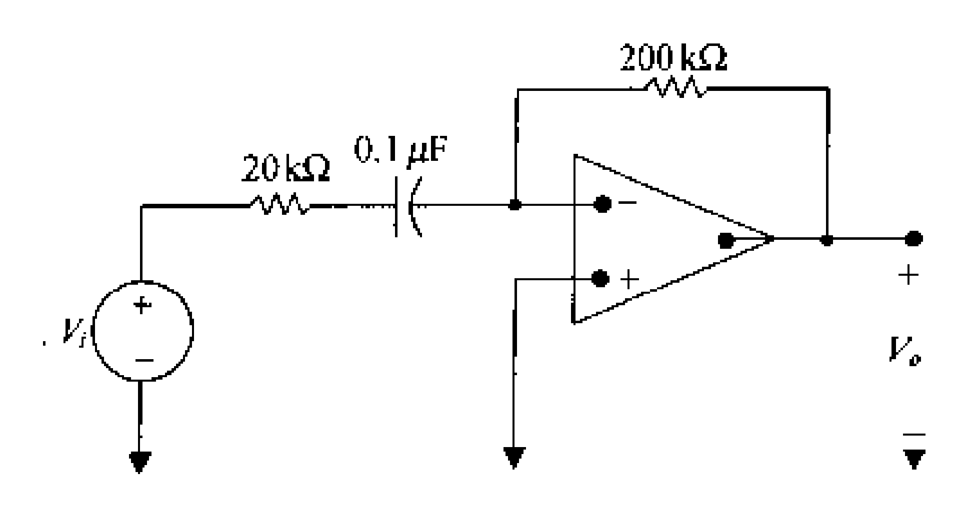


图 15.6 例 15.2 的高通滤波器

因已假设高通滤波器电路中的运放是理想运放，因此，不管所加的负载电阻多大都不会对运放产生影响。这样高通滤波器的幅度响应不管是否有负载都与图 15.5 是一样的。

练习题

15.1 计算电阻 R_2 和 C 的值，使高通滤波器的放大系数为 1，截止频率为 1 rad/s，$R_1 = 1\ \Omega$。（注意：这是原型高通滤波器。）

答：$R_2 = 1\ \Omega$，$C = 1$ F。

15.2 计算所需的电阻值，使图 15.1 所示的低通滤波器的转移函数为：

$$H(s) = \frac{-20000}{s + 5000}$$

已知 $C = 5\ \mu\text{F}$。

答：$R_1 = 10\ \Omega$，$R_2 = 40\ \Omega$。

15.2 比例性

在无源和有源滤波器电路的设计和分析中，使用元件的值为 1 Ω，1 F，1 H 是非常方便的。尽管这些值对实际元件是不现实的，但极大地简化了计算。在使用方便的 R, L, C 元件值计算完后，设计者就可以将方便的值转换成实际的值，这就是所谓的比例变换方法。

有两种比例性：幅度和频率。在给定频率下将阻抗乘以一个比例系数 k_m，则电路的幅值就乘了一个比例，这样就将所有的电阻和电感乘了一个系数 k_m，所有的电容乘了一个系数

$1/k_m$。若令不加撇的变量代表参数的初始值,加撇的参数代表变量乘系数后的值,得到:

$$R' = k_m R, L' = k_m L, C' = C/k_m \tag{15.7}$$

由定义可知 k_m 是一个正实数,其值可能小于 1,也可能大于 1。

在频率比例性中,改变电路参数,以使各元件的阻抗在新频率下的值和原来的值相等。因电阻值与频率无关,电阻不受频率比例性的影响。若令 k_f 代表频率比例系数,电感和电容均乘以 $1/k_f$,则频率比例性为:

$$R' = R, L' = L/k_f, C' = C/k_f \tag{15.8}$$

频率比例系数 k_f 也是一个可大于 1,也可小于 1 的正实数。电路可同时进行幅度和频率比例,比例后的值(加撇)以及原值(不加撇)是:

$$R' = k_m R$$

$$L' = \frac{k_m}{k_f}L$$

$$C' = \frac{1}{k_m k_f}C \tag{15.9}$$

15.2.1 比例性在运放滤波器设计中的应用

为在运放滤波器设计中使用比例性概念,首先选择截止频率 ω_c 为 1 rad/s(若要设计低通或高通滤波器),或选择中心频率 ω_o 为 1 rad/s(若设计带通或带阻滤波器)。然后选择 1 μF 的电容,再跟据要求的通带放大系数和 1 rad/s 的截止频率或中心频率计算出电阻值。最后,根据给定的截止频率或中心频率用比例性计算实际的元件值。

例 15.3 给出比例变换法的一般过程,例 15.4 则给出如何在低通滤波器中使用比例变换法。

例 15.3 串联 *RLC* 电路如图 15.7 所示,若中心频率为 $\sqrt{1/LC} = 1$ rad/s,带宽 $R/L = 1$ rad/s,因而品质因数为 1。用比例变换法计算新的 R 和 L 值,使电路具有同样的品质因数,中心频率为 500 Hz,采用的电容为 2 μF。

解:

计算中心频率从 1 rad/s 移到 500 Hz 的频率比例系数,不加撇的变量代表比例化前的,带撇的变量代表比例化后的:

$$k_f = \frac{\omega'_o}{\omega_o} = \frac{2\pi(500)}{1} = 3141.59$$

用式(15.9)和频率比例系数以及 2 μF 电容计算幅度比例系数:

$$k_m = \frac{1}{k_f}\frac{C}{C'} = \frac{1}{(3141.59)(2\times10^{-6})} = 159.155$$

再用式(15.9)计算幅度和频率比例化后的 R 和 L 值:

$$R' = k_m R = 159.155\ \Omega$$

$$L' = \frac{k_m}{k_f}L = 50.66\ \text{mH}$$

由这些元件组成的电路，串联 RLC 电路的频率为 $\sqrt{1/LC}=3141.61$ rad/s，带宽为 $R/L=3141.61$ rad/s 或 500 Hz，因此，品质因数为 1。

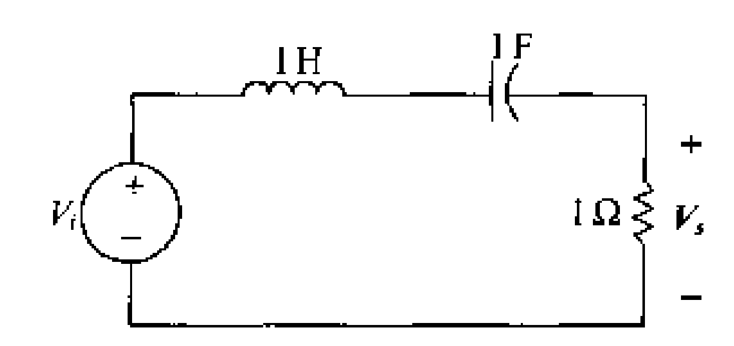


图 15.7　例 15.3 的串联 RLC 电路

例 15.4　用例 15.1 的原型低通运放滤波器以及幅度和频率比例性计算低通滤波器的电阻值，使其放大系数为 5，截止频率为 1 000 Hz，反馈电容为 0.01 μF，并画出其转移函数幅度的波特图。

解：

首先用频率的比例性使截止频率为 1 000 Hz：

$$k_f=\omega'_c/\omega_c=2\pi(1000)/1=6283.185$$

此处，加撇变量具有新的截止频率值，未加撇变量具有截止频率初值，然后用 $k_f=6283.185$ 和 $C=0.01$ μF，计算幅度比例系数：

$$k_m=\frac{1}{k_f}\frac{C}{C'}=\frac{1}{(6283.185)(10^{-8})}=15915.5$$

因电阻只和幅度比例性有关，则有：

$$R'_1=R'_2=k_mR=(15915.5)(1)=15\,915.5\ \Omega$$

最后，需要满足通带放大系数的要求。因为 $K=R_2/R_1$，所以，可以调整比例化后的 R_1 和 R_2 值。若调整 R_2 将改变截止频率，因 $\omega_c=1/R_2C$。调整 R_1 可以改变通带放大系数值：

$$R_1=R_2/K=(15915.5)/(5)=3183.1\ \Omega$$

最终的元件值为：

$$R_1=3183.1\ \Omega$$
$$R_2=15915.5\ \Omega$$
$$C=0.01\ \mu\text{F}$$

滤波器的转移函数为：

$$H(s)=\frac{-31415.93}{s+6\,283.185}$$

转移函数幅度的波特图如 15.8 所示。

练习题

15.3　求幅度和频率比例系数，使原型高通滤波器变为高通滤波器，其电容为 0.5 μF，截止频率为 10 Hz。

答： $k_f=62831.85$，$k_m=31.831$。

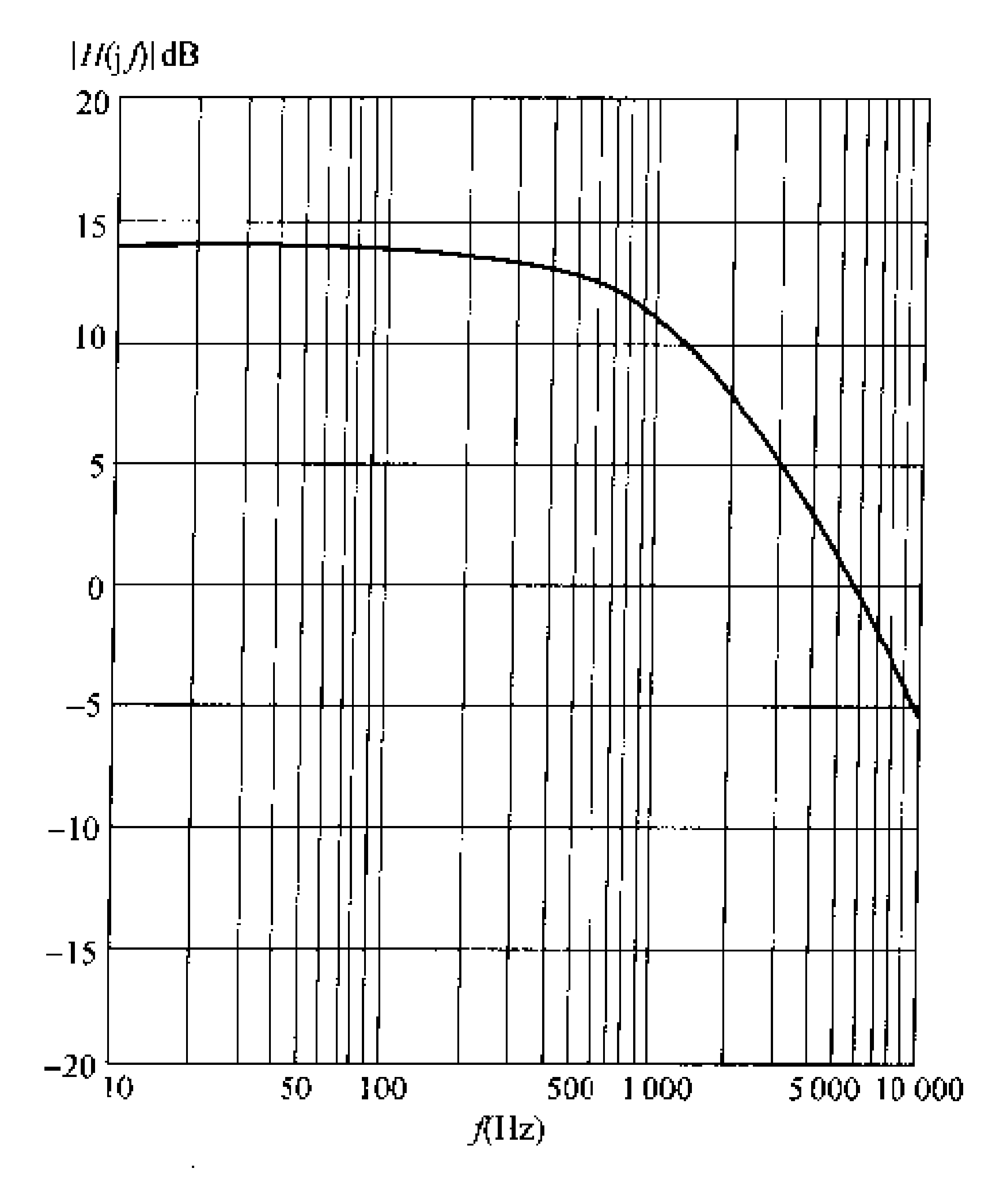


图 15.8 例 15.4 低通滤波器的波特图幅度曲线

15.3 运放带通和带阻滤波器

下面开始对含运放的带通滤波器和带阻滤波器进行分析和设计。

图 15.9 所示的波特图结构说明电路中可以含有各种形式的运放电路。由图还可以发现，带通滤波器可以分成三种独立的部分：

单位放大倍数的低通滤波器，它的截止频率为 ω_{c2}，即两截止频率中较大的。

单位放大倍数的高通滤波器，它的截止频率为 ω_{c1}，即两截止频率中较小的。

放大部分，提供要求的通带放大倍数。

这三个部分是级联的，在波特图结构中是叠加关系，在 s 域中是乘积关系。重要的是用这种方法构造带通幅度响应时，必须假设较低的截止频率 ω_{c1} 小于较高截止频率 ω_{c2}。

最终的滤波器叫宽带带通滤波器，因通频带很宽。宽带滤波器的一般定义要求两截止频率满足下面的方程：

$$\frac{\omega_{c2}}{\omega_{c1}} \geqslant 2$$

正如图 15.9 波特图结构所示，要求在低通滤波器的截止频率处，高通滤波器的幅值为 1。在高通滤波器的截止频率处，低通滤波器的幅值为 1。这样，带通滤波器才会有高通和低通滤波器的截止频率。要满足图 15.9 所示的要求，需要确定 ω_{c1} 和 ω_{c2} 之间的关系。

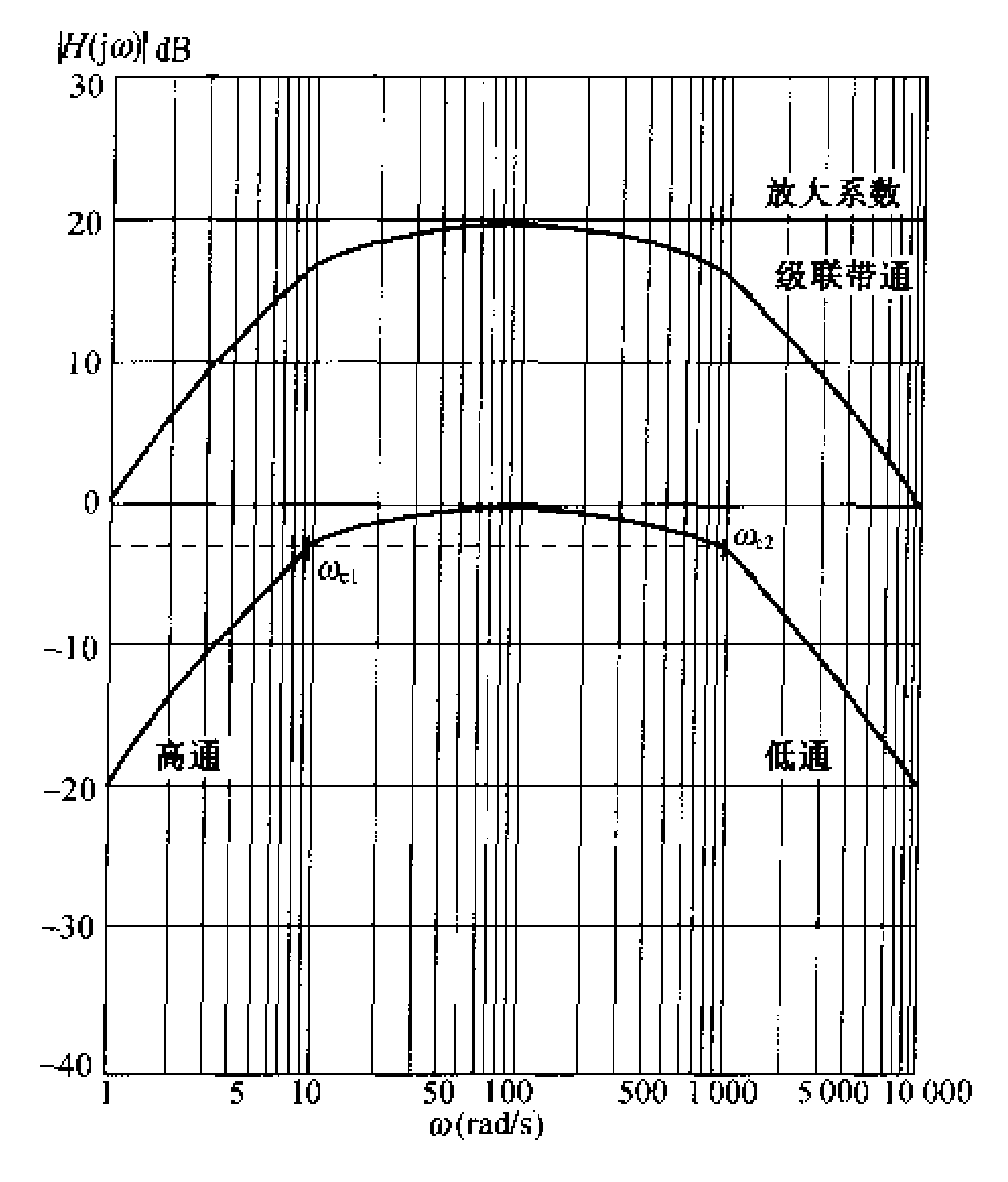


图 15.9　构造一个低通滤波器波特图的幅度曲线

将上述三部分的电路，即低通运放滤波器、高通运放滤波器、转换放大器（见 5.3 节）级联，构成一个电路，如图 15.10 (a) 所示，该图是所谓的方框图表示形式。每块代表一个部分或一个子电路，每块的输出是下一块的输入，其方向如图所示。希望建立 ω_{c1} 和 ω_{c2} 的关系，以便能独立地设计每个子电路，与其他级联子电路无关。这样，带通滤波器的设计就可以简化为设计三个电路，分别是，单位放大一阶低通滤波器、单位放大一阶高通滤波器和转移放大器，而每个部分都是简单的电路。级联带通滤波器的转移函数是三个级联电路转移函数之积：

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{V_o}{V_i}\\ &= \left(\frac{-\omega_{c2}}{s+\omega_{c2}}\right)\left(\frac{-s}{s+\omega_{c1}}\right)\left(\frac{-R_f}{R_i}\right)\\ &= \frac{-K\omega_{c2}s}{(s+\omega_{c1})(s+\omega_{c2})}\\ &= \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2+(\omega_{c1}+\omega_{c2})s+\omega_{c1}\omega_{c2}}\end{aligned} \tag{15.10}$$

该方程与 14 章讨论的带通滤波器转移函数的标准形式不同，取名为：

$$H_{BP} = \frac{\beta s}{s^2+\beta s+\omega_o^2}$$

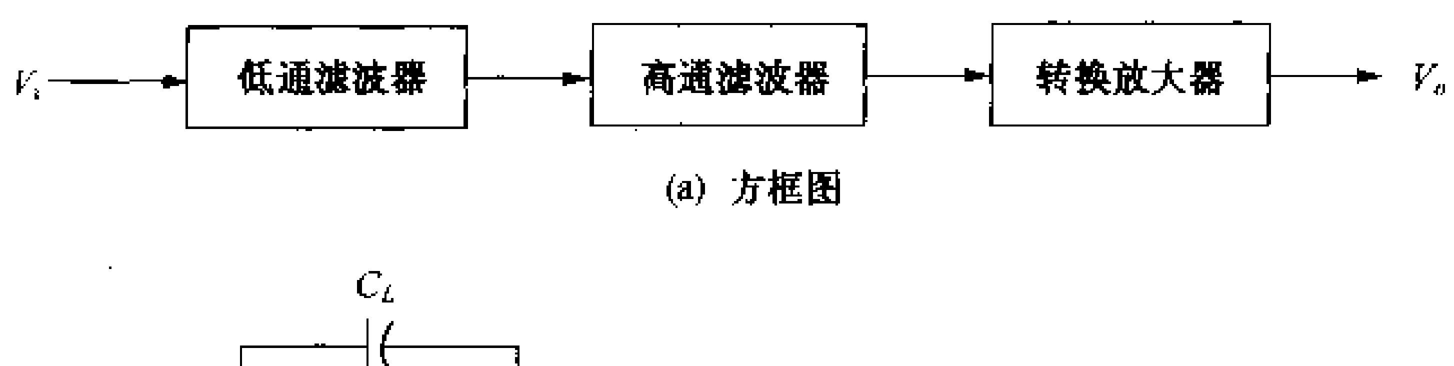
将式(15.10)转换为带通滤波器转移函数的标准形式，要求：

$$\omega_{c2} >> \omega_{c1} \tag{15.11}$$

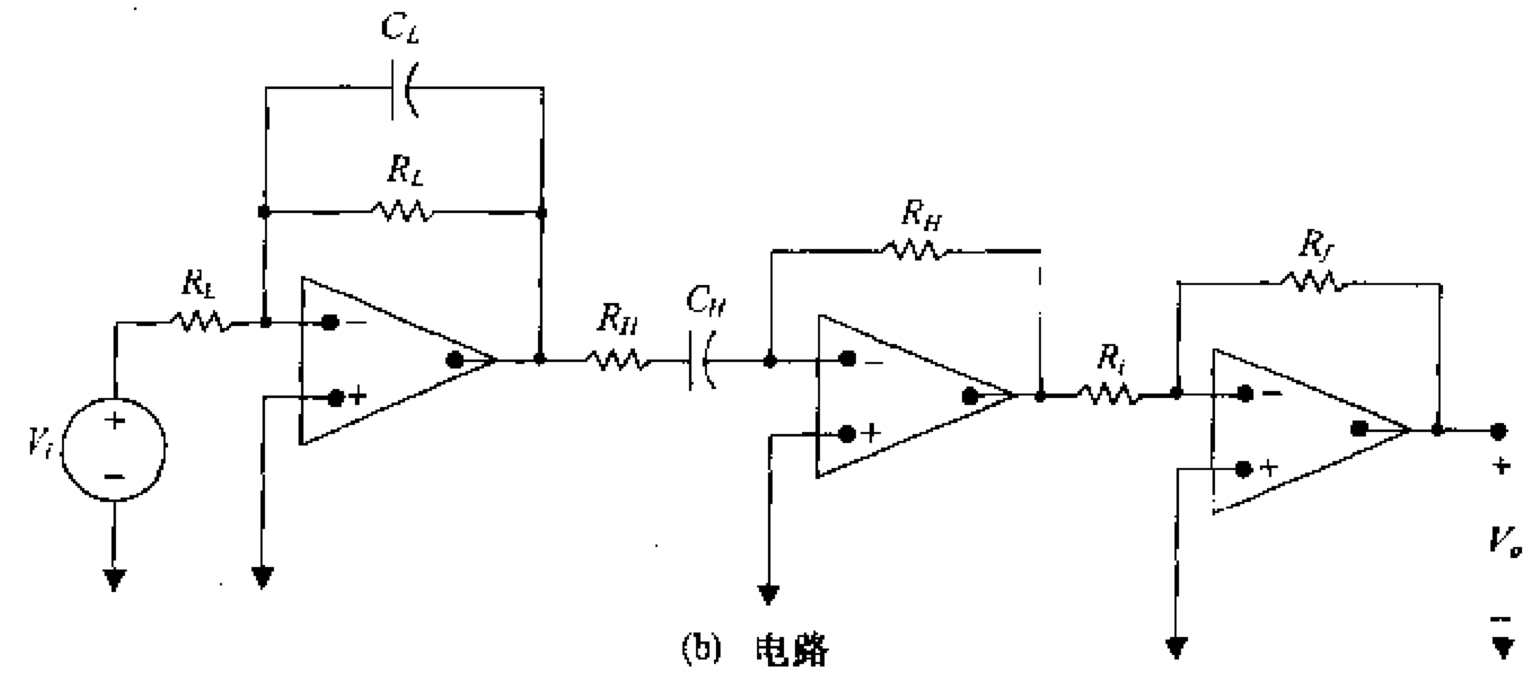
当式(15.11)满足：

$$(\omega_{c1}+\omega_{c2})\approx\omega_{c2}$$

且级联带通滤波器转移函数的式(15.10)变为:



(a) 方框图



(b) 电路

图 15.10 级联运放带通滤波器

$$H(s)=\frac{-K\omega_{c2}s}{s^2+\omega_{c2}s+\omega_{c1}\omega_{c2}}$$

一旦确定了带通滤波器的截止频率满足式(15.11),就可以对级联的每个电路进行独立设计,并满足滤波要求,计算低通滤波器中的 R_L 和 C_L 值以满足要求的上截止频率 ω_{c2}:

$$\omega_{c2}=\frac{1}{R_LC_L} \tag{15.12}$$

计算高通滤波器中的 R_H 和 C_H 以满足下截止频率 ω_{c1} 的要求:

$$\omega_{c1}=\frac{1}{R_HC_H} \tag{15.13}$$

计算转移放大器中的 R_i 和 R_f 值,使它的通带放大系数满足要求,为此,先考虑带通滤波器转移函数的幅度,计算其在中心频率 ω_o 时的值:

$$\begin{aligned}|H(j\omega_o)| &= \left|\frac{-K\omega_{c2}(j\omega_o)}{(j\omega_o)^2+\omega_{c2}(j\omega_o)+\omega_{c1}\omega_{c2}}\right| \\ &= \frac{K\omega_{c2}}{\omega_{c2}} \\ &= K \end{aligned} \tag{15.4}$$

由第 5 章可以知道,转移放大器的放大系数为 R_f/R_i,所以:

$$|H(j\omega_o)|=\frac{R_f}{R_i} \tag{15.15}$$

选择任何满足式(15.15)的电阻都会产生预定的带通放大系数。例 15.5 给出级联带通滤波器的设计过程。

例 15.5 为图式均衡器设计一个带通滤波器,使它在 10 ~ 10000 Hz 频带内的放大系数为 2,使

用的电容为 0.2 μF。

解：

只有式(15.11)得到满足时，才能独立设计级联电路中的电子电路，并满足指定截止频率的要求。该题中，$\omega_{c2}=100\omega_{c1}$，因此，可以认为 $\omega_{c2}>>\omega_{c1}$，先开始低通段设计，由式(15.12)得：

$$\omega_{c2}=\frac{1}{R_LC_L}=2\pi(10000)$$

$$R_L=\frac{1}{[2\pi(10000)](0.2\times10^{-6})}$$
$$\approx 80\ \Omega$$

然后，设计高通段，由式(15.13)得：

$$\omega_{c1}=\frac{1}{R_HC_H}=2\pi(100)$$

$$R_H=\frac{1}{[2\pi(100)](0.2\times10^{-6})}$$
$$\approx 7958\ \Omega$$

最后，进行放大阶段设计，由式(15.15)可以知道，方程中有两个未知数，因此，可以任意选定一个电阻，选 $R_i=1\ \text{k}\Omega$，然后由式(15.15)得：

$$R_f=2(1000)$$
$$=2000\ \Omega$$

最后设计的电路如图 15.11 所示。下面的问题留给读者，验证电路转移函数的幅值在两个截止频率处降为 $1/\sqrt{2}$倍。验证假设 $\omega_{c2}>>\omega_{c1}$ 的正确性。

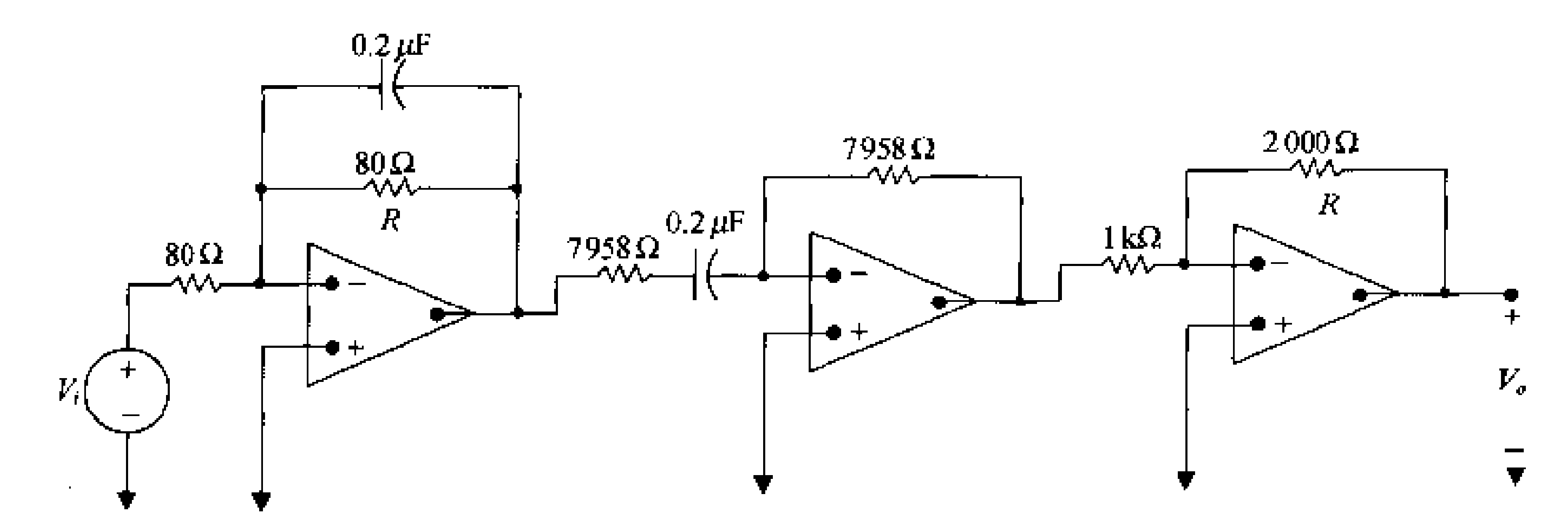


图 15.11　例 15.5 所设计的级联运放带通滤波器

带阻滤波器的设计也可以采用单元讨论的方法，如图 15.12 所示。与带通滤波器一样，带阻滤波器也可以分为三个独立的单元，但两者有着重要的差别：

1. 单位放大低通滤波器的截止频率为 ω_{c1}，它是两个截止频率中较大的。
2. 单位放大高通滤波器的截止频率为 ω_{c2}，它是两个截止频率中较小的。
3. 放大单元产生要求的通带放大系数。

最重要的差别是这三个不能级联，因在波特图中并不是叠加关系，而是用并联和加法放大器实

现,如图 15.13 所示的方框图和电路。另外,假设两截止频率相距非常远,以使设计的结果是一个宽带带阻滤波器,且 $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$,每个并联单元的设计均可独立进行,并满足指定的截止频率要求,最终电路的转移函数是高通滤波器和低通滤波器转移函数之和。由图 15.13 (b)得:

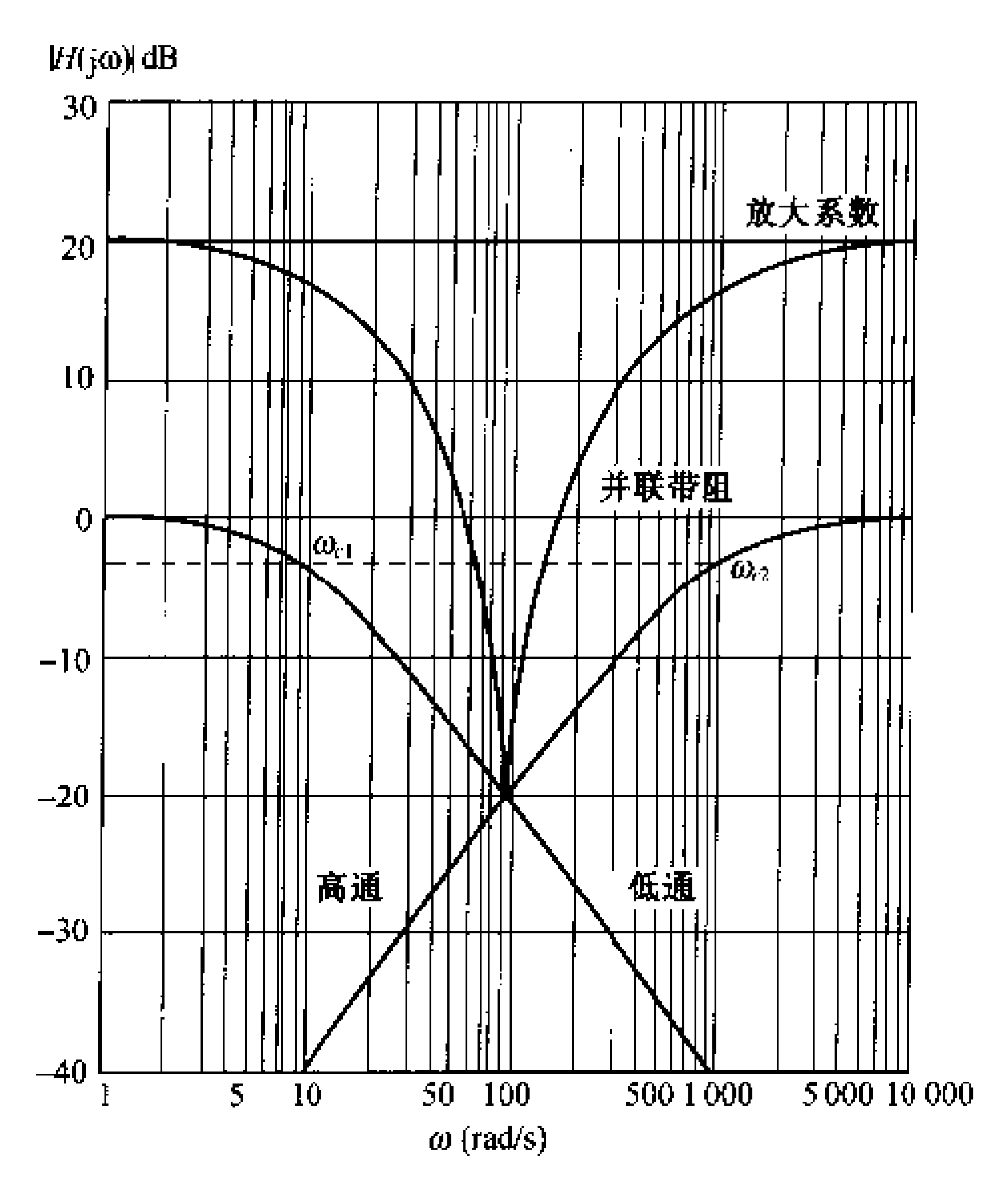


图 15.12 构成带阻滤波器波特图的幅度曲线

$$H(s) = \left(-\frac{R_f}{R_i}\right)\left[\frac{-\omega_{c1}}{s+\omega_{c1}} + \frac{-s}{s+\omega_{c2}}\right]$$

$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{\omega_{c1}(s+\omega_{c2}) + s(s+\omega_{c1})}{(s+\omega_{c1})(s+\omega_{c2})}\right)$$

$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{s^2 + 2\omega_{c1}s + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(s+\omega_{c1})(s+\omega_{c2})}\right) \tag{15.16}$$

与级联带通滤波器转移函数的有理式一样,只有当 $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$ 时,式(15.16)所示转移函数的两个截止频率就是 ω_{c1} 和 ω_{c2},这样,截止频率就由以下两个方程给出:

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_L C_L} \tag{15.17}$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_H C_H} \tag{15.18}$$

在两个通带中($s \to 0$ 和 $s \to \infty$),转移函数的放大系数为 R_f/R_i,所以:

$$K = \frac{R_f}{R_i} \tag{15.19}$$

和级联带通滤波器的设计一样,这种滤波器的设计有六个未知数和三个方程。一般选择市场

上有的电容 C_L 和 C_H，然后根据方程计算出符合截止频率要求的 R_L 和 R_H，最后选择 R_f 或 R_i，利用式(15.19)计算剩下的电阻 R_i 或 R_f。

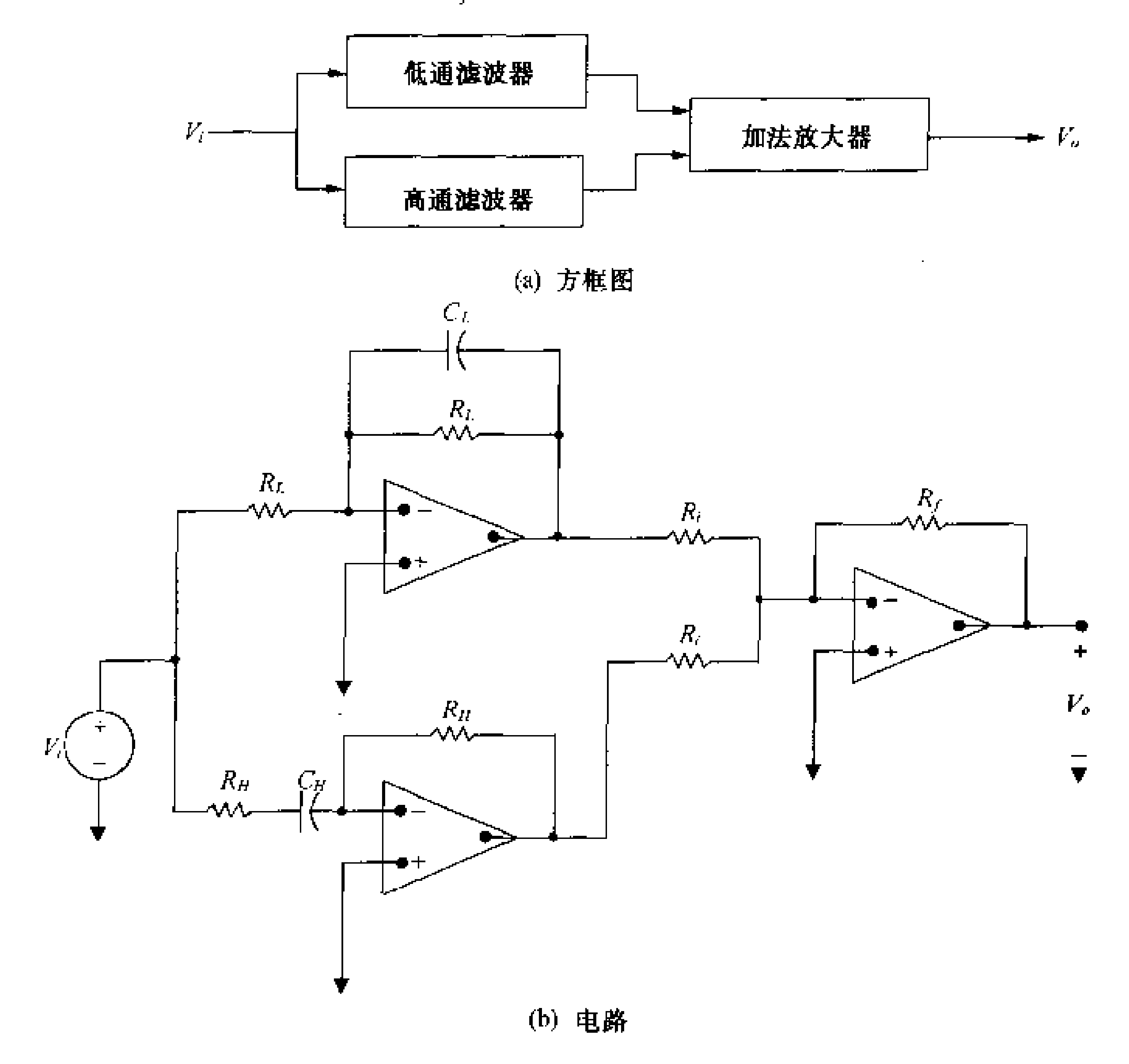


图 15.13　并联运放带阻滤波器

式(15.16)中转移函数在中心频率 $\omega_o = \sqrt{\omega_{c1}\cdot\omega_{c2}}$ 处的幅度为：

$$|H(j\omega_o)| = \left|\frac{R_f}{R_i}\left(\frac{(j\omega_o)^2 + 2\omega_{c1}(j\omega_o) + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(j\omega_o)^2 + (\omega_{c1}+\omega_{c2})(j\omega_o) + \omega_{c1}\omega_{c2}}\right)\right|$$
$$= \frac{R_f}{R_i}\frac{2\omega_{c1}}{\omega_{c1}+\omega_{c2}}$$
$$\approx \frac{R_f}{R_i}\frac{2\omega_{c1}}{\omega_{c2}} \tag{15.20}$$

若 $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$，那么 $|H(j\omega_o)| >> 2R_f/R_i(\omega_{c1}/\omega_{c2} \lesseqgtr 1)$，所以在中心频率处的幅值远小于通带幅值。因此，带阻滤波器可以成功地消除中心频率附近的信号，并且证明了采用并联型结构就是设计宽带带阻滤波器。

例 15.6 给出并联带阻滤波器设计的过程。

例 15.6　根据图 15.13(b) 的并联，实现带阻运放滤波器的设计，其幅度响应的波特图如图 15.14 所示，所用电容为 0.5 μF。

解：

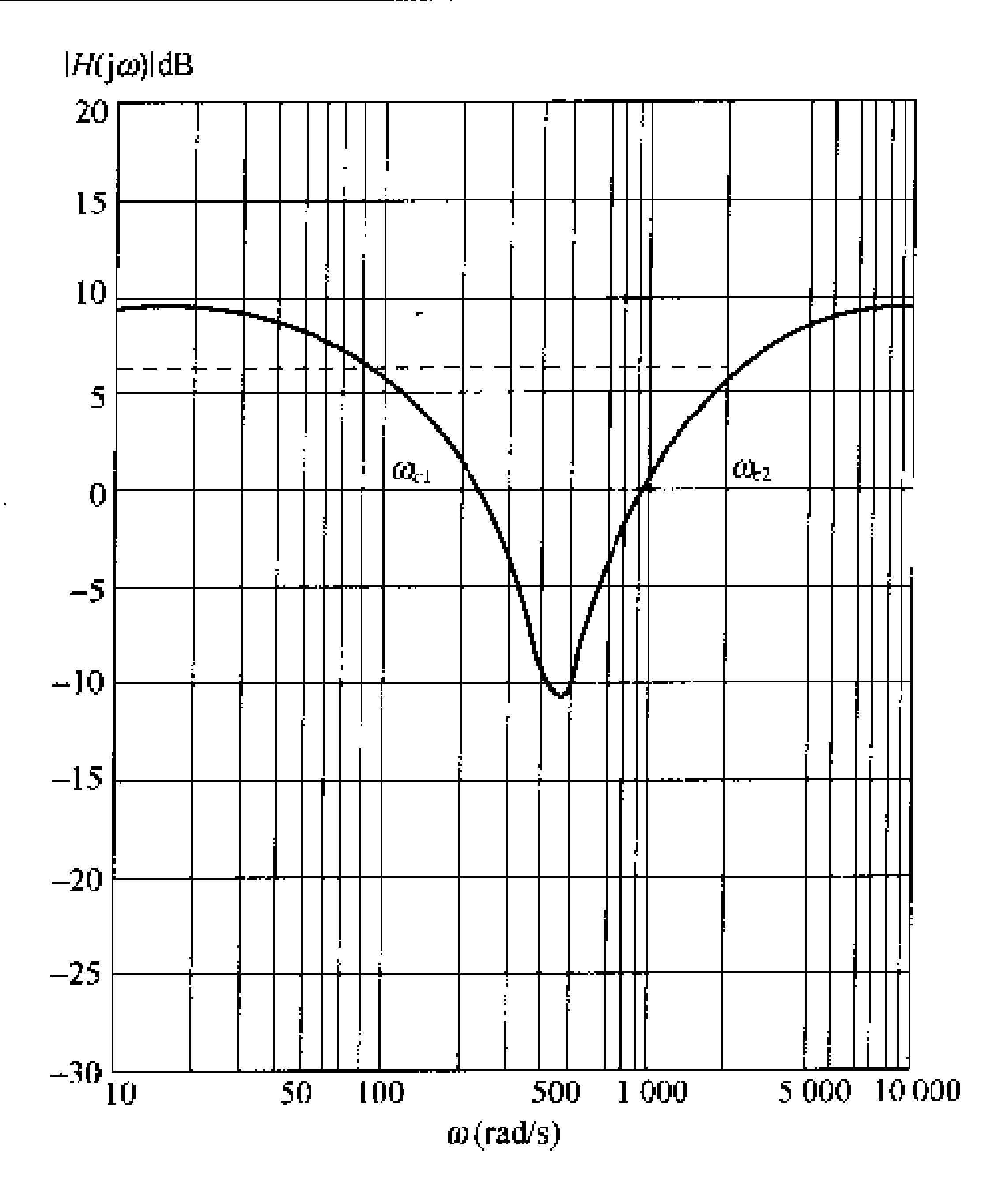


图 15.14 例 15.6 中用于电路设计的波特图幅度曲线

由图 15.14 所示的波特图幅度曲线可以知道,带阻滤波器的截止频率为 100 rad/s 和 2000 rad/s,通带的放大系数为 3,因此 $\omega_{c2}=20\omega_{c1}$,于是,可以认为 $\omega_{c2}>>\omega_{c1}$。首先从模型低通滤波器开始,利用比例法设计并满足截止频率和电容值的要求。频率比例因数 k_f 为 100,它将截止频率从 1 rad/s 移到 100 rad/s。幅度比例因数为 2 000。允许采用的电容为 0.5 μF,用这些比例因数得到比例化后的元件值:

$$R_L=20\ \text{k}\Omega$$

$$C_L=0.5\ \mu\text{F}$$

低通滤波器单元的截止频率为:

$$\omega_{c1}=\frac{1}{R_LC_L}=\frac{1}{(20\times10^3)(0.5\times10^{-6})}=100\ \text{rad/s}$$

用同样的方法设计高通滤波器,从模型高通滤波器开始。这时,频率的比例因数 $k_f=2000$,幅度比例因数 $k_m=1000$,这样比例化后的元件值为:

$$R_H=1\ \text{k}\Omega$$

$$C_H=0.5\ \mu F$$

最后,因截止频率距离非常远,所以可以利用 R_f/R_i 之比以满足要求的通带放大系数 3,选 $R_i=1\ \text{k}\Omega$,于是 $R_f=3\ \text{k}\Omega$,且 $K=R_f/R_i=3$。最后的并联运放带阻滤波器电路如图 15.15 所示。

下面通过在截止频率处的实际放大系数来验证 $\omega_{c2}>>\omega_{c1}$假设的合理性。首先,令并联带阻滤波器转移函数式(15.16)中的 $s=\text{j}2\pi(100)$和 $\text{j}2\pi(2000)$,计算幅度,计算过程留给读

者自行完成。其结果是 2.024，它比预期的幅度 2.12 要小，因此，阻带要比题目中指定的阻带宽。

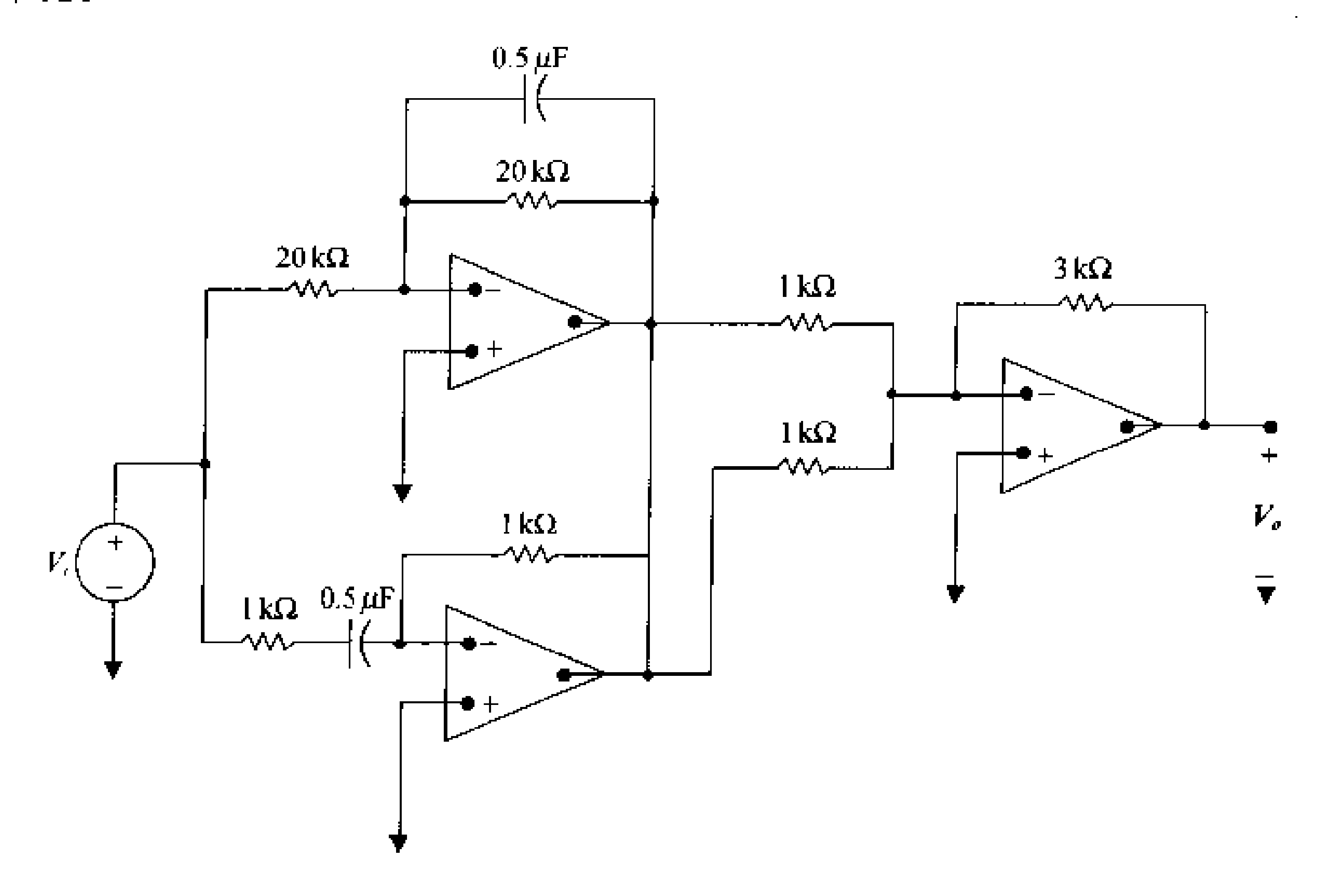


图 15.15　例 15.6 设计的带阻滤波器电路

练习题

15.4　用级联方式设计一个单位放大系数的带通滤波器，已知中心频率为 200 Hz，带宽为 1 000 Hz，电容为 5 μF，试确定 f_{c1}，f_{c2}，R_L，R_H。

答：$f_{c1}=38.52$ Hz，$f_{c2}=1\ 038.52$ Hz，$R_L=30.65\ \Omega$，$R_H=826.43\ \Omega$。

15.5　设计一个并联带阻滤波器，中心频率为 1 000 rad/s，带宽为 4 000 rad/s。通带放大系数为 6，电容为 0.2 μF，试确定所有电阻。

答：$R_L=21.18$ kΩ，$R_H=1.18$ kΩ 且 $R_f/R_i=6$。

15.4　高阶运放滤波器

到目前为止，所讨论过的滤波器电路，不论是有源还是无源的，都是非理想的。经过 14 章的讨论已知，理想滤波器在截止频率处是不连续的，它将通带和阻带截然分开。尽管不可能建立具有不连续频率响应的电路，但能使电路的频率响应在截止频率处有明显的变化又保持连续。

15.4.1　相同滤波器的级联

如何才能使得通带到阻带之间的变化明显呢？图 15.16 的波特图幅度曲线给出了一种方法，它表明同一个模型低通滤波器级联的波特图幅度曲线。曲线含有一级滤波器的曲线、两个级联的曲线、三个或四个级联的曲线。显然，级联的滤波器越多，从通带到阻带的变化越快，画

波特图的规则(见 14.6 节)表明,一个滤波器的波特图曲线的斜率近似为 20 dB/10 倍频程,因为级联电路的波特图是叠加关系,因此,两个滤波器级联后的斜率近似为 40 dB/10 倍频程。三个级联时,为 60 dB/10 倍频程。四个级联时,为 80 dB/10 倍频程,如图 15.16 所示。

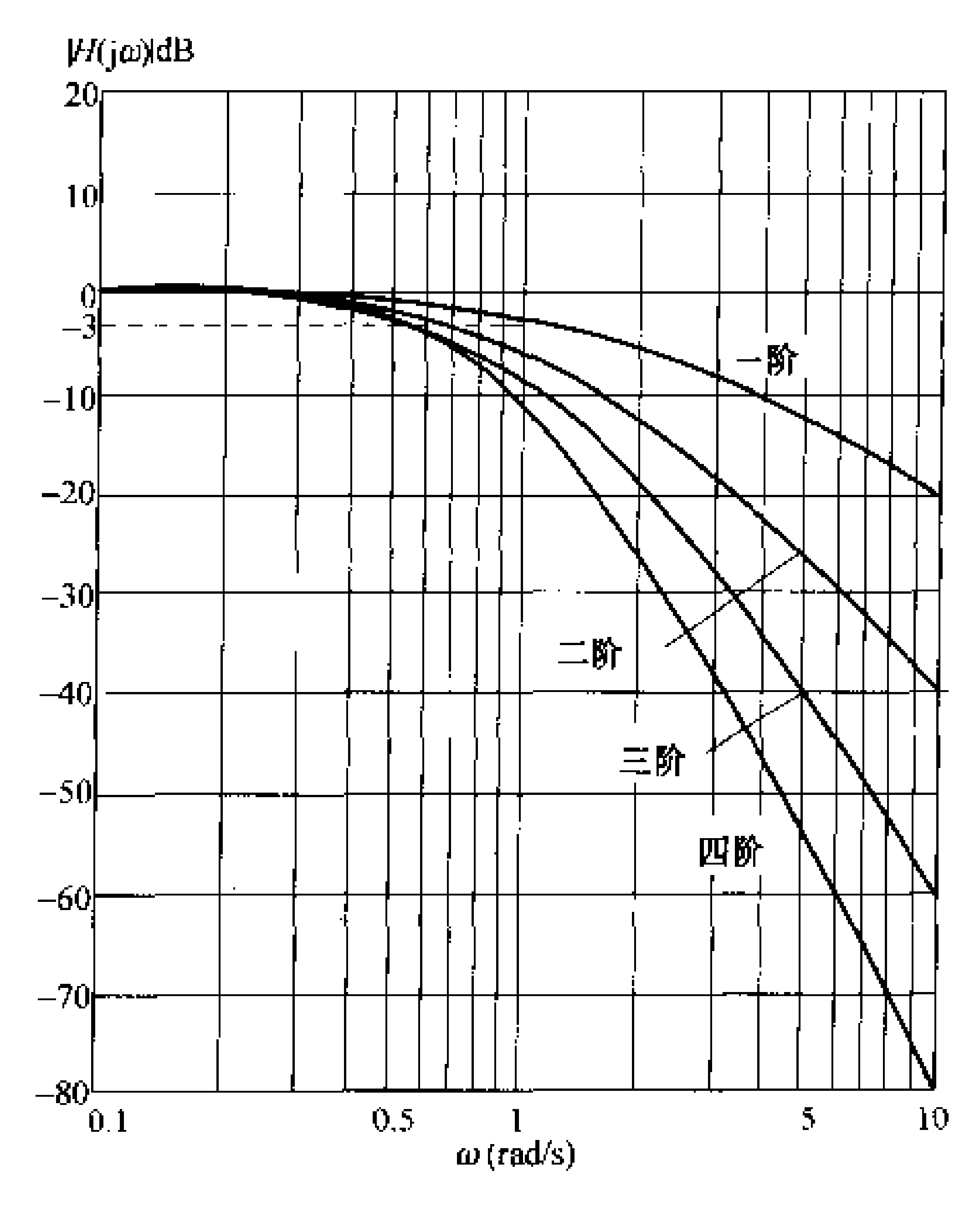


图 15.16 相同模型的一阶滤波器级联后的波特图幅度曲线

总之,n 个同样的低通滤波器级联,从通带到阻带变化的斜率为 20 dB/10 倍频程,这种级联的方框图和电路图如图 15.17 所示,这种 n 个低通滤波器级联后的系统转移函数很容易计算,只要将各转移函数相乘:

$$H(s)=\left(\frac{-1}{s+1}\right)\left(\frac{-1}{s+1}\right)\cdots\left(\frac{-1}{s+1}\right)$$
$$=\frac{(-1)^n}{(s+1)^n}$$

的级联会产生一个 n 阶滤波器,它有 n 个极点,最后,在过渡频带内的斜率为 $20n$ dB/10 倍频程。

还有非常重要的一点需要理解。请仔细看图 15.16,当级联的模型低通滤波器增加时,截止频率也在变化。例如,有两个一阶低通滤波器级联时,所得的二阶低通滤波器在 ω_c 处的幅度为 6 dB,所以,二阶滤波器的截止频率不是 ω_c,实际上的截止频率比 ω_c 小。

只要能计算出一阶滤波器级联的高阶滤波器截止频率,就可以用频率比例法计算元件的值,使得截止频率移到指定的位置。首先,若有 n 个模型低通滤波器级联,能计算出所得的 n 阶低通滤波器的截止频率,令 $|H(j\omega)|=1/\sqrt{2}$,就可以求出截止频率 ω_{cn}:

$$H(s)=\frac{(-1)^n}{(s+1)^n}$$

$$|H(j\omega_{cn})|=\left|\frac{1}{(j\omega_{cn}+1)^n}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\omega_{cn}^2+1})^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\omega_{cn}^2+1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2/n}$$

$$\sqrt[n]{2}=\omega_{cn}^2+1$$

$$\omega_{cn}=\sqrt{\sqrt[n]{2}-1} \tag{15.22}$$

为了说明式(15.22)的用法，下面计算一个四阶单位放大的低通滤波器的截止频率，它由四个模型低通滤波器级联形成：

$$\omega_{c4}=\sqrt{\sqrt[4]{2}-1}=0.435\ \text{rad/s} \tag{15.23}$$

设计出具有任意截止频率的四阶低通滤波器的步骤为：从四个模型低通滤波器级联组成的低通滤波器开始，然后以 $k_f=\omega_c/0.435$ 进行元件的比例化，使截止频率处于任何所指定的频率处。

当然，也可以在级联系统中加入一个级联的转移放大器，以生成一个非单位放大倍数的高阶低通滤波器，例 15.7 给出非单位放大系数的四阶低通滤波器的设计。

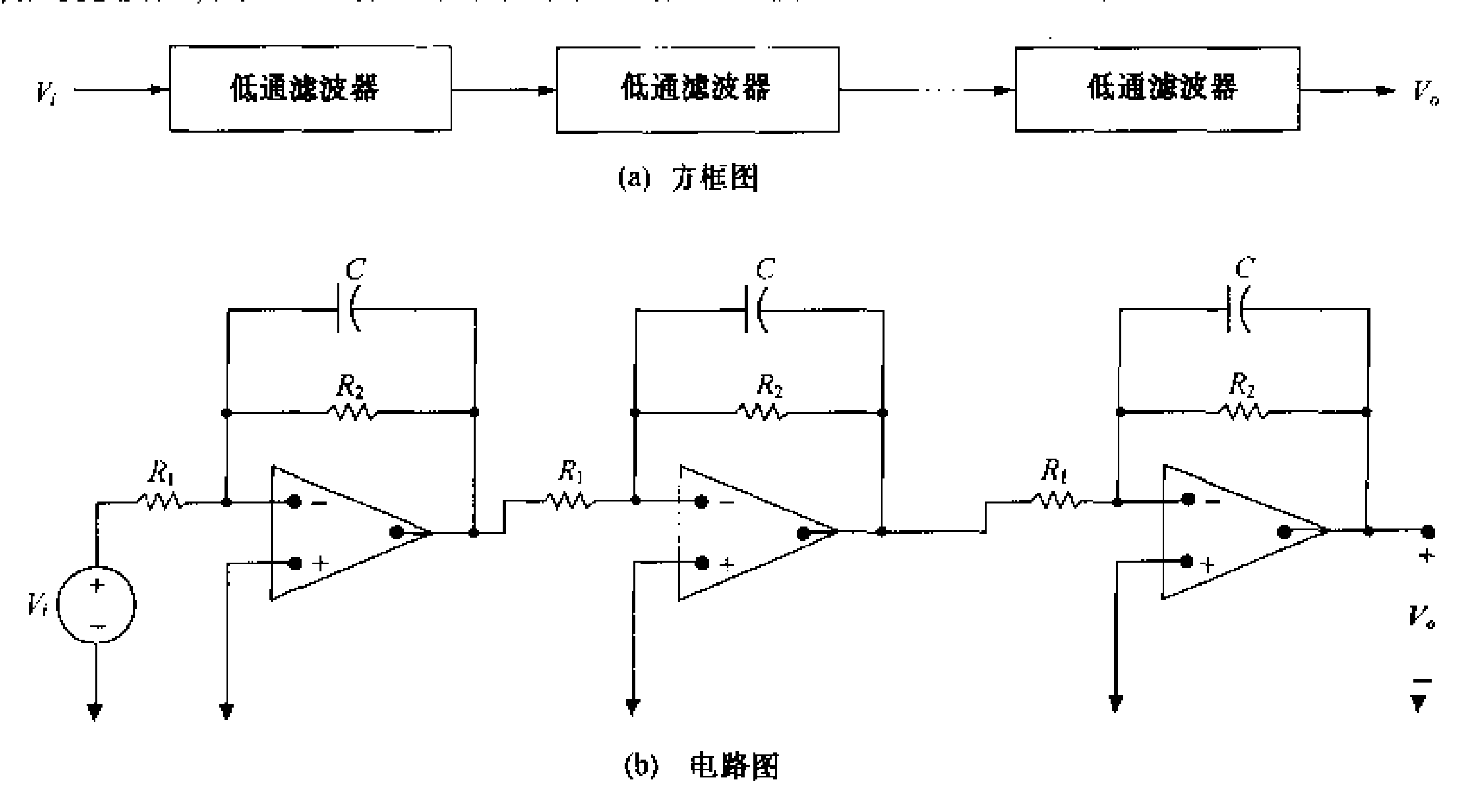


图 15.17　同样的单位放大低通滤波器级联

例 15.7　设计一个四阶低通滤波器，截止频率为 500 Hz，通带放大系数为 10，使用的电容为 1 μF。并画出该滤波器的幅度波特图。

解：

从四个模型低通滤波器的级联开始，用式(15.23)计算出所构成的四阶低通滤波器的截止频率为 0.435 rad/s。频率比例系数 $k_f=7222.39$ 将使元件比例化以满足截止频率为 500 Hz，使用 1 μF 电容时，幅度比例系数 $k_m=138.46$，这样，比例化的元件为：

$$R=138.46\ \Omega$$

$$C=1\ \mu\text{F}$$

最后,加一个放大系数为 $R_f/R_i = 10$ 的转移放大器,可任选一个电阻值,因为已经使用了 138.46 Ω 的电阻,所以,令 $R_i = 138.46\ \Omega$。

则:

$$R_f = 10R_i = 1384.6\ \Omega$$

这个级联的四阶低通滤波器电路如图 15.18 所示。

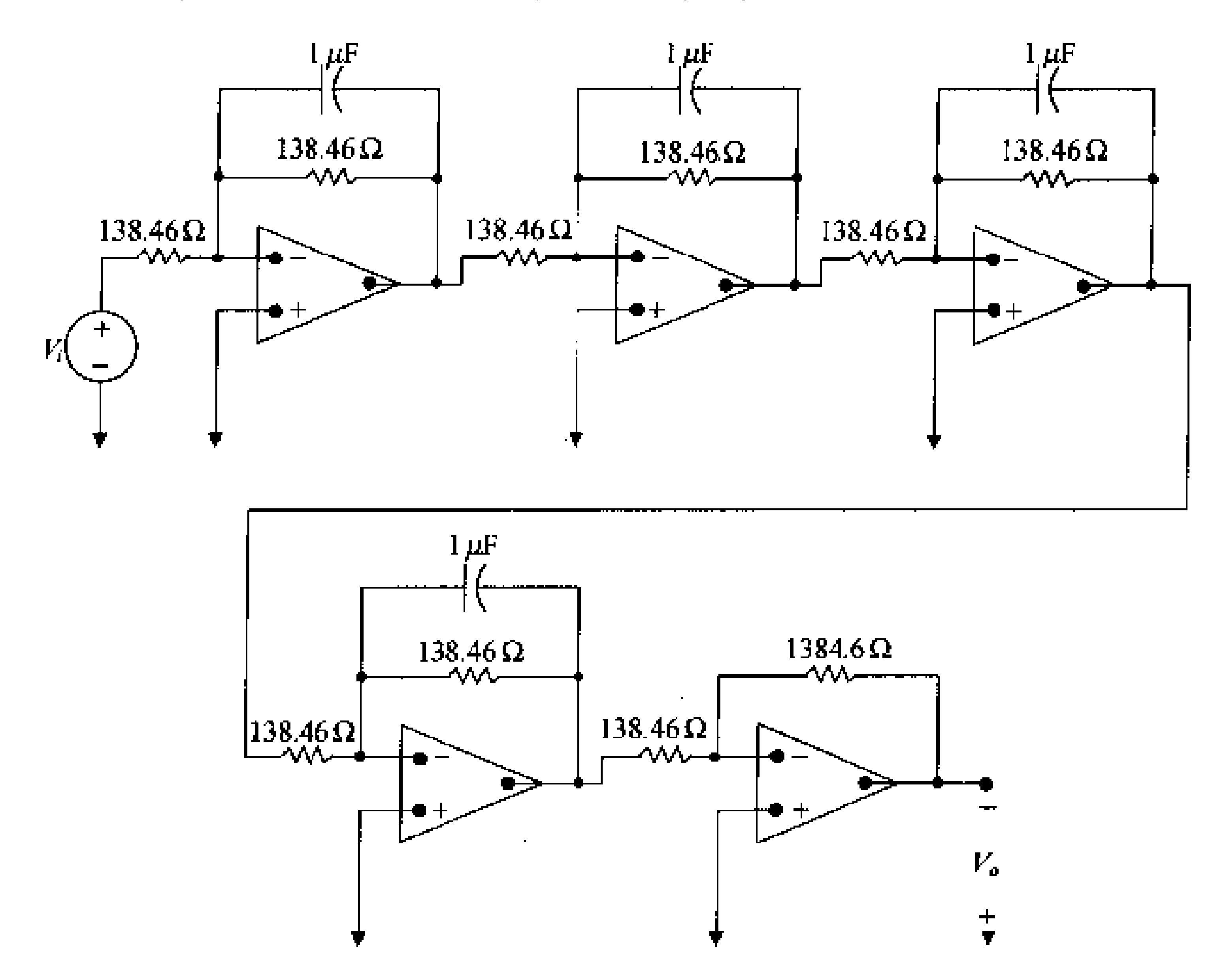


图 15.18 例 15.7 所设计的四阶低通滤波器的级联电路

其转移函数为:

$$H(s) = -10\left[\frac{7222.39}{s + 7222.39}\right]^4$$

该转移函数的波特图幅度曲线如图 15.19 所示。

通过相同低通滤波器的级联,可以增加过渡区内的斜率并控制截止频率的位置。但存在严重的缺点:即在 $0 \sim \omega_c$ 之间,滤波器的放大系数不是常数。理想低通滤波器在小于截止频率的所有频率上,通带幅度都是 1。但在图 15.16 中看到,在远低于截止频率处,幅值小于 1(0 dB)。

观察单位低通滤波器 n 阶级联系统的转移函数幅度,很容易理解这种非理想的通带的特性,因为:

$$H(s) = \frac{\omega_{cn}^n}{(s + \omega_{cn})^n}$$

其幅度为:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_{cn}^n}{\left(\sqrt{\omega^2 + \omega_{cn}^2}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{(\omega/\omega_{cn})^2+1}\right)^n} \qquad (15.24)$$

正如式(15.24)所示，当 $\omega << \omega_{cn}$ 时，其分母为 1，转移函数的幅值也为 1，但当 ω 趋向于 ω_{cn} 时，分母变得比 1 大，所以，转移函数的幅值小于 1。因为级联低通滤波器造成了通带内的非理想特性，所以，在高通滤波器的设计中需要采用其他方法，下面讨论的就是其中的一种方法。

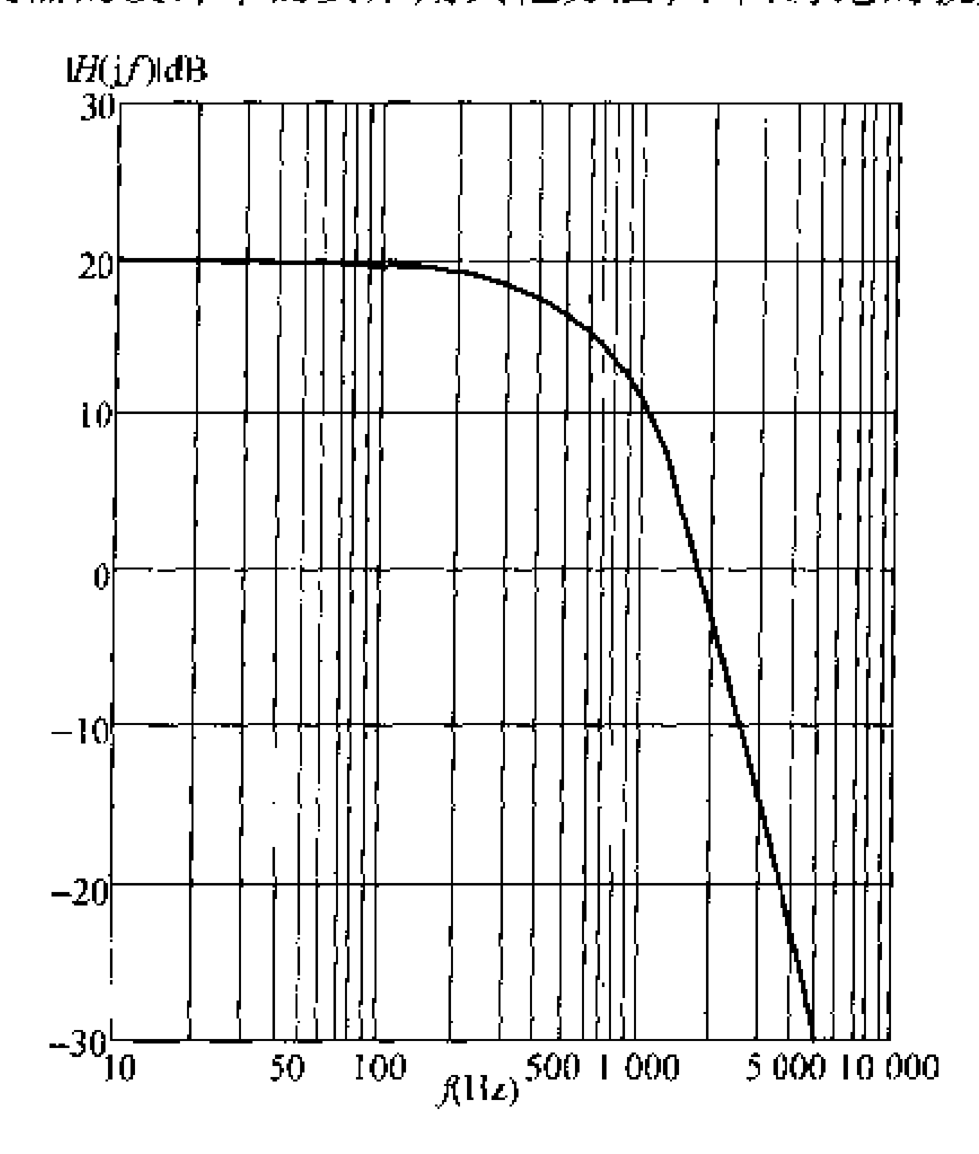


图 15.19　例 15.7 中设计的四阶低通滤波器的幅度波特图

15.4.2　巴特沃兹滤波器

单位放大系数巴特沃兹低通滤波器转移函数的幅度为：

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}} \qquad (15.25)$$

式中 n 代表滤波器阶次的整数。

考查式(15.25)时，注意以下几点：

1. 对任何 n 值，截止频率均为 ω_c rad/s。

2. 若 n 足够大，当 $\omega < \omega_c$ 时，分母总是接近于 1。

3. $|H(j\omega)|$ 的表达式中，ω/ω_c 的指数总为偶数。

最后一点非常重要，因为对物理可以实现的电路，偶次指数是必须的条件（见习题15.24）。

如果已知转移函数的幅度方程，如何求 $H(s)$？用原型滤波器可以极大地简化 $H(s)$ 的求解，因此，令式(15.25)中的 $\omega_c = 1$ rad/s，用比例法将原型滤波器转化为满足给定滤波器特性的滤波器。

为求得 $H(s)$，先注意，若 N 是一个复数，那么 $|N|^2 = NN^*$，此处，N^* 是 N 的共轭复数。它满足下面的方程：

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) \tag{15.26}$$

因为 $s = j\omega$,所以可以写出:

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s) \tag{15.27}$$

因为 $s^2 = -\omega^2$,因此:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}} = \frac{1}{1+(\omega^2)^n} = \frac{1}{1+(-s^2)^n} = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}$$

或:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}} \tag{15.28}$$

对给定的 N 值,求 $H(s)$的过程如下:

1.找到多项式的根:

$$1+(-1)^n s^{2n} = 0$$

2.将处于左半平面的根分配给 $H(s)$,右半平面上的根分配给 $H(-s)$。

3.将各项结合在一起作为 $H(s)$的分母,形成一阶和二阶因数。

例 15.8 给出了求 $H(s)$的过程。

例 15.8 找出 $n=2$ 和 $n=3$ 时,巴特沃斯转移函数。

解:

$n=2$ 时,求多项式的根:

$$1+(-1)^2 s^4 = 0$$

化简得到:

$$s^4 = -1 = 1\,\underline{/180^\circ}$$

因此,四个根为:

$$s_1 = 1\,\underline{/45^\circ} = 1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2}$$

$$s_2 = 1\,\underline{/135^\circ} = -1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2}$$

$$s_3 = 1\,\underline{/225^\circ} = -1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2}$$

$$s_4 = 1\,\underline{/315^\circ} = 1/\sqrt{2} + -j/\sqrt{2}$$

根 s_2 和 s_3 在左半平面,所以:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1/\sqrt{2}-j/\sqrt{2})(s+1\sqrt{2}+j/\sqrt{2})} = \frac{1}{(s^2+\sqrt{2}s+1)}$$

$n=3$ 时,求多项式的根:

$$1+(-1)^3 s^6 = 0$$

解得:

$$s^6 = 1\,\underline{/0^\circ} = 1\,\underline{/360^\circ}$$

因此,六个根为:

$$s_1 = 1\angle 0^\circ = 1$$
$$s_2 = 1\angle 60^\circ = 1/2 + \mathrm{j}\sqrt{3}/2$$
$$s_3 = 1\angle 120^\circ = -1/2 + \mathrm{j}\sqrt{3}/2$$
$$s_4 = 1\angle 180^\circ = -1 + \mathrm{j}0$$
$$s_5 = 1\angle 240^\circ = -1/2 - \mathrm{j}\sqrt{3}/2$$
$$s_6 = 1\angle 300^\circ = 1/2 - \mathrm{j}\sqrt{3}/2$$

s_3, s_4, s_5 在左半平面，这样：

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+1/2-\mathrm{j}\sqrt{3}/2)(s+1/2+\mathrm{j}\sqrt{3}/2)}$$
$$= \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

需要注意的是，巴特沃斯多项式的根总是均匀分布在 s 平面的单位圆上，为帮助巴特沃斯滤波器的设计，表 15.1 列出了 $n = 8$ 以下的巴特沃斯多项式。

表 15.1　最多为 8 阶的归一化（$\omega_c = 1$ rad/s）巴特沃斯多项式

n	n 阶巴特沃斯多项式
1	$(s+1)$
2	$(s^2+\sqrt{2}s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0.765s+1)(s^2+1.848s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0.618s+1)(s^2+1.618s+1)$
6	$(s^2+0.518s+1)(s^2+\sqrt{2}+1)(s^2+1.932s+1)$
7	$(s+1)(s^2+0.445s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+1.802s+1)$
8	$(s^2+0.390s+1)(s^2+1.111s+1)(s^2+1.6663s+1)(s^2+1.962s+1)$

15.4.3　巴特沃斯滤波器电路

现在已经知道了求解巴特沃斯滤波器电路转移函数的方法（或者直接计算转移函数的极点或者查表 15.1），接下来，开始设计具有这种转移函数的电路。注意表 15.1 中巴特沃斯多项式的形式，都是一阶和二阶因式的乘积。因此，通过级联运放电路构成一个新电路，使得其转移函数的分母中含有巴特沃斯多项式，其中每个级联的子电路提供了一个因式，以五阶巴特沃斯多项式为例，列出了它的级联形式的方框图，如图 15.20 所示。

图 15.20 利用具有特定转移函数的一阶、二阶系统级联生成五阶低通巴特沃斯滤波器，其中 $\omega_c = 1$ rad/s。

由表 15.1 可知，所有奇次方的巴特沃斯多项式中必定含有因式$(s+1)$，因此，所有的奇数阶巴特沃斯滤波器电路中都包含有一个子电路，该子电路的转移函数为 $H(s) = 1/(s+1)$，这就是图 15.1 的原型低通运放滤波器的转移函数。剩下的工作就是找一个电路，使其转移函数的形式为 $H(s) = 1/(s^2 + b_1 s + 1)$。

这种电路如图 15.21 所示，要分析该电路，首先写出节点方程，节点选择运放的非负端和标有 v_a 的节点：

$$\frac{V_a - V_i}{R} + (V_a - V_o)sC_1 + \frac{V_a - V_o}{R} = 0 \tag{15.29}$$

$$V_o sC_2 + \frac{V_o - V_a}{R} = 0 \tag{15.30}$$

化简两个方程得到：

$$(2 + RC_1 s)V_a - (1 + RC_1 s)V_o = V_i \tag{15.31}$$

$$-V_a + (1 + RC_2 s)V_o = 0 \tag{15.32}$$

对式(15.31)和式(15.32)应用克来姆法则，求得 V_o：

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} 2 + RC_1 s & V_i \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2 + RC_1 s & -(1 + RC_1 s) \\ -1 & (1 + RC_2 s) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{V_i}{R^2 C_1 C_2 s^2 + 2RC_2 s + 1} \tag{15.33}$$

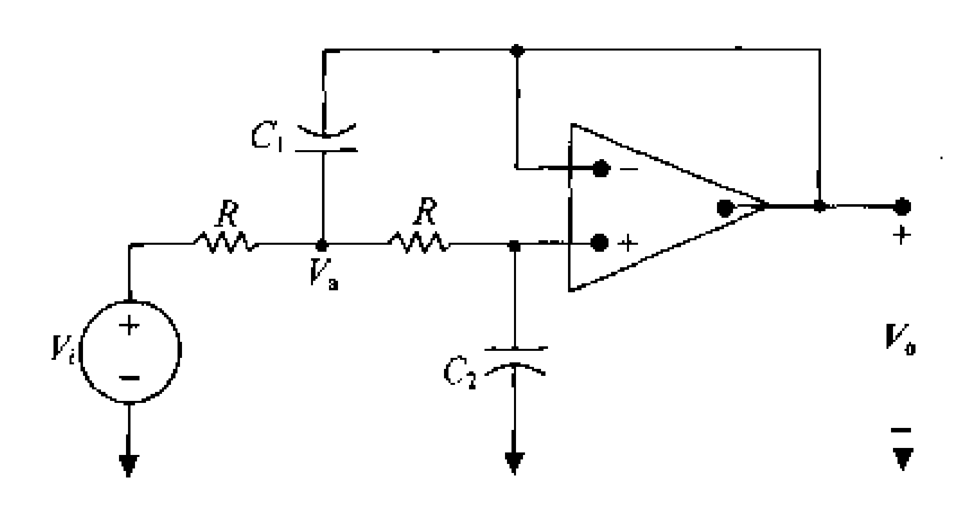


图 15.21 为巴特沃斯滤波器级联提供二阶转移函数的一个电路

重新整理式(15.33)，写出图 15.21 所示电路的转移函数：

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{R^2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{2}{RC_1}s + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}} \tag{15.34}$$

最后令式(15.34)中的 $R = 1\ \Omega$，于是有：

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1 C_2}}{s^2 + \frac{2}{C_1}s + \frac{1}{C_1 C_2}} \tag{15.35}$$

式(15.35)具有巴特沃斯级联系统中所要求的二阶电路系统函数的形式，即具有下面形式的转移函数：

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + b_1 s + 1}$$

利用图 15.21 所示电路，并选择电容值，使其满足：

$$b_1=\frac{2}{C_1}\text{和 }1=\frac{1}{C_1C_2} \tag{15.36}$$

n 阶巴特沃斯低通滤波器电路的设计如上所叙，该电路具有 1 rad/s 的截止频率，通带放大系数为 1。下面用频率比例性计算校正电容以便于产生任何截止频率，也可以在设计当中用幅度比例性提出更现实或者更实用的元件值，级联一个转移放大器电路产生通带内非 1 的放大系数，例 15.9 给出这一设计过程。

例 15.9　设计一个四阶巴特沃斯低通滤波器，其截止频率为 500 Hz，通带放大系数为 10，尽可能地使用 1 kΩ 电阻，将该滤波器的幅度波特图曲线与例 15.7 中的同一个级联滤波器的幅度波特图曲线加以比较。

解：

由表 15.1 查得，四阶巴特沃斯多项式为：

$$(s^2+0.765s+1)(s^2+1.848s+1)$$

需要两个二阶滤波器级联来生成四阶转移函数，再加一个转移放大器电路以产生通带放大系数 10。电路如图 15.22 所示。

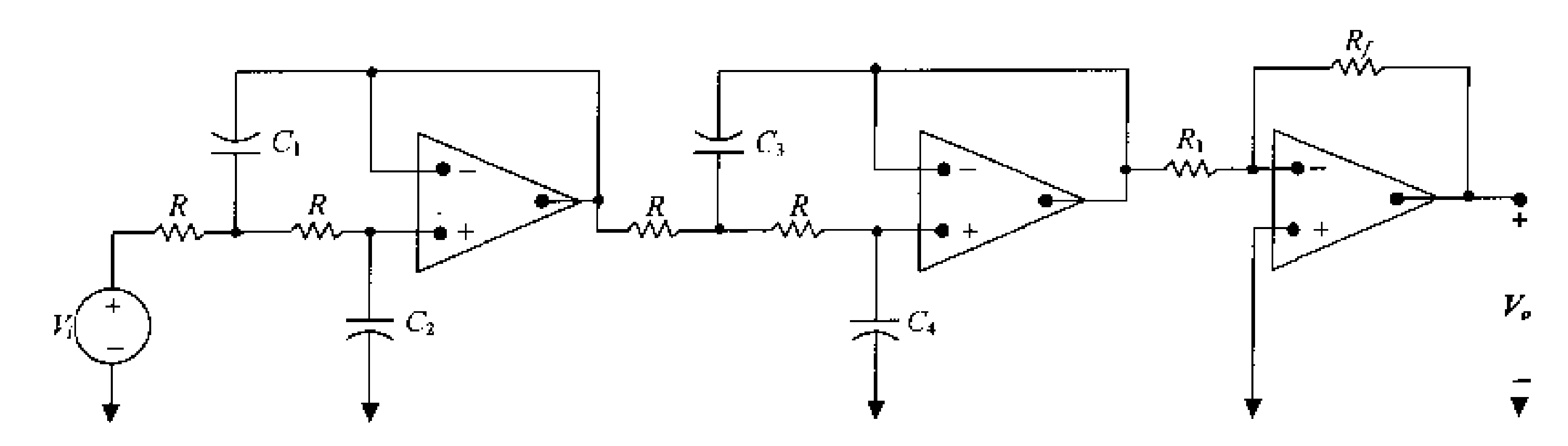


图 15.22　非单位放大系数的四阶巴特沃斯滤波器

第一个级联电路实现多项式($s^2=0.765s+1$)的转移函数，由式(15.36)得到：

$$C_1=2.61\ \text{F}$$
$$C_2=0.38\ \text{F}$$

第二个级联电路实现多项式($s^2+1.848s+1$)的转移函数，由式(15.36)得到：

$$C_3=1.08\ \text{F}$$
$$C_4=0.924\ \text{F}$$

四个电容产生了一个截止频率为 1rad/s 的四阶巴特沃斯滤波器。频率比例系数 $k_f=3141.6$ 使截止频率移到 500 Hz，幅度比例系数若为 $k_m=1000$，就可以使用 1 kΩ 电阻，而不用 1 Ω 电阻，得到的比例元件值为：

$$R=1\ \text{k}\Omega$$
$$C_1=831\ \text{nF}$$
$$C_2=121\ \text{nF}$$
$$C_3=344\ \text{nF}$$
$$C_4=294\ \text{nF}$$

在转换放大器阶段，要使通带放大系数为 10，需要校核电阻值，令 $R_1=1\ \text{k}\Omega$，则：

$$R_f = 10R_1 = 10\ \text{k}\Omega$$

图 15.23 将例 15.7 中的四阶相同单元的级联滤波器的幅度响应和设计完成的四阶巴特沃斯滤波器进行了比较,两个滤波器的通带放大系数均为 10(20 dB),截止频率均为 500 Hz,而巴特沃斯滤波器更接近理想低通滤波器,因为它在通带内比较平坦,在截止频率处下降得较快,因此,巴特沃斯设计法要比用同一个单元级联设计的方法更好。

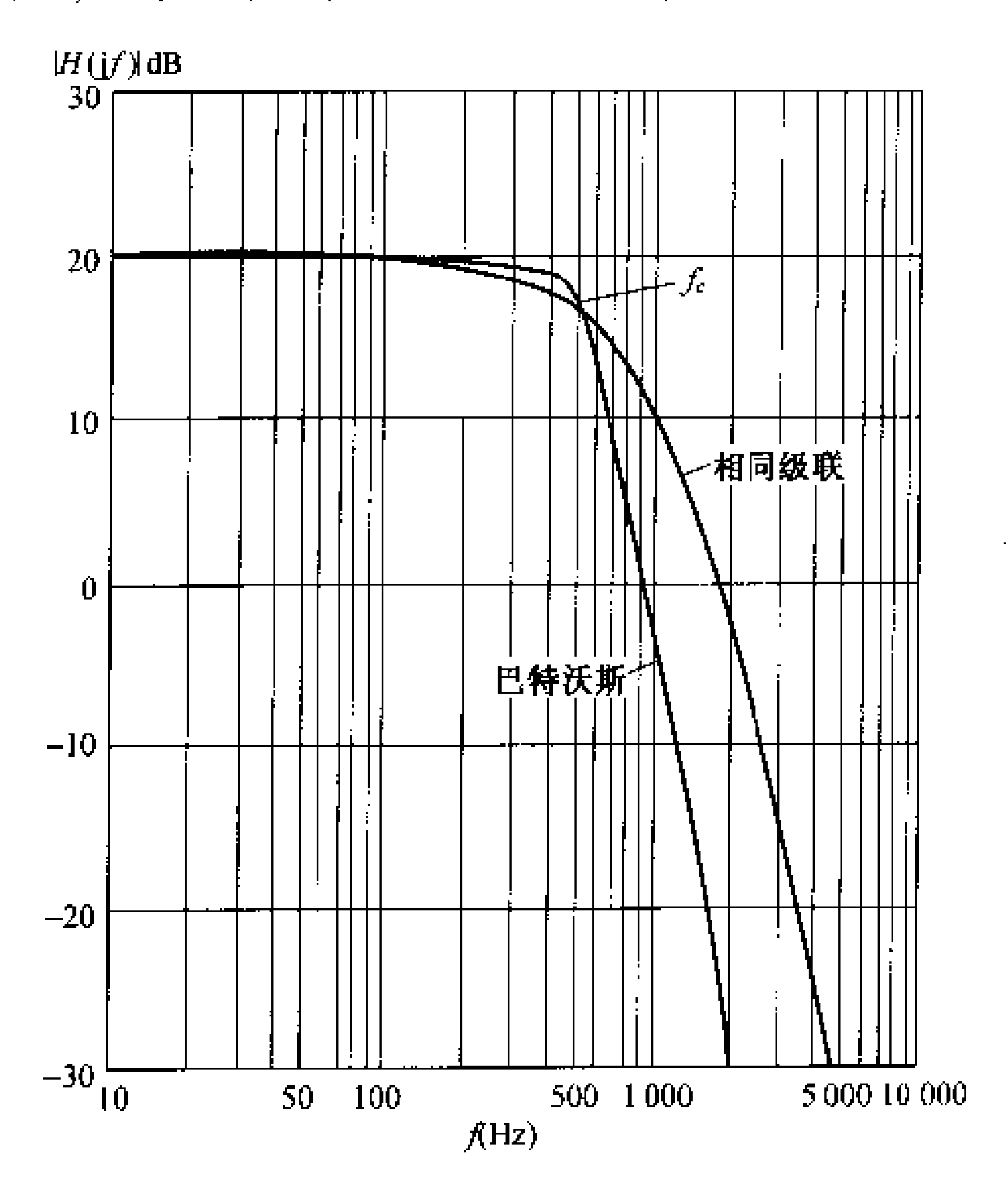


图 15.23 用相同单元级联法和巴特沃斯设计法设计的四阶低通滤波器幅度响应比较

15.4.4 巴特沃斯滤波器的阶

巴特沃斯滤波器的阶越高,其幅度特性就越接近于理想低通滤波器。也就是说,当 n 增加时,在通带内幅度趋近于 1,过渡域变窄,阻带内的幅度趋于零。同时,在阶数增加的时候,电路元件的数量也在增加。因此,滤波器设计的根本问题就是在满足滤波要求条件下,尽量降低阶数。

在低通滤波器的设计当中,滤波特性通常是根据过渡区间的变化快慢确定。如图 15.24 所示,一旦 A_p,ω_p,A_s,ω_s 确定了,巴特沃斯滤波器的阶数也就确定了。

对巴特沃斯滤波器而言:

$$\begin{aligned} A_p &= 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega_p^{2n}}} \\ &= -10\log_{10}(1+\omega_p^{2n}) \end{aligned} \tag{15.37}$$

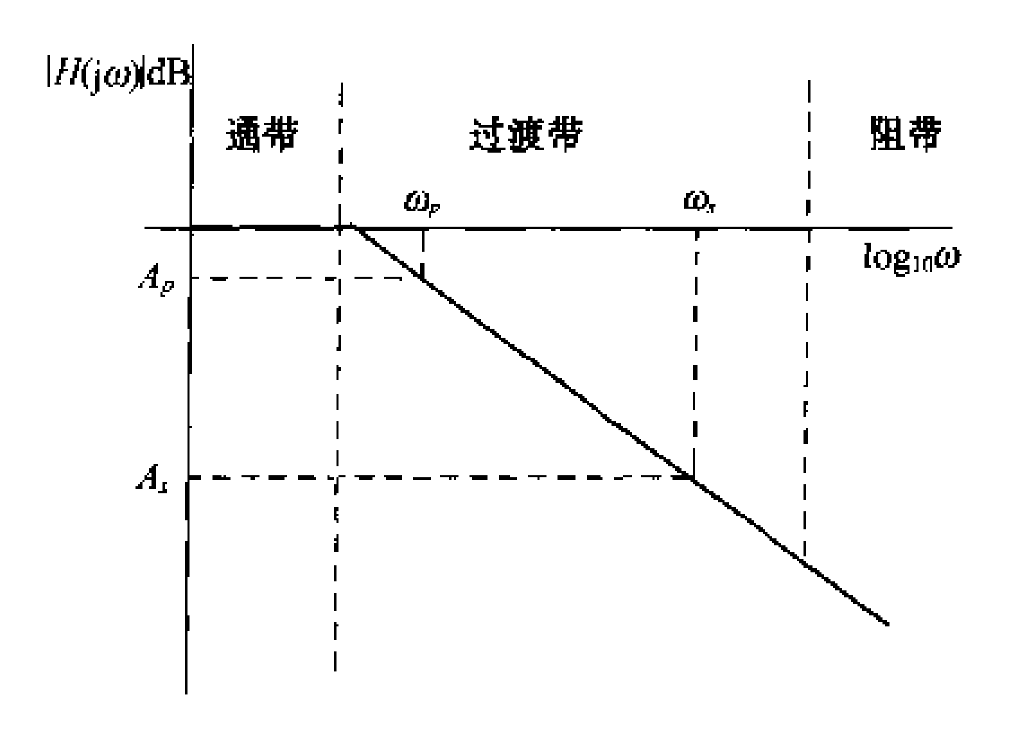


图 15.24　定义低通滤波器的过渡区间

$$A_s = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega_s^{2n}}} = -10\log_{10}(1+\omega_s^{2n}) \tag{15.38}$$

根据对数的定义：

$$10^{-0.1A_p} = 1+\omega_p^{2n} \tag{15.39}$$

$$10^{-0.1A_s} = 1+\omega_s^{2n} \tag{15.40}$$

求 ω_p^n 和 ω_s^n，然后，求比 $(\omega_s/\omega_p)^n$，得到：

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n = \frac{\sqrt{10^{-0.1A_s}-1}}{\sqrt{10^{-0.1A_p}-1}} = \frac{\sigma_s}{\sigma_p} \tag{15.41}$$

为方便起见，式子中引入了符号 σ_s 和 σ_p，式(15.41)可以写为：

$$n\log_{10}(\omega_s/\omega_p) = \log_{10}(\sigma_s/\sigma_p)$$

或：

$$n = \frac{\log_{10}(\sigma_s/\sigma_p)}{\log_{10}(\omega_s/\omega_p)} \tag{15.42}$$

如果 ω_p 是截止频率，可以对式(15.42)进行简化，因为，$A_p = -20\log_{10}\sqrt{2}$，$\sigma_p = 1$，因此：

$$n = \frac{\log_{10}\sigma_s}{\log_{10}(\omega_s/\omega_p)} \tag{15.43}$$

可以进一步化简，现在设计的巴特沃斯滤波器的过渡段非常陡，因此，滤波特性定义将使得 $10^{-0.1A_s} >> 1$，则有：

$$\sigma_s \approx 10^{-0.05A_s} \tag{15.44}$$

$$\log_{10}\sigma_s \approx -0.05A_s \tag{15.45}$$

因此，计算 n 的表达式为：

$$n = \frac{-0.05A_s}{\log_{10}(\omega_s/\omega_p)} \tag{15.46}$$

$\omega_s/\omega_p = f_s/f_p$，所以，计算 n 时，即可以用 rad/s，又可以用 Hz 为单位。

滤波器的阶数必须为整数，因此，使用式(15.42)或者式(15.46)时，应选择比方程结果大且接

近的整数值。下面的例子给出了式(15.42)和式(15.46)的用法。

例 15.10 (a) 一个巴特沃斯滤波器,截止频率为 1000 Hz,在 6000 Hz 频率处的放大系数小于等于 −50 dB。试确定其阶数。

(b) 在频率为 6000 Hz 处的实际放大系数为多少?

解:

(a) 因为截止频率已经给定,而且已知 $\sigma_p = 1$,同时由定义式注意到,$10^{-0.1(-50)}$远大于 1。因此,由式(15.46)确定:

$$n = \frac{(-0.05)(-50)}{\log_{10}(6000/1000)} = 3.21$$

所以,需要一个四阶巴特沃斯滤波器。

(b) 用式(15.25)计算在 6000 Hz 处的实际放大系数,实际放大系数的分贝数为:

$$K = 20\ \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+6^8}}\right) = -62.25\ \text{dB}$$

例 15.11 (a) 一个巴特沃斯滤波器,在 500 Hz 处的幅度比通带内的小 10 dB,在 5 000 Hz 处的幅度比通带内的小 60 dB,确定滤波器的阶数。

(b) 确定滤波器的截止频率(Hz)。

(c) 在 5 000 Hz 处,滤波器的实际放大系数是多少?

解:

(a) 因为截止频率没有给出,需要用式(15.42)确定滤波器的阶数:

$$\sigma_p = \sqrt{10^{-0.1(-10)} - 1} = 3$$

$$\sigma_s = \sqrt{10^{-0.1(-60)} - 1} \approx 1000$$

$$\omega_s/\omega_p = f_s/f_p = 5000/500 = 10$$

$$n = \frac{\log_{10}(1000/3)}{\log_{10}(10)} = 2.52$$

因此,三阶巴特沃斯滤波器可以满足设计要求。

(b) 已知 500 Hz 处的放大系数为 −10 dB,可以确定截止频率,由式(15.25)可以写出:

$$-10\ \log_{10}[1 + (\omega/\omega_c)^6] = -10$$

式中 $\omega = 1000\pi$ rad/s,所以:

$$1 + (\omega/\omega_c)^6 = 10$$

和

$$\omega_c = \frac{\omega}{\sqrt[6]{9}}$$

$$= 2178.26\ \text{rad/s}$$

于是:

$$f_c = 346.68\ \text{Hz}$$

(c) 在 5000 Hz 处的滤波器的实际放大系数为:

$$K = -10\ \log_{10}[1 + (5000/346.68)^6]$$

$$= -69.54\ \text{dB}$$

15.4.5 巴特沃斯高通、带通和带阻滤波器

n 阶巴特沃斯高通滤波器的转移函数分母中含有 n 阶巴特沃斯多项式，这一点和 n 阶巴特沃斯低通滤波器一样。但是，在高通滤波器中，转移函数的分子是 s^n，而在低通滤波器中，分子是 1，另外，采用级联方法设计巴特沃斯高通滤波器。一阶因式用原型高通滤波器级联完成(图 15.4，$R_1 = R_2 = 1\ \Omega, C = 1$ F)，为产生巴特沃斯多项式中的二阶因式，要有一个转移函数为以下形式的电路：

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + b_1 s + 1}$$

该电路如图 15.25 所示。

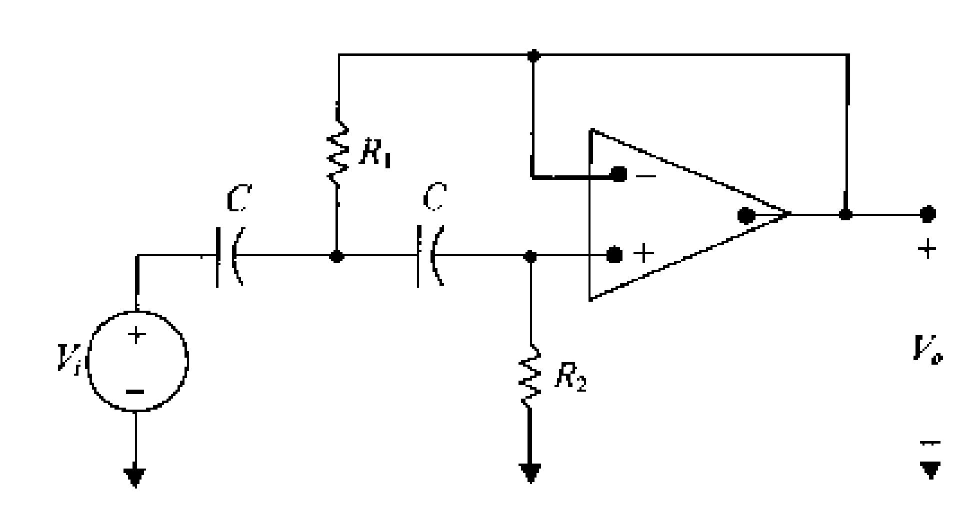


图 15.25　二阶巴特沃斯滤波器电路

该电路的转移函数为：

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2 C}s + \frac{1}{R_1 R_2 C^2}} \tag{15.47}$$

令 $C = 1$ F，于是：

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2}s + \frac{1}{R_1 R_2}} \tag{15.48}$$

只要用级联电路中级联图 15.25 所示的二阶电路，就可以实现巴特沃斯多项式中的二阶因式 $(s^2 + b_1 s + 1)$，其中，电阻值要满足式(15.49)：

$$b_1 = \frac{2}{R_2} \quad 和 \quad 1 = \frac{1}{R_1 R_2} \tag{15.49}$$

需要注意的是，图 15.21 与图 15.25 及其原型滤波器转移函数 $1/(s^2 + b_1 s + 1)$ 与 $s^2/(s^2 + b_1 s + 1)$ 之间的关系，因为这是一个一般性的规律，非常重要。首先，将图 15.21 的低通电路中的电阻和电容对调后形成图 15.25 所示的高通电路，第二，将原型低通滤波器转移函数中的 s 用 $1/s$ 代替(见习题 15.45)就得到原型高通滤波器的转移函数。

利用频率和幅度比例性可以设计截止频率非 1 和具有实际元件值的巴特沃斯高通滤波器，再级联一个转移放大器就可以设计出通带放大系数非 1 的滤波器，本章的最后讨论了多个巴特沃斯高通滤波器的设计问题。

练习题

15.6 图 15.25 所示电路,试确定 R_1 和 R_2 的值,使其成为二阶原型巴特沃斯高通滤波器。

答: $R_1 = 0.707\ \Omega, R_2 = 1.41\ \Omega$。

15.5 窄带带通和带阻滤波器

用最简单的低通和高通滤波器设计带通和带阻滤波器,一般采用级联和并联各单元的设计方法,但是这种方法受到限制,它只适合于宽带或者低品质因数的系统,这种限制是因为级联带通滤波器和并联带阻滤波器的转移函数具有离散的实极点。这种设计方法适合于截止频率距离非常远,且具有极低品质因数系统设计。当截止频率相等,即极点位置重合时,随着离散实极点的出现,能得到最大的品质因数。考虑到这种情况的转移函数:

$$H(s) = \left(\frac{-\omega_c}{s+\omega_c}\right)\left(\frac{-s}{s+\omega_c}\right)$$

$$= \frac{s\omega_c}{s^2 + 2\omega_c s + \omega_c^2}$$

$$= \frac{0.5\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_c^2} \quad (15.50)$$

方程是带通滤波器转移函数的标准形式,因此,可以直接确定带宽和中心频率:

$$\beta = 2\omega_c \quad (15.51)$$

$$\omega_o^2 = \omega_c^2 \quad (15.52)$$

根据式(15.51)和式(15.52)以及品质因数的定义,有:

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} = \frac{\omega_c}{2\omega_c} = \frac{1}{2} \quad (15.53)$$

这样,具有离散实极点时,带通滤波器(或者带阻滤波器)的最大品质因数 $Q = 1/2$。

为实现具有高品质因数的有源滤波器,需要使用运放电路,它能使得转移函数具有共轭复极点,下面来分析图 15.26 所示的电路。

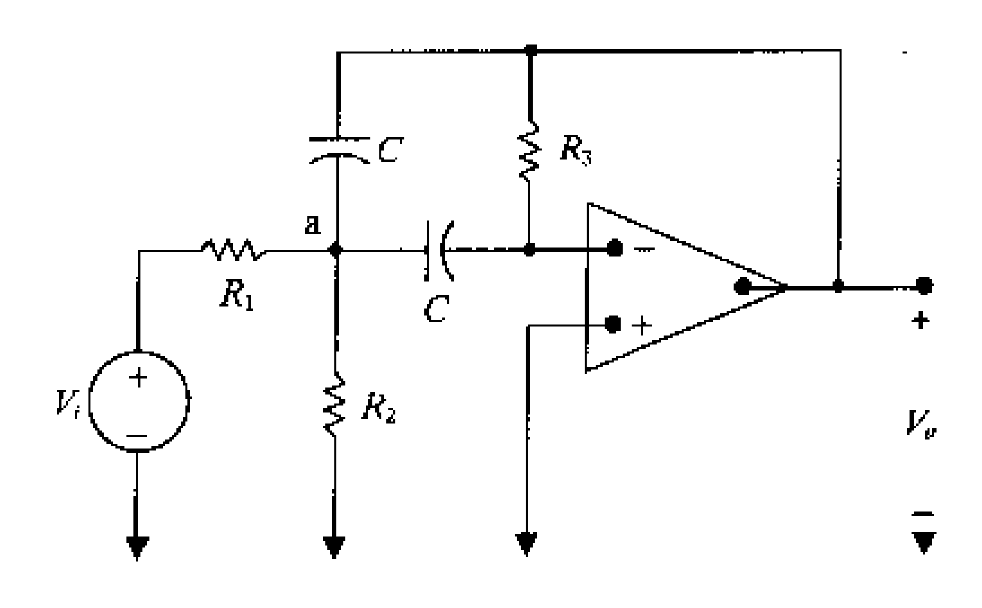


图 15.26 有源高品质带通滤波器

在运放的负端,取电流之和得:

$$\frac{V_a}{\frac{1}{sC}}=\frac{-V_o}{R_3}$$

求解 V_a：

$$V_a=\frac{-V_o}{sR_3C} \tag{15.54}$$

在标有 a 的节点，电流取和得：

$$\frac{V_i-V_a}{R_1}=\frac{V_a-V_o}{\frac{1}{sC}}+\frac{V_a}{\frac{1}{sC}}+\frac{V_a}{R_2}$$

求解 V_i：

$$V_i=(1+2sR_1C+R_1/R_2)V_a-sR_1CV_0 \tag{15.55}$$

将式(15.54)代入式(15.55)中，并整理，得到转移函数 V_o/V_i 的表达式：

$$H(s)=\frac{\frac{-s}{R_1C}}{s^2+\frac{2}{R_3C}s+\frac{1}{R_{eq}R_3C^2}} \tag{15.56}$$

其中：

$$R_{eq}=R_1\parallel R_2=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

因为式(15.56)是带通滤波器转移函数的标准形式，即，

$$H(s)=\frac{K\beta s}{s^2+\beta s+\omega_o^2}$$

令两个等式相等求得电阻值，该电阻要满足指定中心频率(ω_o)、品质因数(Q)和通带放大系数(K)：

$$\beta=\frac{2}{R_3C} \tag{15.57}$$

$$K\beta=\frac{1}{R_1C} \tag{15.58}$$

$$\omega_o^2=\frac{1}{R_{eq}R_3C^2} \tag{15.59}$$

定义图 15.25 所示电路的模型电路，该电路的 $\omega_o=1$ rad/s，$C=1$ F，根据要求的品质因数和通带放大系数就可以求出 R_1,R_2,R_3 的表达式。对原型电路，证明 R_1,R_2,R_3 的表达式为：

$$R_1=Q/K$$

$$R_2=Q/(2Q^2-K)$$

$$R_3=2Q$$

该证明留给读者完成。

确定电路元件的实际值要用比例法，例 15.12 给出了这种设计过程。

例 15.12　根据图 15.26 所示电路设计一个带通滤波器，其中心频率为 3000 Hz，品质因数为 10，通带放大系数为 2，所用的电容为 0.01 μF，计算所设计电路的转移函数，画出幅度响应的

波特图。

解：

因为 $Q=10, K=2$，所以，原型电路中的 R_1, R_2, R_3 的值为：

$$R_1 = 10/2 = 5$$
$$R_2 = 10/(200-2) = 10/198$$
$$R_3 = 2(10) = 20$$

比例系数为 $k_f = 6\ 000\pi, k_m = 10^8/k_f$，经过比例放大后：

$$R_1 = 26.5\ \text{k}\Omega$$
$$R_2 = 268.0\ \Omega$$
$$R_3 = 106.1\ \text{k}\Omega$$

电路如图 15.27 所示。

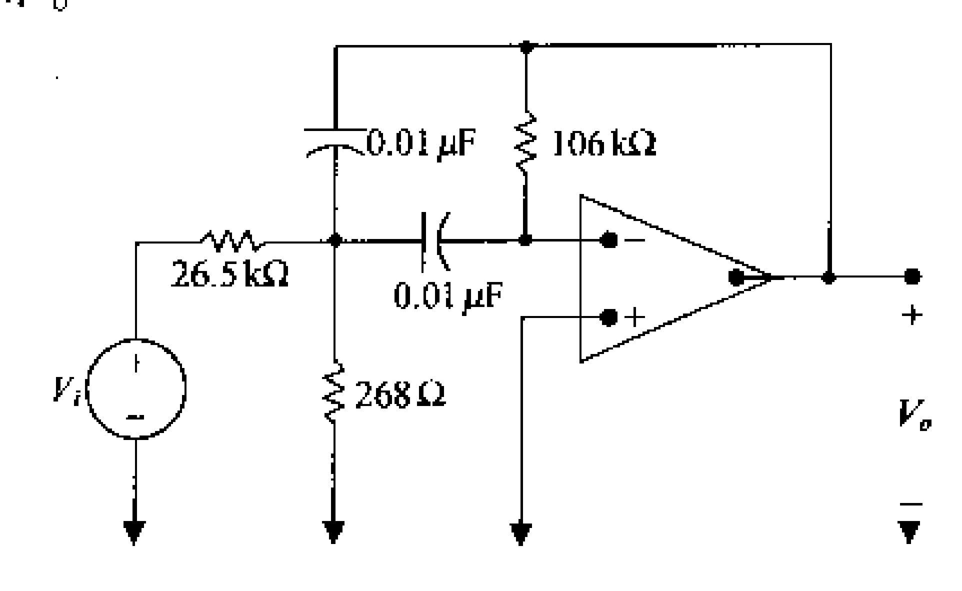


图 15.27 例 15.12 设计的高品质带通滤波器

将电阻和电容值代入式(15.56)中得到该电路的转移函数：

$$H(s) = \frac{-3770s}{s^2 + 1885.0s + 355 \times 10^6}$$

显然，该转移函数满足例题中所定义的带通滤波器，其幅度响应的波特图如图 15.28 所示。

与级联带通滤波器一样，用低通滤波器、高通滤波器及积分放大器通过并联方法实现带阻滤波器也有低品质因数的限制。图 15.29 所示的电路是一个被称为"双 T 陷波滤波器"的有源高品质因数的带阻滤波器，因为在节点 a 和 b 有两个 T 型电路部件。

先将流出节点 a 的电流相加：

$$(V_a - V_i)sC + (V_a - V_o)sC + \frac{2(V_a - \sigma V_o)}{R} = 0$$

或：

$$V_a[2sCR + 2] - V_o[sCR + 2\sigma] = sCRV_i \tag{15.60}$$

流出节点 b 的电流之和为：

$$\frac{V_b - V_i}{R} + \frac{V_b - V_o}{R} + (V_b - \sigma V_o)2sC = 0$$

或：

$$V_b[2 + 2RCs] - V_o[1 + 2\sigma RCs] = V_i \tag{15.61}$$

将流出上部同相放大器输入端的电流相加得：

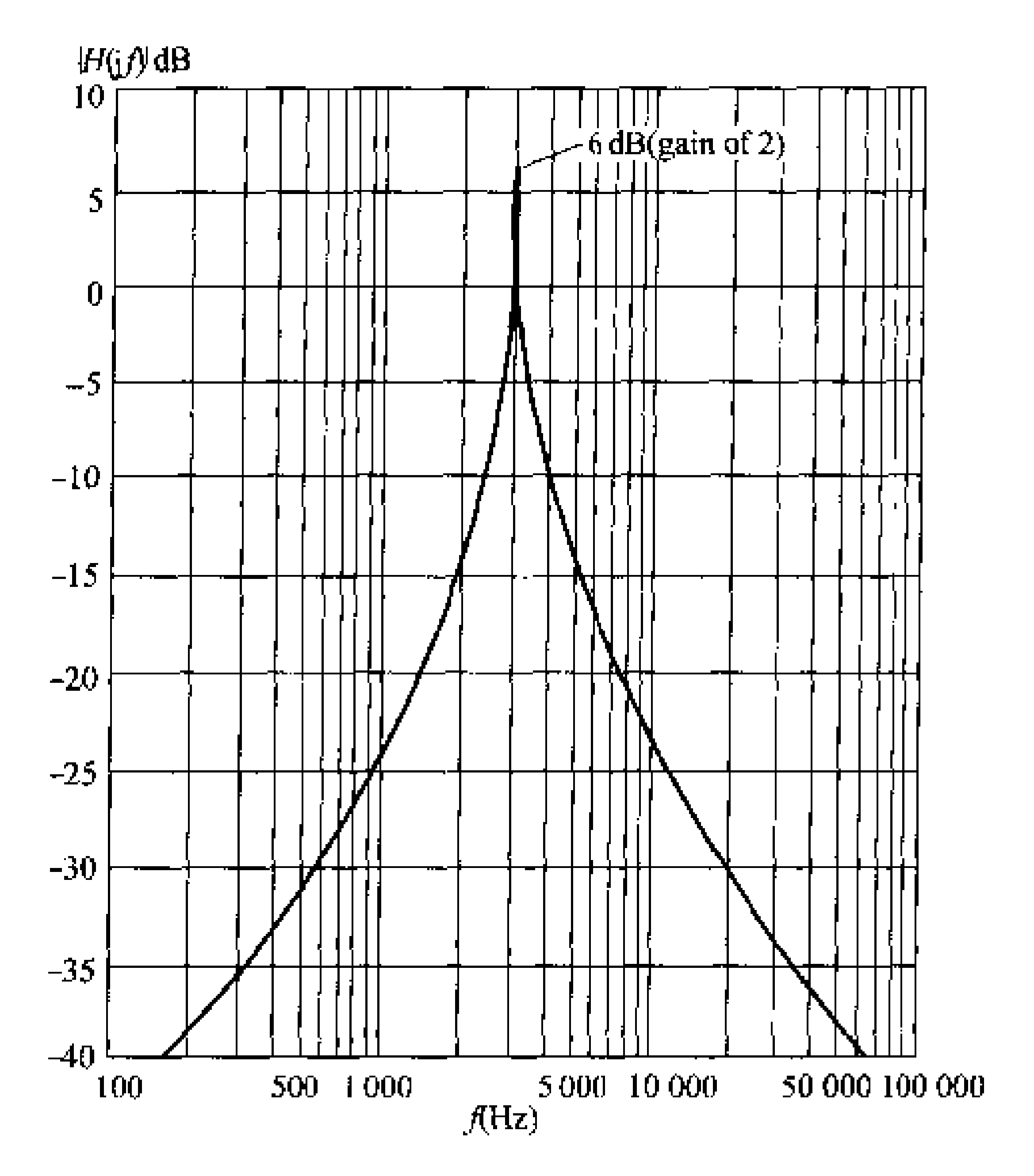


图 15.28　例 15.12 设计的滤波器的波特图幅度曲线

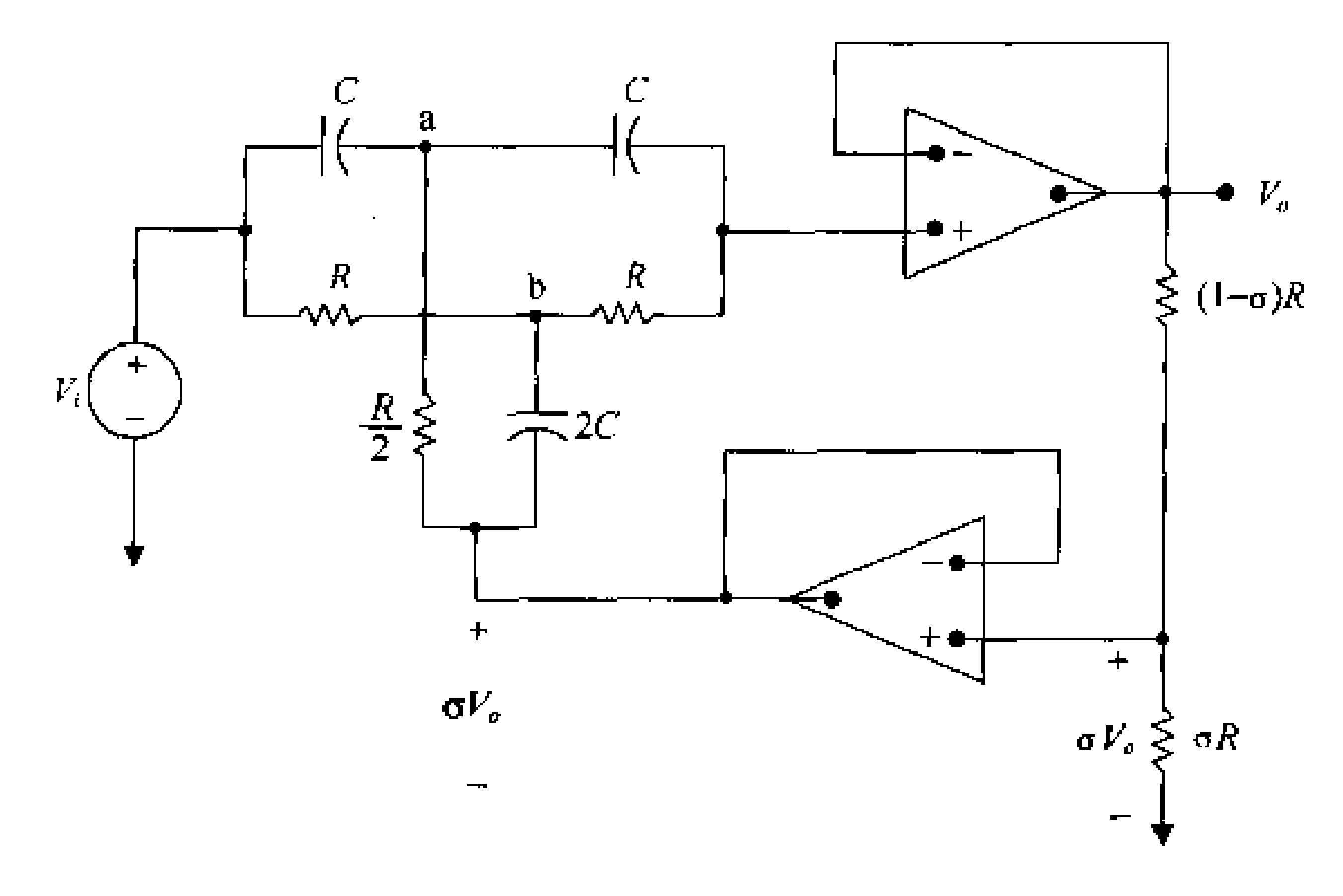


图 15.29　高品质的带阻滤波器

$$(V_o - V_a)sC + \frac{V_o - V_b}{R} = 0$$

或：

$$-sRCV_a - V_b + (sRC + 1)V_o = 0 \tag{15.62}$$

根据式 (15.60) ~ (15.62)，用克来姆法则求 V_o：

$$V_o=\frac{\begin{vmatrix}2(RCs+1) & 0 & sCRV_i\\ 0 & 2(RCs+1) & V_i\\ -RCs & -1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2(RCs+1) & 0 & -(RCs+2\sigma)\\ 0 & 2(RCs+1) & -(2\sigma RCs+1)\\ -RCs & -1 & (RCs+1)\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(R^2C^2s^2+1)V_i}{R^2C^2s^2+4RC(1-\sigma)s+1} \tag{15.63}$$

整理式 (16.63),得到转移函数:

$$H(s)=\frac{V_o}{V_i}=\frac{\left(s^2+\frac{1}{R^2C^2}\right)}{\left[s^2+\frac{4(1-\sigma)}{RC}s+\frac{1}{R^2C^2}\right]} \tag{15.64}$$

该式是带阻滤波器转移函数的标准形式:

$$H(s)=\frac{s^2+\omega_0^2}{s^2+\beta s+\omega_0^2} \tag{15.65}$$

令式 (15.64) 等于式 (16.65) 得:

$$\omega_o^2=\frac{1}{R^2C^2} \tag{15.66}$$

$$\beta=\frac{4(1-\sigma)}{RC} \tag{15.67}$$

该电路有三个参数(R, C 和σ)和两个设计约束(ω_o 和β),因此,一个参数是可以任意选择的,通常是电容值任选,因为市场上电容的可选范围很小。当 C 选定之后得:

$$R=\frac{1}{\omega_o C} \tag{15.68}$$

和

$$\sigma=1-\frac{\beta}{4\omega_o}=1-\frac{1}{4Q} \tag{15.69}$$

例 15.13 给出高品质有源带阻滤波器的设计举例。

例 15.13 设计一个高品质的有源带阻滤波器(在图 15.29 电路的基础上)。其中心频率为 5000 rad/s,带宽为 1000 rad/s,所用的电容为 1 μF。

解:

在带阻原型滤波器中,$\omega_o=1$ rad/s, $R=1\ \Omega$, $C=1$ F,与前述讨论的一样,当 ω_o 和 Q 给定时,C 值可以任意选择,R 和 σ 可以根据式(15.68)和式(15.69)求得。根据题目中定义,$Q=5$,用式(15.68)和(15.69)发现:

$$R=200\ \Omega$$

$$\sigma=0.95$$

因此,所需要电阻的阻值分别为 200 Ω(R),100 Ω($R/2$),190 Ω(σR),10 Ω[$(1-\sigma)R$],最终的设计如图 15.30 所示,幅度波特图如图 15.31 所示。

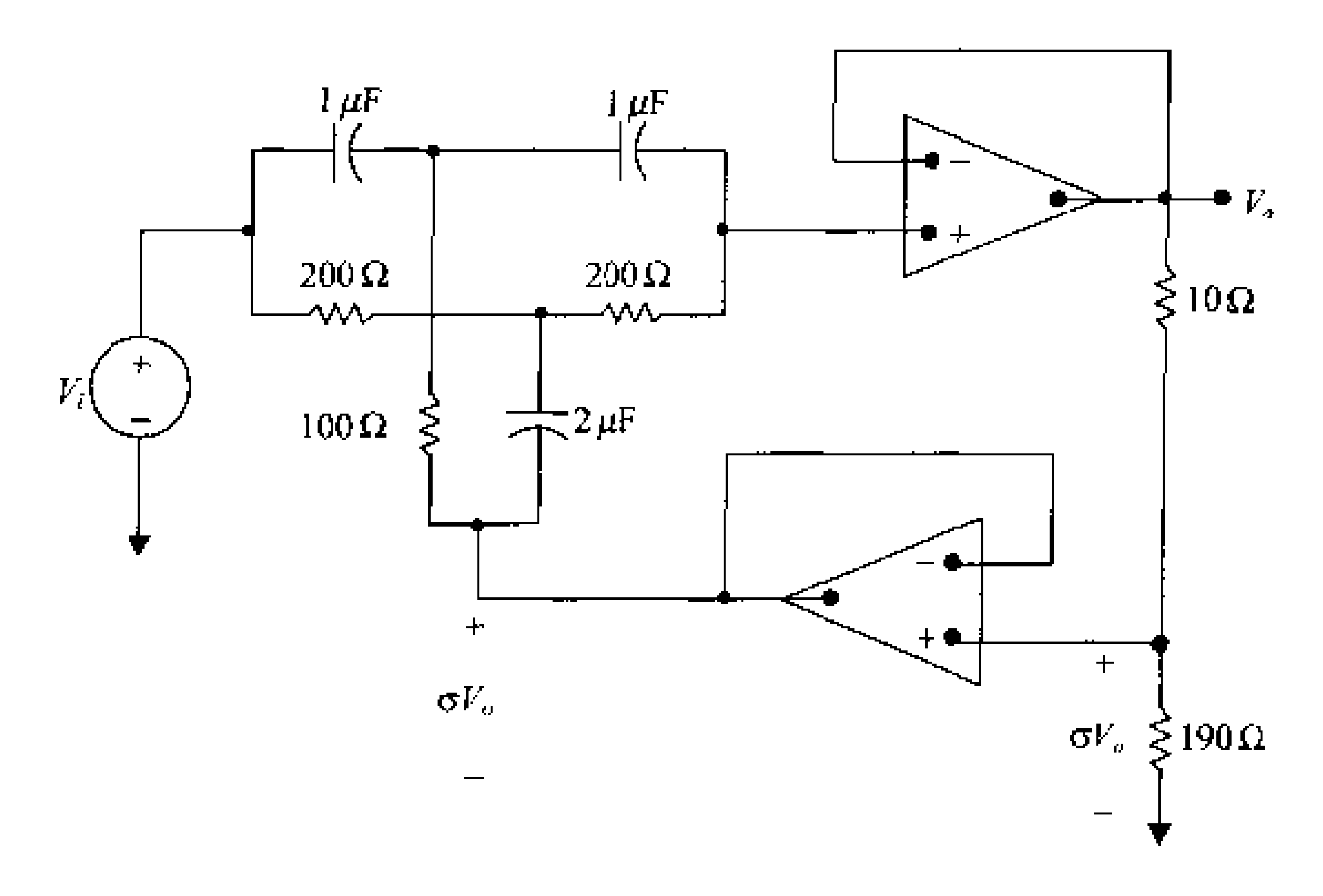


图 15.30　例 15.13 设计的高品质有源带阻滤波器

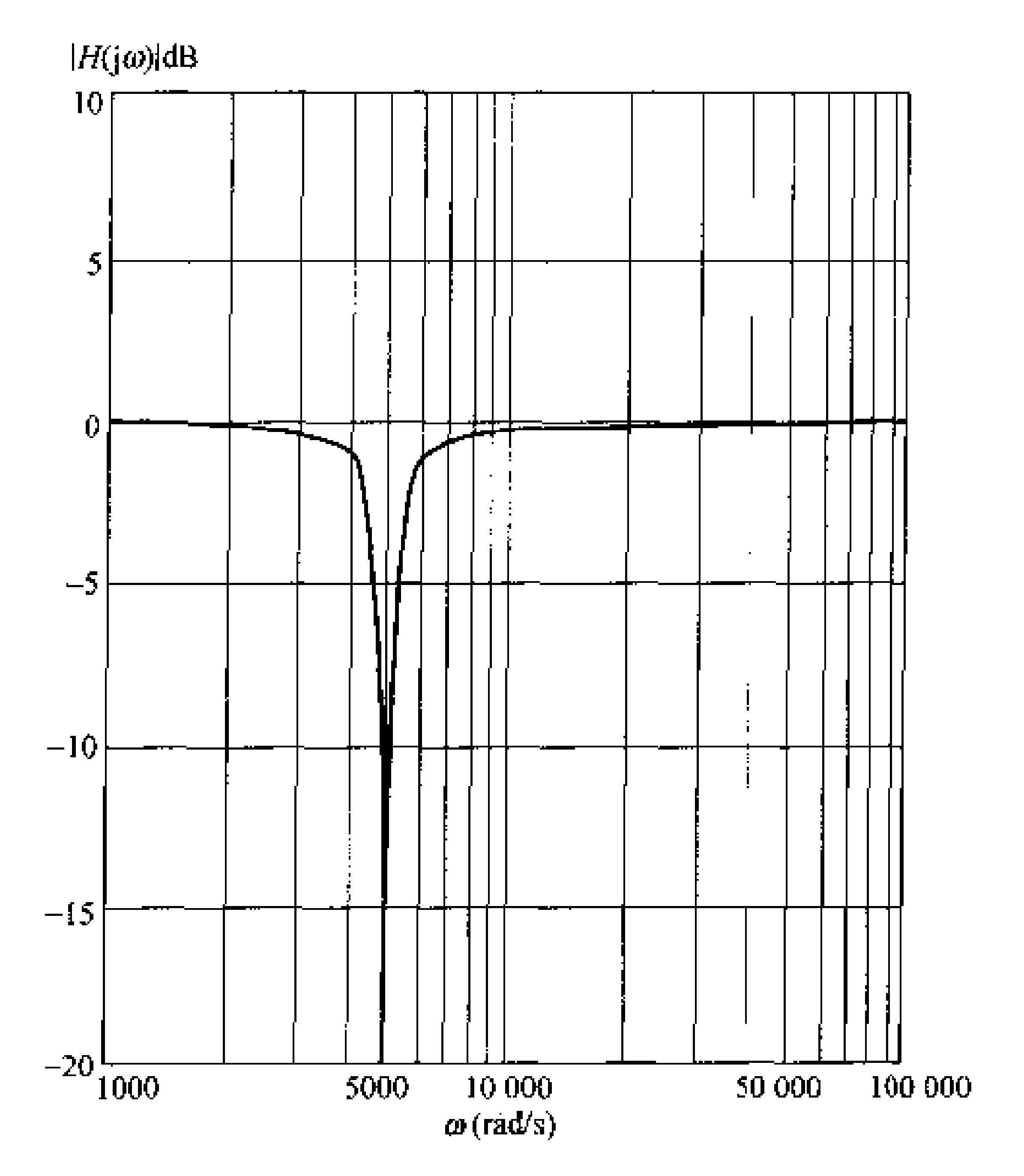


图 15.31　例 15.13 的幅度波特图

练习题

15.7　设计一个有源带通滤波器，$Q=8, K=5, \omega_o=1\ 000$ rad/s，$C=1\ \mu F$，求所有电阻的值。

答：$R_1=1.6$ kΩ，$R_2=65.04$ Ω，$R_3=16$ kΩ。

15.8　设计一个有源单位放大带阻滤波器，$\omega_o=1\ 000$ rad/s，$Q=4$，$C=2\ \mu F$，求 R 和 σ 的值。

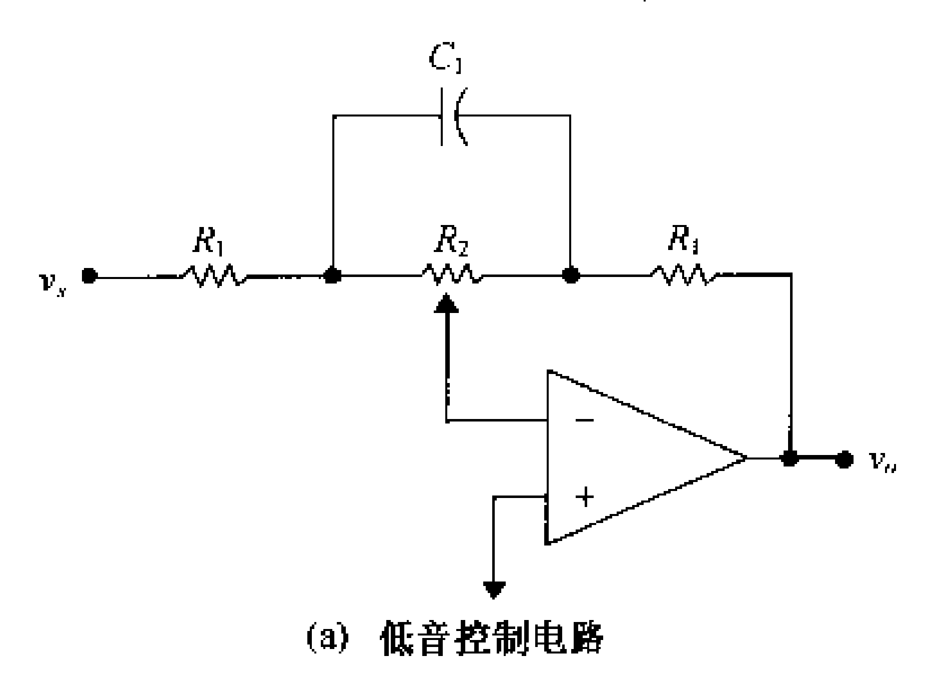
答：$R=500$ Ω，$\sigma=0.9375$。

实例

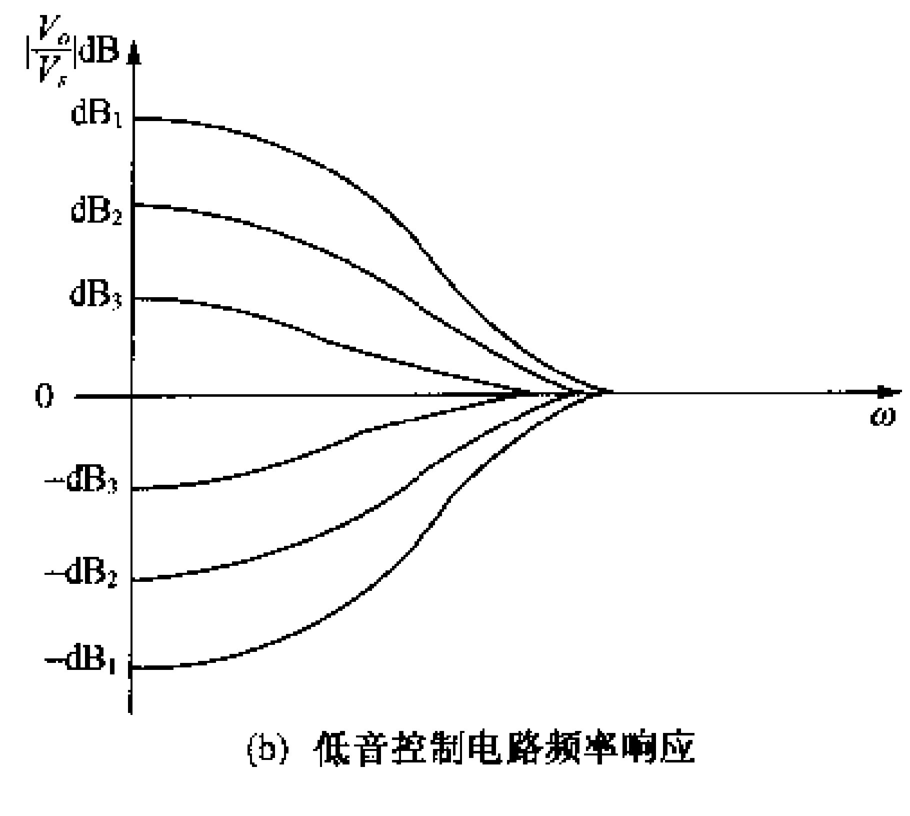
低音音量控制二

下面讨论用于低音信号放大控制电路,音频指的是 20 Hz 到 20 kHz 频率范围内的信号,低音指的是 300 Hz 频率范围内的信号。音量控制电路及其频率响应如图 15.32 所示。

响应曲线族中的每一条曲线可以通过调节电位器的设置值得到,如图 15.32 (a) 所示。



(a) 低音控制电路



(b) 低音控制电路频率响应

图 15.32

研究图 15.32 (b) 频率响应曲线时要注意以下几个问题。首先,放大系数的分贝值可以正可以负,若放大系数为正,则低音信号被放大或者加强;若放大系数为负,则信号被消弱或者滤掉。第二,可以选择一个频率响应特性,在低音内所有频率的放大倍数为 1(0 dB)。下面会看到,若电位器放在中间位置,电路对低音信号将没有影响。第三,当频率增加的时候,所有响应的特性曲线都接近 0 dB 或者单位放大倍数。因此,对较高频率的信号或者音频中的高音,音量放大控制电路不起任何作用。

为分析图 15.32 (a) 所示电路的频率响应,先计算其转移函数 V_o/V_s,为了简化计算,图 15.33 给出了 s 域有效电路模型,为了进行节点电压分析,已经标出节点电压 V_a 和 V_b,电位器的位置由 α 的值决定。如图 15.33 所示。

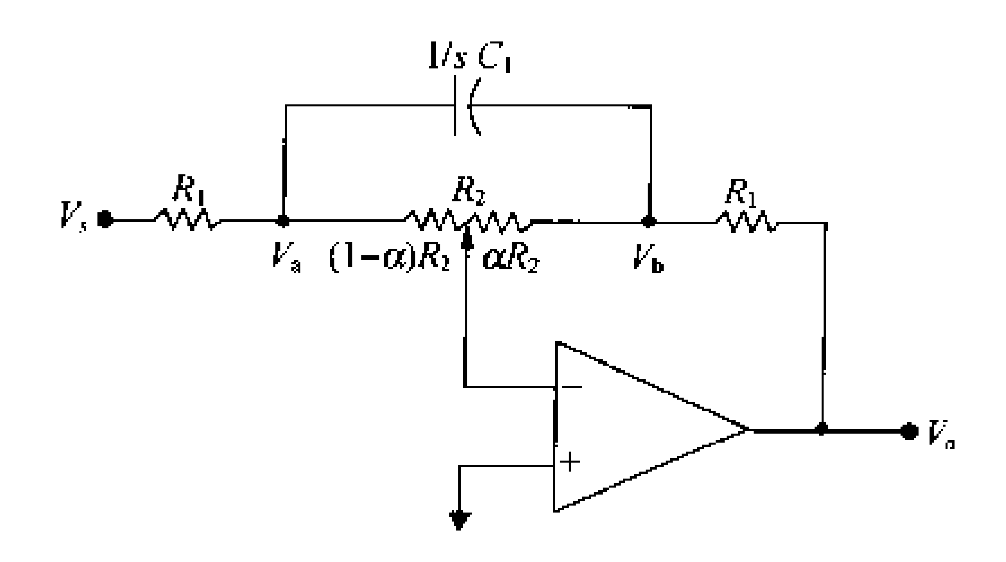


图 5.33　低音音量控制电路的 s 域模型，α 决定了电位器的位置，因此 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

为求转移函数，列写描述电流的三个节点方程，解方程，求得 V_o/V_s。

节点电压方程为：

$$\frac{V_a}{(1-\alpha)R_2}+\frac{V_a-V_s}{R_1}+(V_a-V_b)sC_1=0$$

$$\frac{V_b}{\alpha R_2}+(V_b-V_a)sC_1+\frac{V_b-V_o}{R_1}=0$$

$$\frac{V_a}{(1-\alpha)R_2}+\frac{V_b}{\alpha R_2}=0$$

可以将 V_o 看做 V_i 的函数，解得三个节点电压方程，从而，求得转移函数 $H(s)$：

$$H(s)=\frac{V_o}{V_s}=\frac{-(R_1+\alpha R_2+R_1R_2C_1s)}{R_1+(1-\alpha)R_2+R_1R_2C_1s}$$

直接得到：

$$H(j\omega)=\frac{-(R_1+\alpha R_2+j\omega R_1R_2C_1)}{[R_1+(1-\alpha)R_2+j\omega R_1R_2C_1]}$$

检验该转移函数，看是否能产生图 15.32（b）所示的频率响应曲线族。在所有频率下，$\alpha=0.5$，$H(j\omega)$的幅度为 1：

$$|H(j\omega)|=\frac{|R_1+0.5R_2+j\omega R_1R_2C_1|}{|R_1+0.5R_2+j\omega R_1R_2C_1|}=1$$

当 $\omega=0$ 时，得到：

$$|H(j0)|=\frac{R_1+\alpha R_2}{R_1+(1-\alpha)R_2}$$

$\alpha=1$ 时，$H(j0)$是 $\alpha=0$ 时的 $H(j0)$的倒数，即：

$$|H(j0)|_{\alpha=1}=\frac{R_1+R_2}{R_1}=\frac{1}{|H(j0)|_{\alpha=0}}$$

细心的读者会发现，不仅在 $\omega=0$，而是在所有频率下，这种倒数关系都成立。

例如，$\alpha=0.4$ 和 $\alpha=0.6$ 与 $\alpha=0.5$ 时是对称的，并且：

$$H(j\omega)_{\alpha=0.4}=\frac{-(R_1+0.4R_2)+j\omega R_1R_2C_1}{(R_1+0.6R_2)+j\omega R_1R_2C_1}$$

而：

$$H(j\omega)_{\alpha=0.6}=\frac{-(R_1+0.6R_2)+j\omega R_1R_2C_1}{(R_1+0.4R_2)+j\omega R_1R_2C_1}$$

因此：

$$H(\mathrm{j}\omega)_{\alpha=0.4}=\frac{1}{H(\mathrm{j}\omega)_{\alpha=0.6}}$$

根据 α 值的不同，音量控制电路或者放大或者消弱输入信号。R_1,R_2,C_1 的值是根据两个设计要求确定的。第一个设计要求是低音范围的(ω 趋近于 0)通带放大倍数。第二个是通带放大或者消弱 3 dB 时的频率。满足设计要求的元件值是根据 $\alpha=0$ 或者 $\alpha=1$ 的时候计算出来的。通过讨论已经知道，最大的放大系数为 $(R_1+R_2)/R_1$。最大的消弱倍数是 $R_1/(R_1+R_2)$。若假设 $(R_1+R_2)/R_1>>1$，则当 $\omega=1/R_2C_1$ 时，放大倍数(或消弱倍数)与最大值之间相差 3 dB。这一点通过以下方程就可以看到：

$$|H(\mathrm{j}\frac{1}{R_2C_1})|_{\alpha=1}=\frac{|R_1+R_2+\mathrm{j}R_1|}{|R_1+\mathrm{j}R_1|}=\frac{|\frac{R_1+R_2}{R_1}+\mathrm{j}1|}{|1+\mathrm{j}1|}\approx\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)$$

和

$$\left|H(\mathrm{j}\frac{1}{R_2C_1})\right|_{\alpha=0}=\frac{|R_1+\mathrm{j}R_1|}{|R_1+R_2+\mathrm{j}R_1|}=\frac{|1+\mathrm{j}1|}{|\frac{R_1+R_2}{R_1}+\mathrm{j}1|}\approx\sqrt{2}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)$$

下面的例子将给出低频音量控制电路设计的思路。

例 15.14 用图 15.32 (a) 所示的电路设计一个音量控制电路，最大放大倍数为 20 dB，在 40 Hz 频率时的放大系数为 17 dB，试用所选择的电阻 R_1,R_2 值，计算 $\omega=0$ 时的最大放大系数，$\omega=1/R_2C_1$ 时的放大系数验证设计的正确性。

解：

为了满足 $\omega=0$ 和 $\alpha=1$ 时，最大放大系数为 20 dB 的要求：

$$\frac{R_1+R_2}{R_1}=10$$

或：

$$R_2=9R_1$$

选 R_1 阻值为 11.1 kΩ 的标准电阻，R_2 为 100 kΩ 的电位器，因为 $(R_1+R_2)/R_1>>1$，电容 C_1 的值将是：

$$C_1=\frac{1}{2\pi(40)(10^5)}=39.79\ \mathrm{nF}$$

选择一个 39 μF 的标准电容，低音音量控制电路如图 15.34 所示。

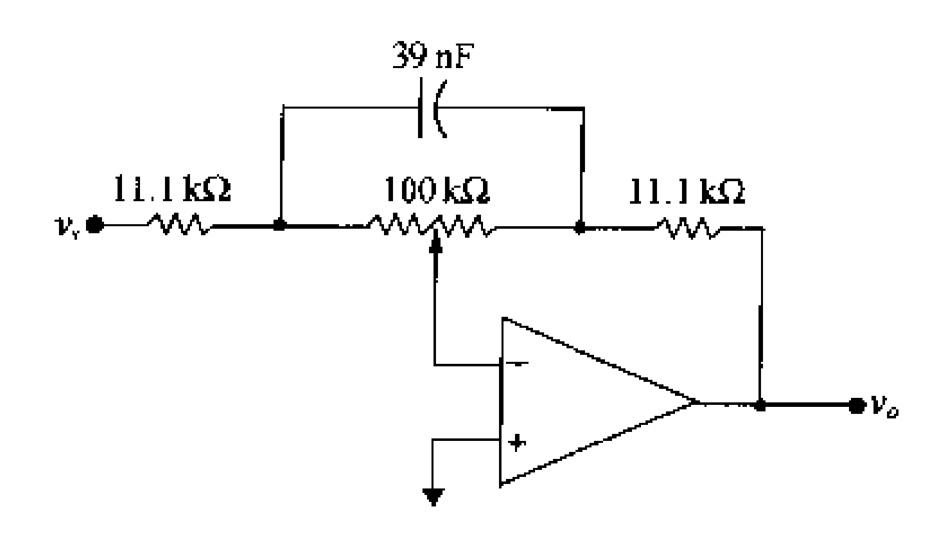


图 15.34　低音音量控制电路

根据选择的电阻 R_1，R_2 的值，$\alpha=1$ 时最大放大系数为：

$$20\ \log_{10}\left(\frac{111.1}{11.1}\right)_{\alpha=1}=20.01\ \text{dB}$$

当 $C_1=39$ nF 时，频率 $1/R_2C_1$ 为：

$$\frac{1}{R_2C_1}=\frac{10^9}{10^5(39)}=256.41\ \text{rad/s}$$

或者为 40.81 Hz，在 256.41 rad/s 频率处，转移函数的最大值为：

$$|H(\text{j}256.41)|_{\alpha=1}=\frac{|111.1\times10^3+\text{j}256.41(11.1)(100)(39)10^{-3}|}{|11.1\times10^3+\text{j}256.41(11.1)(100)(39)10^{-3}|}$$
$$=7.11$$

因此，此时的放大系数为：

$$20\ \log_{10}(7.11)_{\alpha=1}=17.04\ \text{dB}$$

通过本章的习题 15.52～15.54，读者会对音量控制电路有更加进一步的认识。

小结

- 有源滤波器由理想运放、电阻和电容元件组成，可以构成低通、高通、带通和带阻滤波器，有源滤波器克服了无源滤波器的许多缺点。
- 原型低通滤波器。其元件值为 $R_1=R_2=1\ \Omega$，$C=1$ F，通带放大系数为 1，截止频率为 1 rad/s，原型高通滤波器也具有同样的元件、放大系数和截止频率。
- 幅度比例法。在不改变电路频率响应的情况下，改变元件的值，若幅度比例系数为 k_m，则比例放大前后元件值之间的关系为：

$$R'=k_mR,\ L'=k_mL\ \text{和}\ C'=C/k_m$$

- 频率比例法。在不改变频率响应形状的情况下，可以将电路频率响应的位置移到另一个频率区域，若频率比例系数为 k_f，则比例化前后各元件间的关系为：

$$R'=R,\ L'=L/k_f\ \text{和}\ C'=C/k_f$$

- 元件值可以通过幅度和频率比例性进行比例化，比例前后各个元件的关系为：

$$R'=k_mR,\ L'=(k_m/k_f)L\ \text{和}\ C'=C/(k_mk_f)$$

- 高通和低通滤波器的设计都可以从原型滤波器电路开始，比例法可以用于将频率响应移动到要求的截止频率位置上，元件参数应选择市场上可以买到的元件。

- 低通滤波器、高通滤波器和转移放大器级联就可以构成宽带带通滤波器,其中低通滤波器具有较高的截止频率,高通滤波器具有较低的截止频率,转移放大器用来完成具有通带放大系数非 1 的放大。用这种方式构成的带通滤波器必须是宽带滤波器($\omega_{c2} >> \omega_{c1}$),以便各级联单元可以相互间独立确定。
- 有源宽带带阻滤波器可以由低通滤波器、高通滤波器和积分放大器等单元的并联构成,低通滤波器的截止频率是带阻滤波器的较低截止频率。高通滤波器的截止频率是带阻滤波器的较高截止频率,其输出与积分放大器输入相连,该积分放大器产生通带内的放大倍数,用这种方法构成的带阻滤波器必须是宽带滤波器($\omega_{c2} >> \omega_{c1}$),这样才能使得低通和高通滤波器之间实现相互独立的设计。
- 高阶有源滤波器的转移函数有多个极点,使得从通带向阻带的过渡非常快,因而更加接近于理想的频率响应。
- 具有截止频率为 1 rad/s 的 n 阶巴特沃斯低通滤波器的转移函数可以由下面的方程确定:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}$$

步骤为:

(1) 找到分母多项式的根。

(2) 将左半面的根分配给 $H(s)$。

(3) 写出一阶和二阶因式的乘积作为 $H(s)$的分母。

- 设计巴特沃斯滤波器的关键是确定滤波器的阶数,滤波器通常根据四个量 A_p, ω_p, A_s 和 ω_s 定义过渡域的斜度,根据这几个量可以计算出比式(15.42)或式(15.46)的解大的最小整数。
- 二阶低通运放滤波器(如图 15.21 所示),具有 1 Ω 电阻值和可以选择的电容,可以产生巴特沃斯多项式的因式,这种滤波器的级联可以构成偶阶的巴特沃斯低通滤波器,若加一个级联的原型低通运放滤波器就会构成奇阶巴特沃斯低通滤波器。
- 二阶高通滤波器(如图 15.25 所示)具有 1 F 电容和可以选择的电阻,可以构成巴特沃斯多项式的因式,这种滤波器的级联能构成偶阶巴特沃斯高通滤波器,若再级联一个原型高通运放滤波器就能构成奇阶巴特沃斯高通滤波器。
- 在设计当中,无论是高通滤波器还是低通滤波器,都可以用频率比例性将截止频率从 1 rad/s处移走,都可以用频率比例性和幅度比例性选择实际的元件值,级联一个转移放大器后将能产生非单位 1 的通带放大系数。
- 将巴特沃斯高通和低通滤波器进行级联,可以构成任何 n 阶的巴特沃斯带通滤波器,将巴特沃斯高通和低通滤波器并联后再级联积分放大器,可以构成任意阶的巴特沃斯带阻滤波器。
- 若需要一个高品质、窄带的带通或带阻滤波器,那么级联和并联方法不适用,此时要用图 15.26 和图 15.29 所示的电路和适当的设计方程。一般情况下,电容值是根据市场情况选定,而电阻值是根据设计方程确定。

习题

15.1 求图 P15.1 所示电路的转移函数 V_o/V_i。Z_f 为反馈回路的等效阻抗，Z_i 是输入的等效阻抗，运算放大器是理想的。

15.2 (a) 用习题 15.1 的结果计算图 P15.2 所示电路的转移函数。

(b) 当 ω 趋于零时，电路的放大系数是多少？

(c) 当 ω 趋于无穷大时，电路的放大系数是多少？

(d) (b) 和(c) 计算的结果与已知电路的特性一致吗？

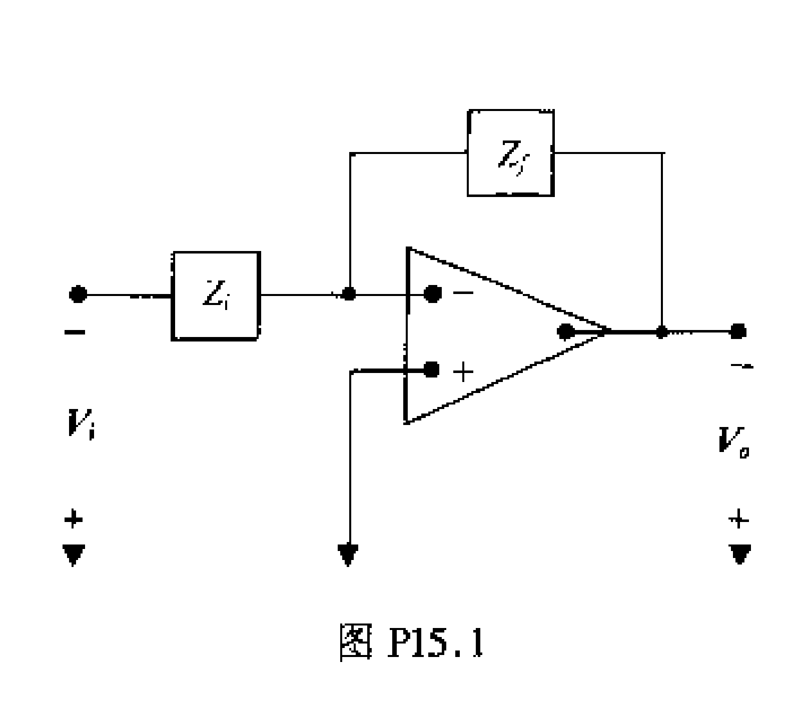


图 P15.1

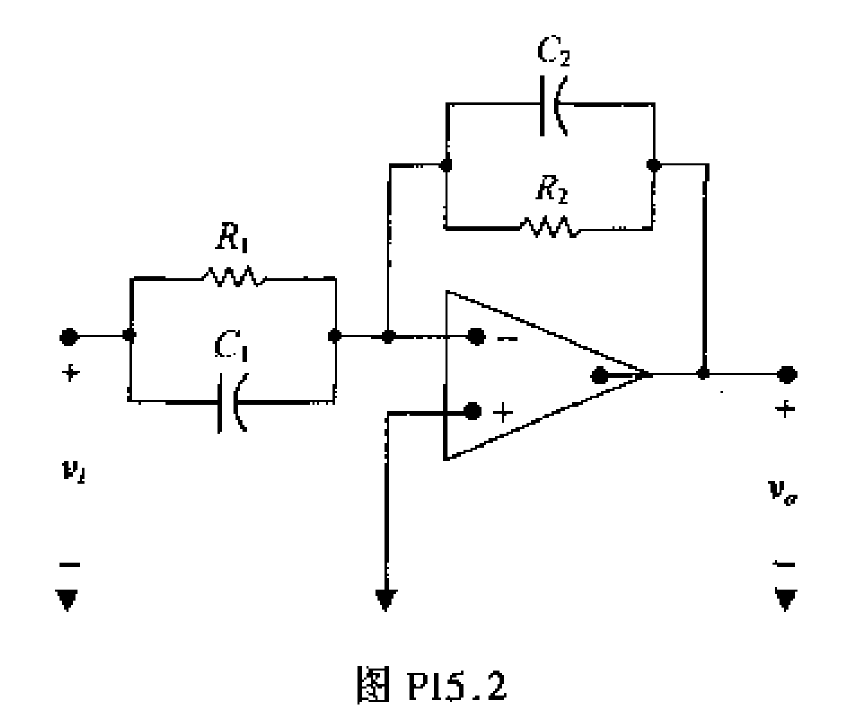
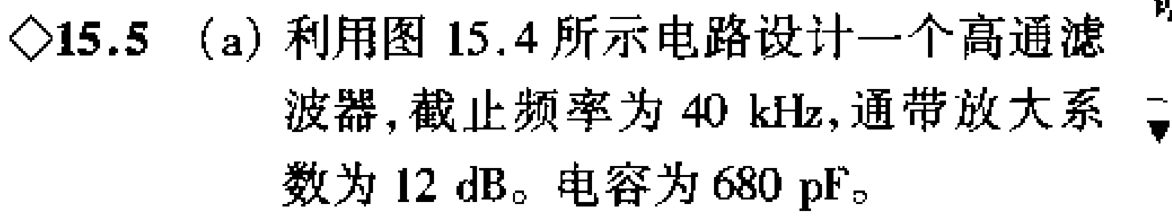


图 P15.2

15.3 电路如图 P15.3 所示，重做习题 15.2。

◇**15.4** (a) 用图 15.1 所示的电路设计一个低通滤波器，通带放大系数为 15 dB，截止频率为 10 kHz，用 5 nF 的电容。

(b) 画出滤波器的电路图，标出所有的元件。



◇**15.5** (a) 利用图 15.4 所示电路设计一个高通滤波器，截止频率为 40 kHz，通带放大系数为 12 dB。电容为 680 pF。



(b) 画出滤波器的电路图，标出所有元件。

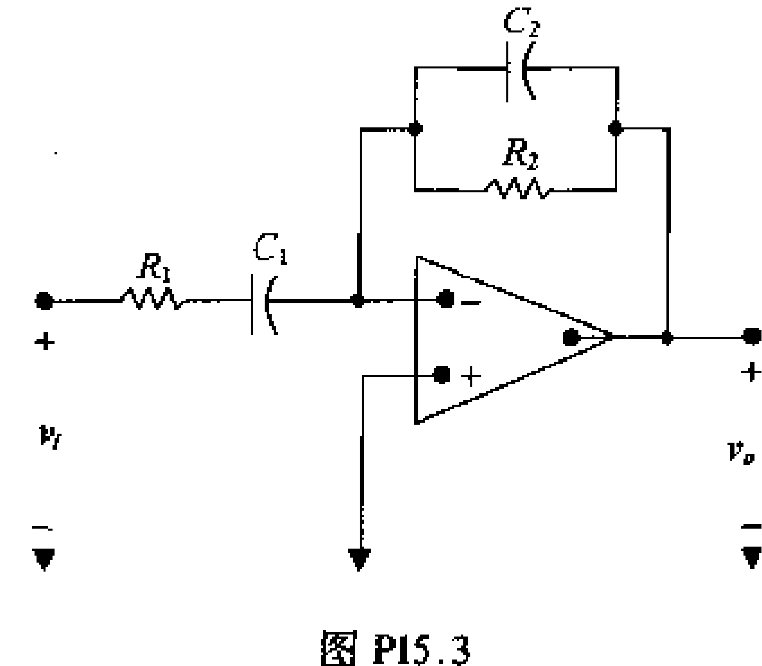


图 P15.3

15.6 图 P15.6 所示的两个低通原型滤波器的电压转移函数均为：

$$H(s)=\frac{1}{s+1}$$

证明，若电路同时进行幅度和频率变换，则变换后的转移函数为：

$$H'(s)=\frac{1}{(s/k_f)+1}$$

15.7 图 P15.7 所示的两个高通原型滤波器的电压转移函数均为：

$$H(s)=\frac{s}{s+1}$$

证明若两个电路均进行频率比例化和幅度比例化，则比例化后的转移函数为：

$$H'(s)=\frac{(s/k_f)}{(s/k_f)+1}$$

图 P15.6

图 P15.7

15.8 图 P15.8 所示电路的原型低通滤波器的电压转移函数为:

$$H(s)=\frac{\left(\frac{1}{Q}\right)s}{s^2+\left(\frac{1}{Q}\right)s+1}$$

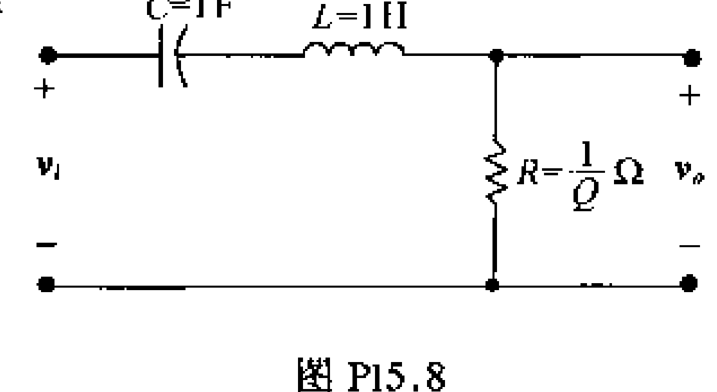


图 P15.8

证明,若该电路在频率和幅度均进行比例化,则比例化后的转移函数为:

$$H'(s)=\frac{\left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{s}{k_f}\right)}{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2+\left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{s}{k_f}\right)+1}$$

M15.9 (a) 对习题 15.8 而言,若滤波器的品质因数为 25,试确定原型无源带通滤波器的各个元件值。

(b) 对习题 15.8 而言,若品质因数为 25,中心频率是 100 krad/s。谐振时的阻抗为 3.6 kΩ,试确定该带通滤波器的各个元件值。

(c) 画出比例化后的电路图,标出所有的元件值。

15.10 图 P15.8 的原型带通滤波器进行变化如下,$\omega_o=1$ rad/s, $R=1$ Ω, $L=Q$ H。

(a) 在原型滤波器电路中,C 的值是多少?

(b) 原型滤波器的转移函数是什么?

(c) 用上述原型电路的比例化电路设计一个无源带通滤波器,使得其品质因数为 20,中心频率为 50 krad/s,谐振时的阻抗为 5 kΩ。

(d) 画出比例化后的电路图并标出所有元件参数。

(e) 利用图 15.8 得到的结果写出比例化后电路的转移函数。

◇15.11 如图 14.22 所示的无源带通滤波器,该滤波器有两个原型电路。第一个原型电路中,$\omega_o=1$ rad/s, $C=1$ F, $L=1$ H, $R=Q$ Ω。第二个原型电路中,$\omega_o=1$ rad/s, $R=1$ Ω, $C=Q$F, $L=(1/Q)$H。

(a) 用其中之一设计一个无源带通滤波器,品质因数为 16,中心频率为 80 krad/s, $R=80$ kΩ。

(b) 画出比例化后的电路图并标出所有的元件参数。

15.12 图 14.28(a) 所示带通滤波器的转移函数为:

$$H(s)=\frac{s^2+\left(\frac{1}{LC}\right)}{s^2+\left(\frac{R}{L}\right)s+\left(\frac{1}{LC}\right)}$$

说明若电路经过频率和幅度比例化后，其转移函数就是将未比例化电路转移函数中的 s 代以(s/k_f)得到的函数，其中 k_f 是频率比例因数。

15.13 试说明在习题 15.12 中得到的关于图 14.28 (a) 电路转移函数的结论对图 14.31 中带阻滤波器电路(下面的图)同样适用。

15.14 图 14.28 (a) 所示的无源带阻滤波器有两个原型电路，如图 P15.14 所示，

(a) 说明两个电路的转移函数为：

$$H(s)=\frac{s^2+1}{s^2+\left(\frac{1}{Q}\right)s+1}$$

(b) 写出带阻滤波器的转移函数，该滤波器的中心频率为 10 krad/s，品质因数为 8。

15.15 图 14.31 中(下方的图)无源带阻滤波器有两种模型电路，如图 P15.15(a)，(b) 所示，试说明两个电路的转移函数均为：

$$H(s)=\frac{s^2+1}{s^2+\left(\frac{1}{Q}\right)s+1}$$

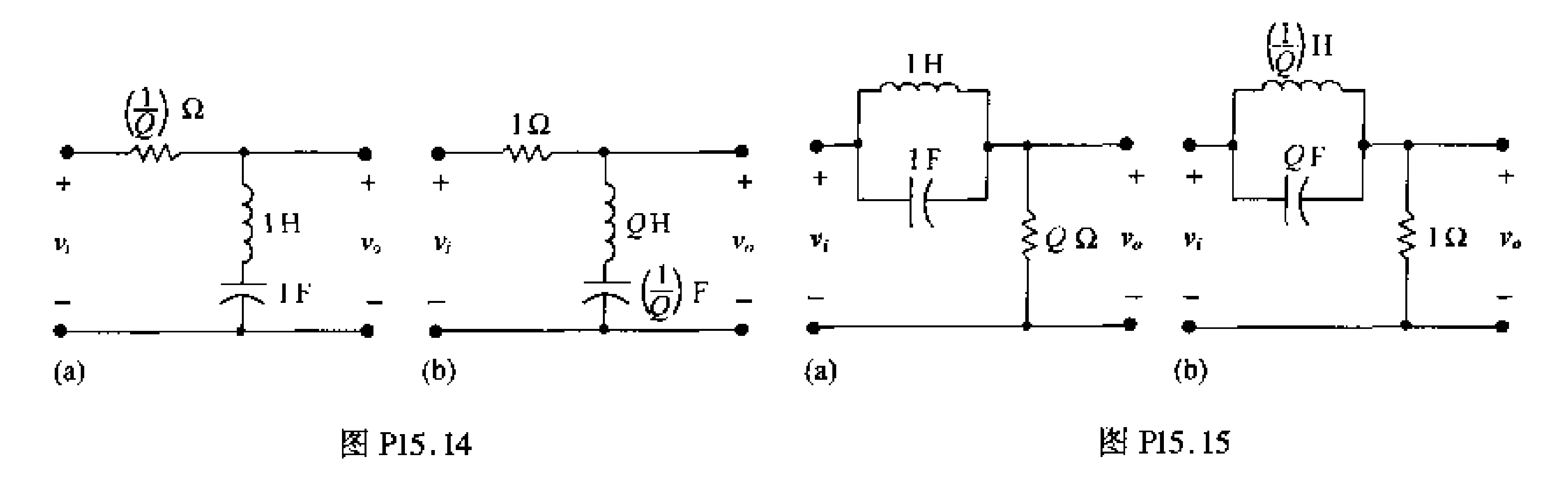


图 P15.14　　　　图 P15.15

15.16 对图 P13.32 中的电路进行比例化，4 kΩ 的电阻用 20 kΩ 的电阻代替，5 nF 的电容用 100 pF 的电容代替。

(a) 画出比例化后的电路图。

(b) 求比例化后电路的 $i_o(t)$。

15.17 对 13.26 题的电路进行比例化，使得 10 Ω 的电阻变为 1 kΩ，电压响应的频率扩大 1 000倍，求 $v_o(t)$。

15.18 对 13.31 题中的电路比例化，使得电感减小为 100 mH，电容减小为 0.8 μF。

(a) 确定比例系数 k_m 和 k_f。

(b) 求比例化后的电路的 $i_o(t)$。

15.19 对图 P13.37 中的电路比例化，使得电容变为 25 nF，4 H 的电感变为 10 mH，写出 i_o 的表达式，

15.20 (a) 证明，若对图 15. 1 中的带通滤波电路进行频率和幅度比例化，则比例化后的电路转移函数的形式与式（15. 1）一样，只是 s 用 s/k_f 代替，k_f 为频率比例系数。

(b) 在图 15.1 原型低通滤波器电路中，$\omega_c = 1$ rad/s，$C = 1$ F，$R_2 = 1\ \Omega$，$R_1 = 1/K$ (Ω)，求原型电路的转移函数。

(c) 用(a) 的结论求比例化后电路的转移函数。

15.21 (a) 证明，若将图 15.4 中高通滤波器进行频率和幅度比例化，则转移函数与式(15.4)一样，只是将 s 代以 s/k_f，k_f 为频率比例因数。

(b) 在图 15.4 中的原型高通滤波器电路中，$\omega_c = 1$ rad/s，$R_1 = 1\ \Omega$，$C = 1$ F，$R_2 = K$ Ω，求原型电路的转移函数。

(c) 用(a) 得到的结论求出比例后滤波器的转移函数。

P◇15.22 (a) 用 0.02 μF 的电容，设计一个有源宽带一阶带通滤波器，使得其下截止频率为 2 000 Hz，上截止频率为 8 000 Hz，通带放大系数为 10 dB，设计过程中使用低通或者高通滤波器的原型(见习题 15.20 和 15.21)

(b) 写出比例化后的电路的转移函数。

(c) 用(b) 所得的结果计算 $H(j\omega_o)$，ω_o 为滤波器的中心频率。

(d) 在 ω_o 处，通带放大系数是多少分贝？

(e) 画出滤波器波特图的幅度曲线。

P◇15.23 (a) 利用 5 μF 的电容设计一个有源宽带一阶带阻滤波器，其下截止频率为 1 000 Hz，上截止频率为 5 000 Hz，通带放大系数为 10 dB，设计过程中用习题 15.20 和 15.21 中的原型滤波器电路。

(b) 画出电路图并标出元件参数。

(c) 比例化后滤波器的转移函数是什么？

(d) 计算(c) 中得到的转移函数在中心频率处的值 。

(e) 中心频率处的放大系数是多少分贝？

(f) 画出滤波器转移函数的波特图幅度曲线。

15.24 对于由电阻、电容、电感和理想运放器构成的电路，$|H(j\omega)|^2$ 只含有 ω 的偶次方，为说明该结论，试计算图 P15.24 中三个电路的 $|H(j\omega)|^2$，已知其转移函数为：

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i}$$

15.25 本题想通过计算转折频率处每个幅度曲线的斜率(dB/10 倍频程) 说明，通过 n 个相同的低通滤波器级联构成的 n 阶低通巴特沃斯滤波器的优点，为了简化计算，令 y 代表幅度曲线(以分贝为单位)，令 $x = \log_{10}\omega$，然后计算每个曲线在 ω_c 处的 dy/dx。

(a) 证明在转折频率处，n 阶低通原型巴特沃斯滤波器的斜率为：

$$\frac{dy}{dx} = -10n\ \text{dB/10 倍频程}$$

(b) 证明，n 个同样的低通原型部件级联后，在 ω_c 处的斜率为：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-20n(2^{1/n}-1)}{2^{1/n}}\ \text{dB/10 倍频程}$$

(c) 对各种形式的滤波器，$n=1,2,3,\cdots$，计算其斜率。

(d) 讨论 (c) 中所得结果的意义。

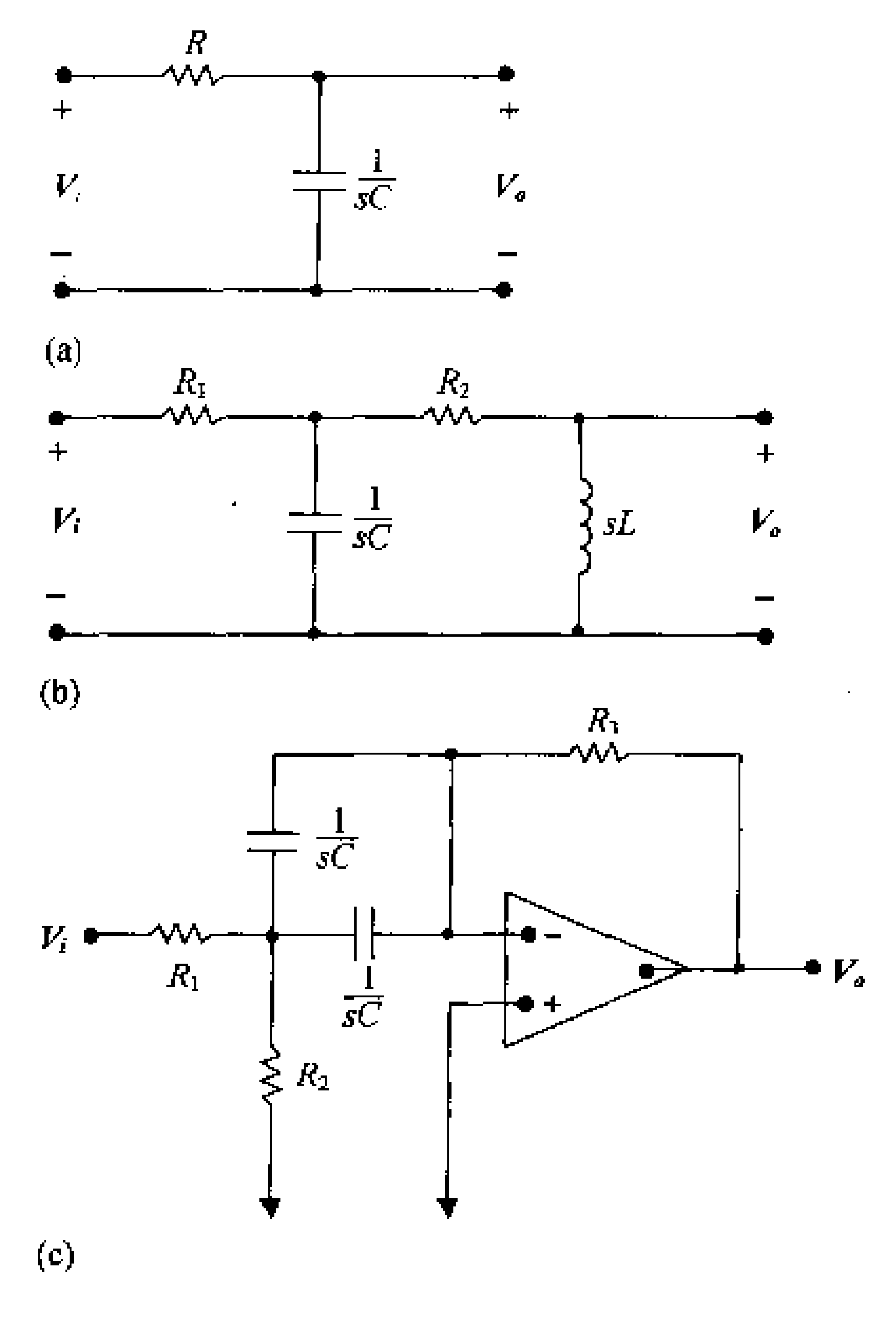


图 P15.24

15.26 (a) 确定低通巴特沃斯滤波器的阶数，其截止频率为 1 000 Hz，在 4 000 Hz 处的放大系数至少为 − 40 dB.

(b) 在 4 000 Hz 频率处，它的实际放大系数是多少？

15.27 图 15.21 中所示电路的转移函数由式(15.34)给出，证明，将图 15.21 的电路进行频率和幅度比例化，则电路的转移函数为：

$$H'(s)=\frac{\frac{1}{R^2C_1C_2}}{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2+\frac{2}{RC_1}\left(\frac{s}{k_f}\right)+\frac{1}{R^2C_1C_2}}$$

15.28 (a) 写出习题 15.26 中所得的原型低通巴特沃斯滤波器的转移函数。

(b) 写出在 (a) 中比例化后滤波器的转移函数(见习题 15.27)。

(c) 通过用 (b) 中得到的表达式计算在 4 000 Hz 处的放大系数来验证该表达式的正确性。将结果与图 15.26 (b) 中的结果加以比较。

◇15.29 (a) 用 2 kΩ 电阻和理想运放设计一个电路，实现习题 15.26 定义的低通巴特沃斯滤波器，已知通带放大系数为 1。

(b) 画出电路图并标出所有元件的值。

M◇15.30 (a) 用 25 nF 的电容和理想运放器设计一个单位放大的巴特沃斯高通滤波器，其截

止频率为 5 kHz,在 1 kHz 频率处,放大系数至少可以为 −25 dB。

(b) 画出滤波器的电路图并标出所有元件的参数。

15.31 验证表 15.1 中 $n=5$ 和 $n=6$ 时的内容。

15.32 图 15.25 所示电路的转移函数由式(15.47)给出。证明:若对电路进行频率和幅值比例化,则其转移函数为:

$$H'(s)=\frac{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2}{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2+\frac{2}{R_2C}\left(\frac{s}{k_f}\right)+\frac{1}{R_1R_2C^2}}$$

由此可以得出结论,比例化后电路的转移函数可以由未比例化的转移函数求得,只要将 s 换成 s/k_f 即可,其中,k_f 是频率比例因数。

M◇15.33 (a) 用 3 kΩ 的电阻和理想运放设计一个单位放大系数的低通巴特沃斯滤波器,使得其截止频率为 20 kHz,在 100 kHz 时,放大系数至少下降 25 dB。

(b) 画出滤波器的电路图并标出所有元件的参数。

15.34 将习题 15.30 设计的高通滤波器和习题 15.33 设计的低通滤波器级联。

(a) 描述这种级联后形成的滤波器种类。

(b) 计算滤波器的截止频率、中心频率和品质因数。

(c) 用习题 15.26 和 15.31 的结果得出滤波器比例化后的转移函数。

(d) 通过利用 (c) 的结果计算 $H(j\omega_o)$,验证滤波器,ω_o 为中心频率。

◇15.35 (a) 如图 15.26 所示电路,用 300 pF 的电容设计一个低通滤波器,其品质因数是 20,中心频率为 8 kHz,通带放大系数为 40 dB。

(b) 画出滤波器的电路图并标出所有元件的参数值。

15.36 证明(图 15.26 所示电路),若 $\omega_o=1$ rad/s, $C=1$ F,则 R_1, R_2, R_3 的原型值为:

$$R_1=\frac{Q}{K}$$

$$R_2=\frac{Q}{2Q^2-K}$$

$$R_3=2Q$$

◇15.37 (a) 设计一个宽带巴特沃斯带通滤波器,下截止频率为 1 000 Hz,上截止频率为 8000 Hz,通带放大系数为 20 dB,放大系数在 400 Hz 和 20 kHz 处至少下降 20 dB,在高通电路中用 50 nF 电容,在低通电路中用 5 kΩ 电阻。

(b) 画出滤波器电路图,并标出所有的元件参数。

15.38 (a) 求出习题 15.37 中所设计的滤波器比例化后的转移函数。

(b) 用 (a) 中得到的转移函数计算在 500 Hz 和 5 000 Hz 频率处的放大系数。

(c) 在 (b) 中所求值满足习题 15.37 给定的滤波条件吗?

15.39 (a) 证明原型带阻滤波器的转移函数为:

$$H(s)=\frac{s^2+1}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}$$

(b) 用 (a) 中的结果求出例 15.13 中设计的滤波器的转移函数。

◇**15.40**　(a) 利用图 15.29 的电路设计一个窄带的带阻滤波器,使得其中心频率为 5 kHz,品质因数为 10,已知电容值为 200 μF。

(b) 画出滤波器的电路图,并标出图中所有元件的值。

(c) 求滤波器比例化后的转移函数。

◇**15.41**　该习题的目的是希望读者通过必要的分析,掌握确定滤波电路中元件的设计过程,分析的电路如图 P15.41 所示。

(a) 定性分析电路,确定该电路是一个低通滤波器,其通带放大系数为 R_2/R_1。

(b) 求转移函数 V_o/V_i,说明定性分析的正确性(提示:得出转移函数,用等效电导代替电阻,即 $G_1 = 1/R_1$ 等等)。

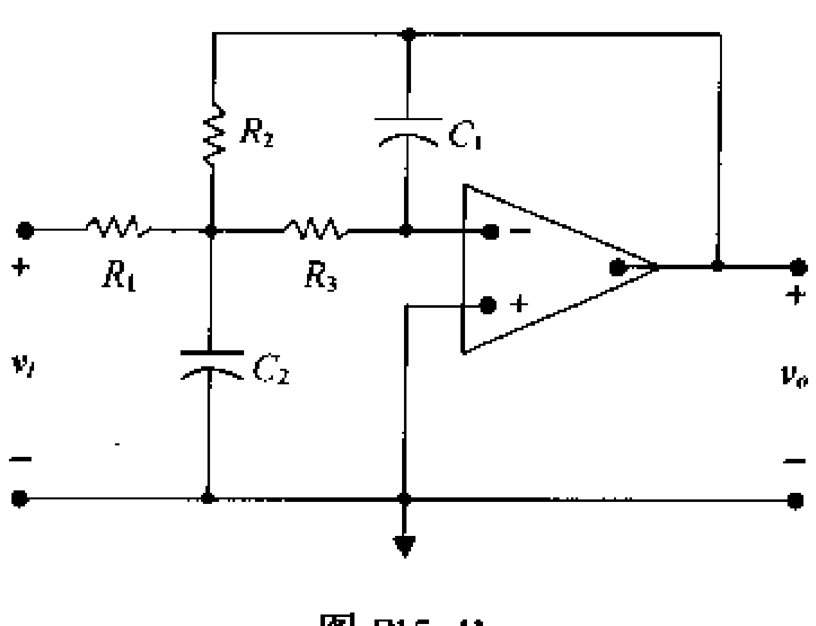


图 P15.41

为了使转移函数与表 15.1 一致,将它化为下面形式:

$$H(s) = \frac{-Kb_o}{s^2 + b_1 s + b_o}$$

(c) 有 5 个电路元件—R_1, R_2, R_3, C_1, C_2 和三个转移函数约束条件——K, b_1, b_o。似乎在五个元件中有两个可以任意选择,但仔细研究电路参数和转移函数约束之间的关系就会发现,若 C_2 任意选择,那么,为使 $R_2(G_2)$取得较为现实的值,C_1 就存在一个上限,因此,若 $C_2 = 1$ F,则三个电导就由下式给出:

$$G_1 = KG_2$$

$$G_3 = \left(\frac{b_o}{G_2}\right) C_1$$

$$G_2 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_o(1+K)C_1}}{2(1+K)}$$

又 G_2 必须是较实际的,所以:

$$C_1 \leqslant \frac{b_1^2}{4b_o(1+K)}$$

(d) 根据(c) 中得到的结果,就会清楚当 K, b_o, b_1 已知时,选电路元件的过程。

◇**15.42**　假设习题 15.41 分析的电路是一个通带放大系数为 8 的三阶低通巴特沃斯滤波器的一个部分。

(a) 在第二部分,模型中的 $C_2 = 1$ F,那么,C_1 的上限是多少?

(b) 若 C_1 的极限值已经确定,那么 R_1, R_2, R_3 的模型值是多少?

(c) 若滤波器的转折频率为 50 kHz,C_2 选为 250 pF,试计算比例化后 C_1, R_1, R_2, R_3 的值。

(d) 确定滤波器一阶部分的电阻和电容的模型值。

(e) 画出滤波器的电路图,并标出图中所有元件的值。

◇**15.43**　该习题的目的是找出图 P15.43 电路的设计方程(见习题 15.41,并参考建立设计方

程的建议)。

(a) 根据定性分析,描述电路实现的滤波器的类型。

(b) 求出转移函数 V_0/V_i,证明(a)得到的结论,写出转移函数,并使其与表 15.1 中的形式一致。

(c) 在电路元件中,有多少个元件是可以任意选择的?

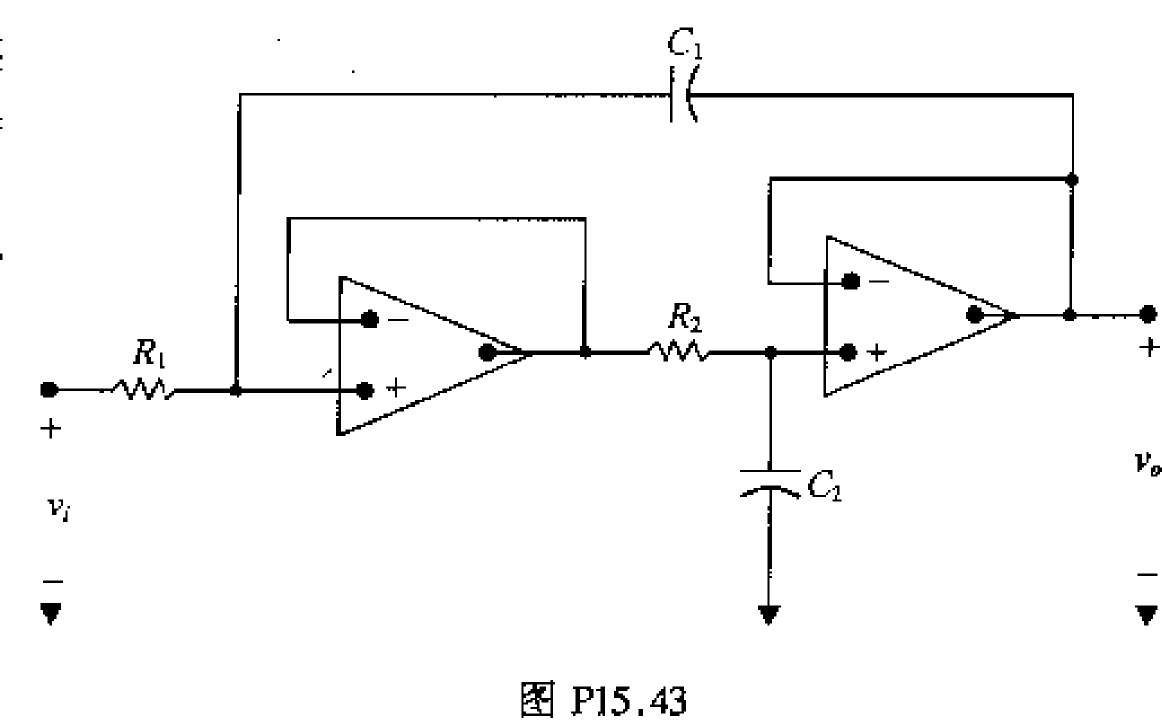


图 P15.43

(d) 根据 C_1, C_2, b_o, b_1 写出电导 $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$ 的表达式(见习题 15.41 关于 b_o, b_1 的确定)

(e) 对 C_1 或 C_2 有限制吗?

(f) 假设用图 P15.43 的电路设计一个四阶低通单位放大的巴特沃斯滤波器,若在原型电路中用 1 F 的电容,试确定每个二阶部分中 R_1, R_2 的模型值。

◇**15.44** 在一个系统中采用了习题 15.43 的四阶低通单位放大巴特沃斯滤波器,系统的截止频率为 25 kHz,滤波器中的电容为 750 nF。

(a) 确定滤波器各个段中的电阻 R_1, R_2 的值,

(b) 画出电路图,并标出所有的元件值。

M15.45 写出六阶原型低通巴特沃斯滤波器的转移函数,以 $1/s$ 代替 s 得到六阶高通原型巴特沃斯滤波器的转移函数。

M15.46 在一个系统中采用了习题 15.45 中的六阶巴特沃斯滤波器,其截止频率为 10 kHz。

(a) 比例化后的滤波器的转移函数是什么?

(b) 求截止频率处的放大系数(dB),验证转移函数的表达式。

◇**15.47** 交换图 P15.43 中的 R_s 和 C_s,即用 C_1 代替 R_1, C_2 代替 R_2,反过来也一样。

(a) 定性分析电路,估计电路实现的滤波器的种类。

(b) 求出转移函数 V_o/V_i,验证 (a) 得出的结论,写出与表 15.1 一致的转移函数。

(c) 在电路元件选择时,有多少个是可以任选的?

(d) 求出 R_1 和 R_2 关于 b_o, b_1, C_1, C_2 的表达式。

(e) 对 C_1 和 C_2 有何限制?

(f) 假设在一个三阶巴特沃斯滤波器中采用了与(a)类型相同的电路,若 $C_1 = C_2 = 1$ F,试确定在二阶部分中 R_1 和 R_2 的模型值。

◇**15.48** (a) 在一个三阶高通巴特沃斯滤波器中用到了习题 15.47 的电路,该滤波器的截止频率为 40 kHz,若构成滤波器的电容为 360 pF,试求出 R_1, R_2。

(b) 试确定滤波器的一阶部分的电阻和电容值。

(c) 画出电路图,并标出所有元件的值。

(d) 写出滤波器转移函数的数学表达式。

(e) 根据(a) 得到的比例化转移函数,求在截止频率处的放大系数(dB)。

◇**15.49** 如图 P15.41 所示电路,交换 R_s 和 C_s,即用 C_1 代替 R_1,C_2 代替 R_2,C_3 代替 R_3,R_1 代替 C_1,R_2 代替 C_2。

(a) 描述交换后所实现的滤波器的类型。

(b) 求出转移函数 V_o/V_i,确定 (a) 中的描述,以与表 15.1 相同的形式写出转移函数。

(c) 令 $C_2 = C_3 = 1$ F,根据 K, b_o, b_1 写出 C_1, R_1, R_2 的表达式(见习题 15.41 关于 b_1, b_o 的定义)。

(d) 假设在同一种类的三阶巴特沃斯滤波器中用到了(a) 中的滤波器,巴特沃斯滤波器通带放大系数为 8,$C_2 = C_3 = 1$ F,试计算在滤波器二阶部分的 C_1, R_1, R_2 的模型值。

◇**15.50** (a) 用习题 15.41 和习题 15.49 分析过的电路实现一个宽带带阻滤波器,该滤波器的通带放大倍数为 20 dB,下转折频率为 800 Hz,上转折频率为 7200 Hz,并且在 1500 Hz 和 13.5 Hz 处至少减少 20 dB,尽可能用 50 nF 电容。

(b) 画滤波器的电路图,并标出所有参数的值。

15.51 (a) 求出习题 15.50 描述的带阻滤波器的的转移函数。

(b) 用(a) 步骤中得到的转移函数,求滤波器中心频率处的衰减(dB)。

◆◇**15.52** 用图 15.32 (a) 中的电路设计一个低音音量控制电路,其最大的放大系数为13.98 dB,在 50 Hz 处下降 3 dB。

◆**15.53** (a) 证明图 P15.53(a) 和(b) 中的电路是等效的。

(b) 证明在图 15.53(b) 中标有 x 和 y 的两点,其电位总是相等。

(c) 根据 (a) 和(b) 的信息,证明图 15.33 中的电路可以画为 P15.53(c) 所示的电路。

(d) 证明图 P15.53(c) 中的电路具有图 15.2 中电路的形式。其中:

$$Z_i = \frac{R_1 + (1-\alpha)R_2 + R_1R_2C_1s}{1 + R_2C_1s}$$

$$Z_f = \frac{R_1 + \alpha R_2 + R_1R_2C_1s}{1 + R_1R_2C_1s}$$

◆**15.54** 电路如图 15. 34 所示,当 $\omega = 0$ 的时候,画出最大放大系数随着 α 变化的曲线,令 α 从 0 变到 1,步长为 0.1。

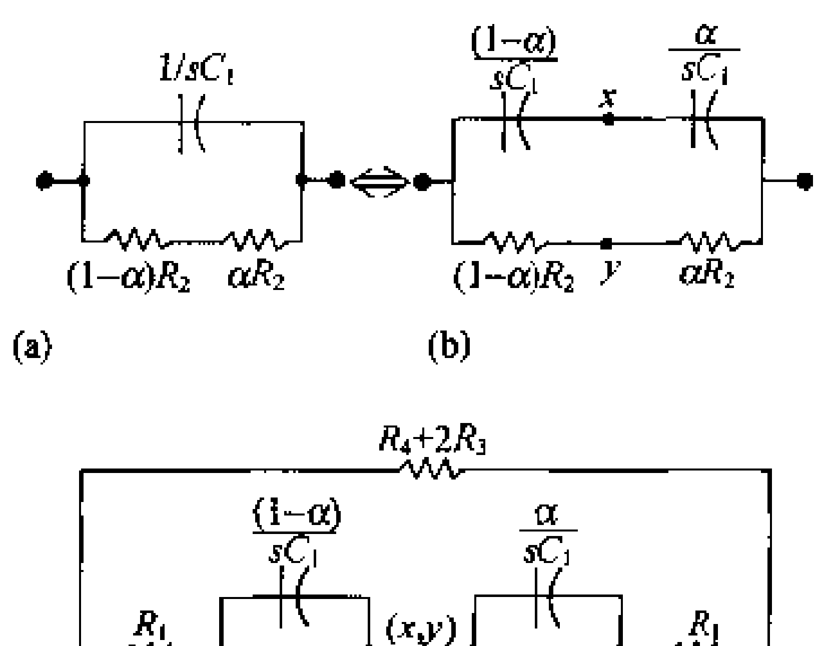
◆**15.55** 一个工程项目管理者收到了一个下属的提议,该下属说,若图 P15.55 电路中的 $R_4 = R_1 + R_3 + 2R_5$,那么,该电路可以用做高音音量控制电路。还说电路的电压转移函数为:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{-\{(2R_3 + R_4) + [(1-\beta)R_4 + R_o](\beta R_4 + R_3)C_2s\}}{\{(2R_3 + R_4) + [(1-\beta)R_4 + R_3](\beta R_4 + R_o)C_2s\}}$$

其中,$R_o = R_1 + R_3 + 2R_5$。恰好,有一位电子工程专业的硕士在实习,于是就让这

个学生核对下属的说法,要求学生验证当 ω 趋于零、ω 趋于无穷大时转移函数的特性,以及 ω 为无穷大,β 从 0 变到 1 时的特性。

根据读者对转移函数的考查,你认为该电路能用做高音音量控制电路吗? 并加以解释。



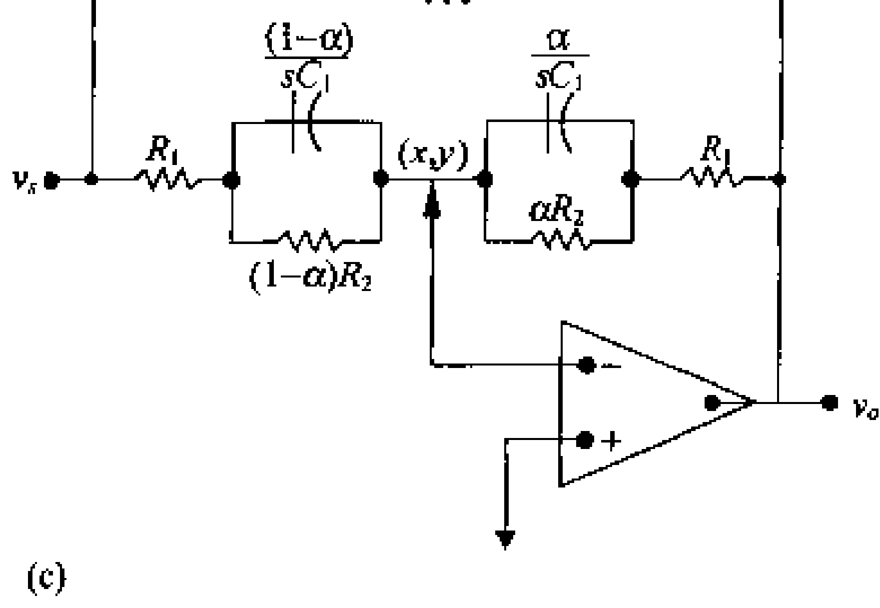


图 P15.53

15.56 在图 P15.55 中,$R_1 = R_5 = 20\ \text{k}\Omega$, $R_3 = 5.9\ \text{k}\Omega$, $R_4 = 500\ \text{k}\Omega$, $C_2 = 2.7\ \text{nF}$。

(a) 计算最大增益(dB)。

(b) 最大的衰减是多少(dB)。

(c) R_4 是否比 R_0 大得多?

(d) 当 $\beta = 1$, $\omega_1 = 1/R_3C_2$ 时,衰减为多少分贝?

(e) 当 $\beta = 0$, $\omega = 1/R_3C_2$ 时,衰减为多少分贝?

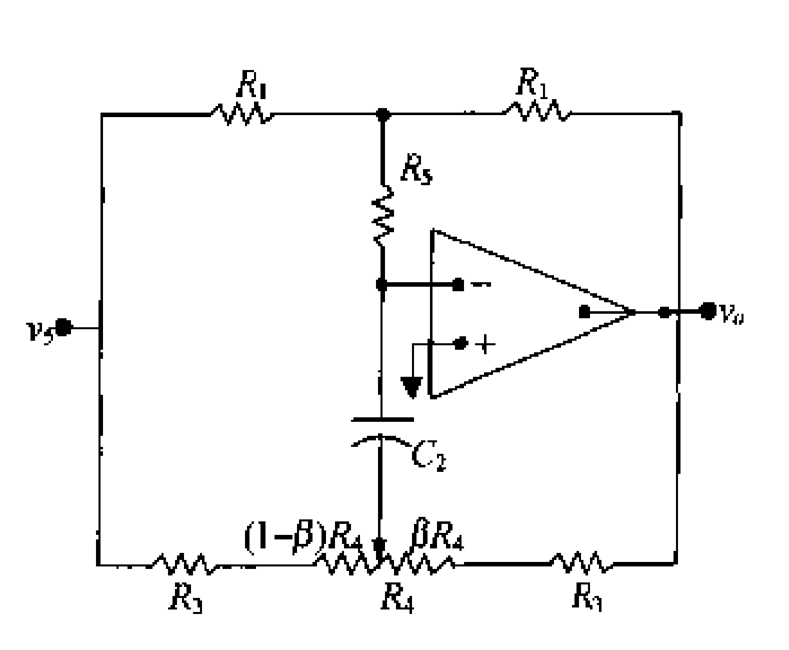


图 P15.55

根据(d) 和(e) 的结论,频率 $1/R_3C_2$ 有何意义,何时 $R_4 >> R_0$?

15.57 利用习题 15.56 给出的元件值,画出当 ω 趋向于无穷大时,最大放大系数的分贝值随着 β 变化的曲线,令 β 从 0 变到 1,步长为 0.1。

第 16 章　傅里叶级数

在前面章节中，用了很大篇幅讨论正弦稳态分析。对正弦激励函数感兴趣的一个原因是，通过它可以求得非正弦周期激励的稳态响应。周期函数是这样一种函数，它每隔 T 秒循环一次。例如，图 16.1 所示的三角波就是一个非正弦的周期波形。

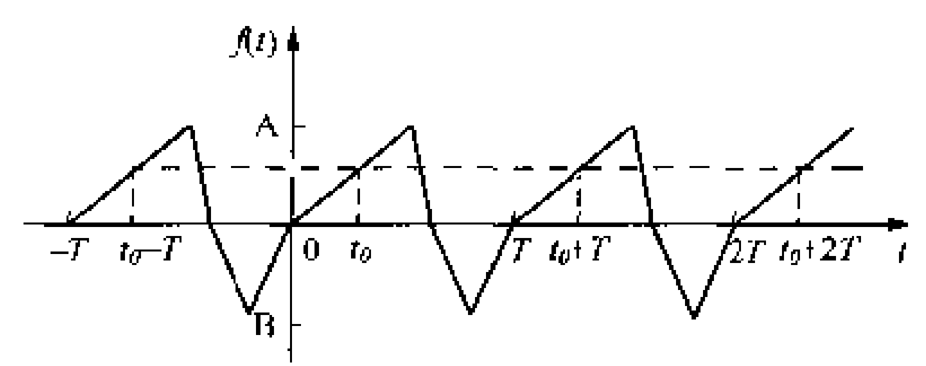


图 16.1　周期波形

周期函数是这样一种函数，它满足下面的关系式：

$$f(t)=f(t\pm nT) \tag{16.1}$$

其中，n 是整数(1,2,3,…)，T 是周期。图 16.1 中的函数是周期函数。因为对于任意 t_0 值都有：

$$f(t_0)=f(t_0-T)=f(t_0+T)=f(t_0+2T)=\cdots$$

这里 T 指的是周期函数沿水平方向重复出现的最短时间间隔。

人们为什么对周期函数感兴趣呢？原因之一是，许多实用电源产生的波形是周期的。例如，受正弦源激励的整流电路产生的整流正弦波，其波形是非正弦的，但却是周期的。

图 16.2(a)和(b)分别显示了全波正弦整流和半波正弦整流的波形。

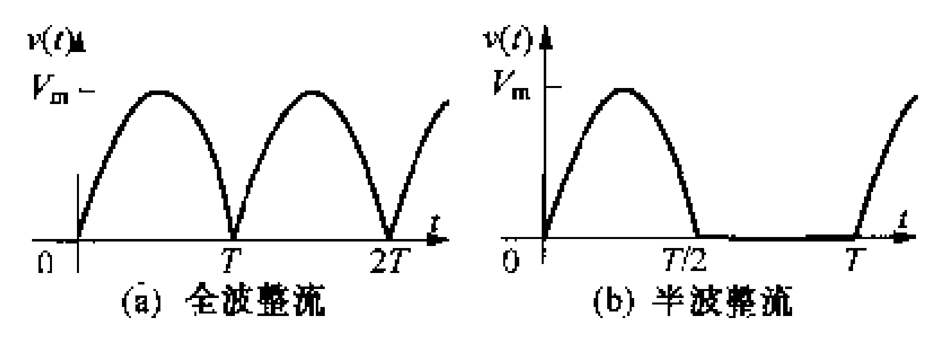


图 16.2　未滤波的正弦整流的输出波形

用于控制示波器阴极射线电子束的扫描发生器产生的周期三角波如图 16 .3 所示。

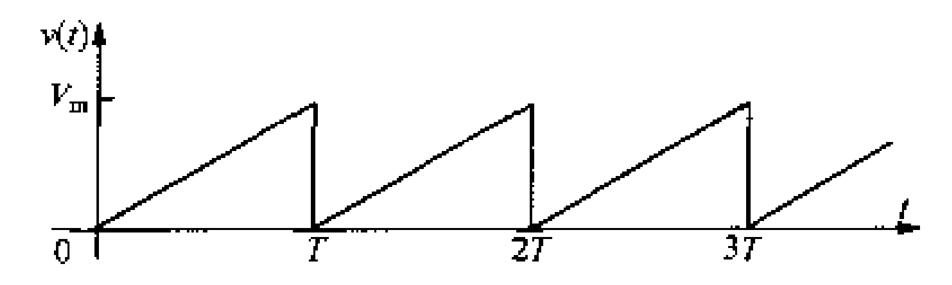


图 16.3　示波器显示的三角波形

实验室测试常用的电子振荡器，可以产生非正弦的周期波形。在大多数测试实验室中，都能找到能够产生方波、三角波和矩形脉冲波形的函数发生器。图 16.4 中给出了几个典型波形的例子。

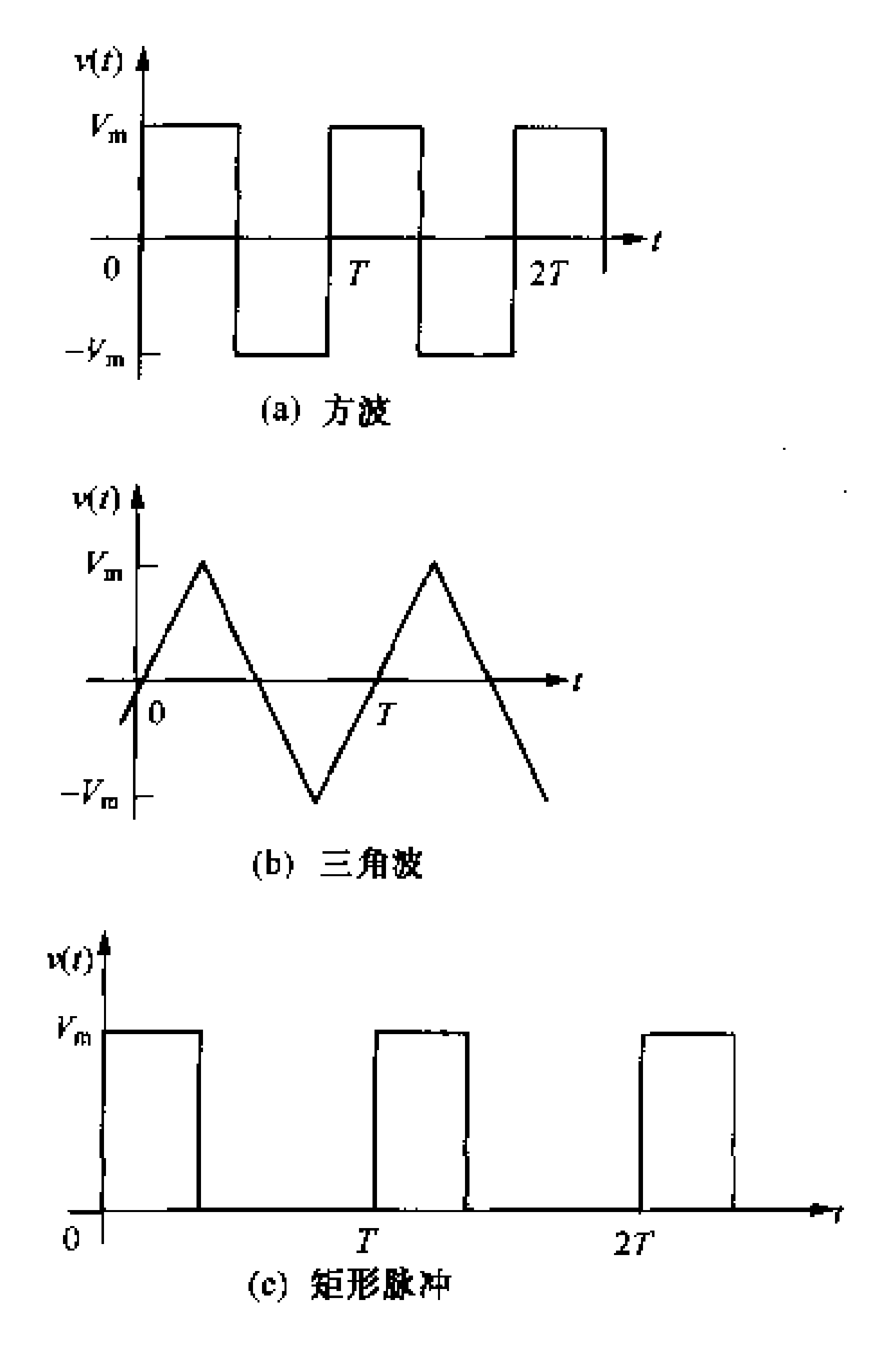


图 16.4 实验室测试用的函数发生器产生的波形

让人们对周期函数感兴趣的另一个原因是,尽管发电机被设计用于产生正弦波形,但实际上它不能生成纯粹的正弦波。然而,畸变的正弦波是周期性的。因此,工程师们对产生轻微畸变的正弦电压的激励电源系统感兴趣。

对周期函数感兴趣也源于实际电路,因为各种线性电路中的任何非线性都会产生非正弦的周期函数。前面提到的整流电路就是这类现象的实例之一;机器和变压器中出现的磁饱和是产生非正弦周期函数的另一个实例;利用晶体管饱和的电子消波电路也会产生非正弦周期函数。

此外,非正弦周期函数对非电力系统的分析是重要的。机械振动、流体流动和热传导所涉及的问题都可以利用周期函数解决。在对金属棒热传导的研究和分析过程中,法国数学家傅里叶(1768~1830)发现了周期函数可以用三角级数表示。而该级数也以他的名字命名,傅里叶级数是求电路周期激励稳态响应的出发点。

16.1 傅里叶级数分析:概述

傅里叶在研究热传导问题时发现,一个周期函数可以用正交的正弦函数或余弦函数的无限项和表示。换句话说,无穷级数的任意一个三角函数项的周期是周期函数的基波周期 T 的整倍数或谐波。这样对于周期函数 $f(t)$,傅里叶指出,$f(t)$可用下面的公式表示:

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \qquad (16.2)$$

其中 n 是整数序列 1,2,3,…

式(16.2)中，a_v，a_n 和 b_n 被称为傅里叶系数，这些系数可以通过函数 $f(t)$ 计算得到。这里的 $\omega_0(\omega_0=2\pi/T)$ 表示周期函数 $f(t)$ 的基频。ω_0 的整倍数，即 $2\omega_0$，$3\omega_0$，$4\omega_0$ 等等，称为周期函数 $f(t)$ 的谐波频率。$2\omega_0$ 是二次谐波，$3\omega_0$ 是三次谐波，$n\omega_0$ 是 $f(t)$ 的 n 次谐波。

在 16.2 节，将讨论傅里叶系数的确定问题。在详细讨论利用傅里叶级数进行电路分析之前，先看看一般情况下的应用。从应用的观点出发，可以将所有周期函数表示成傅里叶级数的形式。在数学上，一个周期函数 $f(t)$ 可以展开成傅里叶级数，应当满足如下条件(即狄利克雷条件)：

1. $f(t)$ 是单值的。
2. $f(t)$ 在一个周期内的间断点有限。
3. $f(t)$ 在一个周期内的极值点有限。
4. 积分：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\,dt$$

存在。

任何一个由物理可实现的信号源产生的周期函数都满足狄利克雷条件。它是充分条件而不是必要条件。因此，如果 $f(t)$ 满足这些条件，就可以将它表示成傅里叶级数。然而，如果 $f(t)$ 不满足这些条件，仍然可以将它表示成傅里叶级数。函数 $f(t)$ 展开成傅里叶级数的必要条件是未知的。

在给出 $f(t)$ 并计算得到傅里叶系数(a_v，a_n 和 b_n)之后，可以将一个周期信号源分解为一个直流信号源(a_v)及许多正弦信号源(a_n 和 b_n)的和。对周期信号源激励的线性电路，可以用叠加原理求其稳态响应。具体计算时，先求出 $f(t)$ 的傅里叶级数表达式对应的各个信号源的响应，然后将单个响应相加得到总响应。用相量分析法，可以很容易求出正弦信号源的稳态响应。

该方法很简单，而且不涉及电路分析的新技术。利用该方法可以得到稳态响应的傅里叶级数表达式，但响应的实际形态是未知的。所以要估计响应的波形，需要增加足够的条件。虽然求稳态响应的傅里叶级数方法存在一些缺陷，但它引进了考虑问题的一种方法，这和获得定量结果是一样重要的。事实上，在某些方面定性描述甚至比定量描述更为重要。

16.2　傅里叶系数

给出周期函数的定义后，可以用下列关系式确定傅里叶系数：

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt \tag{16.3}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt \tag{16.4}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin k\omega_0 t\,dt \tag{16.5}$$

在式(16.4)和式(16.5)中,下标 k 表示第 k 次系数,按整数顺序 1,2,3,…变化。注意:这里 a_v 是$f(t)$的平均值,a_k 是$f(t)\cos k\omega_0 t$ 的平均值的二倍,b_k 是$f(t)\sin k\omega_0 t$ 的平均值的二倍。

通过下列积分关系式:

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\sin m\omega_0 t\ \mathrm{d}t = 0,\text{对所有 } m \tag{16.6}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos m\omega_0 t\ \mathrm{d}t = 0,\text{对所有 } m \tag{16.7}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos m\omega_0 t\sin n\omega_0 t\ \mathrm{d}t = 0,\text{对所有 } m \text{ 和 } n \tag{16.8}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T}\sin n\omega_0 t\sin m\omega_0 t\ \mathrm{d}t &= 0,\text{对所有 } m \neq n\\ &= \frac{T}{2}, m \neq n\end{aligned} \tag{16.9}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T}\cos m\omega_0 t\cos n\omega_0 t\ \mathrm{d}t &= 0,\text{对所有 } m \neq n\\ &= \frac{T}{2}, m = n\end{aligned} \tag{16.10}$$

其中 m 和 n 是整数,由式(16.2)很容易导出式(16.3)~(16.5)。这里将式(16.6)~(16.10)的证明留给读者,见习题 16.1。

为导出式(16.3),对式(16.2)的两端在一个周期内同时积分:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\mathrm{d}t &= \int_{t_0}^{t_0+T}\Big(a_v + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t\Big)\mathrm{d}t\\ &= \int_{t_0}^{t_0+T}a_v\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t)\mathrm{d}t\\ &= a_v T + 0\end{aligned} \tag{16.11}$$

由式(16.11)可以直接导出式(16.3)。

为导出 a_n 的第 k 次值的表达式,先将式(16.2)的两端同乘以 $\cos k\omega_0 t$,然后对其在 $f(t)$的一个周期内积分:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos k\omega_0 t\ \mathrm{d}t &= \int_{t_0}^{t_0+T}a_v\cos k\omega_0 t\ \mathrm{d}t\\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T}(a_n\cos n\omega_0 t\cos k\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t\cos k\omega_0 t)\mathrm{d}t\\ &= 0 + a_k\Big(\frac{T}{2}\Big) + 0\end{aligned} \tag{16.12}$$

解式(16.12),求出 a_k,这样就得到了式(16.4)中的表达式。

将式(16.2)的两端同时乘以 $\sin k\omega_0 t$,然后对它在 $f(t)$的一个周期内积分,得到 b_n 的第 k

次值的表达式。例 16.1 将讲述如何利用式(16.3)~(16.5)求一个周期函数的傅里叶系数。

例 16.1　求图 16.5 所示周期电压的傅里叶级数。

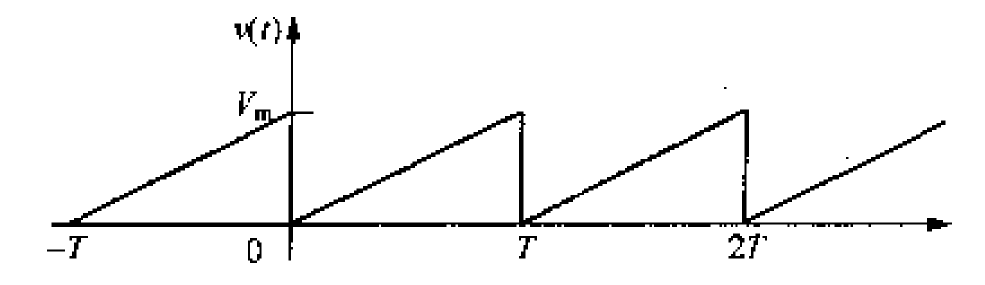


图 16.5　例 16.1 的周期电压。

解：

用式(16.3)~(16.5)计算 a_v, a_k 和 b_k 时，需要选择 t_0 的值。对于图 16.5 所示的周期电压，t_0 的值最好选为零。其他选择都会使积分变得更为麻烦。在 0 和 T 之间，$v(t)$ 的表达式是：

$$v(t) = \left(\frac{V_m}{T}\right)t$$

a_v 的表达式为：

$$a_v = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{V_m}{T}\right)t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}V_m$$

很明显，这是图 16.5 所示波形的平均值。

a_n 的第 k 次值的表达式为：

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{V_m}{T}\right)t\cos k\omega_0 t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{2V_m}{T^2}\left(\frac{1}{k^2\omega_0^2}\cos k\omega_0 t + \frac{t}{k\omega_0}\sin k\omega_0 t\right)\Bigg|_0^T \\ &= \frac{2V_m}{T^2}\left[\frac{1}{k^2\omega_0^2}(\cos 2\pi k - 1)\right] = 0\text{，对所有 } k\end{aligned}$$

b_n 的第 k 次值的表达式为：

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{V_m}{T}\right)t\sin k\omega_0 t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{2V_m}{T^2}\left(\frac{1}{k^2\omega_0^2}\sin k\omega_0 t - \frac{t}{k\omega_0}\cos k\omega_0 t\right)\Bigg|_0^T \\ &= \frac{2V_m}{T^2}\left(0 - \frac{T}{k\omega_0}\cos 2\pi k\right) \\ &= \frac{-V_m}{\pi k}\end{aligned}$$

$v(t)$ 的傅里叶级数为：

$$\begin{aligned}v(t) &= \frac{V_m}{2} - \frac{V_m}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_0 t \\ &= \frac{V_m}{2} - \frac{V_m}{\pi}\sin\omega_0 t - \frac{V_m}{2\pi}\sin 2\omega_0 t - \frac{V_m}{3\pi}\sin 3\omega_0 t - \cdots\end{aligned}$$

练习题

16.1 求图中所示电压周期函数当 $V_m = 9\pi$ V 时的 a_v, a_k 和 b_k 的表达式。

答：$a_v = 21.99$ V, $a_k = \frac{6}{k}\sin\frac{4k\pi}{3}$ V, $b_k = \frac{6}{k}\left(1 - \cos\frac{4k\pi}{3}\right)$ V。

16.2 参考练习题 16.1 回答下面问题：

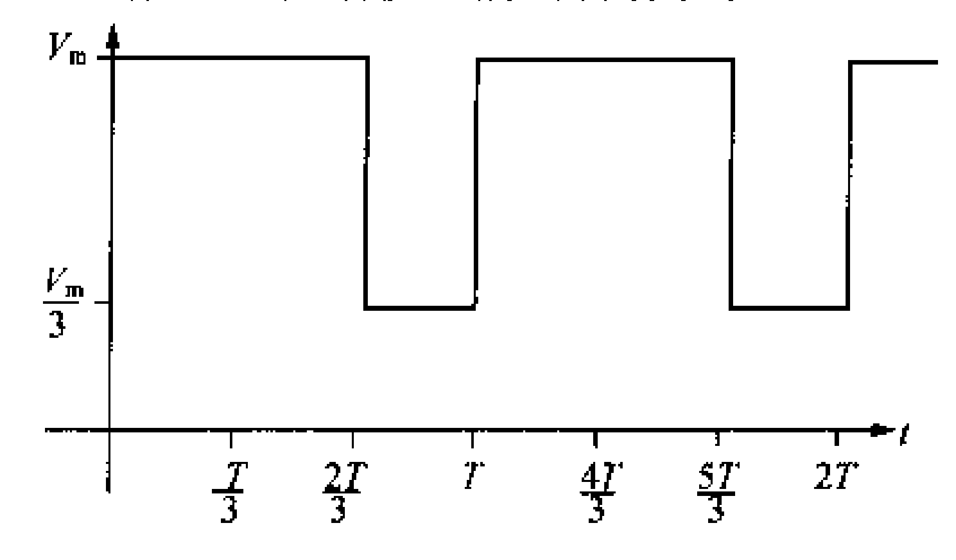
(a) 周期电压的平均值是多少？

(b) 计算 $a_1 - a_5$ 和 $b_1 - b_5$ 的数值。

(c) 以弧度每秒为单位，如果 $T = 125.66$ ms，基频是多少？

(d) 以赫兹为单位，三次谐波的频率是多少？

(e) 写出傅里叶级数的五次谐波之前的所有项。



答：(a) 21.99 V, (b) −5.2 V, 2.6 V, 0 V, −1.3V 和 1.04 V, 9 V, 4.5 V, 0 V, 2.25 V 和 1.8 V, (c) 50 rad/s, (d) 23.87 Hz, (e) $v(t) = 21.99 - 5.2\cos 50t + 9\sin 50t + 2.6\cos 100t + 4.5\sin 100t - 1.3\cos 200t + 2.25\sin 200t + 1.04\cos 250t + 1.8\sin 250t$ V。

一般情况下，确定傅里叶系数的工作是冗长乏味的，因此，对这项工作的任何简化都是有益的。幸运的是，具有某种对称性质的周期函数会大大降低确定傅里叶系数的工作量。在 16.3 节中，将讨论函数的对称性对傅里叶级数系数的影响。

16.3 对称性对傅里叶系数的影响

四种类型的对称可以用来简化傅里叶系数计算的工作：

1. 偶函数对称。
2. 奇函数对称。
3. 半波对称。
4. 方波对称。

下面将分别讨论各种类型的对称对傅里叶系数的影响。

16.3.1 偶函数对称

将满足：

$$f(t) = f(-t) \tag{16.13}$$

的函数定义为偶函数。因为只含有偶数指数的多项式函数具有这个特点，所以将满足式(16.13)的函数称为偶函数。对于一个周期偶函数，求傅里叶系数的公式可简化为：

$$a_v = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{d}t \tag{16.14}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\ \mathrm{d}t \tag{16.15}$$

$$b_k = 0, \text{对所有 } k \tag{16.16}$$

注意：当周期函数为偶函数时，所有系数 b 的值等于零。

图 16.6 给出了一个周期偶函数的例子。式(16.14)～(16.16)可以由式(16.3)～(16.5)直接导出。在上述各式的推导过程中，令 $t_0 = -T/2$，并将积分区间分成 $-T/2 \sim 0$ 和 $0 \sim T/2$ 两部分，或：

$$\begin{aligned} a_v &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{16.17}$$

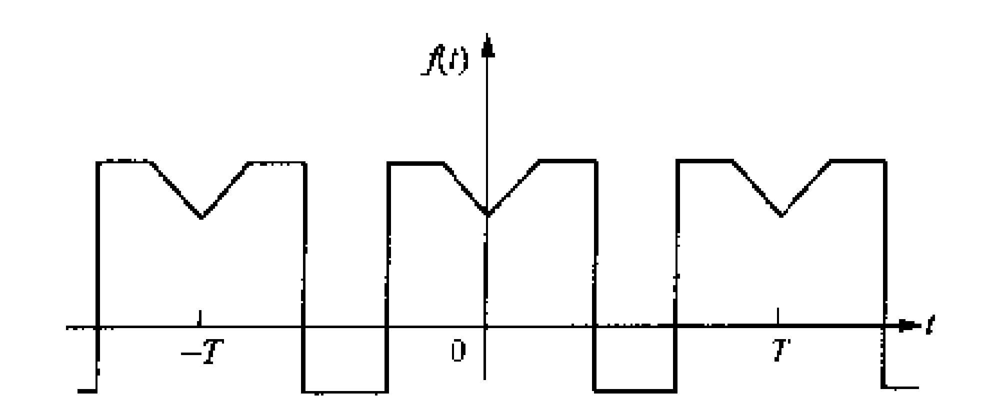


图 16.6　一个周期偶函数，$f(t) = f(-t)$

改变式(16.17)右边第一个积分的变量。令 $t = -x$，注意：因为该函数是偶函数，所以 $f(t) = f(-x) = f(x)$。另外还有，当 $t = -T/2$ 时，$x = T/2$，$\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$。于是有：

$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{T/2}^{0} f(x)(-\mathrm{d}x) = \int_0^{T/2} f(x)\mathrm{d}x \tag{16.18}$$

上式表明从 $-T/2$ 到 0 的积分与从 0 到 $T/2$ 的积分值相同。因此，式(16.17)与式(16.14)相同。式(16.15)的推导过程与式(16.14)类似。这里：

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\ \cos k\omega_0 t\ \mathrm{d}t \\ &+ \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\ \cos k\omega_0 t\ \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{16.19}$$

而且：

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\ \mathrm{d}t &= \int_{T/2}^{0} f(x)\cos(-k\omega_0 x)(-\mathrm{d}x) \\ &= \int_0^{T/2} f(x)\cos k\omega_0 x\ \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{16.20}$$

同前面一样,从 $-T/2$ 到 0 的积分与从 0 到 $T/2$ 的积分值相同。联立式(16.20)和式(16.19),可以导出式(16.15)。

当 $f(t)$ 为周期偶函数时,所有系数 b 的值等于零,因为从 $-T/2$ 到 0 的积分值恰好等于从 0 到 $T/2$ 的负积分值。即:

$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\ \sin k\omega_0 t\ \mathrm{d}t = \int_{T/2}^{0} f(x)\sin(-k\omega_0 x)(-\mathrm{d}x)$$
$$= -\int_{0}^{T/2} f(x)\ \sin k\omega_0 x\ \mathrm{d}x \tag{16.21}$$

利用式(16.14)和式(16.15)求傅里叶系数时,积分区间为 0 ~ $T/2$。

16.3.2 奇函数对称

将满足:

$$f(t) = -f(-t) \tag{16.22}$$

的函数定义为奇函数。将满足式(16.22)的函数称为奇函数,是因为只含有奇数指数的多项式函数具有这个特点。周期奇函数的傅里叶系数的表达式为:

$$a_v = 0 \tag{16.23}$$

$$a_k = 0,\text{对所有 } k; \tag{16.24}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin k\omega_0 t\ \mathrm{d}t \tag{16.25}$$

注意:当周期函数是奇函数时,所有系数的值等于零。

图 16.7 给出了一个周期奇函数的例子。

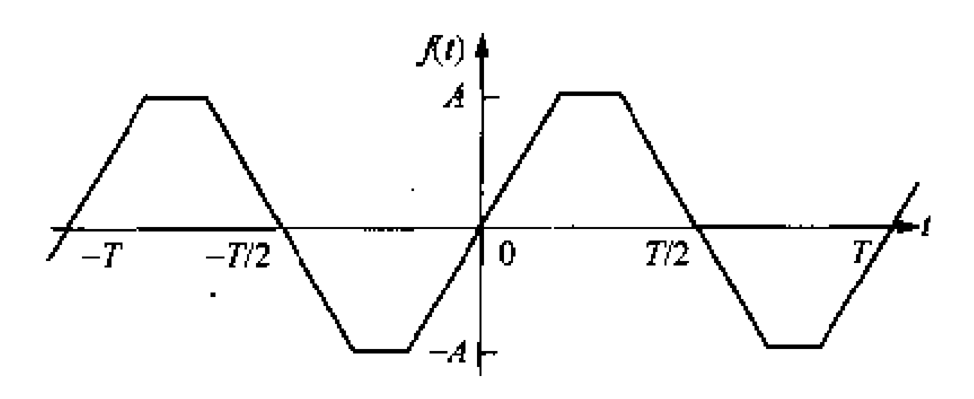
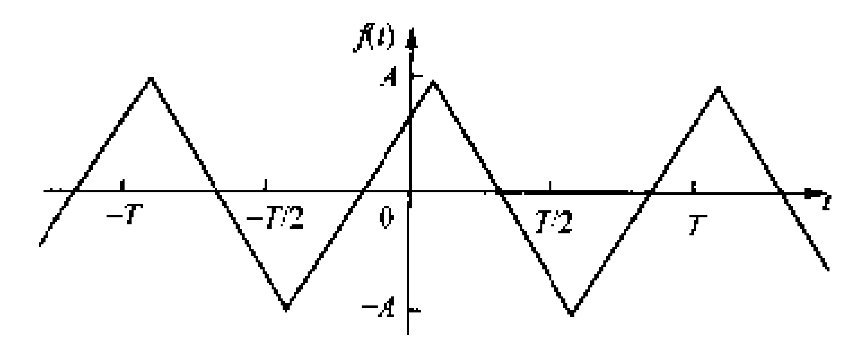


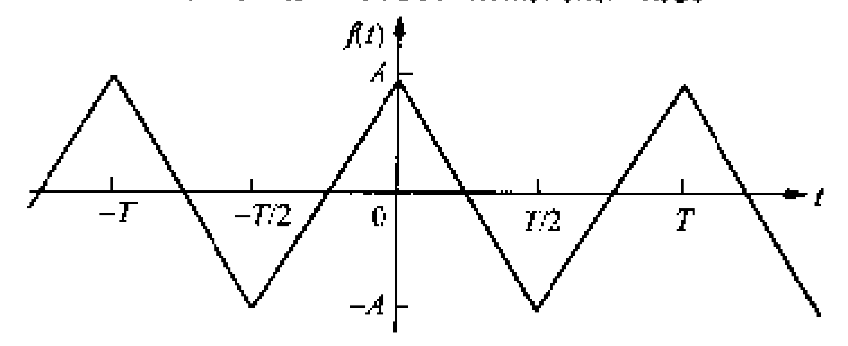
图 16.7 一个周期奇函数,$f(t) = -f(-t)$

利用与推导式(16.14) ~ (16.16)相同的步骤,可以导出式(16.23) ~ (16.25)。这里将式(16.23) ~ (16.25)的推导留给读者,见习题 16.4。

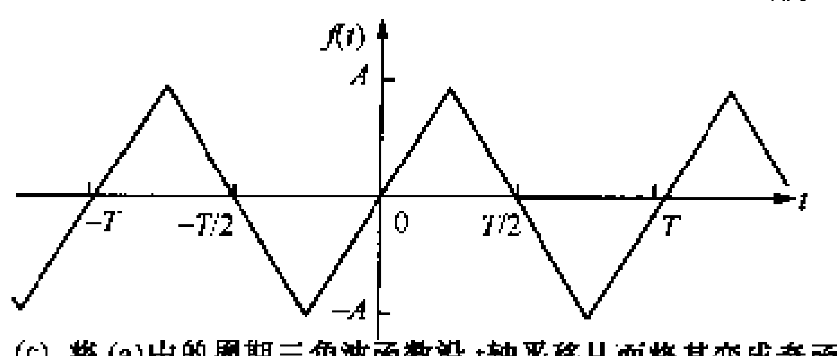
沿时间轴移动函数会破坏周期函数的奇偶性。换言之,明智地选择 $t=0$ 点的位置,将会把周期函数变成奇对称或偶对称。例如,图 16.8(a)所示的三角形函数既不是奇函数也不是偶函数。然而,能将该函数变成图 16.8(b)所示的偶函数或将它变成图 16.8(c)所示的奇函数。



(a) 既不是奇函数也不是偶函数的周期三角波



(b) 将(a)中的周期三角波函数沿 t 轴平移从而将其变成偶函数



(c) 将(a)中的周期三角波函数沿 t 轴平移从而将其变成奇函数

图 16.8　选择 $t=0$ 点的位置将一个周期函数变成偶函数、奇函数或非奇非偶函数

16.3.3 半波对称

如果一个周期函数满足下式：

$$f(t)=-f(t-T/2) \tag{16.26}$$

则称该函数为半波对称函数。式(16.26)表明，将一个半波对称函数沿时间轴平移半个周期并相对于该轴上下反转后，该函数不发生变化。例如，图 16.7 和图 16.8 中所示的函数为半波对称函数，而图 16.5 和图 16.6 中的函数不是半波对称函数。注意：半波对称不是 $t=0$ 点的函数。

如果一个周期函数具有半波对称性，当 k 取偶数值时，a_k 和 b_k 的值都为零。此外，因为半波对称函数的平均值等于零，所以 a_v 的值也为零。傅里叶系数的表达式如下：

$$a_v=0 \tag{16.27}$$

$$a_k=0,\ k\ 为偶数 \tag{16.28}$$

$$a_k=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos k\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\ k\ 为奇数 \tag{16.29}$$

$$b_k=0,\ k\ 为偶数 \tag{16.30}$$

$$b_k=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\sin k\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\ k\ 为奇数 \tag{16.31}$$

从式(16.3)~(16.5)出发,将积分区间取为 $-T/2 \sim T/2$,将它分为 $-T/2 \sim 0$ 和 $0 \sim T/2$ 两部分,经过推导可得式(16.27)~(16.31)。例如,推导 a_k 的过程如下:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, \mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{16.32}$$

现在改变式(16.32)右边第一个积分式的变量。令:

$$t = x - T/2$$

则:

$$\begin{aligned} &x = T/2 \qquad \text{当 } t = 0 \\ &x = 0 \qquad \text{当 } t = -T/2 \\ &\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{aligned}$$

将第一个积分重写如下:

$$\begin{aligned} &\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, \mathrm{d}t \\ &\qquad = \int_{0}^{T/2} f(x - T/2)\cos k\omega_0 (x - T/2)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{16.33}$$

注意这里:

$$\cos k\omega_0 (x - T/2) = \cos(k\omega_0 x - k\pi) = \cos k\pi \cos k\omega_0 x$$

另外假设:

$$f(x - T/2) = -f(x)$$

这样式(16.33)变成:

$$\begin{aligned} &\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, \mathrm{d}t \\ &\qquad = \int_{0}^{T/2} [-f(x)]\cos k\pi \cos k\omega_0 x\, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{16.34}$$

将式(16.34)代入式(16.32)中得到:

$$a_k = \frac{2}{T}(1 - \cos k\pi)\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, \mathrm{d}t \tag{16.35}$$

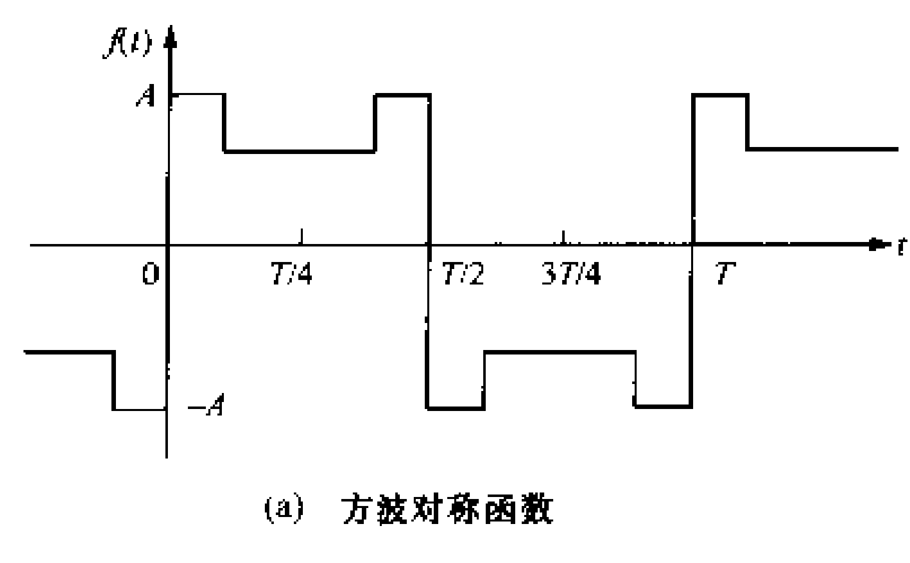
其中当 k 为偶数时,$\cos k\pi$ 等于 1,k 为奇数时,$\cos k\pi$ 等于 -1。这样,由式(16.35)可以得到式(16.28)和式(16.29)。

类似地,使用以上步骤可以导出式(16.30)和式(16.31),这里将式(16.30)和式(16.31)的推导留给读者(见习题 16.5)。

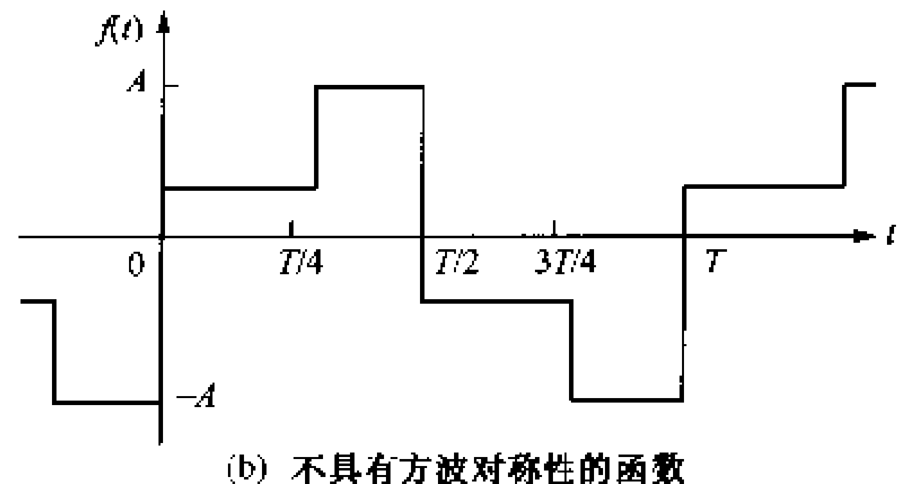
通过上述讨论可知,半波对称周期函数的傅里叶级数表达式只含有奇次谐波,直流分量为零。

16.3.4 方波对称

方波对称这个术语描述了这样一种周期函数，该函数具有半波对称性，且关于正、负半周期的中点对称。图 16.9(a)中的函数是关于正、负半周期的中点对称的方波对称函数。图 16.9(b)的函数不是方波对称函数，尽管它是半波对称函数。



(a)　方波对称函数



(b) 不具有方波对称性的函数

图 16.9

适当地选择 $t=0$ 点的位置，总能把一个方波对称周期函数变成偶函数或奇函数。例如，图 16.9 (a)中所示的函数是奇函数，将它沿 t 轴向左或向右平移 $T/4$，该函数就变成了偶函数。然而，图 16.9 (b)中所示的函数无论如何也不能变成奇函数或偶函数。计算傅里叶系数时，为了利用方波对称性，必须选择使函数变成奇函数或偶函数的 $t=0$ 点的位置。

如果将方波对称函数变成偶函数，则：

$a_v=0$，半波对称。

$a_k=0$，k 为偶数，半波对称。

$a_k=\dfrac{8}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} f(t)\cos k\omega_0 t\,\mathrm{d}t$，$k$ 为奇数。

$b_k=0$，偶函数，对于所有 k 值。　(16.36)

以上，由函数的方波对称性和它的偶函数性质导出了式(16.36)。考虑方波对称和半波对称的相同之处，所以，当 k 为偶数时，不必计算 a_v 和 a_k。比较式(16.36)中 k 为奇数时 a_k 的表达式和式(16.29)发现，联合考虑方波对称特性和偶函数特性，可以把积分区间从 $0\sim T/2$ 缩短到 $0\sim T/4$。这里将式(16.36)的推导留给读者(见习题 16.6)。

如果将方波对称函数变成奇函数，那么有下面式子成立：

$a_v=0$，半波对称。

$a_k=0$，k 为偶数，半波对称。

$b_k=0$。

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin\ k\omega_0 t\ \mathrm{d}t, k\ 为奇数。\tag{16.37}$$

式(16.37)是同时考虑函数的方波对称性质和奇函数性质的直接结果。而且,方波对称特性使积分区间从 0 ~ T/2 缩短到 0 ~ T/4。这里将式(16.37)的推导留给读者(见习题 16.7)。

例 16.2 说明了如何利用函数的对称性简化傅里叶系数的计算。

例 16.2 求图 16.10 所示波形的傅里叶级数表达式。

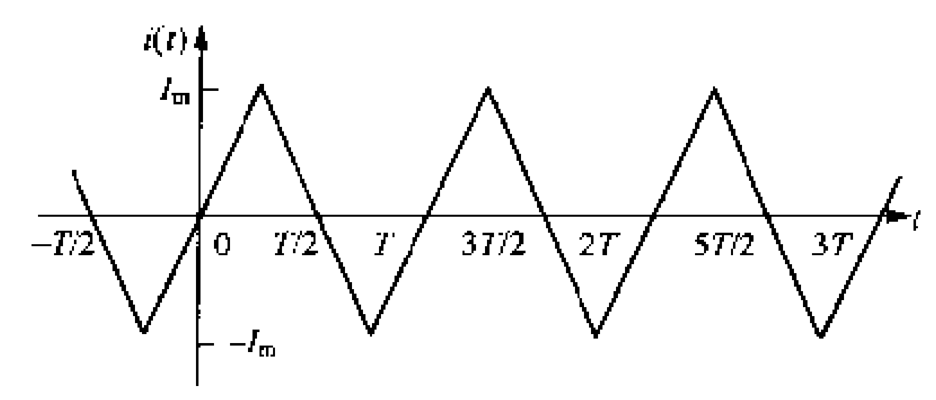


图 16.10 例 16.2 的周期波形

解:

从寻找波形的对称性开始。发现该函数是奇函数,且为半波对称函数和方波对称函数。因为该函数是奇函数,所以,所有的系数 a 等于零,即 $a_0 = 0$,且对于所有 k 值,$a_k = 0$。因为该函数是半波对称函数,所以,当 k 取偶数值时,$b_k = 0$。因为该函数是方波对称函数,所以,当取奇数值时,b_k 的表达式为:

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} i(t)\sin\ k\omega_0 t\ \mathrm{d}t$$

在 $0 \leqslant t \leqslant T/4$ 内,$i(t)$的表达式为:

$$i(t) = \frac{4I_m}{T}t$$

因此:

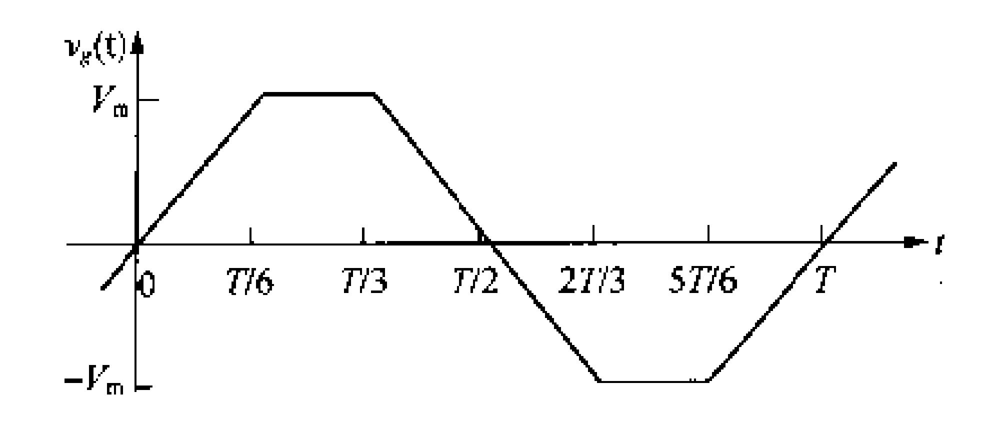
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{8}{T}\int_0^{T/4} \frac{4I_m}{T}t\ \sin k\omega_0 t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{32I_m}{T^2}\left(\frac{\sin\ k\omega_0 t}{k^2\omega_0^2} - \frac{t\cos\ k\omega_0 t}{k\omega_0}\Bigg|_0^{T/4}\right) \\ &= \frac{8I_m}{\pi^2 k^2}\sin\frac{k\pi}{2} \qquad (k\ 为奇数) \end{aligned}$$

$i(t)$的傅里叶级数表达式为:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{8I_m}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\ n\omega_0 t \\ &= \frac{8I_m}{\pi^2}\left(\sin\omega_0 t - \frac{1}{9}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{25}\sin 5\omega_0 t - \frac{1}{49}\sin 7\omega_0 t + \cdots\right) \end{aligned}$$

练习题

16.3 求图中所示周期电压的傅里叶级数。



答：$v_g(t)=\frac{12V_m}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/3)}{n^2}\sin n\omega_0 t$

16.4　傅里叶级数的三角函数形式

在傅里叶级数的电路应用中，为方便起见，将傅里叶级数的余弦项和正弦项合并成单一项。这样，可以把 $i(t)$或 $v(t)$的各次谐波表示成单一的相量。可以将级数中的余弦项和正弦项合并成一个只含余弦项或只含正弦项的表达式。因为电路分析的相量法(见第 9 章)选用余弦形式，所以，这里将傅里叶级数的三角函数式用余弦式表示。因此，可以把式(16.2)中的傅里叶级数写成：

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n) \tag{16.38}$$

其中，A_n 和θ_n 用下面的复变量定义为：

$$a_n-\mathrm{j}b_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,\underline{/-\theta_n}=A_n\,\underline{/-\theta_n} \tag{16.39}$$

使用相量法，将式(16.2)的余弦项和正弦项相加，可以导出式(16.38)和式(16.39)。首先将正弦函数表示成余弦函数，即将式(16.2)重写为：

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0 t+b_n\cos(n\omega_0 t-90°) \tag{16.40}$$

使用相量法，将求和符号下的各项相加得：

$$P\{a_n\cos n\omega_0 t\}=a_n\,\underline{/0°} \tag{16.41}$$

和

$$P\{b_n\cos(n\omega_0 t-90°)\}=b_n\,\underline{/-90°}=-\mathrm{j}b_n \tag{16.42}$$

则：

$$\begin{aligned}P\{a_n\cos n\omega_0 t+b_n\cos(n\omega_0 t-90°)\}&=a_n-\mathrm{j}b_n\\&=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,\underline{/-\theta_n}\\&=A_n\,\underline{/-\theta_n}\end{aligned} \tag{16.43}$$

对式(16.43)进行反变换，得到：

$$\begin{aligned}a_n\cos n\omega_0 t+b_n\cos(n\omega_0 t-90°)&=P^{-1}\{A_n\,\underline{/-\theta_n}\}\\&=A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)\end{aligned} \tag{16.44}$$

将式(16.44)代入式(16.40)，可以导出式(16.38)。式(16.43)与式(16.39)一致。如果周期函数为偶函数或奇函数时，A_n 则变为 a_n(偶函数)或 b_n(奇函数)，θ_n 变为 0°(偶函数)或 90°(奇函

数)。

求一个给定周期函数的傅里叶级数的三角函数表达式的推导过程见例 16.3。

例 16.3 (a) 推导图 16.11 所示周期函数的傅里叶系数 a_k 和 b_k 的表示式。

(b) 采用式(16.38)的格式,写出 $v(t)$ 的傅里叶级数表达式的前四项。

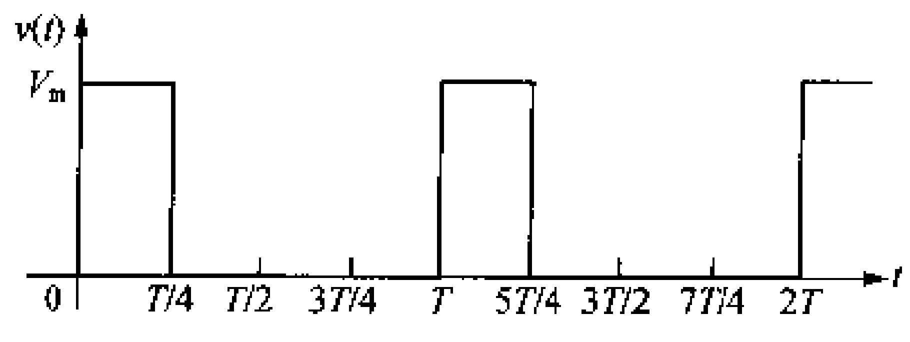


图 16.11 例 16.3 的周期函数

解:

(a) 电压 $v(t)$ 既不是偶函数也不是奇函数,而且也不是半波对称函数。因此,可以用式(16.4)和式(16.5)求 a_k 和 b_k 的值。将 t_0 选定为零,得到:

$$a_k = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/4} V_m \cos k\omega_0 t \, dt + \int_{T/4}^{T} (0) \cos k\omega_0 t \, dt\right]$$

$$= \frac{2V_m}{T} \frac{\sin k\omega_0 t}{k\omega_0}\bigg|_0^{T/4} = \frac{V_m}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2}$$

和

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/4} V_m \sin k\omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{2V_m}{T}\left(\frac{-\cos k\omega_0 t}{k\omega_0}\bigg|_0^{T/4}\right)$$

$$= \frac{V_m}{k\pi}\left(1 - \cos \frac{k\pi}{2}\right)$$

(b) $v(t)$ 的平均值为:

$$a_v = \frac{V_m(T/4)}{T} = \frac{V_m}{4}$$

$k = 1,2$ 和 3 时, $a_k - \mathrm{j}b_k$ 的值分别为:

$$a_1 - \mathrm{j}b_1 = \frac{V_m}{\pi} - \mathrm{j}\frac{V_m}{\pi} = \frac{\sqrt{2}V_m}{\pi} \angle -45^\circ$$

$$a_2 - \mathrm{j}b_2 = 0 - \mathrm{j}\frac{V_m}{\pi} = \frac{V_m}{\pi} \angle -90^\circ$$

$$a_3 - \mathrm{j}b_3 = \frac{-V_m}{3\pi} - \mathrm{j}\frac{V_m}{3\pi} = \frac{\sqrt{2}V_m}{3\pi} \angle -135^\circ$$

于是, $v(t)$ 的傅里叶级数表达式的前四项为:

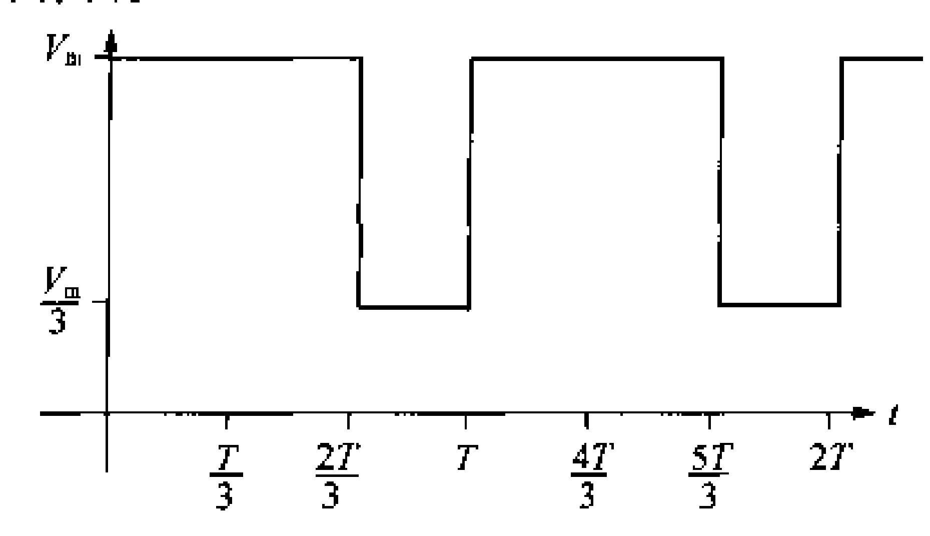
$$v(t) = \frac{V_m}{4} + \frac{\sqrt{2}V_m}{\pi}\cos(\omega_0 t - 45^\circ) + \frac{V_m}{\pi}\cos(2\omega_0 t - 90^\circ)$$

$$+ \frac{\sqrt{2}V_m}{3\pi}\cos(3\omega_0 t - 135^\circ) + \cdots$$

练习题

16.4 (a) 计算图中所示周期函数当 $V_m = 9\pi$ V 时的 $A_1 - A_5$ 和 $\theta_1 - \theta_5$ 的值。

(b) 采用式(16.38)的格式，若 $T = 125.66$ ms，写出 $v(t)$ 的傅里叶级数的五次谐波之前的所有项。



答：(a) 10.4，5.2，0，2.6，2.1V 和 $-120°$，$-60°$，未定义，$-120°$，$-60°$；(b) $v(t) = 21.99 + 10.4\cos(50t - 120°) + 5.2\cos(100t - 60°) + 2.6\cos(200t - 120°) + 2.1\cos(250t - 60°)$ V。

16.5 应用

本节讲述如何利用周期激励函数的傅里叶级数表达式求一个线性电路的稳态响应。图 16.12 (a)所示的 RC 电路给出了一个例子。电路的激励为图 16.12(b)所示的周期方波电压。电容器两端的电压为要求的响应，或者说是输出信号。

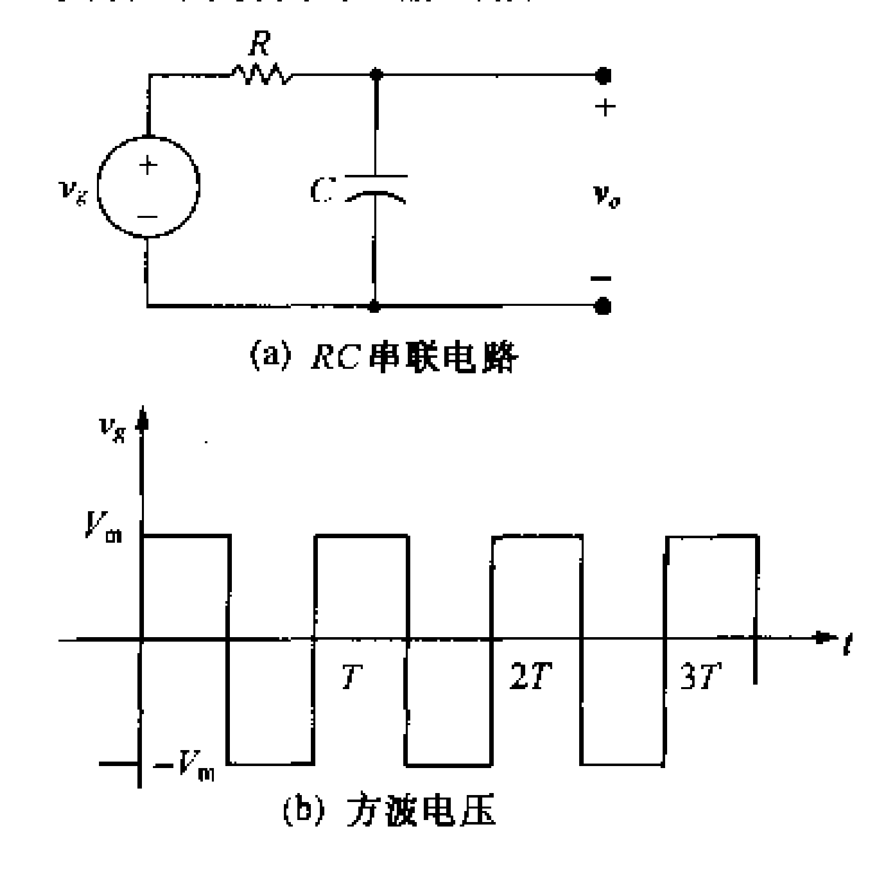


图 16.12　周期电压激励的 RC 电路

求稳态响应的第一步是将周期激励源表示成它的傅里叶级数形式。因为该激励源为奇函数并且具有半波对称性和方波对称特性，所以，其傅里叶级数的系数只剩下 b_k，而 k 只取奇整数：

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} V_m \sin k\omega_0 t \, dt$$
$$= \frac{4V_m}{\pi k} \quad (k \text{ 为奇数}) \tag{16.45}$$

这样,v_g 的傅里叶级数表达式为:

$$v_g = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t \tag{16.46}$$

将级数展开,可以得到:

$$v_g = \frac{4V_m}{\pi}\sin\omega_0 t + \frac{4V_m}{3\pi}\sin 3\omega_0 t + \frac{4V_m}{5\pi}\sin 5\omega_0 t + \frac{4V_m}{7\pi}\sin 7\omega_0 t + \cdots \tag{16.47}$$

式(16.47)表示的电压源与无穷多个级数相关的正弦源等效,每个正弦源都有自己的振幅和频率。为求每个正弦源对输出电压的响应,可以使用叠加定理。

对于任一正弦源,输出电压的相量域表达式为:

$$V_o = \frac{V_g}{1 + j\omega RC} \tag{16.48}$$

因为所有电压源都被表示成正弦函数,所以,将相量表示成正弦形式而不是余弦形式。换句话说,从相量域返回时域时,将时域表达式写成 $\sin(\omega t + \theta)$ 而不是 $\cos(\omega t + \theta)$。

正弦源的基频对应的输出电压相量为:

$$V_{o1} = \frac{(4V_m/\pi)\,\underline{/0^\circ}}{1 + j\omega_0 RC} \tag{16.49}$$

将 V_{o1} 写成极坐标的形式:

$$V_{o1} = \frac{(4V_m)\,\underline{/-\beta_1}}{\pi\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}} \tag{16.50}$$

其中:

$$\beta_1 = \arctan\omega_0 RC \tag{16.51}$$

由式(16.50),得到 v_o 的基频分量的时域表达式为:

$$v_{o1} = \frac{4V_m}{\pi\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}}\sin(\omega_0 t - \beta_1) \tag{16.52}$$

用类似方法,可以导出输出电压的三次谐波分量。输出电压的三次谐波相量为:

$$V_{o3} = \frac{(4V_m/3\pi)\,\underline{/0^\circ}}{1 + j3\omega_0 RC}$$
$$= \frac{4V_m}{3\pi\sqrt{1 + 9\omega_0^2 R^2 C^2}}\,\underline{/-\beta_3} \tag{16.53}$$

其中:

$$\beta_3 = \arctan 3\omega_0 RC \tag{16.54}$$

输出电压的三次谐波时域表达式为:

$$v_{o3} = \frac{4V_m}{3\pi\sqrt{1 + 9\omega_0^2 R^2 C^2}}\sin(3\omega_0 t - \beta_3) \tag{16.55}$$

因此,输出电压的 k 次谐波分量的表达式为:

$$v_{ok} = \frac{4V_m}{k\pi\sqrt{1+k^2\omega_0^2R^2C^2}}\sin(k\omega_0 t-\beta_k)\quad (k \text{ 为奇数}) \tag{16.56}$$

其中:

$$\beta_k = \arctan k\omega_0 RC \qquad (k \text{ 为奇数}). \tag{16.57}$$

则可以写出输出电压的傅里叶级数表达式为:

$$v_o(t) = \frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\sin(n\omega_0 t-\beta_n)}{n\sqrt{1+(n\omega_0 RC)^2}} \tag{16.58}$$

式(16.58)的推导并不困难。但是,尽管得到了稳态输出的解析表达式,从式(16.58)并不能直接看出函数 $v_o(t)$的波形。正如前面提到的,这个缺陷是傅里叶级数方法存在的一个问题。然而,式(16.58)并不是没有用,如果研究电路的频率响应,式(16.58)有助于估计 $v_o(t)$的稳态波形。例如,如果 C 较大,对于高次谐波,$1/n\omega_0 C$ 则较小。这时电容器将输入波形的高频分量滤掉,式(16.58)中的高次谐波同低次谐波相比可以忽略不计。式(16.58)本身反映了这种情况,对于大电容 C:

$$\begin{aligned} v_o &\approx \frac{4V_m}{\pi\omega_0 RC}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(n\omega_0 t-90°) \\ &\approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\omega_0 t \end{aligned} \tag{16.59}$$

式(16.59)表明输出电压的谐波振幅以 $1/n^2$ 递减,与之相比,输入谐波的振幅以 $1/n$ 递减。如果 C 足够大,以至于只有基波是有意义的,上式则近似为:

$$v_o(t) \approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC}\cos\omega_0 t \tag{16.60}$$

对其进行傅里叶分析可知,该方波输入已被整形为正弦输出。

现在看看 $C\to 0$ 时的情况。电路显示当 $C=0$ 时,v_o和 v_g 相等,因为这时对于所有频率而言电容支路看起来像一个开路。由式(16.58)可以得出相同的结果,因为当 $C\to 0$ 时:

$$v_o = \frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_0 t \tag{16.61}$$

但式(16.61)与式(16.46)相同,因此,当 $C\to 0$ 时,$v_o\to v_g$。

上述讨论说明式(16.58)是有用的,因为通过该式可以预知,当 C 较大时,输出波形是输入波形的高度畸变复制,而 C 较小时,复制的结果才是合理的。在第 13 章,根据系统加权函数占用内存的大小,考虑输入和输出波形之间的畸变。在频率域,根据电路传送过程中谐波振幅和相位的改变,考虑稳态输入和输出之间的畸变。当网络相对于输入谐波较大程度地改变输出谐波间的振幅和相位关系时,输出谐波是输入谐波的畸变形式。这样,在频率域可以研究振幅畸变和相位畸变。

对于前面讨论的电路,由于输入谐波的振幅以 $1/n$ 递减,所以出现了振幅畸变,而输出谐波的振幅以下面的形式递减:

$$\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+(n\omega_0 RC)^2}}$$

该电路也显示出了相位畸变,因为输入各次谐波的相位角为零,而输出信号 n 次谐波的相位角为 $-\arctan n\omega_0 RC$。

16.5.1 直接法求稳态响应的应用

对于图 16.12 (a)所示的简单 RC 电路,可以不用求激励函数的傅里叶级数表达式而直接求出稳态响应的表达式。下面将进行的分析有助于加深对傅里叶级数方法的理解。

为利用直接电路分析法求 v_o 的稳态表达式,进行如下的推理。方波激励函数给电容充电,充电电压在 $+V_m$ 和 $-V_m$ 之间变化。当电路到达稳态时,交替充电变成周期性的。从单个时间连续 RC 电路(第 7 章)的分析得知激励电压的瞬时响应为指数形式。因此,图 16.12 (a)所示电路的电容电压的稳态波形如图 16.13 所示。

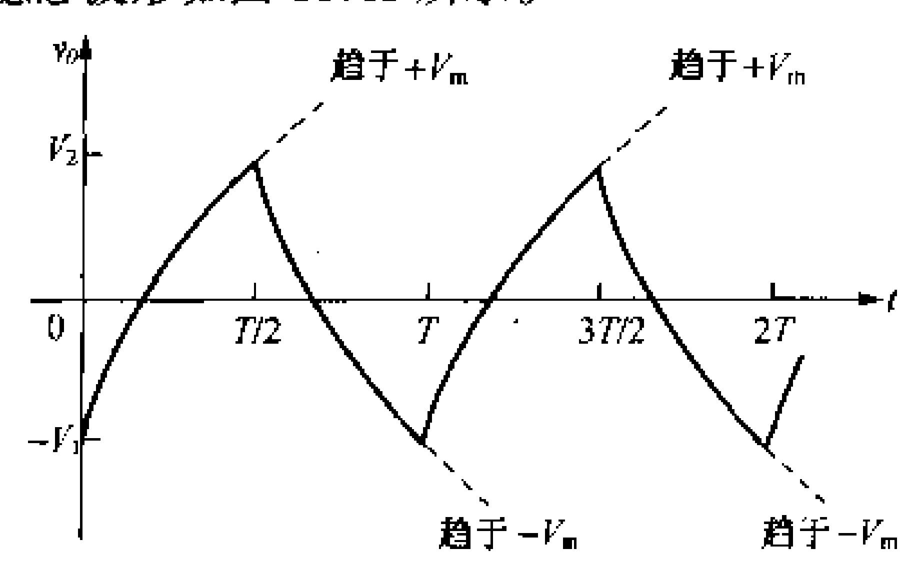


图 16.13 图 16.12 (a) 所示电路 v_o 的稳态波形

在 $0 \leq t \leq T/2$ 和 $T/2 \leq t \leq T$ 内,$v_o(t)$的解析表达式为:

$$v_o = V_m + (V_1 - V_m)e^{-t/RC}, 0 \leq t \leq T/2 \tag{16.62}$$

$$v_o = -V_m + (V_2 + V_m)e^{-[t-(T/2)]/RC}, T/2 \leq t \leq T \tag{16.63}$$

用第 7 章推导的方法,参考式(7.60),可以得到式(16.62)和式(16.63)。由式(16.62)可以求出 V_1 和 V_2 的值:

$$V_2 = V_m + (V_1 - V_m)e^{-T/2RC} \tag{16.64}$$

从式(16.63)得到:

$$V_1 = -V_m + (V_2 + V_m)e^{-T/2RC} \tag{16.65}$$

求解式(16.64)和式(16.65)的 V_2 和 V_2 得到:

$$V_2 = -V_1 = \frac{V_m(1 - e^{-T/2RC})}{1 + e^{-T/2RC}} \tag{16.66}$$

将式(16.66)代入式(16.62)和式(16.63),得出:

$$v_o = V_m - \frac{2V_m}{1 + e^{-T/2RC}}e^{-t/RC}, 0 \leq t \leq T/2 \tag{16.67}$$

和

$$v_o = -V_m + \frac{2V_m}{1 + e^{-T/2RC}}e^{-[t-(T/2)]/RC}, T/2 \leq t \leq T \tag{16.68}$$

式(16.67) 和式(16.68) 表明,$v_o(t)$ 具有半波对称性,因此,v_o 的平均值为零。此结果与用傅

里叶级数方法求得的稳态响应结果是一致的。即,因为激励函数没有零频率分量,所以,响应也没有零频率分量。式(16.67) 式和式(16.68)也显示出了电容值的改变对稳态响应的影响。如果 C 较小,则指数函数很快就趋于零,在 0 和 $T/2$ 之间,$v_o = V_m$,而在 $T/2$ 和 T 之间,$v_o = -V_m$。换句话说,$C \to 0$ 时,$v_o \to v_g$。如果 C 较大,输出波形为三角波,如图 16.14 所示。注意:当 C 较大时,可以用线性关系式 $1-(t/RC)$ 和 $1-\{[t-(T/2)]/RC\}$ 分别近似指数关系式 $e-t/RC$ 和 $e-[t-(T/2)]/RC$。式(16.59)给出了这个三角波的傅里叶级数。

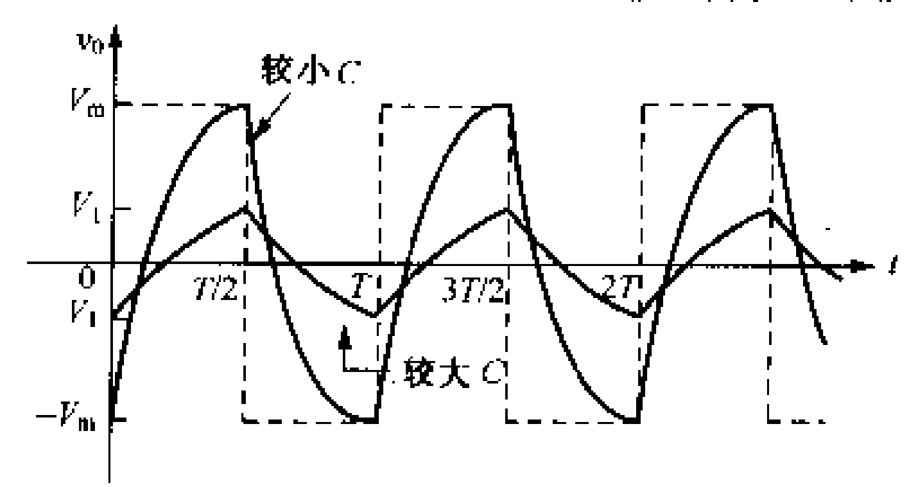


图 16.14 电容值的大小对稳态响应的影响

图 16.14 对上述分析结果进行了总结。图中的虚线表示输入电压,彩色实线表示C 较小时的输出电压,黑色实线表示C 较大时的输出电压。

最后,证明式(16.67) 及式(16.68)的稳态响应与式(16.58)中的傅里叶级数解等价。为达到这个目的,只需导出式(16.67)和式(16.68)描述的周期函数的傅里叶级数表达式。因为周期电压响应是半波对称函数,所以它的傅里叶级数只包含奇次谐波。当 k 为奇数,有:

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(V_m - \frac{2V_m e^{-t/RC}}{1+e^{-T/2RC}}\right)\cos k\omega_0 t \, dt$$
$$= \frac{-8RCV_m}{T[1+(k\omega_0 RC)^2]} \quad (k \text{ 为奇数}) \tag{16.69}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(V_m - \frac{2V_m e^{-t/RC}}{1+e^{-T/2RC}}\right)\sin k\omega_0 t \, dt$$
$$= \frac{4V_m}{k\pi} - \frac{8k\omega_0 V_m R^2 C^2}{T[1+(k\omega_0 RC)^2]} \quad (k \text{ 为奇数}) \tag{16.70}$$

为说明从式(16.69)和式(16.70)得到的结果与式(16.58)一致,必须证明:

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{4V_m}{k\pi}\frac{1}{\sqrt{1+(k\omega_0 RC)^2}} \tag{16.71}$$

和

$$\frac{a_k}{b_k} = -k\omega_0 RC \tag{16.72}$$

这里将式(16.69) ~ (16.72)的证明留给读者(见习题 16.19 和 16.20)。联立式(16.71)、式(16.72)、式(16.38)和式(16.39),可以导出式(16.58)中的傅里叶级数表达式。详细证明留给读者(见习题 16.21)。

利用这个电路,讲述了利用傅里叶级数与叠加原理求周期激励函数稳态响应的方法。傅里叶级数方法的主要缺陷是难以确定响应的波形。然而,考虑电路的频率响应,利用傅里叶级

数表达式的有限项,可以导出稳态响应的近似式(见习题 16.25 和 16.27)。

练习题

16.5 (a) 证明:对于大的电容 C 值,式(16.67)可以用下式:

$$v_o(t) \approx \frac{-V_m T}{4RC} + \frac{V_m}{RC}t$$

近似。注意:当 $0 \leqslant t \leqslant T/2$ 时,该表达式为三角波方程式。提示:(1)令 $e^{-t/RC} \approx 1-(t/RC)$ 和 $e^{-T/2RC} \approx 1-(T/2RC)$;(2) 将结果表达式置于公分母 $2-(T/2RC)$上;(3) 化简分子;(4) 对大的 C 值,假定 $T/2RC$ 远小于 2。

(b) 将三角波的峰值代入到习题 16.9 (见图 P16.9 (b))的解中并证明其结果为式(16.59)。

答:(a) 求导;(b) 由习题 16.9 可得,$a_k = -8V_p/\pi^2 k^2$,其中 $k=1,3,5,\cdots$ 而 V_p 是三角波的峰值。因此,对于(a)中描述的三角波:

$$a_k = \frac{-2V_m T}{\pi^2 k^2 RC} = \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RCk^2}$$

16.6 周期函数的平均功率计算

如果得到了线性集总电路两端电压和电流的傅里叶级数表达式,则很容易将电路两端的平均功率表示成谐波电压和谐波电流的函数。使用式(16.38)中的傅里叶级数的三角函数形式,可以将网络端口的周期电压和电流写成:

$$v = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn}) \tag{16.73}$$

$$i = I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{in}) \tag{16.74}$$

式(16.73)和式(16.74)中用到的符号定义如下:

V_{dc} = 直流电压分量的振幅。

V_n = n 次谐波电压的振幅。

θ_{vn} = 次谐波电压的相位角。

I_{dc} = 直流电流分量的振幅。

I_n = n 次谐波电流的振幅。

θ_{in} = n 次谐波电流的相位角。

若电流参考方向为参考电压沿电路某一段下降的方向(使用无源符号惯例),则电路某一段的瞬时功率为 vi。平均功率为:

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} vi\,\mathrm{d}t \tag{16.75}$$

为得到平均功率的表达式,可以将式(16.73)和式(16.74)代入式(16.75)并积分。乍一看,这似乎是一个很艰巨的任务,因为乘积 vi 需要两个无穷级数相乘。然而,使积分存在的惟一项是

同频率的电压与电流的乘积。回顾式(16.8)～(16.10)，能使读者相信该结论的正确性。因此，式(16.75)变为：

$$P = \frac{1}{T}V_{dc}I_{dc}t\Big|_{t_0}^{t_0+T} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}V_nI_n\cos(n\omega_0 t - \theta_{vn}) \times \cos(n\omega_0 t - \theta_{in})dt \qquad (16.76)$$

利用三角恒等式：

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

式(16.76)变为：

$$P = V_{dc}I_{dc} + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_nI_n}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}[\cos(\theta_{vn} - \theta_{in}) + \cos(2n\omega_0 t - \theta_{vn} - \theta_{in})]dt \qquad (16.77)$$

积分符号下的第二项积分为零，所以：

$$P = V_{dc}I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_nI_n}{2}\cos(\theta_{vn} - \theta_{in}) \qquad (16.78)$$

式(16.78)非常重要，因为它表述了周期电压与对应周期电流之间相互作用的情况，总平均功率为同频率电流和电压相互作用得到的平均功率的和。不同频率的电压和电流不相互作用，因而不产生平均功率。因此，在周期函数的平均功率计算中，总平均功率是与各个谐波电压和电流相关的平均功率的叠加。

例 16.4 举例说明了周期电压的平均功率计算。

例 16.4 已知例 16.3 中的周期方波电压作用于一个 15 Ω 的电阻的两端。$V_m = 60$ V，$T = 5$ ms。

(a) 写出 $v(t)$的傅里叶级数表达式的前五个非零项。采用式(16.38)中的三角级数形式。

(b) 计算(a)中级数各项对应的平均功率。

(c) 计算 15 Ω 电阻获得的总平均功率。

(d) 傅里叶级数的前五项对应的功率占总功率的百分比是多少？

解：

(a) $v(t)$的直流分量是：

$$a_v = \frac{(60)(T/4)}{T} = 15 \text{ V}$$

由例 16.3 有：

$$A_1 = \sqrt{2}\,60/\pi = 27.01 \text{ V}$$

$$\theta_1 = 45°$$

$$A_2 = 60/\pi = 19.10 \text{ V}$$

$$\theta_2 = 90°$$

$$A_3 = 20\sqrt{2}/\pi = 9.00 \text{ V}$$

$$\theta_3 = 135°$$

$$A_4 = 0$$

$$\theta_4 = 0°$$

$$A_5 = 5.40\ \text{V}$$

$$\theta_5 = 45°$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi(1000)}{5} = 400\pi\ \text{rad/s}$$

这样,利用傅里叶级数的前五个非零项:

$$v(t) = 15 + 27.01\cos(400\pi t - 45°) + 19.10\cos(800\pi t - 90°) + 9.00\cos(1\,200\pi t - 135°) + 5.40\cos(2\,000\pi t - 45°) + \cdots \text{V}$$

(b) 将电压加到电阻的两端,则求出级数各项相关的功率如下:

$$P_{dc} = \frac{15^2}{15} = 15\ \text{W}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\frac{27.01^2}{15} = 24.32\ \text{W}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\frac{19.10^2}{15} = 12.16\ \text{W}$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\frac{9^2}{15} = 2.70\ \text{W}$$

$$P_5 = \frac{1}{2}\frac{5.4^2}{15} = 0.97\ \text{W}$$

(c) 为计算 15 Ω 电阻获得的总平均功率,先计算 $v(t)$ 的方均根值:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(60)^2(T/4)}{T}} = \sqrt{900} = 30\ \text{V}$$

则 15 Ω 电阻获得的总平均功率为:

$$P_T = \frac{30^2}{15} = 60\ \text{W}$$

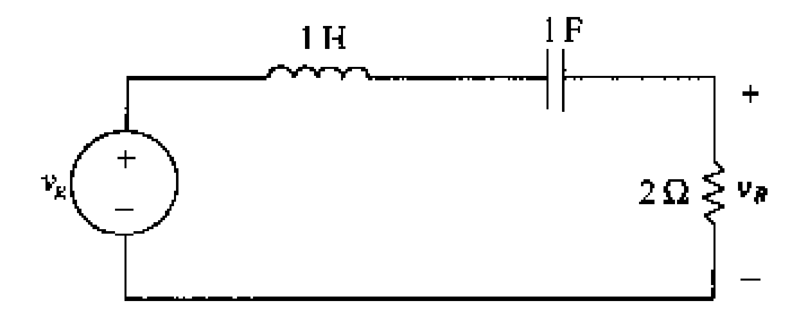
(d) 傅里叶级数的前五个非零项对应的总功率为:

$$P = P_{dc} + P_1 + P_2 + P_3 + P_5 = 55.15\ \text{W}$$

该结果为总功率的(55.15/60)(100%),或 91.92%。

练习题

16.6 将练习题 16.3 中的梯形电压作用于图中所示电路。若 $12V_m = 296.09$ V, $T = 2094.4$ ms,计算 2 Ω 电阻获得的平均功率。



答：60.75 W。

16.7 周期函数的方均根值

周期函数的方均根值可以用傅里叶系数表示。由定义：

$$F_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)^2\,\mathrm{d}t} \tag{16.79}$$

将 $f(t)$用傅里叶级数表示，得到：

$$F_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[a_v+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)\right]^2\mathrm{d}t} \tag{16.80}$$

求函数在一个周期内的积分时，因为直流项与同频率谐波的乘积是存在的惟一项，所以可以对平方时间函数的积分进行化简。其他乘积的积分值为零。因此，式(16.80)变为：

$$\begin{aligned}F_{rms}&=\sqrt{\frac{1}{T}\left(a_v^2T+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T}{2}A_n^2\right)}\\&=\sqrt{a_v^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{2}}\\&=\sqrt{a_v^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2}\end{aligned} \tag{16.81}$$

式(16.81)表明，周期函数的方均根值是各次谐波的方均根值的平方与直流值的平方相加之和的平方根。例如，假设一个周期电压函数可以用下面的有限级数表示：

$$\begin{aligned}v=&\ 10+30\cos(\omega_0 t-\theta_1)+20\cos(2\omega_0 t-\theta_2)\\&+5\cos(3\omega_0 t-\theta_3)+2\cos(5\omega_0 t-\theta_5)\end{aligned}$$

该电压的方均根值为：

$$\begin{aligned}V&=\sqrt{10^2+(30/\sqrt{2})^2+(20/\sqrt{2})^2+(5/\sqrt{2})^2+(2/\sqrt{2})^2}\\&=\sqrt{764.5}=27.65\ \text{V}\end{aligned}$$

通常，用傅里叶级数表示一个周期函数需要无穷多项，因此，式(16.81)得到的值是实际方均根值的估计值。例 16.5 中将解释这个结果。

例 16.5　用式(16.81)估计例 16.4 中周期电压的方均根值。

解：

由例 16.4 可知：

$V_{dc}=15$ V。

$V_1=27.01/\sqrt{2}$ V，基波的方均根值。

$V_2=19.10/\sqrt{2}$ V，二次谐波的方均根值。

$V_3=9.00/\sqrt{2}$ V，三次谐波的方均根值。

$V_5=5.40/\sqrt{2}$ V，五次谐波的方均根值。

因此：

$$V_{rms}=\sqrt{15^2+\left(\frac{27.01}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{19.10}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{9.00}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{5.40}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$=28.76\ \text{V}$$

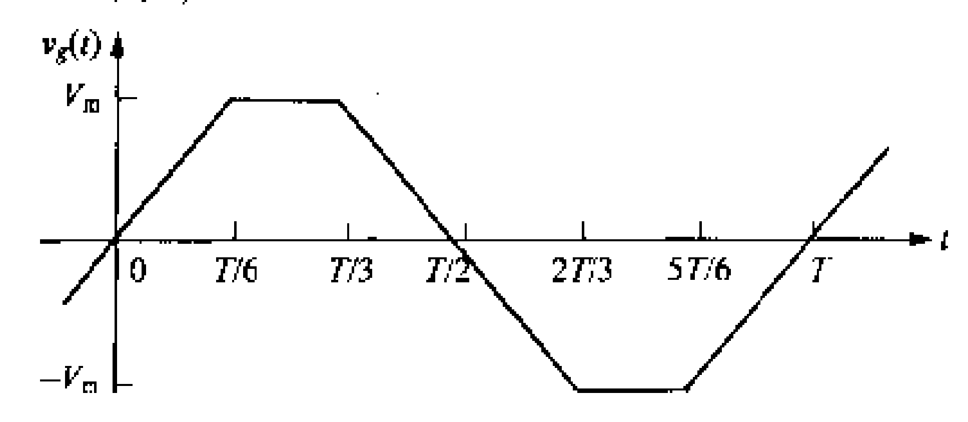
例 16.4 得到的实际方均根值是 30 V。若使式(16.81)包含更多次的谐波,则结果可以接近这个值。例如,如果式(16.81)包含 1 次到 9 次的谐波,则用该式求得的值为 29.32V。

练习题

16.7 (a) 求图中所示电压的方均根值,其中 $V_m = 100$ V。

(b) 用 $v_g(t)$的傅里叶级数表达式的前三个非零项,估计电压的方均根值。

答:(a) 74.5356 V,(b) 74.5306 V。



16.8 傅里叶级数的指数形式

对傅里叶级数的指数形式感兴趣的原因是,因为它可以使级数表示更简明。傅里叶级数的指数形式为:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t} \tag{16.82}$$

其中:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{16.83}$$

为导出式(16.82)和式(16.83),考虑式(16.2),将其中的正弦函数和余弦函数用指数等效式代替:

$$\cos n\omega_0 t=\frac{e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t}}{2} \tag{16.84}$$

$$\sin n\omega_0 t=\frac{e^{jn\omega_0 t}-e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \tag{16.85}$$

将式(16.84)和式(16.85)代入式(16.2)中得到:

$$\begin{aligned}f(t)&=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}(e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t})+\frac{b_n}{2j}(e^{jn\omega_0 t}-e^{-jn\omega_0 t})\\&=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}\right)e^{jn\omega_0 t}+\left(\frac{a_n+jb_n}{2}\right)e^{-jn\omega_0 t}\end{aligned} \tag{16.86}$$

现在将 C_n 定义如下:

$$C_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)=\frac{A_n}{2}\underline{/-\theta_n}\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{16.87}$$

由 C_n 的定义有：

$$C_n=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t-\mathrm{j}\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)(\cos n\omega_0 t-\mathrm{j}\sin n\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{16.88}$$

$$=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

由此导出了式(16.83)。为导出式(16.82)，首先，由式(16.88)得：

$$C_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\mathrm{d}t=a_v \tag{16.89}$$

注意：

$$C_{-n}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t=C_n^*=\frac{1}{2}(a_n+\mathrm{j}b_n) \tag{16.90}$$

将式(16.87)、式(16.89)和式(16.90)代入式(16.86)得：

$$f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}+C_n^* e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t})$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^* e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t} \tag{16.91}$$

注意：式(16.91)右边的第二个求和项与对 $C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$ 从 -1 到 $-\infty$ 求和等价，即：

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n^* e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}=\sum_{n=-1}^{-\infty}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}. \tag{16.92}$$

因为从 -1 到 $-\infty$ 求和与从 $-\infty$ 到 -1 求和等价，利用式(16.91)将式(16.91)重写：

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}+\sum_{-\infty}^{-1}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t} \tag{16.93}$$

由此导出了式(16.82)。

可以将周期函数的方均根值表示为复傅里叶系数。由式(16.81)、式(16.87)和式(16.89)，

$$F_{\mathrm{rms}}=\sqrt{a_v^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}} \tag{16.94}$$

$$|C_n|=\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{2} \tag{16.95}$$

$$C_0^2=a_v^2 \tag{16.96}$$

将式(16.95)和式(16.96)代入式(16.94)，得到的表达式为：

$$F_{\mathrm{rms}}=\sqrt{C_0^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2} \tag{16.97}$$

求周期函数的指数形式傅里叶级数表达式的步骤在例 16.6 中进行了举例说明。

例 16.6　求图 16.15 所示周期电压的指数形式傅里叶级数。

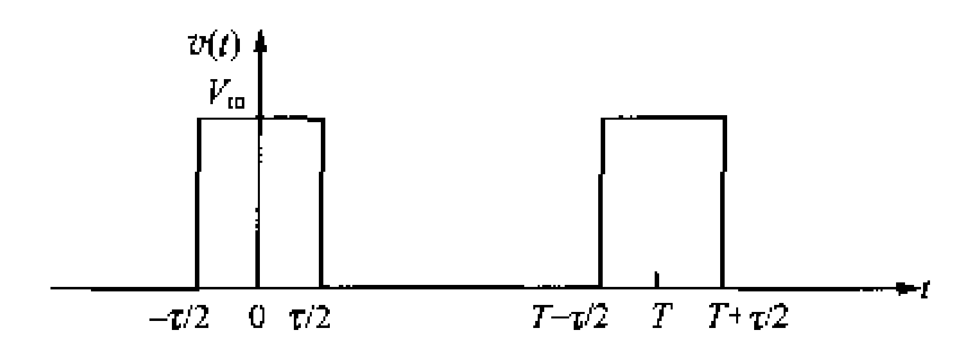


图 16.15 例 16.6 的周期电压

解:

将 $-\tau/2$ 作为积分的起点,由式(16.83),有:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\ &= \frac{V_m}{T}\left(\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right)\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{jV_m}{n\omega_0 T}\left(e^{-jn\omega_0\tau/2} - e^{jn\omega_0\tau/2}\right) \\ &= \frac{2V_m}{n\omega_0 T}\sin n\omega_0\tau/2 \end{aligned}$$

这里,因为 $v(t)$偶对称,对于所有 n 值,$b_n = 0$,因此,认为 C_n 是实数。将上式重写为:

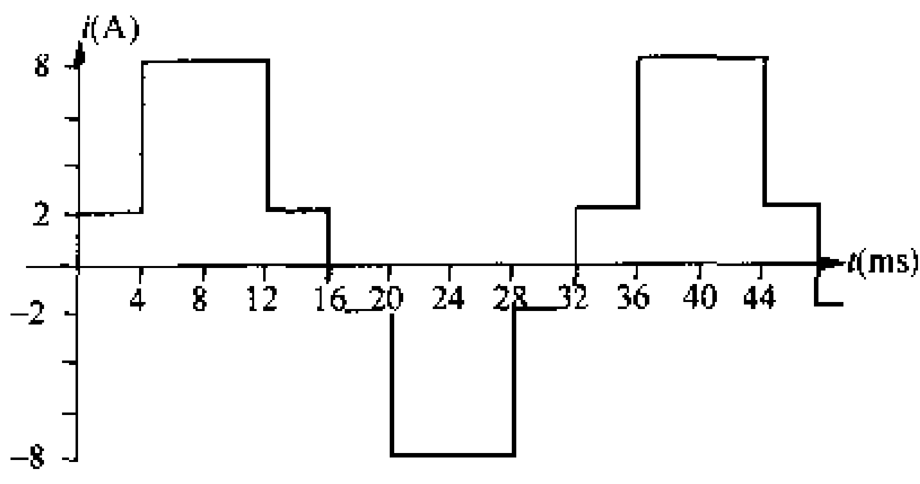
$$C_n = \frac{V_m\tau}{T}\,\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}$$

正如该式所显示的,C_n 的振幅遵循$(\sin x)/x$ 分布。在 16.9 节中,再详细探讨这个问题。$v(t)$的指数形式傅里叶级数为:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{V_m\tau}{T}\right)\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}e^{jn\omega_0 t} \\ &= \left(\frac{V_m\tau}{T}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

练习题

16.8 导出图中所示周期函数的傅里叶系数 C_n 的表达式。(提示:利用对称性。)



答:$C_n = -\,j\dfrac{4}{\pi n}\left(1 + 3\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)$,$n$ 为奇数。

16.9 (a) 计算练习题 16.8 中周期电流的方均根值。

(b) 用 $C_1 \sim C_{11}$,估计周期电流的方均根值。

(c) (b) 中求得的方均根值相对于 (a) 中求得的实际方均根值的误差百分比是多少?

(d) 对于该周期函数,能用很少的项估计方均根值并确保误差小于 1% 吗?

答:(a) $\sqrt{34}$A,(b) 5.777 A,(c) -0.93 %,(d)5.777 A,可以;如果用 $C_1 \sim C_9$,则误差为 -0.98%。

16.9 振幅谱和相位谱

一个周期时间函数可以用它的傅里叶系数和周期来定义。换言之,如果已知 a_v, a_n, b_n 和 T,那么至少在理论上,可以构建出函数 $f(t)$。如果已知 a_n 和 b_n,则各次谐波的振幅(A_n)和相位角($-\theta_n$)也已知。此外,根据系数和相位角的描述,一般不能想像出周期函数在时域内的图形。尽管如此,这些量却可以充分表现周期函数的特征。使用足够的计算时间,可以用振幅和相位角数据合成时域波形。当周期函数作用于一个选频电路时,稳态响应的傅里叶级数中的少数几项就可以反映选频电路的特性。因此,根据响应的振幅和相位描述,可以了解输出波形。

根据 $f(t)$ 的傅里叶级数各项的振幅和相位,可以用图形描述一个周期函数。将傅里叶级数各项的振幅和频率的关系曲线图称为 $f(t)$ 的振幅谱,而将相位角与频率的关系曲线图称为 $f(t)$ 的相位谱。因为振幅和相位角数据只出现在离散频率点上(即,在 $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \cdots$),还可以将这些图形称为线谱。

16.9.1 振幅谱和相位谱的举例说明

振幅谱和相位谱图的绘制基于式(16.38)(A_n 和 $-\theta_n$)或式(16.82)(C_n)。这里只考虑式(16.82),基于式(16.38)的绘图留给读者,见习题 16.45。为说明基于指数形式傅里叶级数的振幅谱和相位谱,本文使用例 16.6 中的周期电压函数。为讨论方便,假定 $V_m = 5$ V, $\tau = T/5$。由例 16.6 知:

$$C_n = \frac{V_m \tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2} \tag{16.98}$$

对于已知的 V_m 和 τ 值,上式变为:

$$C_n = 1 \frac{\sin(n\pi/5)}{n\pi/5} \tag{16.99}$$

图 16.16 绘出了式(16.99)的 C_n 与 n 的关系曲线图,其中 n 的变化范围为 -10 ~ +10。该图清晰地显示出振幅谱的包络线为函数 $|(\sin x)/x|$ 的曲线。因为没有指定 T 的数值,这里用谐波次序作为频率刻度。如果 T 已知,则 ω_0 和各次谐波的频率也已知。

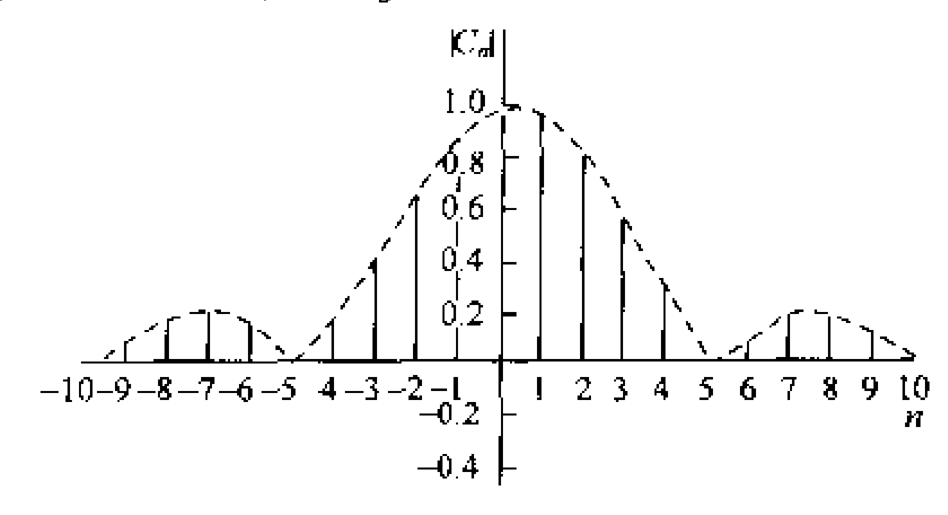


图 16.16　例 16.6 的周期电压当 $\tau = T/5$ 时,$|C_n|$ 与 n 的关系曲线

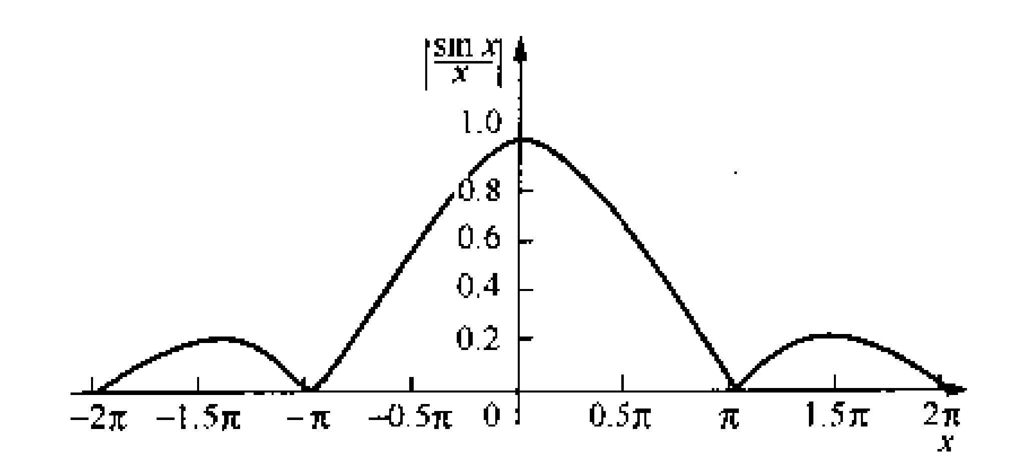


图 16.17 $(\sin x)/x$ 与 x 的关系曲线

图 16.17 给出了$|(\sin x)/x|$与 x 的关系图,其中 x 的单位是弧度。该图表明,当 x 等于π 的整倍数时,该点的函数值为零。由式(16.98):

$$n\omega_0\left(\frac{\tau}{2}\right)=\frac{n\pi\tau}{T}=\frac{n\pi}{T/\tau} \tag{16.100}$$

由式(16.100)可以推知,$n\tau/T$ 为整数的任一点时,振幅谱的值为零。例如,在图中,τ/T 等于 1/5,因此,在 $n=5,10,15$,等处包络线过零点。换句话说,五次谐波、十次谐波、十五次谐波等都是 0。因为 τ/T 的倒数是一个逐渐增大的整数,所以,每个 π 弧度之间的谐波数也不断增加。如果 $n\pi/T$ 不等于整数,振幅谱仍然以$|(\sin x)/x|$的曲线为包络。然而,在 ω_0 的整倍数处,包络线不过零点。

对所有 n 值,C_n 均为实数,所以,与 C_n 相关的相位角为 0°或 180°,相位角的取值依赖于$(\sin n\pi/5)/(n\pi/5)$的代数符号。例如,当 $n=0,\pm1,\pm2,\pm3$ 和 ±4 时,相位角为零。因为 $C_{\pm5}$ 等于零,所以,相位角在 $n=\pm5$ 处没有定义。当 $n=\pm6,\ \pm7,\ \pm8$ 和 ±9 时,相位角为 180°,相位角在 ±10 处没有定义。当 n 取的整数值较大时,这种模式周期重复。图 16.18 示出了式(16.98)C_n 的相位角。

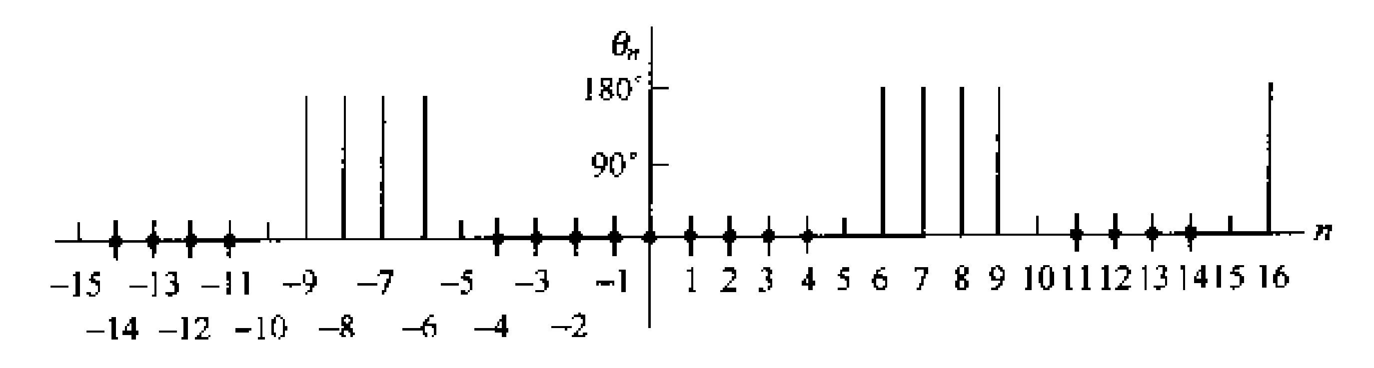


图 16.18 C_n 的相位角

当 $f(t)$沿时间轴移动时,其振幅谱和相位谱的变化如何?为研究方便起见,将例 16.6 的周期电压函数向右平移 t_0,利用假设:

$$v(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t} \tag{16.101}$$

因此:

$$v(t-t_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0(t-t_0)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{-jn\omega_0 t_0}e^{jn\omega_0 t} \tag{16.102}$$

上式表明移动原点对振幅谱没有影响,因为:

$$|C_n|=|C_n e^{-jn\omega_0 t_0}| \tag{16.103}$$

然而,参考式(16.87)发现相位谱已经变为 $-(\theta_n+n\omega_0 t_0)$ 弧度。例如,将例 16.6 的周期电压

函数向右移动 $\tau/2$。如以前，若 $\tau = T/5$，则新相位角 θ'_n 为：

$$\theta'_n = -(\theta_n + n\pi/5) \tag{16.104}$$

本文将 n 从 -8 变化到 $+8$ 过程中式(16.104)的相应结果绘于图 16.19 中。注意：零振幅系数的相位角不存在。

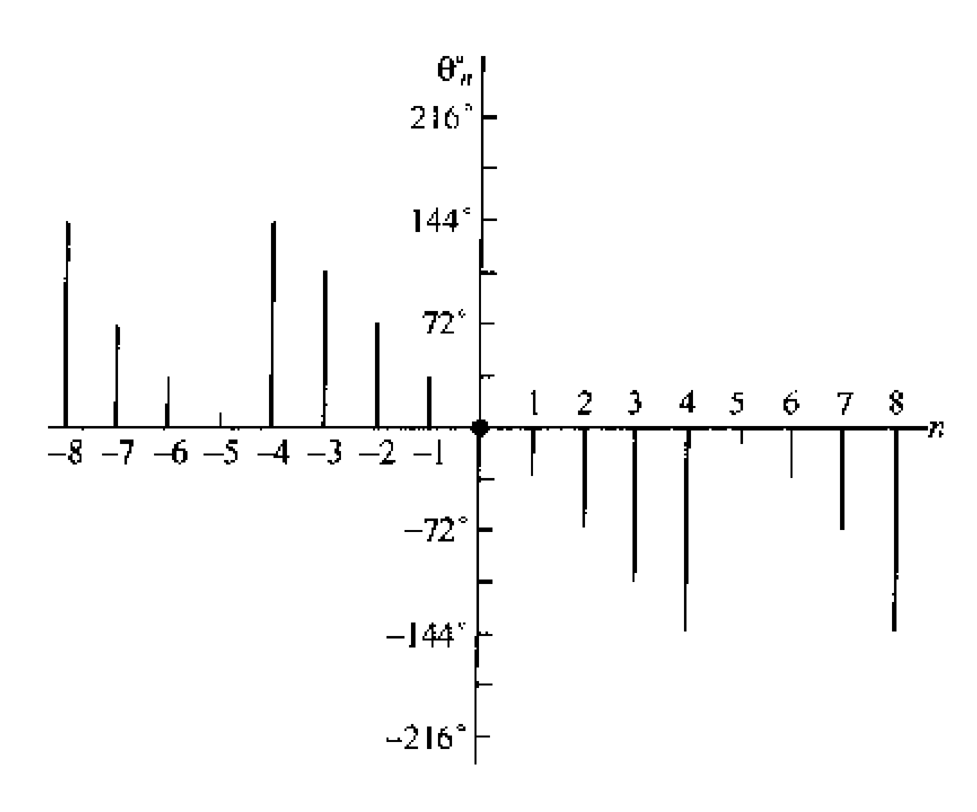


图 16.19　式(16.104)的 θ'_n 与 n 的关系曲线

也许读者会问，为什么要花那么大的精力讨论例 16.6 的周期脉冲的振幅谱。因为这个特殊周期波形为说明周期函数的傅里叶级数到非周期函数的傅里叶变换的转换提供了一个非常好的例子。第 17 章将讨论傅里叶变换。

练习题

16.10 将练习题 16.8 中的函数沿时间轴向右平移 8 ms。写出该周期电流的指数形式傅里叶级数。

答：$i(t) = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty(\text{odd})}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(1 + 3\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)e^{-(j\pi/2)(n+1)}e^{jn\omega_0 t}$ A。

小结

周期函数是这样一种函数，它每隔 T 秒循环一次。

- 周期是一个周期函数循环的最短时间间隔(T)。
- 傅里叶级数是一个用来表示周期函数的无穷级数。它由常数项和无限多正交的正弦项和余弦项组成。
- 基频是由基波周期($f_0 = 1/T$ 或 $\omega_0 = 2\pi f_0$)确定的频率。
- 谐波频率是基频的整倍数。
- 傅里叶系数是常数项，级数中每个正弦项和余弦项的系数也是常数(见式(16.3)～(16.5))。
- 五种类型的对称可以用来简化傅里叶系数计算(见 16.3 节)：
  - 偶对称，其傅里叶级数的所有正弦项为零。

- ■ 奇对称，其傅里叶级数的所有常数项和余弦项为零。
- ■ 半波对称，其傅里叶级数的所有偶次谐波项为零。
- ■ 方波对称、半波对称、偶对称，其傅里叶级数中只含有奇次谐波的余弦项。
- ■ 方波对称、半波对称、奇对称，其傅里叶级数中只含有奇次谐波的正弦项。
- 在三角函数形式的傅里叶级数中，用正弦项和余弦项之和表示的各次谐波被合并成 $A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)$ 形式的单一项。
- 对于稳态响应，求响应信号的傅里叶级数，可以先求出输入信号的各个分量的响应，然后将其相加（叠加），从而得到响应信号的傅里叶级数。输入信号傅里叶级数中每一项的响应可通过频域或 s 域分析求得。
- 没有计算机的帮助，很难得到响应信号的波形。有时，可以利用电路的频响（或滤波）特性确定输出波形与输入波形的匹配程度。
- 只有同频率的谐波相互作用产生平均功率。总平均功率是各个频率对应的平均功率之和。
- 周期函数的方均根值可以由傅里叶系数估计得到（见式（16.81）、式（16.94）和式（16.97））。
- 利用欧拉公式，将正弦项和余弦项用相应的指数恒等式表示，傅里叶级数可以用指数形式表示。
- 当系统的激励为周期信号时，可以利用傅里叶级数预测该系统的稳态响应。分析表明，可以从时域变换到频域，用傅里叶级数求稳态响应。

习题

16.1 (a) 证明式(16.6)和式(16.7)。

(b) 证明式(16.8)。提示：利用三角恒等式 $\cos\alpha\ \sin\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$。

(c) 证明式(16.9)。提示：利用三角恒等式 $\sin\alpha\ \sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$。

(d) 证明式(16.10)。提示：利用三角恒等式 $\cos\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$。

16.2 推导式(16.5)。

M16.3 求图 P16.3 所示周期电压函数的傅里叶级数的表达式。图 P16.3(a)显示的是方波，图 P16.3 (b)显示的是全波整形的正弦波，其中，$v(t)=V_m\sin(\pi/T)t, 0\leqslant t\leqslant T$。图 P16.3 (c)显示的是半波整形的正弦波，其中，$v(t)=V_m\sin(2\pi/T)t, 0\leqslant t\leqslant T/2$。

16.4 推导周期奇函数的傅里叶系数表达式。提示：利用与书中推导式(16.14)～(16.16)相同的方法。

16.5 证明：如果 $f(t)=-f(t-T/2)$，傅里叶系数 b_k 的表达式为：

$b_k=0$，k 为偶数

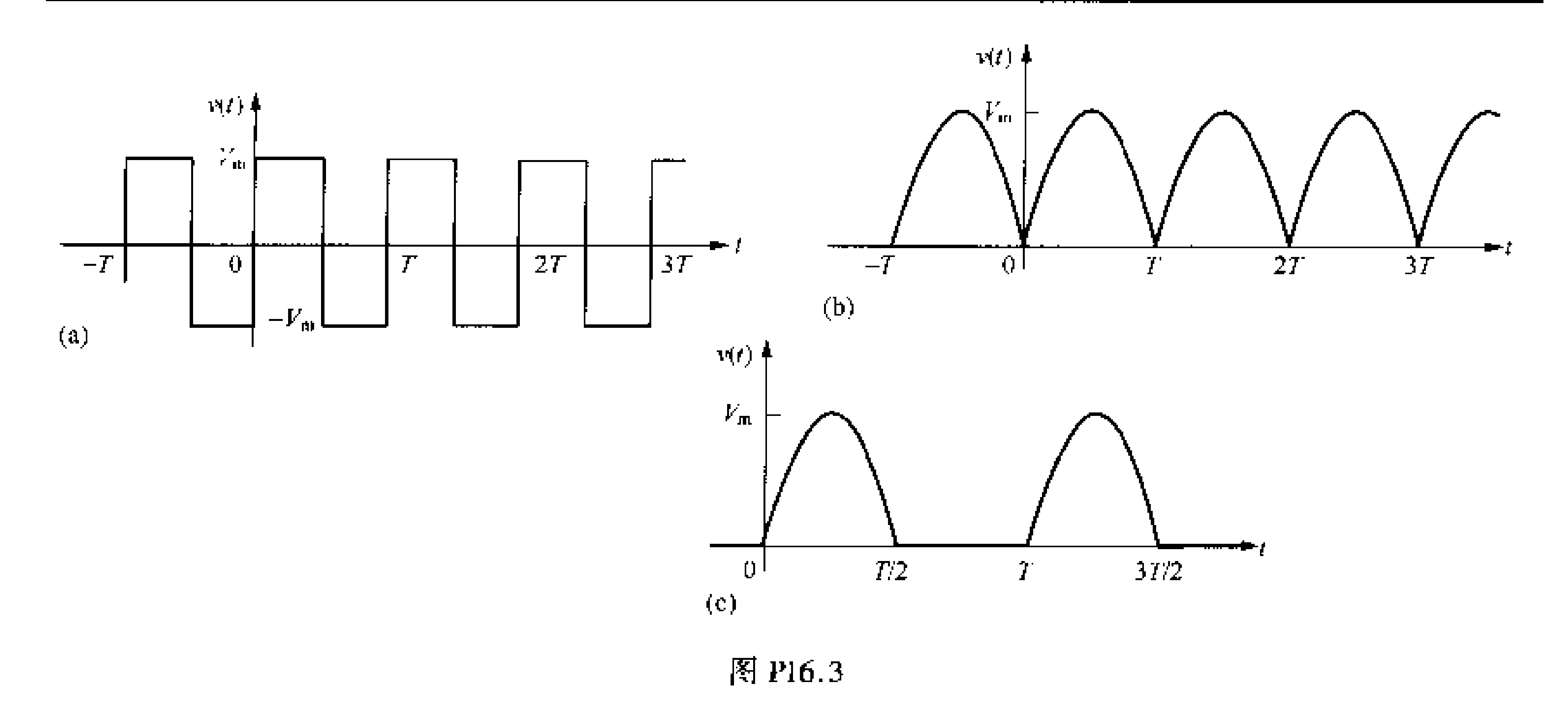


图 P16.3

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin k\omega_o t\ \mathrm{d}t,k\ 为奇数$$

提示:使用与书中推导式(16.28)和式(16.29)式相同的方法。

16.6 推导式(16.36)。提示:从式(16.29)出发,将积分区间分成 0 ~ $T/4$ 和 $T/4$ ~ $T/2$ 两部分。函数具有偶对称和方波对称性质,在 $T/4 \leqslant t \leqslant T/2$ 内,$f(t) = -f(T/2-t)$。在第二个积分区间内,令 $x = T/2 - t$,并将得到的积分结果与区间 $0 \leqslant t \leqslant T/4$ 内的积分值合并。

16.7 推导式(16.37)。除考虑函数具有奇对称和方波对称性质外(在 $T/4 \leqslant t \leqslant T/2$ 内,$f(t) = f(T/2 - t)$),解题方法与习题 16.6 相同。

M16.8 对图 P16.8 所示的各个周期函数,求:

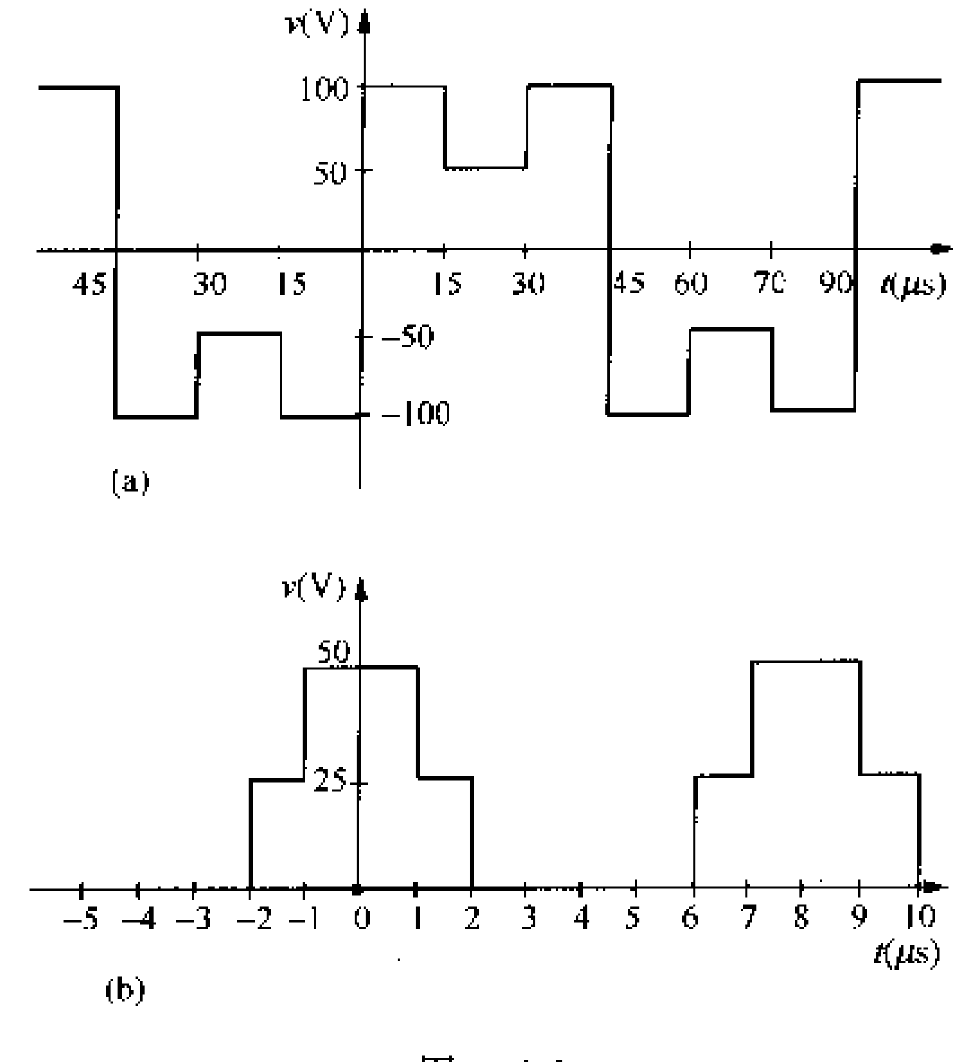


图 P16.8

(a) ω_0(弧度/秒)。

(b) f_0(赫兹)。

(c) a_v的值。

(d) a_k和b_k的表达式。

(e) $v(t)$的傅里叶级数表达式。

M16.9 求图 P16.9 所示各个周期函数的傅里叶级数。

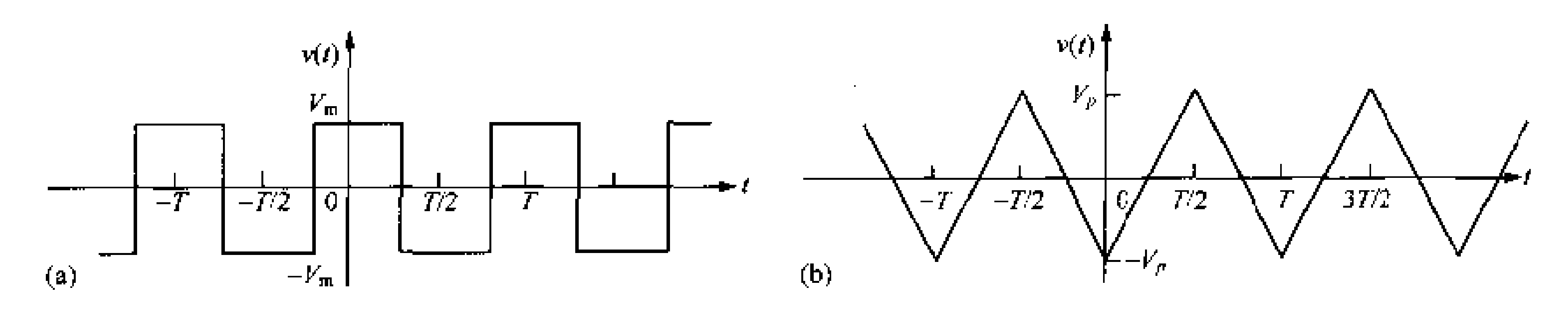


图 P16.9

16.10 已知:

$v(t)=200\cos\frac{2\pi}{T}t$ V, $-T/4\leqslant t\leqslant T/4$

$v(t)=-100\cos\frac{2\pi}{T}t$ V, $T/4\leqslant t\leqslant 3T/4$

求 P16.10 所示周期电压的傅里叶级数。

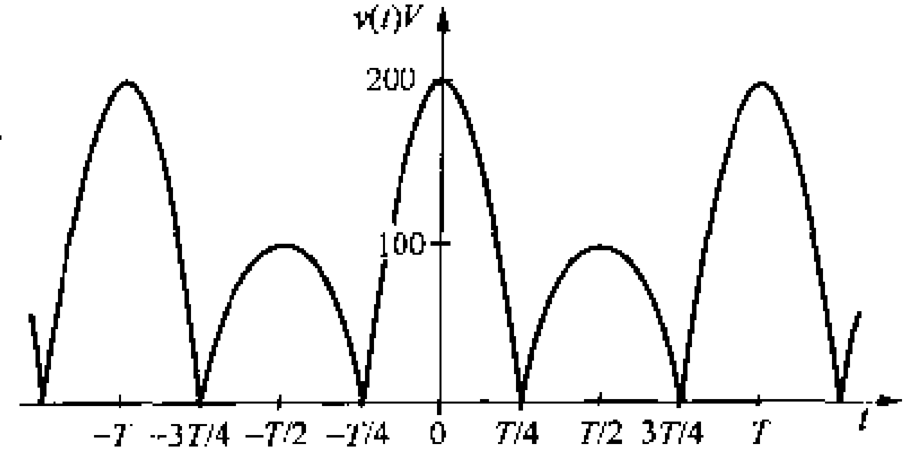


图 P16.10

16.11 (a) 求图 P16.11 所示周期电流函数的傅里叶级数。

(b) 若将垂直坐标轴向左平移 $T/2$,重做(a)。

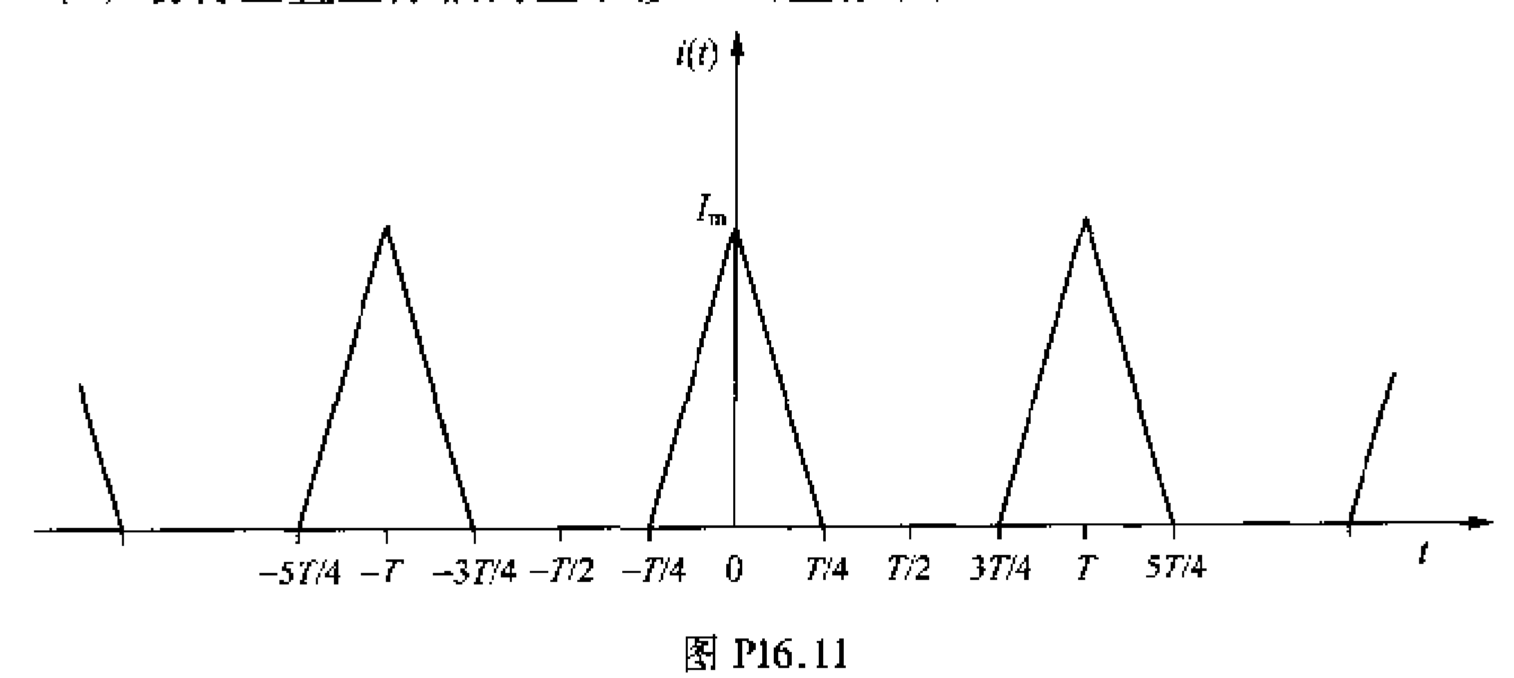


图 P16.11

16.12 已知:在 $-5<t<5$ s 内,$f(t)=0.40t^2$。

(a) 构建一个在 $-5<t<5$ s 内,满足上式的周期函数,该函数周期为 20 s,且为半波对称函数。

(b) 该函数是奇函数还是偶函数?

(c) 该函数是方波对称函数吗?

(d) 求 $f(t)$的傅里叶级数。

(e) 将 $f(t)$ 向右平移 5 s，求平移后函数的傅里叶级数。

16.13 已知：在 $-5 < t < 5$ s 内，$f(t) = 0.40t^3$，重做习题 16.12。

16.14 已知：在 $-6 \leqslant t \leqslant 6$ s 内，$v(t) = 20t \cos 0.25\pi t$ V，若该函数周期循环。回答下列问题。

(a) 该周期函数的基频（弧度/秒）是多少？

(b) 该函数是偶函数吗？

(c) 该函数奇函数吗？

(d) 该函数是半波对称函数吗？

16.15 一个周期函数在一个周期内用下式描述：

$i(t) = 4000t$ A，$0 \leqslant t \leqslant 1.25$ ms。

$i(t) = 5$ A，1.25 ms $\leqslant t \leqslant 3.75$ ms。

$i(t) = 20 - 4000t$ A，3.75 ms $\leqslant t \leqslant 6.25$ ms。

$i(t) = -5$ A，6.25 ms $\leqslant t \leqslant 8.75$ ms。

$i(t) = -40 + 4000t$ A，8.75 ms $\leqslant t \leqslant 10$ ms。

(a) 该周期函数的基频（赫兹）是多少？

(b) 该函数是偶函数吗？

(c) 该函数奇函数吗？

(d) 该函数是半波对称函数吗？

(e) 该函数是方波对称函数吗？

(f) 给出 a_v，a_k 和 b_k 的表达式。

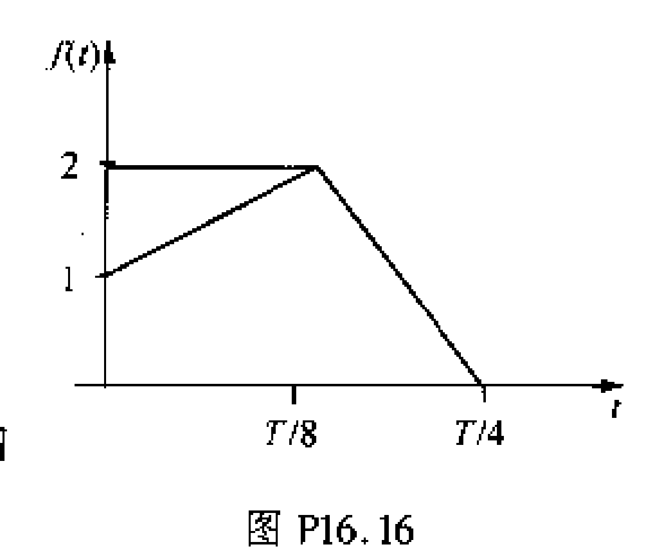


图 P16.16

16.16 图 P16.16 所示的周期函数为一个具有半波对称和方波对称性的偶函数。

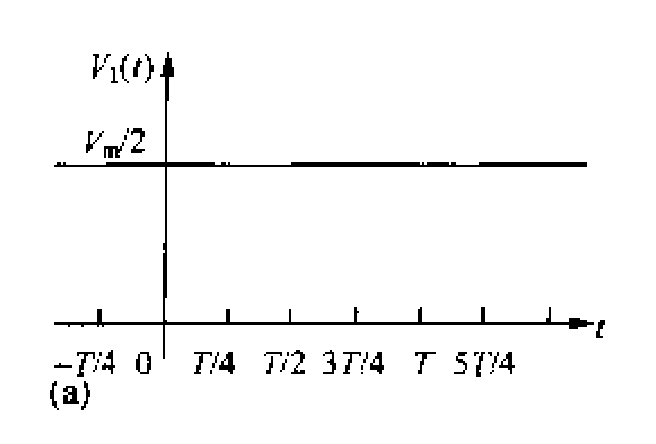
(a) 画出函数在一个周期（$-T/4 \leqslant t \leqslant 3T/4$）内的波形。

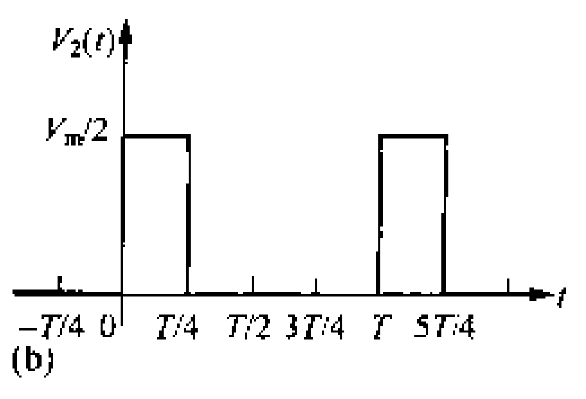
(b) 求傅里叶系数 a_k。

(c) 写出 $f(t)$ 的傅里叶级数的前三个非零项。

(d) 利用傅里叶级数的前三个非零项估计 $f(T/8)$ 的值。

16.17 有时，即使原函数本身不具有对称性，也可以利用函数的对称性求傅里叶系数。基于这种考虑，对于练习题 16.1 中的函数 $v(t)$，可以先将它分解为两个函数分别如图 P16.17(a)和(b)所示，然后将 $v_2(t)$ 沿时间轴向左移动 $T/8$，将它变成一个偶函数，如图 P16.17(c)所示。这里要注意：$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$，且 $v_1(t)$ 的傅里叶级数只包含 $V_m/2$ 的单一项级数。为求 $v_2(t)$ 的傅里叶级数，可以先求 $v_2(t + T/8)$ 的傅里叶级数，然后将该级数向右移动 $T/8$。证明：利用前述方法求得的傅里叶级数与练习题 16.2(e)的答案一致。





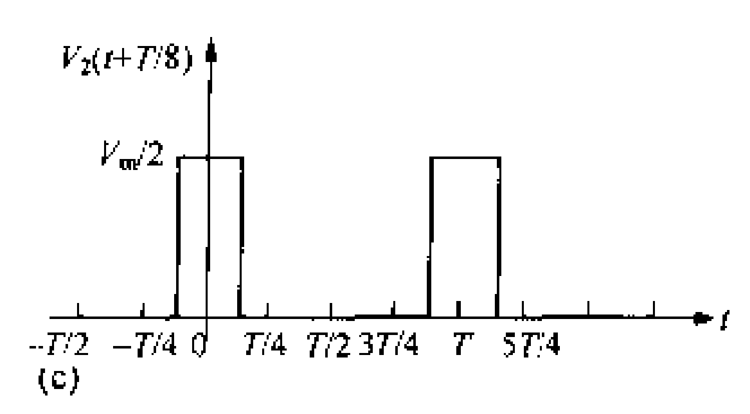


图 P16.17

16.18 (a) 求图 P16.18 所示周期函数，当 $V_m = 378\pi$ mV 时的傅里叶级数。

(b) 利用级数的前五个非零项估计 $v(T/8)$ 的值。

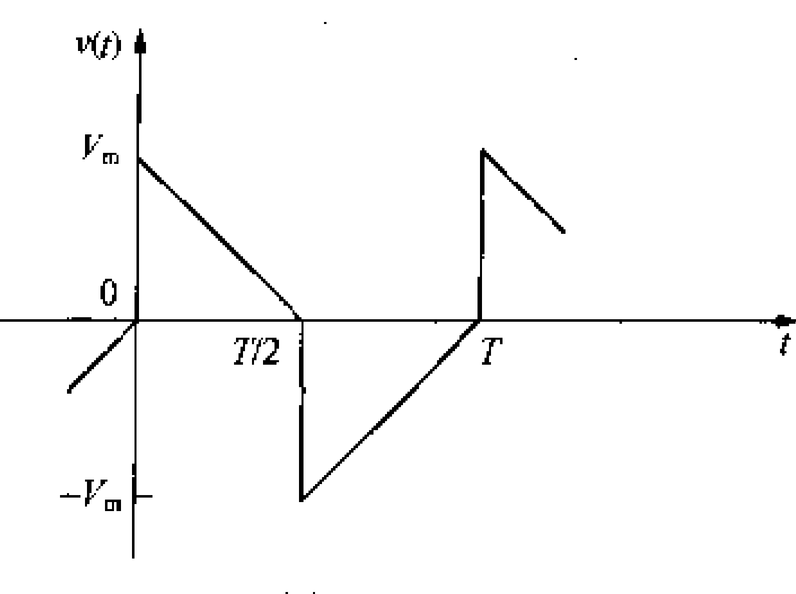


图 P16.18

16.19 推导式(16.69)和(16.70)。

16.20 (a) 推导式(16.71)。提示：注意 $b_k = (4V_m/\pi k) + k\omega_o RCa_k$。利用 b_k 的表达式求 $a_k^2 + b_k^2$。然后利用 a_k 的表达式导出式(16.71)。

(b) 推导式(16.72)。

16.21 证明：联立式(16.71)、式(16.72)、式(16.38)和式(16.39)得到的结果为式(16.58)。提示：考虑 β_k 的定义：

$$\frac{a_k}{b_k} = -\tan\beta_k$$

和 θ_k 的定义：

$$\tan\theta_k = -\cot\beta_k$$

利用三角恒等式：

$$\tan x = \cot(90 - x)$$

且 $\theta_k = (90 + \beta_k)$。

P16.22 将图 P16.22 (a)所示的方波电压作用于图 P16.22 (b)所示的电路。

(a) 求稳态电流 i 的傅里叶级数表达式。

(b) 用直接电路分析方法求电流 i 的稳态表达式。

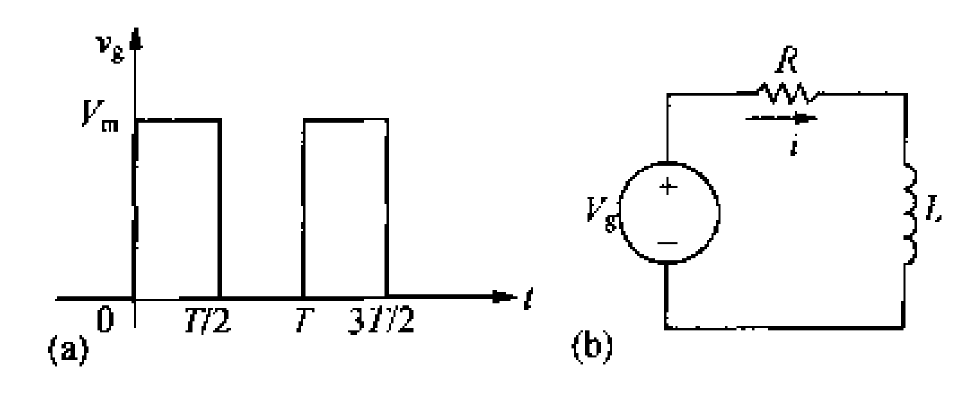


图 P16.22

16.23 将图 P16.23 (a)所示的三角波电压作用于图 P16.23(b)所示的电路。

若 $V_m = 450\pi^2$ mV，输入电压的周期为 2π ms，求稳态电压 v_o 的傅里叶级数表达式的前三个非零项。

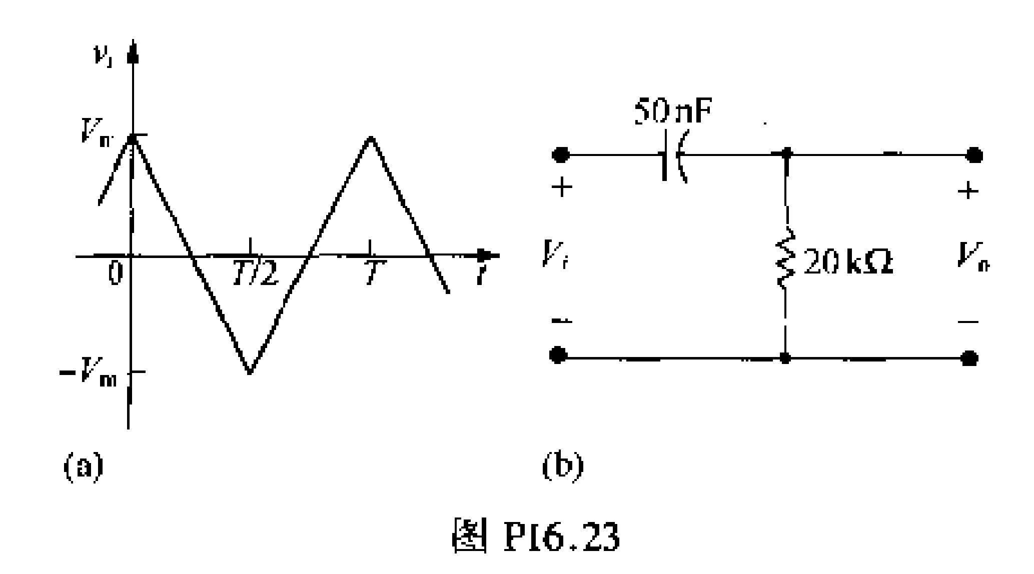


图 P16.23

16.24 将图 P16.24 (a)所示的周期方波电压作用于图 P16.24 (b)所示的电路。

若 $V_m = 60\pi$ V，输入电压的周期为 π ms，求稳态电压 v_o 的傅里叶级数表达式的前三个非零项。

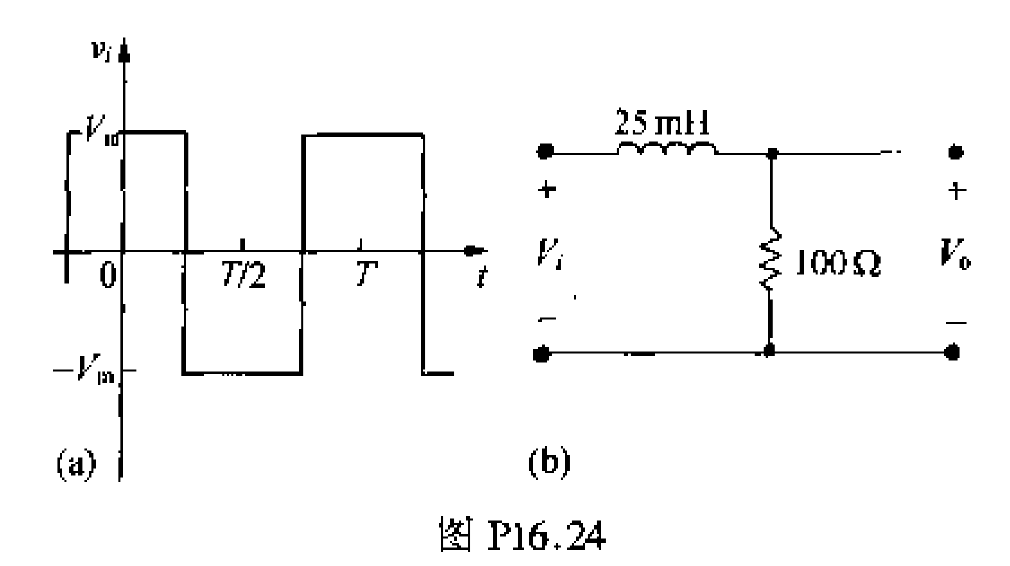


图 P16.24

P16.25 将周期方波电压作用于图 P16.25 (b)所示的电路。

(a) 若 $V_m = 210\pi$ V，输入电压的周期为 0.2π ms，求稳态电压 v_o 的傅里叶级数的前四个非零项。

(b) 第几次谐波占输出电压的主要部分，解释为什么？

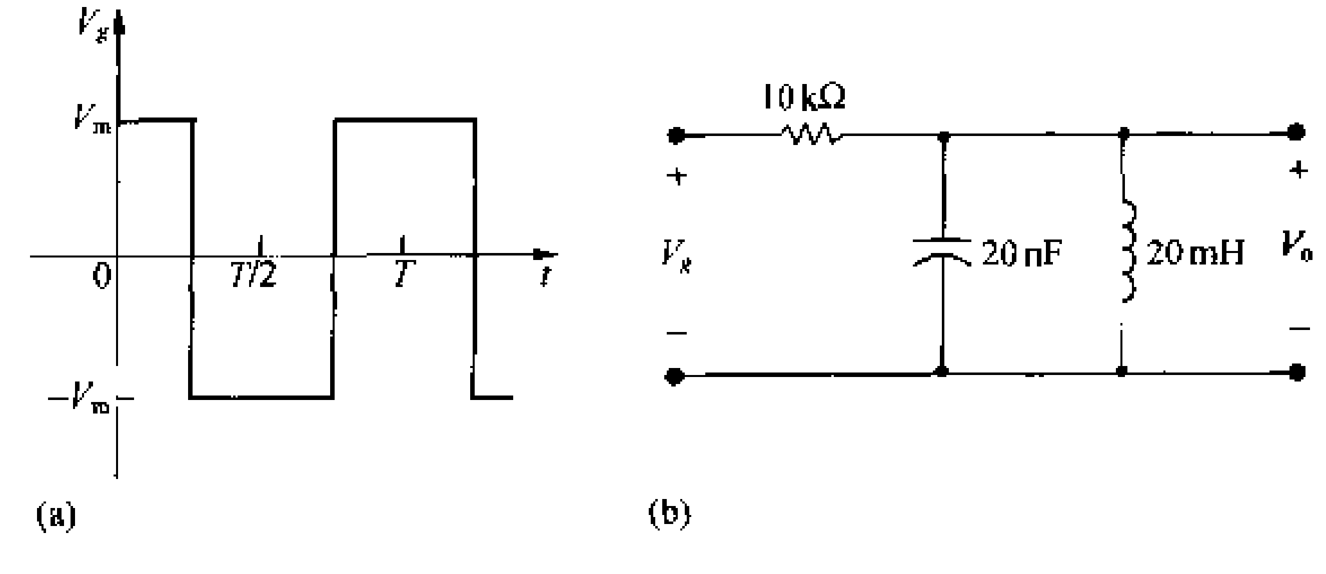


图 P16.25

P16.26 将习题 16.25 中描述的周期方波电压作用于图 P16.26 所示的电路。

(a) 求稳态电压 v_o 的傅里叶级数表达式的前四个非零项。

(b) 输入电压中哪些频率成分在输出时被滤掉了？解释为什么？

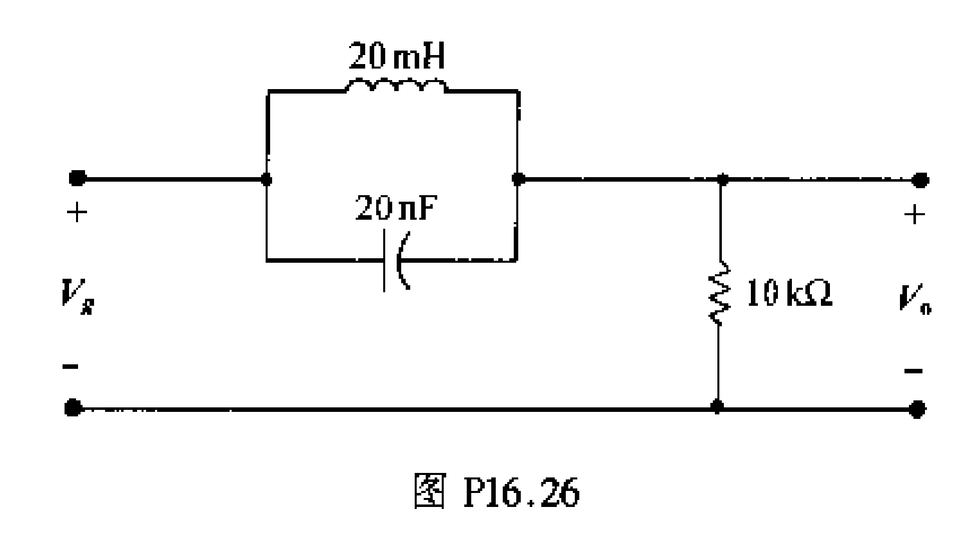


图 P16.26

16.27 将图 P16.27(a)所示的全波整形正弦波电压作用于图 P16.27(b)所示的电路。

(a) 求 v_o 的傅里叶级数表达式的前四个非零项。

(b) 求解 v_o 有意义吗？解释为什么？

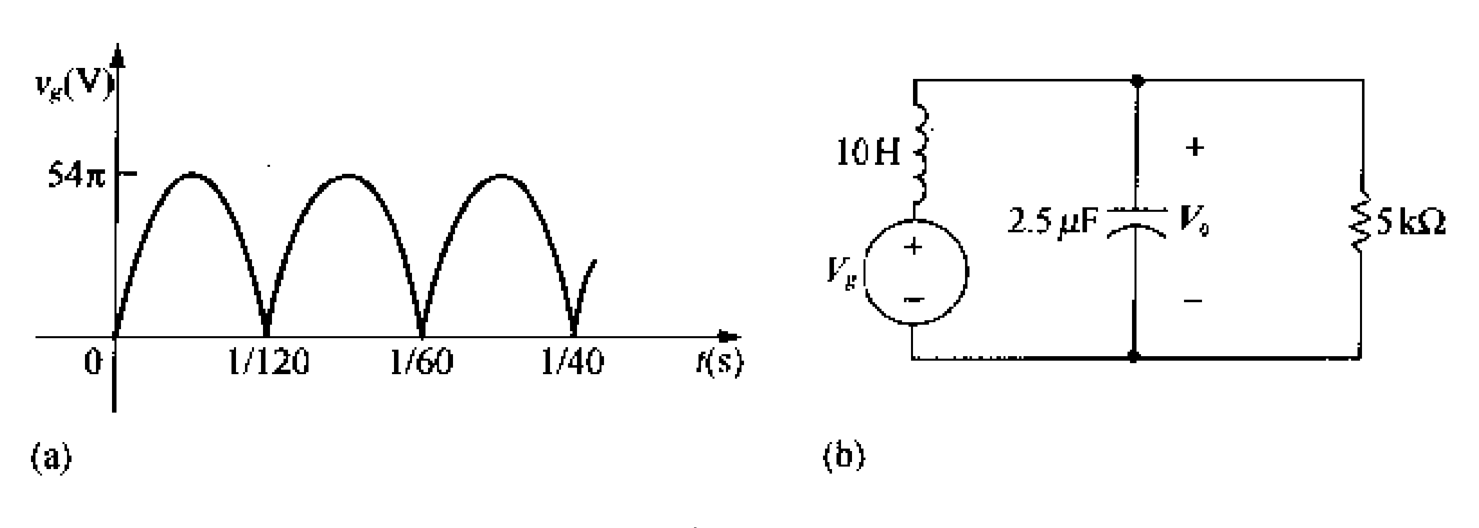


图 P16.27

16.28 将图 P16.28(a)所示的周期电流作用于图 P16.28(b)中所示的电路。写出 i_o 的五次谐波电流的时域表达式。

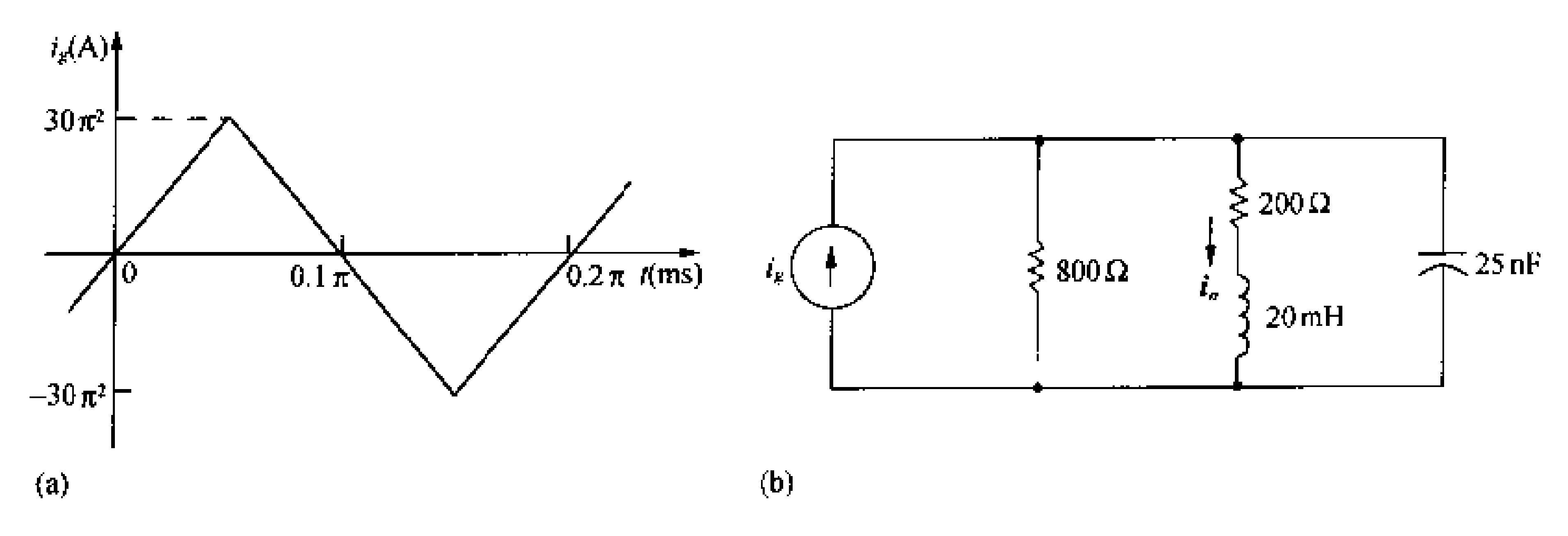


图 P16.28

16.29 一个周期为 10π μs 的周期电压的傅里叶级数为：

$$v_g = 150 \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi}{2} \cos n\omega_o t \text{ V}$$

将该周期电压作用于图 16.29 所示的电路。求频率分别为 3 Mrad/s 和 5 Mrad/s 时 v_o 分量的振幅和相位角。

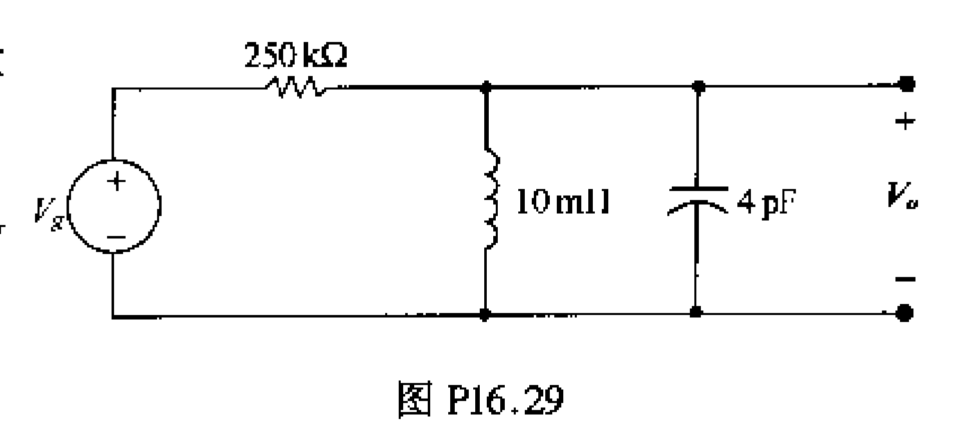


图 P16.29

16.30 (a) 利用 $v(t)$的傅里叶级数表达式的前五个非零项,估计图 P16.30 (a)所示周期方波电压的方均根值。

(b) 如果:

$$误差百分比 = \left[\frac{估计值}{准确值} - 1\right] \times 100\%$$

计算估计误差的百分比。

(c) 如果将周期方波电压用图 P16.30 (b)所示的周期三角电压代替,重做(a)和(b)。

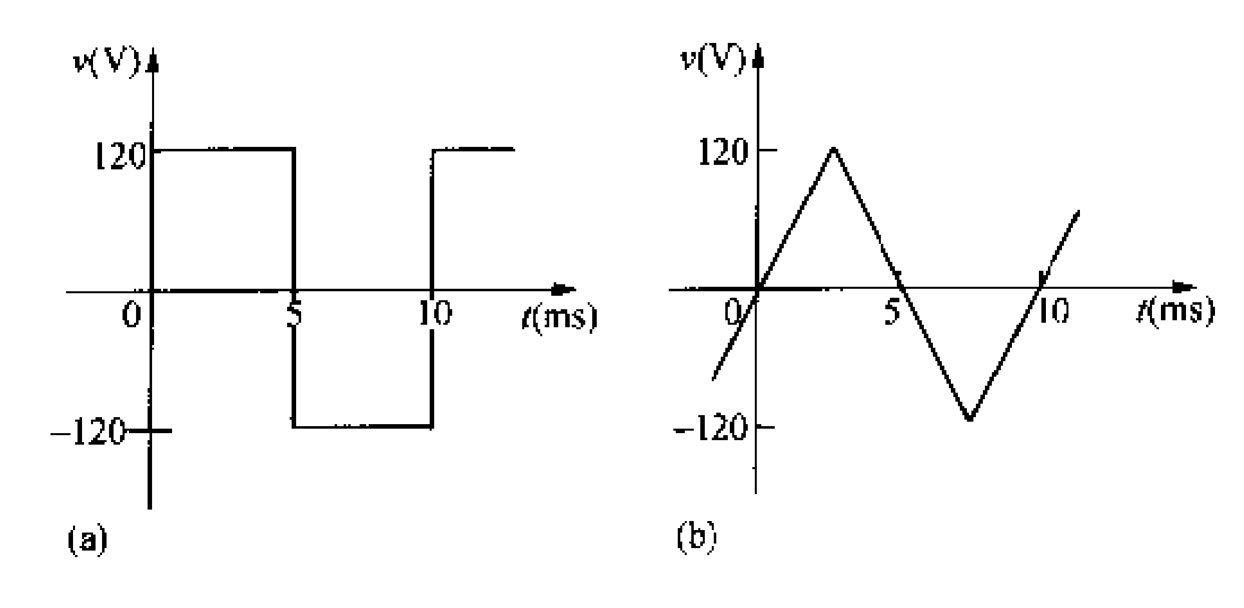


图 P16.30

M16.31 (a) 利用 $v(t)$的傅里叶级数表达式的前三个非零项估计图 P16.31(a)所示全波整形正弦电压的方均根值。

(b) 计算估计误差的百分比(见习题 16.30)。

(c) 如果将全波整形正弦电压用图 P16.31(b)所示的半波整形正弦电压代替,重做(a)和(b)。

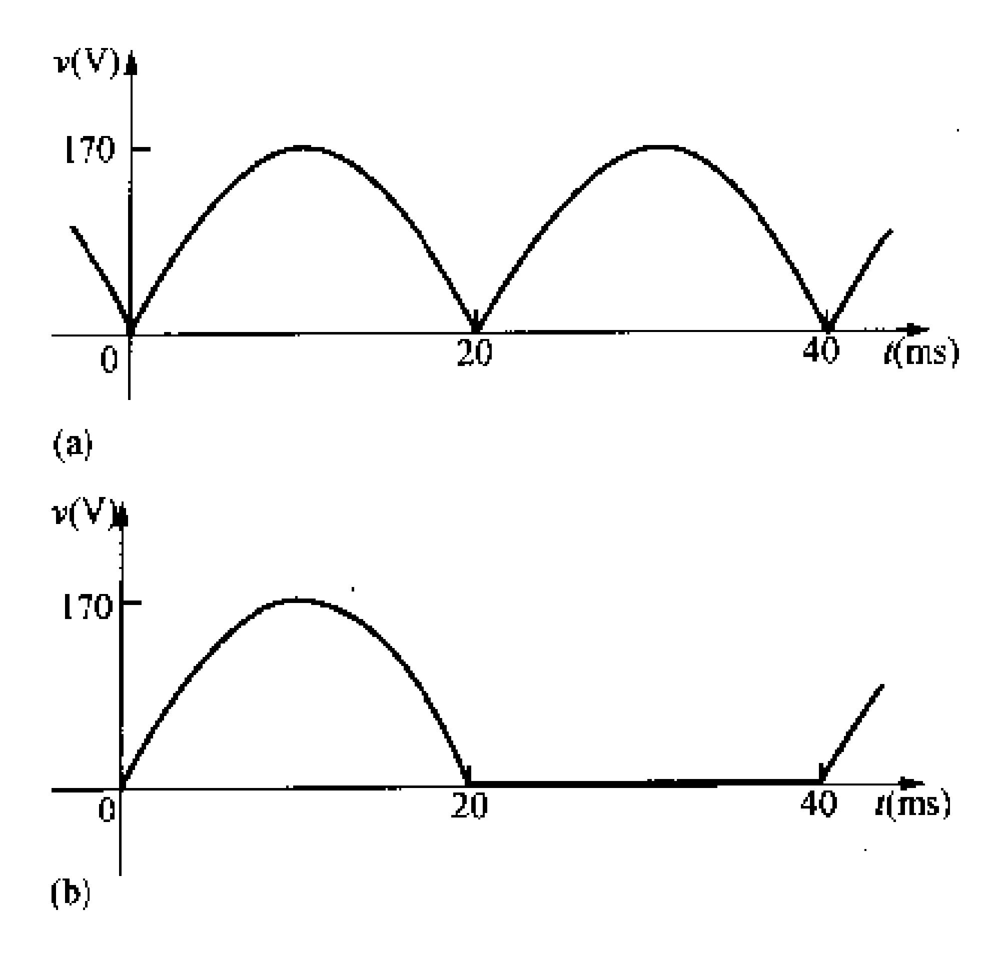


图 P16.31

16.32 (a) 求图 P16.32 所示周期电流的傅里叶系数表达式。

(b) 采用式(16.38)的三角级数形式,写出傅里叶级数的前四个非零项。

(c) 利用(b)中得到的傅里叶级数的前四个非零项估计 i_g 的方均根值。

(d) 求 i_g 的方均根精确值。

(e) 计算方均根值估计的误差百分比。

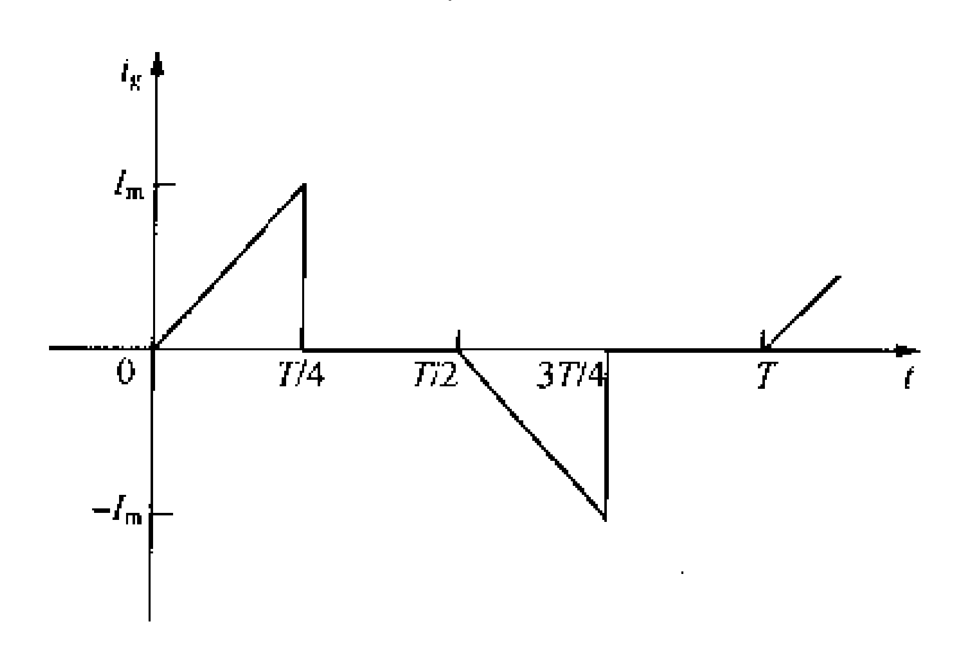


图 P16.32

16.33 (a) 用图 P16.33 所示周期电压的傅里叶级数近似式的前四个非零项,估计它的方均根值。

(b) 计算电压的精确方均根值。

(c) 计算方均根值估计的误差百分比。

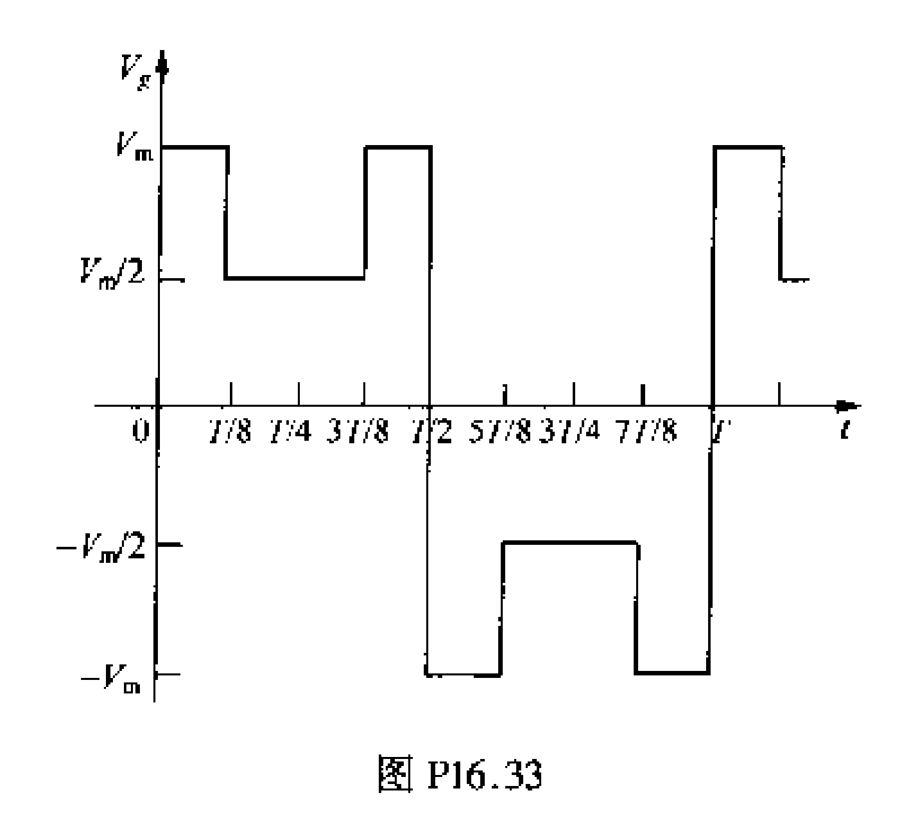


图 P16.33

16.34 具有图 P16.34(a)描述形式的任一周期三角波的方均根值与 t_a 和 t_b 无关。注意:当函数为单值函数时,$t_a \leq t_b$。其方均根值等于 $V_p/\sqrt{3}$。求图 P16.34 (b) ~ (d)所示三个波形的方均根值验证上述结论。

16.35 一个网络端口的电压和电流为:

$v = 80 + 200\cos(500t + 45°) + 60\sin 1500t$ V

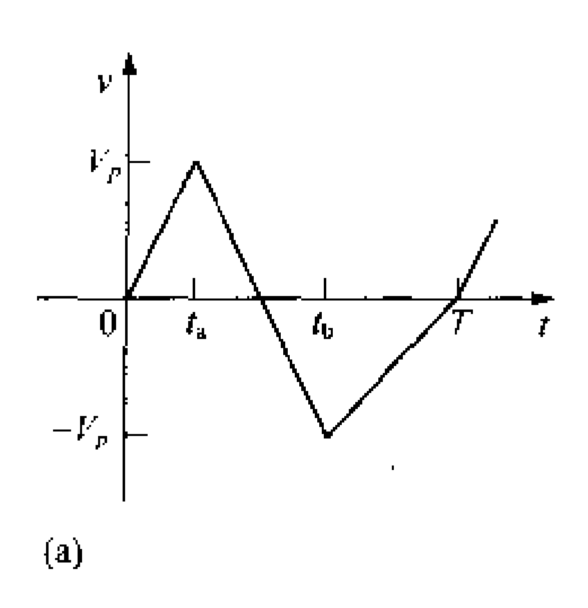
$i = 10 + 6\sin(500t + 75°) + 3\cos(1500t - 30°)$ A

电流方向为网络端口电压下降的方向。

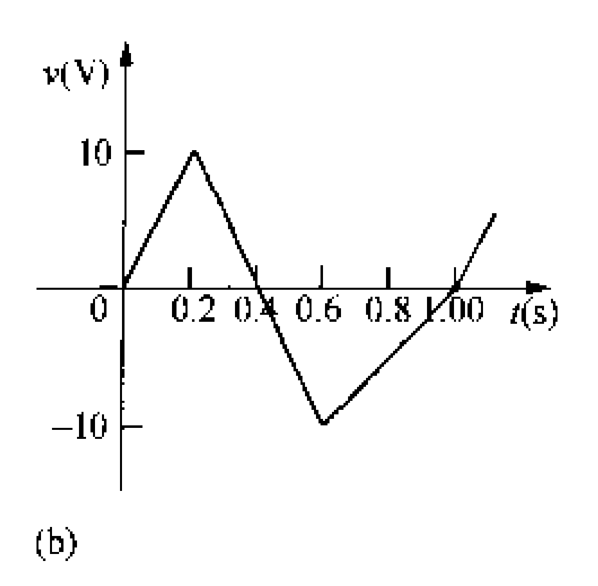
(a) 端口的平均功率是多少?

(b) 电压的方均根值是多少?

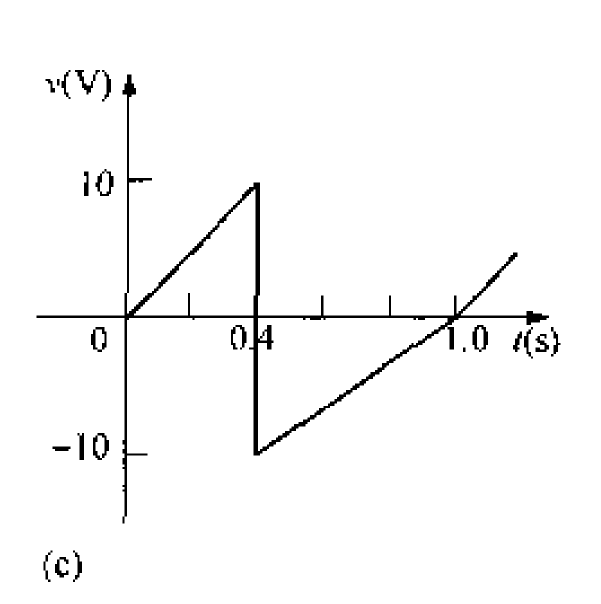
(c) 电流的方均根值是多少?



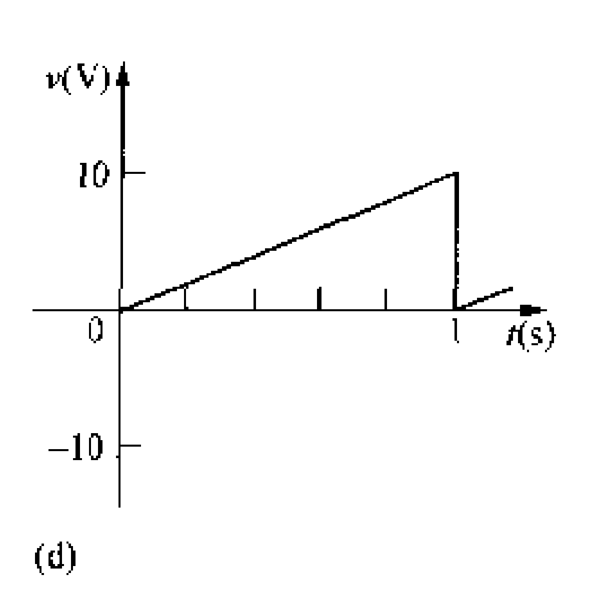
(a)



(b)



(c)



(d)

图 P16.34

16.36 一个 $81\pi^2$ kΩ 电阻两端的周期电压如图 P16.36 所示。

(a) 利用 $v(t)$的傅里叶级数表达式的前四个非零项,估计该电阻消耗的平均功率。

(b) 计算 $81\pi^2$ kΩ 电阻消耗的平均功率的精确值。

(c) 平均功率估计的误差百分比是多少?

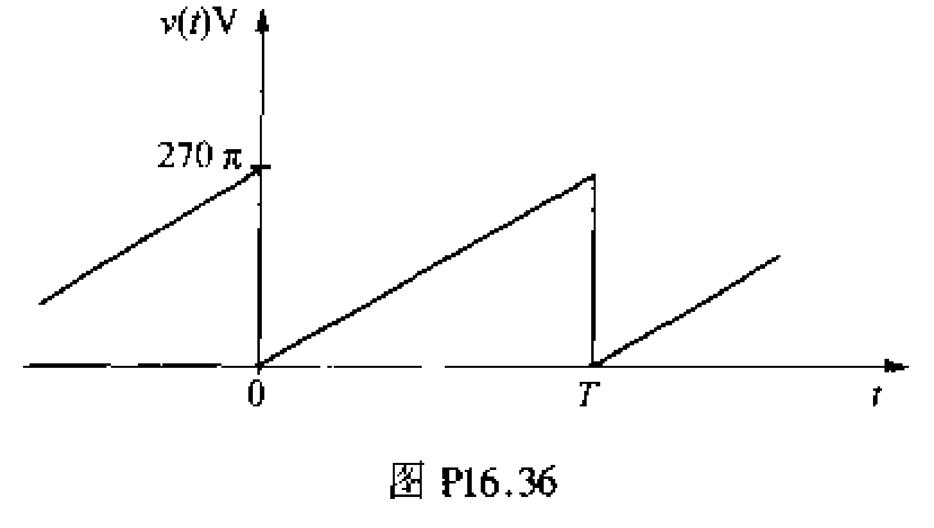


图 P16.36

16.37 将图 P16.37 所示的周期电压作用于一个 10 Ω 电阻的两端。

(a) 利用 $v(t)$的傅里叶级数表达式的前三个非零项,估计 10 Ω 电阻消耗的平均功率。

(b) 计算 10 Ω 电阻消耗的平均功率的精确值。

(c) 平均功率估计的误差百分比是多少?

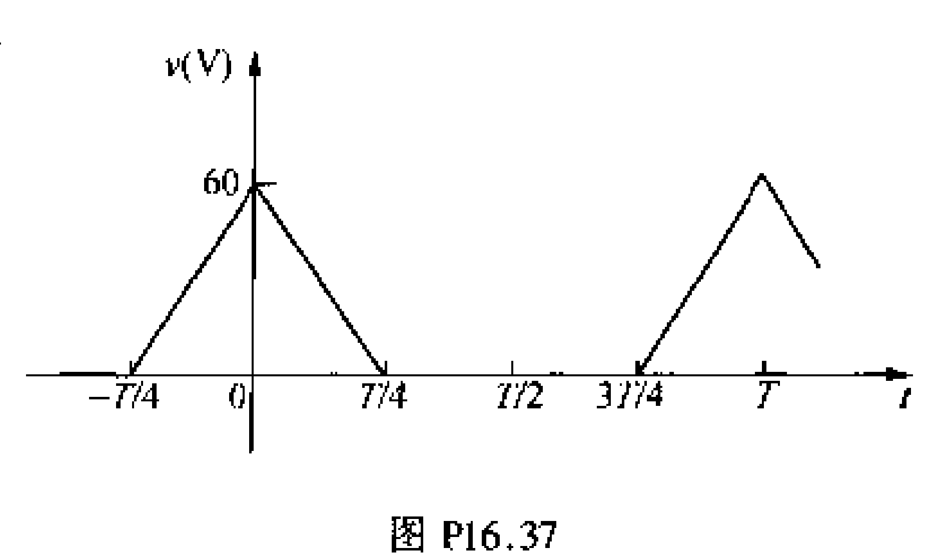


图 P16.37

16.38 将一个三角波电压作用于图 P16.38 (a)所示电路。该三角波电压如图 P16.38 (b)所示。

当电路处于稳态时,估计 20 Ω 电阻消耗的平均功率。

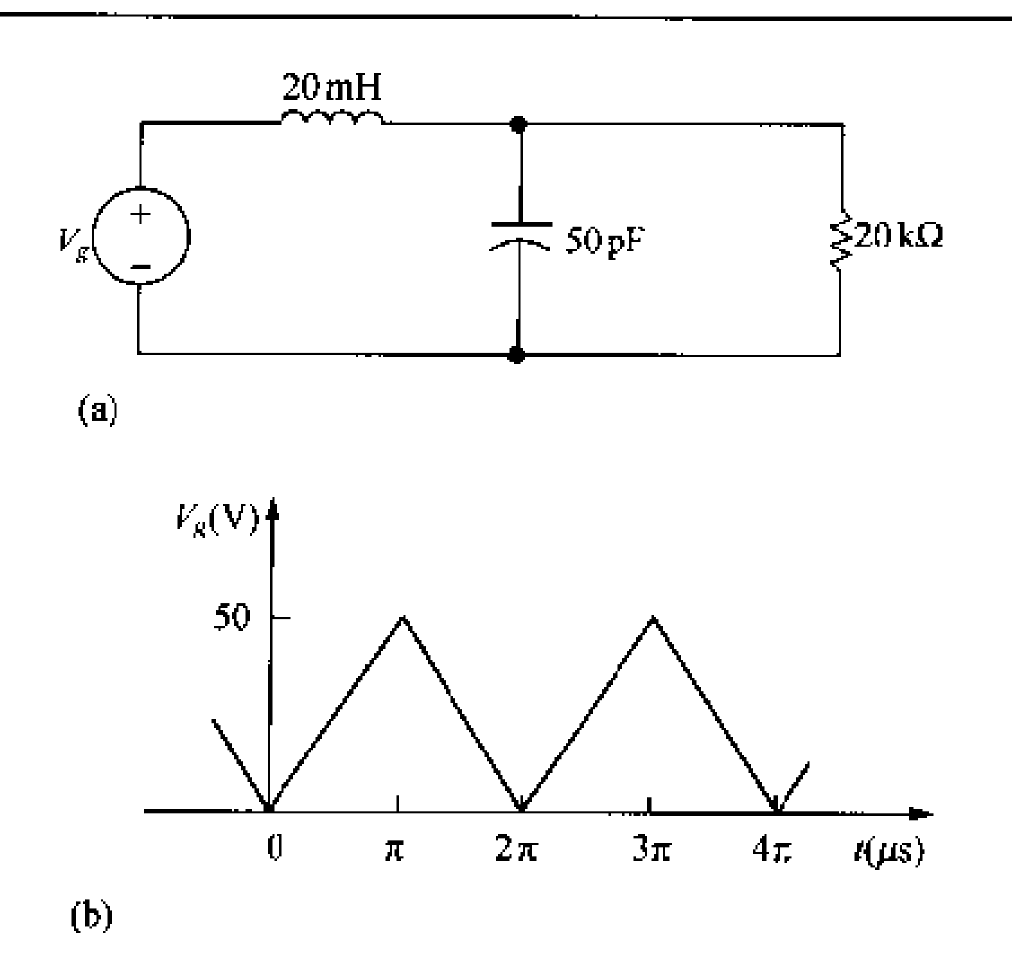


图 P16.38

16.39 若习题 16.16 中描述的周期函数是一个峰值振幅为 2 A 的电流函数。

(a) 求电流的方均根值。

(b) 如果该电流流过一个 54 Ω 电阻，则该电阻消耗的平均功率是多少？

(c) 若只用傅里叶级数的基频项近似 i_g，那么 54 Ω 电阻消耗的平均功率是多少？

(d) 电阻消耗功率估计的误差百分比是多少？

16.40 求图 P16.40 所示电压的傅里叶级数的指数形式表达式。

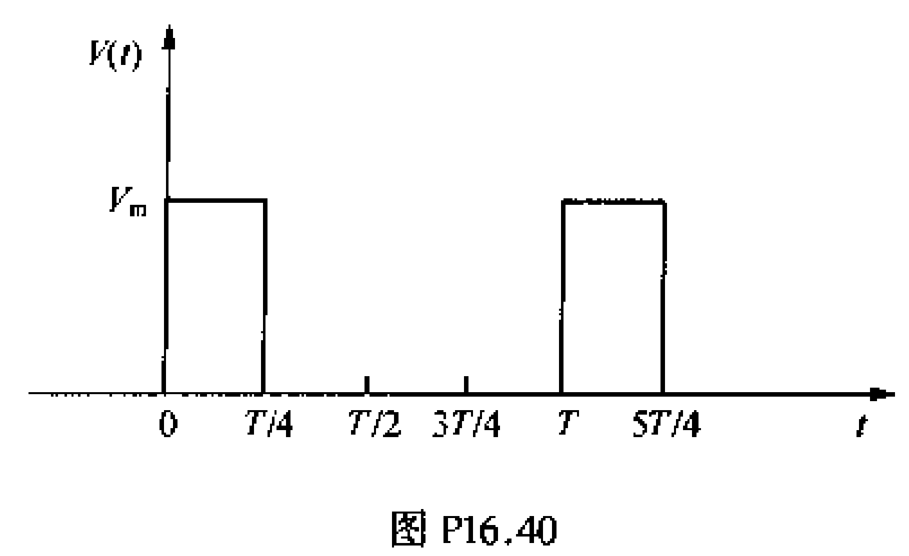


图 P16.40

16.41 求图 P16.41 所示周期电流的复傅里叶系数的表达式。

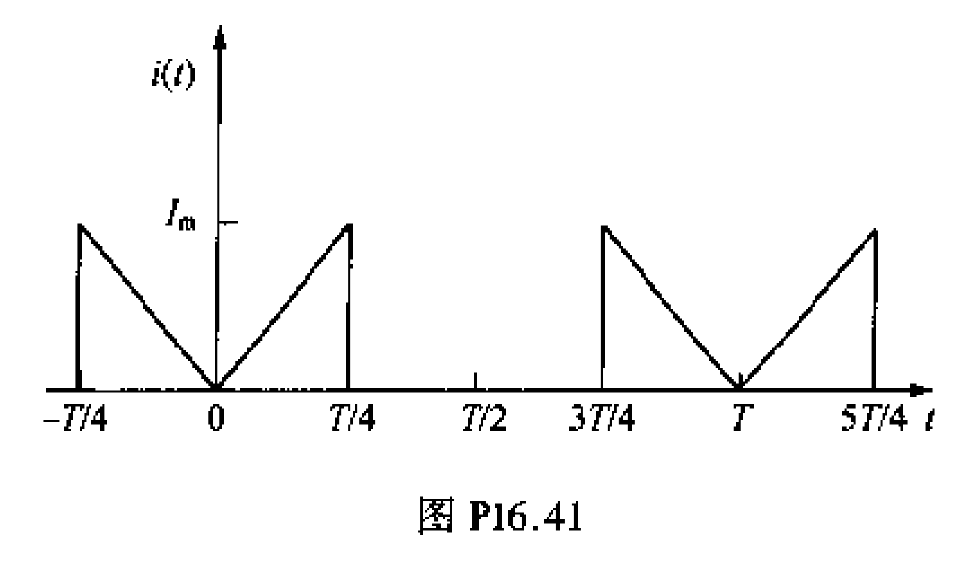


图 P16.41

16.42 (a) 习题 16.41 中的周期电流流过一个 60 Ω 电阻。如果 $I_m = 20$ A，则该电阻消耗的平均功率是多少？

(b) 若 $i_g(t)$用包含前五个非零项的截断指数形式傅里叶级数近似,即 $n=0,1,2,3,4$ 和 5,那么利用该近似,电流的方均根值是多少?

(c) 如果用(b)中的近似式表示 i_g,那么计算功率的误差百分比是多少?

16.43 图 P16.43(a)所示电路中的周期电压源的波形如图 P16.43(b)所示。

(a) 导出 C_n 的表达式。

(b) 若 $V_m=72\pi$ V, $T=50\pi$ μs,求输入电压 v_g 的傅里叶级数的复系数 C_0, C_{-1}, C_1, C_{-2}, C_2, C_{-3}, C_3, C_{-4}和 C_4 的值。

(c) 对于 v_o,重做(b)。

(d) 利用 (c)中求得的复系数,估计 200 kΩ 电阻消耗的平均功率。

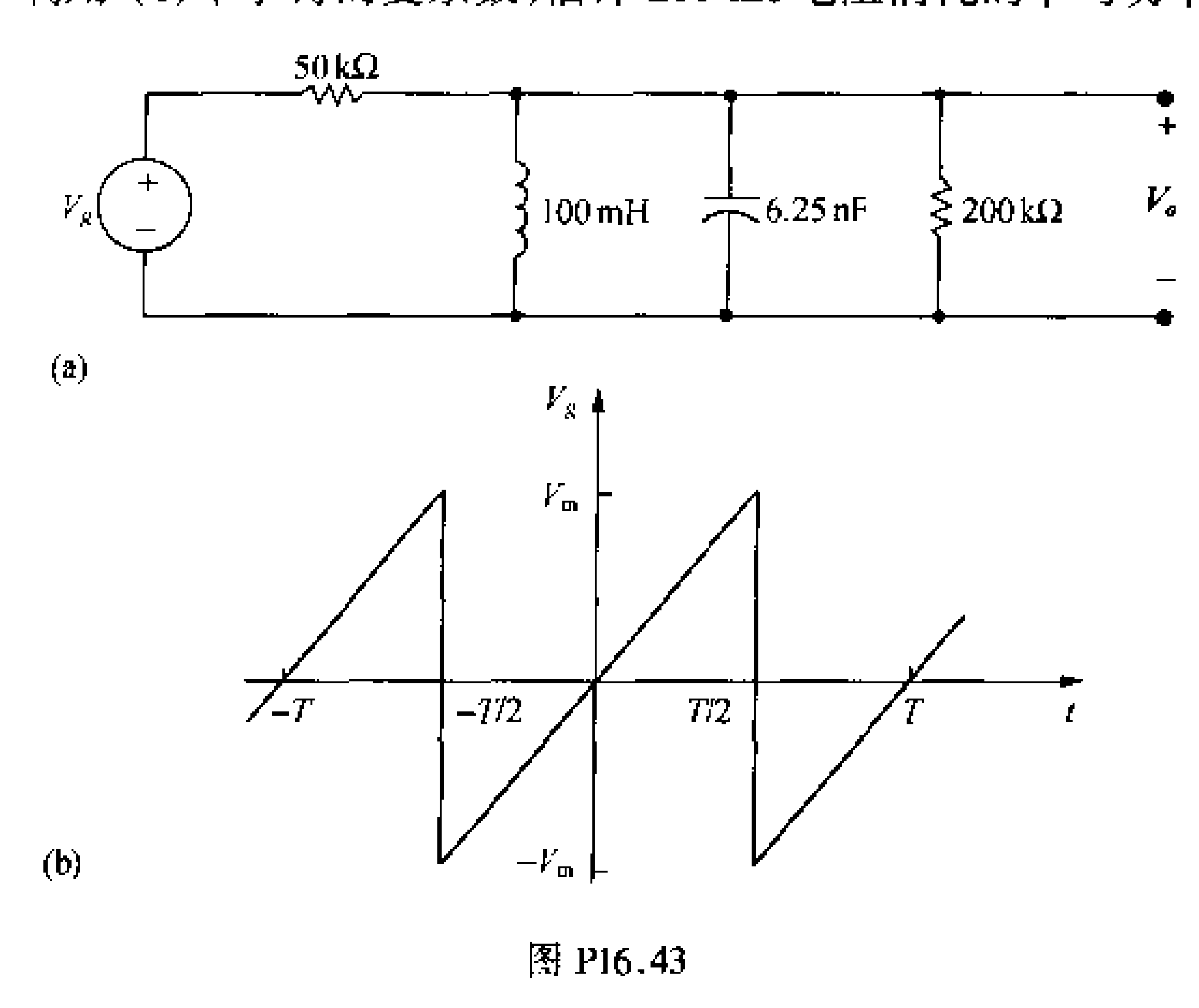


图 P16.43

16.44 (a) 求图 P16.43 (b)所示周期电压的方均根值。

(b) 利用习题 16.43 (b)中求得的复系数,估计 v_g 的方均根值。

(c) v_g 的方均根值估计的误差百分比是多少?

16.45 (a) 基于式(16.38),绘出例 16.3 的周期电压的振幅和相位图。若 $V_m=40$ V,绘出振幅、相位与 $n\omega_o$ 的关系图,其中 $n=0,1,2,3,\cdots$

(b) 根据式(16.82),重做(a)。

16.46 (a) 基于式(16.38),绘出习题 16.36 中周期电压的振幅和相位图。绘出振幅和相位与 $n\omega_o$ 的关系图,其中 $n=0,1,2,3,\cdots$

(b) 根据式(16.82),重做(a)。

16.47 一个用截断傅里叶级数表示的周期电压,其振幅谱和相位谱分别如图 P16.47(a)和图 P16.47 (b)所示。

(a) 采用式(16.38)的形式写出周期电压的表达式。

(b) 该电压函数是 t 的奇函数还是偶函数?

(c) 该电压函数是半波对称函数吗?

(d) 该电压函数是方波对称函数吗?

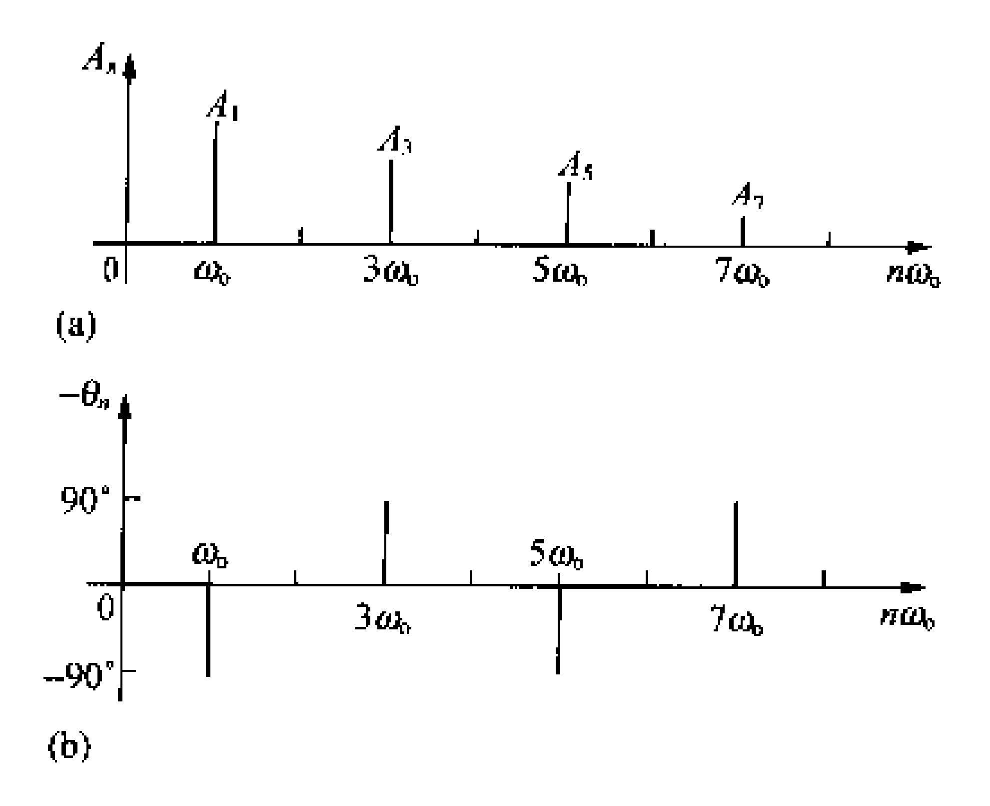


图 P16.47

16.48 一个用有限项傅里叶级数表示的周期函数，其振幅谱和相位谱分别如图 P16.48 (a)和图 P16.48 (b)所示。

(a) 采用式(16.38)的形式写出周期电流的表达式。

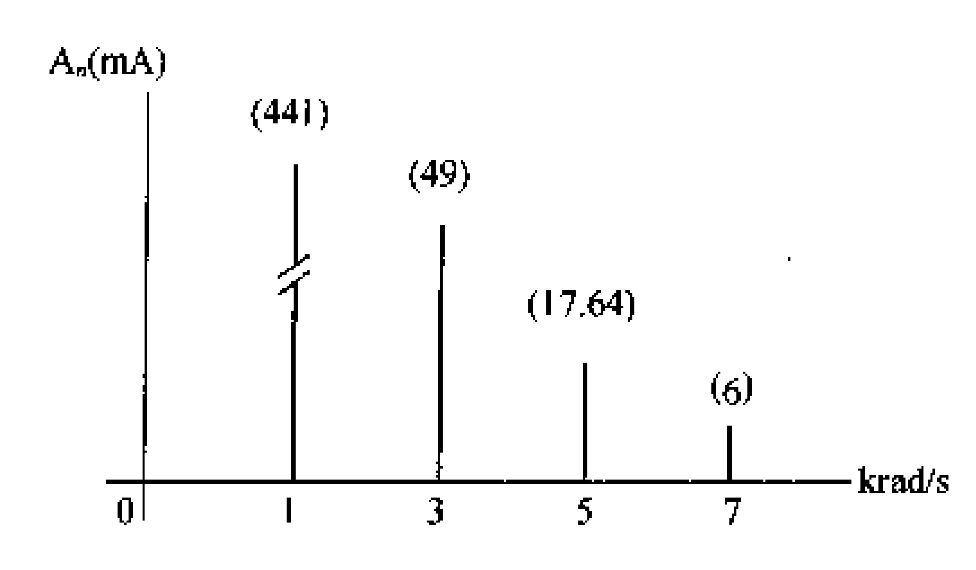
(b) 该电流函数是 t 的奇函数还是偶函数？

(c) 该电流函数是半波对称函数吗？

(d) 计算电流的方均根值(单位为毫安培)。

(e) 写出傅里叶级数的指数形式。

(f) 基于指数形式的傅里叶级数，绘出振幅谱和相位谱。



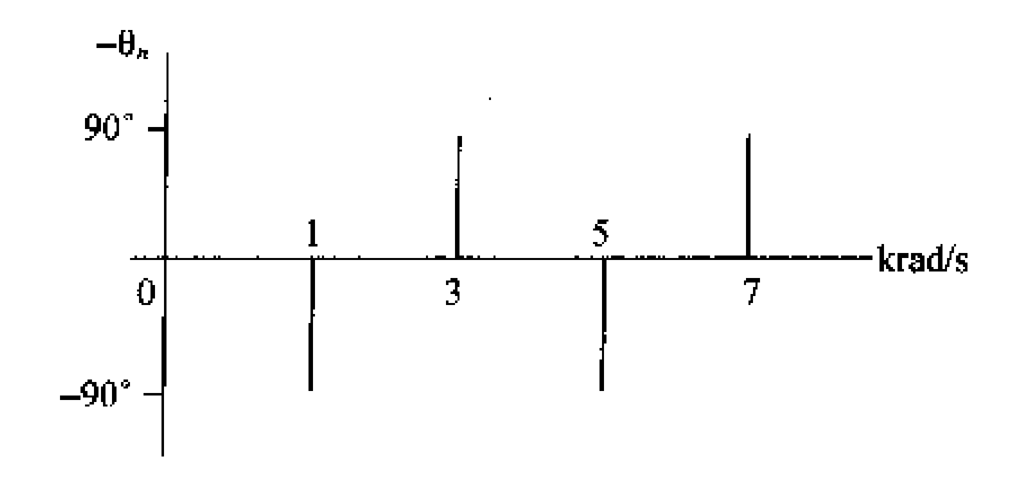


图 P16.48

16.49 三级低通巴特沃什滤波器的输入信号是一个半波整形正弦电压。滤波器的角频率为 100 rad/s。正弦电压的振幅为 54π V，且周期为 5π ms。写出表示滤波器稳态

输出电压的傅里叶级数的前三项。

16.50 二级低通巴特沃什滤波器的输入信号如图 P16.50 所示。滤波器的角频率为 2 krad/s。写出表示滤波器的稳态输出电压的傅里叶级数的前三项。

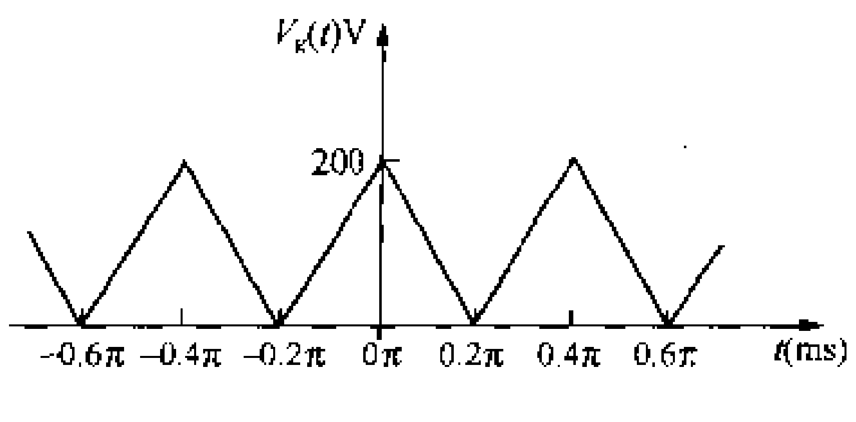


图 P16.50

16.51 图 P16.51(a)中的窄带带通滤波器电路的传递函数(V_o/V_g)为：

$$H(s) = \frac{-K_o\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

(a) 求作为电路参数 R_1, R_2, R_3, C_1 和 C_2 函数的 K_o, β 和 ω_o^2 的值。

(b) 若 $R_1 = 3912.50\ \Omega, R_2 = 6.26\ \Omega,\ R_3 = 10\ \mathrm{k\Omega}, C_1 = C_2 = 100\ \mathrm{nF}$，且周期电压 v_g 如图 P16.51 (b)所示，写出 v_o 的傅里叶级数的前三项。

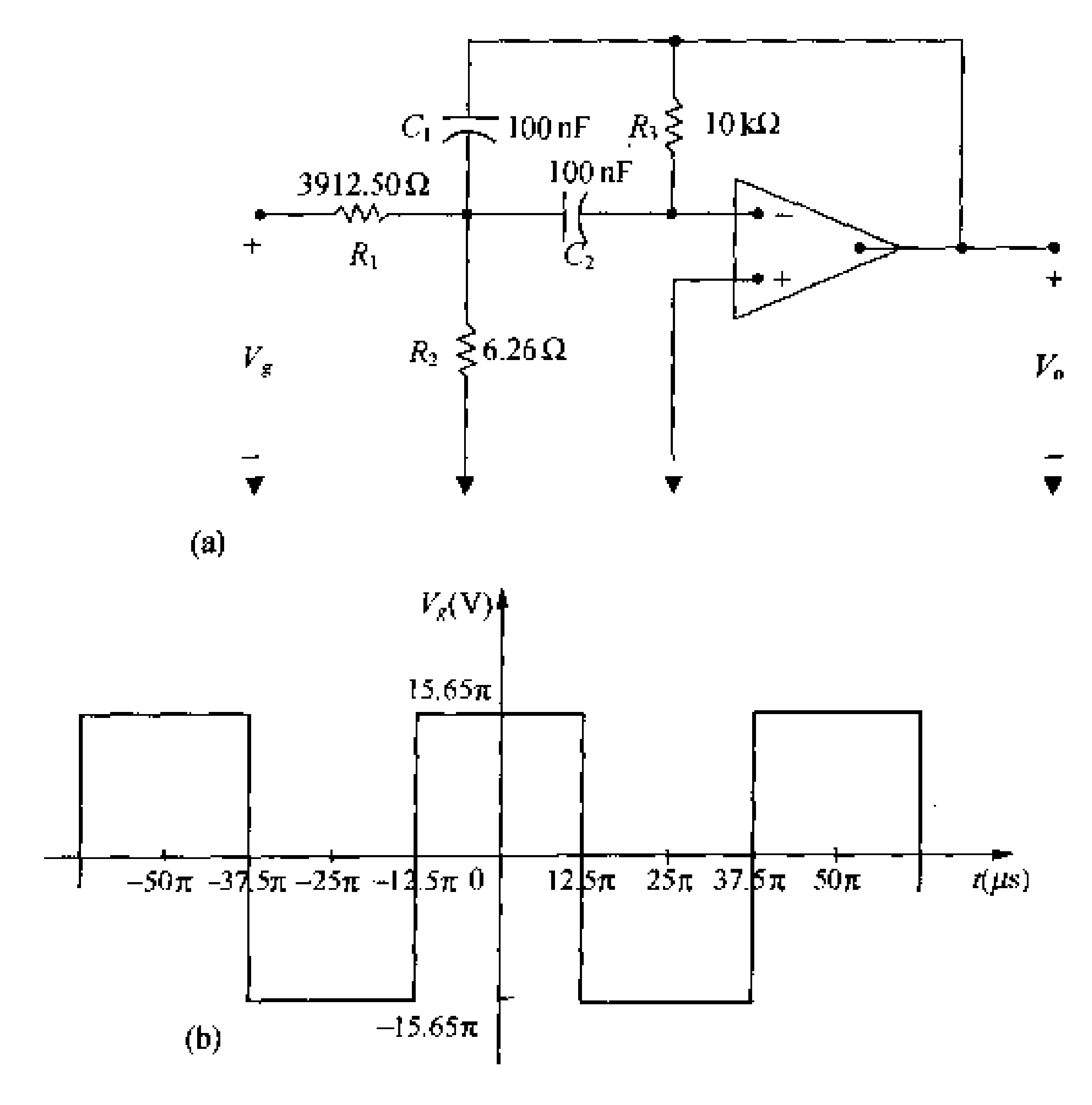


图 P16.51

第 17 章　傅里叶变换

在 16 章中讨论了周期函数的傅里叶级数表达式，利用该表达式，可以根据振幅和相位的频域特性描述一个周期函数，而傅里叶变换又可以将频域描述推广到非周期函数。通过拉普拉斯变换，已经引入了将非周期函数从时域变换到频域的思想。读者也许要问，为什么还要引入傅里叶变换。严格地讲，傅里叶变换不是一种新变换。它是双边拉普拉斯变换的复频率实部等于零的一种特殊情况。从物理学观点看，将傅里叶变换看成傅里叶级数的极限情况更合理。在 17.1 节将介绍这个观点，并导出傅里叶变换式。

在特定的通信理论和信号处理领域中，傅里叶变换比拉普拉斯变换更有用。尽管这里不能深入研究傅里叶变换，但在读者对拉普拉斯变换和傅里叶级数相关概念的记忆还很清晰的情况下，将傅里叶变换介绍给读者是很合适的。

17.1　傅里叶变换的引出

将傅里叶变换看成傅里叶级数的极限情况，下面开始推导傅里叶变换，利用傅里叶级数的指数形式：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \tag{17.1}$$

其中：

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{17.2}$$

在式(17.2)中，将积分起始点选为 $t_0 = -T/2$。

当基波周期 T 无限增大时，周期函数就转化为非周期函数。换言之，如果 T 趋于无限大，则函数从不重复出现，因此，它是非周期函数。随着 T 增大，相邻谐波频率的间隔越来越小。特别是：

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{17.3}$$

当 T 越来越大时，间隔增量 $\Delta\omega$ 接近于微分间隔 $d\omega$。由式(17.3)：

$$\frac{1}{T} \to \frac{d\omega}{2\pi}\quad ,\quad 当\ T \to \infty \tag{17.4}$$

随着周期增大，频率从一个离散变量逐渐变成一个连续变量，或：

$$n\omega_0 \to \omega\quad ,\quad 当\ T \to \infty \tag{17.5}$$

根据式(17.2)，随着周期增大，傅里叶系数 C_n 逐渐减小。在极限情况下，当 $T\to\infty$ 时，$C_n\to 0$。这个结果有意义，是因为我们期望函数失去周期性时其傅里叶系数变为零。然而，注意乘积 C_nT 的极限值，即：

$$C_nT \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\quad ,\quad 当\ T \to \infty \tag{17.6}$$

式(17.6)的得出,利用了式(17.5)的关系式。式(17.6)中的积分为 $f(t)$ 的傅里叶变换,将其定义为:

$$F(\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{17.7}$$

研究式(17.1) $T\to\infty$ 时的极限形式,可以得到傅里叶逆变换的表达式。通过乘、除 T:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(C_nT)e^{jn\omega_0 t}\left(\frac{1}{T}\right) \tag{17.8}$$

当 $T\to\infty$ 时,求和趋于积分, $C_nT\to F(\omega)$, $n\omega_0\to\omega$ 和 $1/T\to d\omega/2\pi$。这样,在极限情况下,式(17.8)变成:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{17.9}$$

式(17.7)和式(17.9)定义了傅里叶变换。式(17.7)把时域表达式 $f(t)$ 变换为相应的频域表达式 $F(\omega)$。式(17.9)定义了将 $F(\omega)$ 变换为 $f(t)$ 的反运算。

现在推导图 17.1 所示脉冲的傅里叶变换。该脉冲对应例 16.6 中周期电压 $T\to\infty$ 时的波形。直接由式(17.7)得到 $v(t)$ 的傅里叶变换:

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-j\omega t}dt \\ &= V_m \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)}\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{V_m}{-j\omega}\left(-2j\sin\frac{\omega\tau}{2}\right), \end{aligned} \tag{17.10}$$

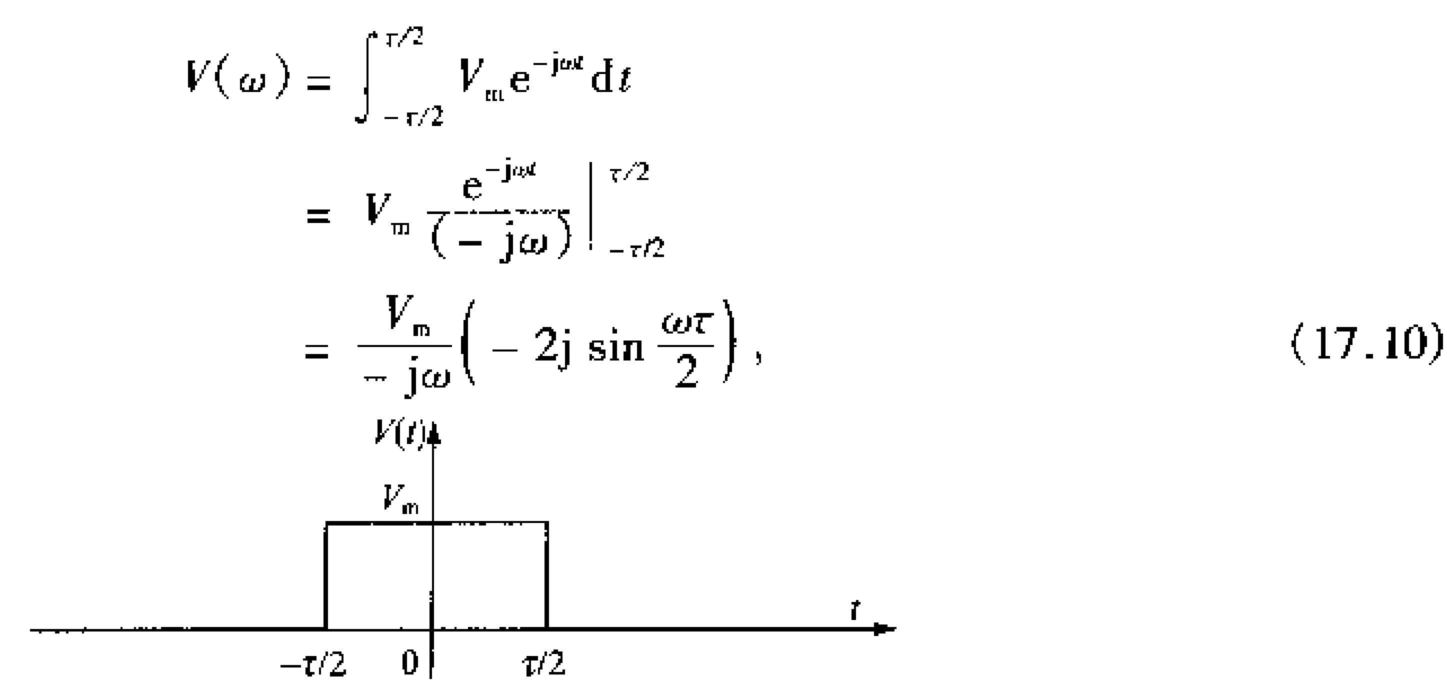


图 17.1　一个电压脉冲

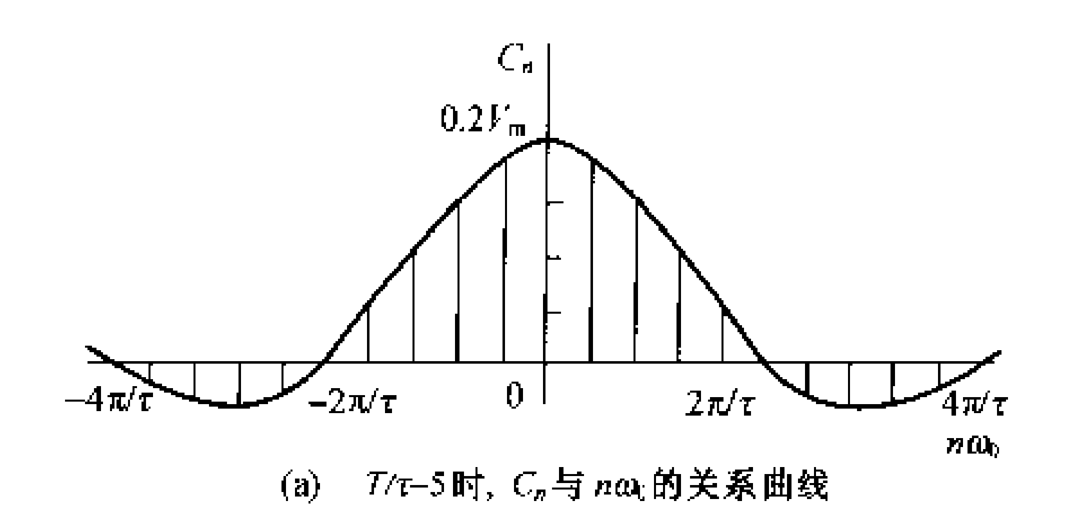
将上式的分子和分母同时乘以 τ,可以将其写成 $(\sin x)/x$ 的形式。则:

$$V(\omega) = V_m\tau\frac{\sin\omega\tau/2}{\omega\tau/2} \tag{17.11}$$

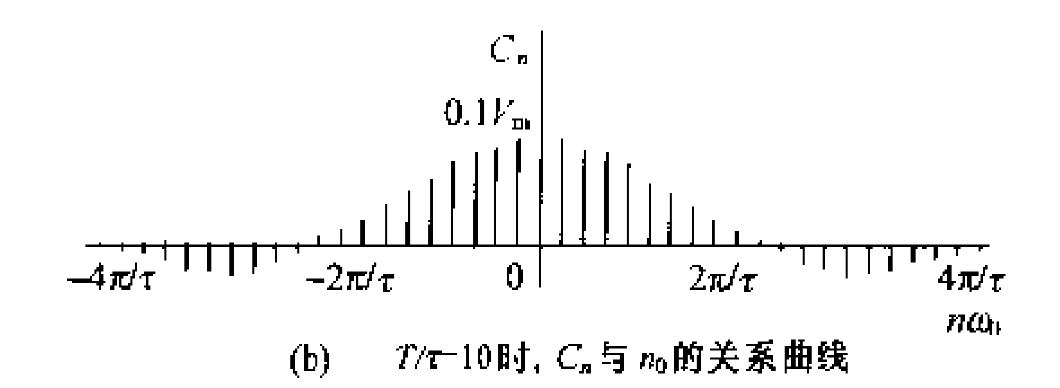
例 16.6 中电压脉冲的周期序列的傅里叶系数表达式为:

$$C_n = \frac{V_m\tau}{T}\frac{\sin n\omega_0\tau/2}{n\omega_0\tau/2} \tag{17.12}$$

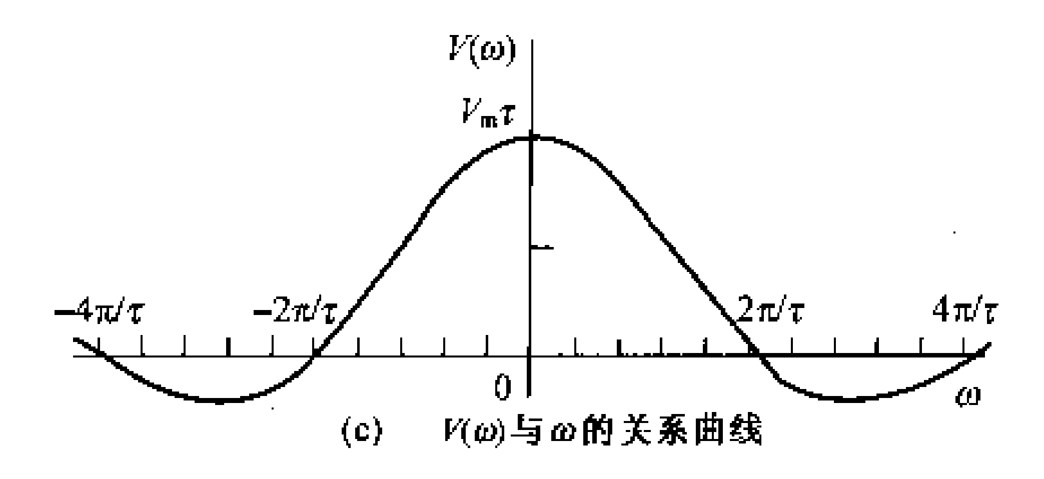
式(17.11)与式(17.12)的对比明显表明,时域函数由周期函数变为非周期函数时,其振幅谱从离散的线状频谱变为连续谱。此外,线状谱的包络线与连续频谱的形状相同。这样,随着 T 增大,谱线越来越密,振幅越来越小,但包络线的形状不变。从物理学角度解释,傅里叶变换 $V(\omega)$ 是获得 $v(t)$ 的频率组成的手段。图 17.2 对以上结论进行了解释说明。基于 τ 为常数、T 不断增加的假设,绘制出了振幅图。



(a) $T/\tau=5$时，C_n与$n\omega_0$的关系曲线



(b) $T/\tau=10$时，C_n与n_0的关系曲线



(c) $V(\omega)$与ω的关系曲线

图 17.2 $f(t)$由周期函数变为非周期函数，其相应的振幅谱变化示意图

17.2 傅里叶积分的收敛

如果式(17.7)中的积分收敛，则时间函数$f(t)$的傅里叶变换存在。如果$f(t)$具有好的收敛特性，即在有限时间间隔内不为零，那么$f(t)$的傅里叶积分一定收敛。好的收敛特性指的是$f(t)$是一个单值函数且在积分区间内围住一个有限的面积。在实际应用中，希望所有有限延迟脉冲都具有好的收敛特性。矩形脉冲的傅里叶变换在17.1节中已经进行了讨论。

如果$f(t)$在有限时间间隔内不为零，傅里叶积分的收敛与否取决于$t\to\infty$时的$f(t)$的性质。对于无限区间内不等于零的单值函数，如果积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$$

存在，且$f(t)$有有限个间断点，则该函数的傅里叶变换存在。图17.3给出了一个衰减指数函数的例子。$f(t)$的傅里叶变换为：

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}K\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{K\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}}{-(a+\mathrm{j}\omega)}\bigg|_0^{\infty}=\frac{K}{-(a+\mathrm{j}\omega)}(0-1)\\&=\frac{K}{a+\mathrm{j}\omega}\quad,a>0\end{aligned}\tag{17.13}$$

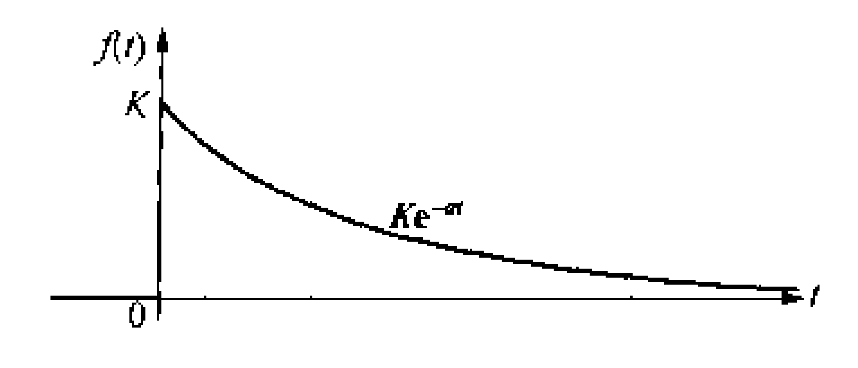


图 17.3 衰减指数函数 $Ke^{-at}u(t)$

第三组重要的函数在严格意义上不存在傅里叶变换,但在实际应用中却有重大意义。例如,如果 $f(t)$ 为常数,式(17.7)中的积分不收敛。同样,对于 $f(t)$ 为一个正弦函数,$\cos\omega_0 t$,或一个阶跃函数 $Ku(t)$ 时,式(17.7)的积分也不收敛。在电路分析中,对这些函数非常感兴趣,但是,如果需要进行傅里叶分析,就必须求助于某种数学手段。首先,在时域建立一个函数,该函数的傅里叶变换存在并能任意地接近目标函数。接着,求近似函数的傅里叶变换,然后估计该函数接近 $f(t)$ 时 $F(\omega)$ 的极值。最后,将 $F(\omega)$ 的极值定义为 $f(t)$ 的傅里叶变换。

下面通过求一个常数的傅里叶变换对这种方法进行说明。可以用指数函数:

$$f(t) = Ae^{-\varepsilon|t|},\varepsilon > 0 \tag{17.14}$$

近似一个常数。

当 $\varepsilon \to 0$ 时,$f(t) \to A$。图 17.4 用图形显示了该近似。$f(t)$ 的傅里叶变换为:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{0} Ae^{\varepsilon t}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} Ae^{-\varepsilon t}e^{-j\omega t}dt \tag{17.15}$$

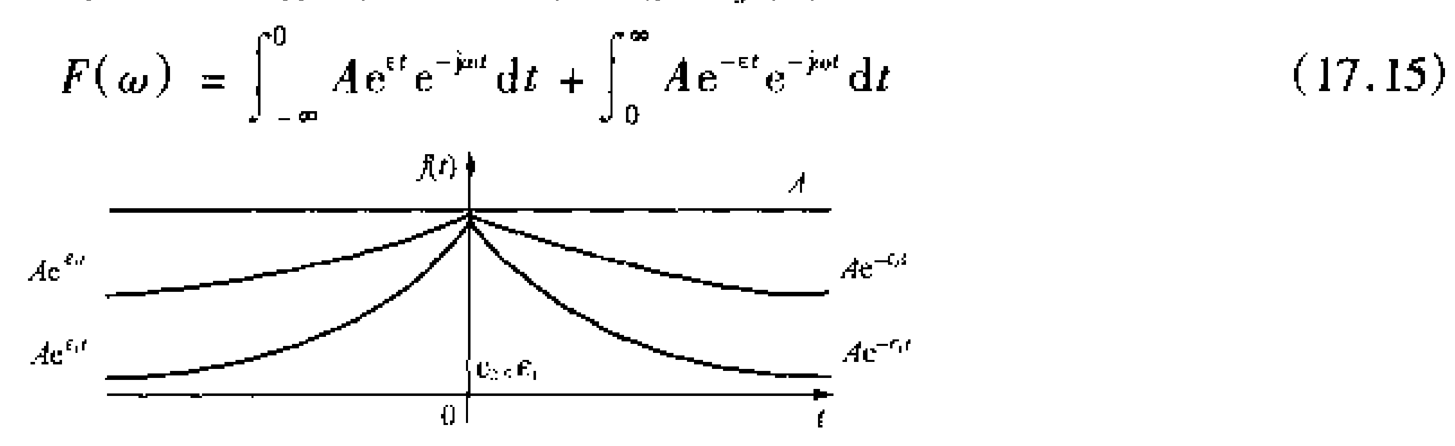


图 17.4 指数函数对常数的近似

计算式(17.15)中的积分得:

$$F(\omega) = \frac{A}{\varepsilon - j\omega} + \frac{A}{\varepsilon + j\omega} = \frac{2\varepsilon A}{\varepsilon^2 + \omega^2} \tag{17.16}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时,式(17.16)的频谱在 $\omega = 0$ 点存在一个冲激函数。通过证明:(1)当 $\varepsilon \to 0$ 时,$F(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 点趋于无穷大;(2)当 $\varepsilon \to 0$ 时,$F(\omega)$ 的延迟趋于零;(3) 曲线 $F(\omega)$ 下的面积与 ε 无关,读者可以证明这个结论。曲线 $F(\omega)$ 下的面积是脉冲的强度:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varepsilon A}{\varepsilon^2 + \omega^2}d\omega = 4\varepsilon A\int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} = 2\pi A \tag{17.17}$$

在极限情况下,$f(t)$ 趋近常数 A,$F(\omega)$ 趋近脉冲函数 $2\pi A\delta(\omega)$。因此,常数 A 的傅里叶变换被定义为 $2\pi A\delta(\omega)$,或:

$$\mathscr{F}\{A\} = 2\pi A\delta(\omega) \tag{17.18}$$

在 17.4 节中,将详细讨论由极限过程定义的傅里叶变换。在 17.3 节中,将讲述如何利用拉普拉斯变换求函数的傅里叶变换。

练习题

17.1 用积分定义求下面函数的傅里叶变换:

(a) $f(t)=-A$,$-\tau/2\leqslant t<0$

$f(t)=A$,$0<t\leqslant t/2$

$f(t)=0$,其他

(b) $f(t)=0$,$t<0$

$f(t)=t\mathrm{e}^{-at}$,$t\geqslant 0$,$a>0$

答:(a) $-\mathrm{j}\left(\frac{2A}{\omega}\right)\left(1-\cos\frac{\omega\tau}{2}\right)$, (b) $\frac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^2}$。

17.2 $f(t)$的傅里叶变换由下式:

$F(\omega)=0,-\infty\leqslant\omega<-3$

$F(\omega)=4,-3<\omega<-2$

$F(\omega)=1,-2<\omega<2$

$F(\omega)=4,2<\omega<3$

$F(\omega)=0,3<\omega\leqslant\infty$

给出,求$f(t)$。

答:$f(t)=\frac{1}{\pi t}(4\sin 3t-3\sin 2t)$。

17.3 用拉普拉斯变换求傅里叶变换

如果一个函数的傅里叶积分收敛,则可以用单边拉普拉斯变换求其傅里叶变换。当$F(s)$的所有极点位于s平面的左半部分时,傅里叶积分收敛。如果在s平面的右半部分或虚轴上存在$F(s)$的极点,$f(t)$则不满足积分$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$存在的约束条件。

下面给出用拉普拉斯变换求傅里叶变换的一些规则。

1. 对于$t\leqslant 0^-$时,$f(t)$等于零这种情况,只需将$f(t)$的拉普拉斯变换式中的s用$\mathrm{j}\omega$替换。这样:

$$\mathscr{F}\{f(t)\}=\mathscr{L}\{f(t)\}_{s=\mathrm{j}\omega} \tag{17.19}$$

例如,如果:

$$f(t)=0 \qquad ,t\leqslant 0^-$$
$$f(t)=\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 t,t\geqslant 0^+$$

那么:

$$\mathscr{F}\{f(t)\}=\left.\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}\right|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{\mathrm{j}\omega+a}{(\mathrm{j}\omega+a)^2+\omega_0^2}$$

2. 因为傅里叶积分的积分范围为$-\infty$到$+\infty$,所以一个负时间函数的傅里叶变换存在。

当时间值为负时，负时间函数不为零，而当时间值为正时，负时间函数为零。为了求这种函数的傅里叶变换，可以采用如下步骤。首先，将负时间函数映射到正时域内，并求它的单边拉普拉斯变换。将变换式中的 s 用 $-j\omega$ 替换，则得到原时间函数的傅里叶变换。因此，对于 $t \geqslant 0^+$ 时，$f(t)$ 等于零这种情况：

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \mathscr{F}\{f(-t)\}_{s=-j\omega} \tag{17.20}$$

例如，如果：

$$f(t) = 0 \qquad (t \geqslant 0^+)$$
$$f(t) = e^{at}\cos \omega_0 t \qquad (t \leqslant 0^-)$$

则：

$$f(-t) = 0 \qquad (t \leqslant 0^-)$$
$$f(-t) = e^{-at}\cos \omega_0 t \qquad (t \geqslant 0^+)$$

$f(t)$ 和它的镜像都在图 17.5 中给出。$f(t)$ 的傅里叶变换为：

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega} = \left.\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}\right|_{s=-j\omega}$$

$$= \frac{-j\omega + a}{(-j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$$

图 17.5　负时间函数到正时域的映像

3. 可以把时域内不为零的函数分解为正时间函数和负时间函数。用式(17.19)和式(17.20)分别求出正时间函数和负时间函数的傅里叶变换。原函数的傅里叶变换就等于这两个变换之和。这样，如果令：

$$f^+(t) = f(t) \qquad (t > 0)$$
$$f^-(t) = f(t) \qquad (t < 0)$$

则：

$$f(t) = f^+(t) + f^-(t)$$

和

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \mathscr{F}\{f^+(t)\} + \mathscr{F}\{f^-(t)\}$$
$$= \mathscr{L}\{f^+(t)\}_{s=j\omega} + \mathscr{L}\{f^-(-t)\}_{s=-j\omega} \tag{17.21}$$

利用式(17.21)需要求 $e^{-a|t|}$ 的傅里叶变换。对于原函数，正、负时间函数为：

$$f^+(t) = e^{-at} \text{和} f^-(t) = e^{at}$$

则：

$$\mathscr{L}\{f^+(t)\} = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathscr{L}\{f^-(-t)\} = \frac{1}{s+a}$$

因此，由式(17.21)：

$$\mathscr{F}\{e^{-a|t|}\} = \left.\frac{1}{s+a}\right|_{s=j\omega} + \left.\frac{1}{s+a}\right|_{s=-j\omega}$$
$$= \frac{1}{j\omega + a} + \frac{1}{-j\omega + a}$$
$$= \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

如果 $f(t)$ 为偶函数，式(17.21)变为：

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} + \mathscr{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega} \tag{17.22}$$

如果 $f(t)$ 为奇函数，式(17.21)变为：

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} - \mathscr{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega} \tag{17.23}$$

练习题

17.3 求下列各函数的傅里叶变换。其中 a 为一个正实数。

a) $f(t)=0$ ，$t<0$

$f(t)=e^{-at}\sin\omega_0 t$ ，$t\geqslant 0$

b) $f(t)=0$ ，$t>0$

$f(t)=-te^{at}$ ，$t\leqslant 0$

c) $f(t)=te^{-at}$ ，$t\geqslant 0$

$f(t)=te^{at}$ ，$t\leqslant 0$

答：(a) $\dfrac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$，(b) $\dfrac{1}{(a-j\omega)^2}$，(c) $\dfrac{-j4a\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$。

17.4 极限情况下的傅里叶变换

正如在 17.2 节中指出的，几个实用函数的傅里叶变换必须用极限过程来定义。现在看看如何求这类函数的傅里叶变换。

17.4.1 符号函数的傅里叶变换

在式(17.18)中已经证明，常数 A 的傅里叶变换为 $2\pi A\delta(\omega)$。下一个感兴趣的函数是符号函数，当 $t>0$ 时，函数定义为 $+1$；而当 $t<0$ 时，函数定义为 -1。将符号函数表示为 $\mathrm{sgn}(t)$，$\mathrm{sgn}(t)$ 可以用单位阶跃函数表示，或：

$$\mathrm{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \tag{17.24}$$

图 17.6 给出了符号函数的图形。

为求符号函数的傅里叶变换，首先构建一个在极限情况下趋近符号函数的函数：

$$\mathrm{sgn}(t) = \lim_{\epsilon\to 0}[e^{-\epsilon t}u(t) - e^{\epsilon t}u(-t)],\epsilon > 0 \tag{17.25}$$

方括号内的函数如图 17.7 所示，因为傅里叶积分收敛，所以它的傅里叶变换存在。因为 $f(t)$ 是一个奇函数，可以用式(17.23)求它的傅里叶变换：

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \left.\frac{1}{s+\epsilon}\right|_{s=j\omega} - \left.\frac{1}{s+\epsilon}\right|_{s=-j\omega}$$

$$= \frac{1}{j\omega + \varepsilon} - \frac{1}{-j\omega + \varepsilon}$$

$$= \frac{-2j\omega}{\omega^2 + \varepsilon^2} \tag{17.26}$$

当 $\varepsilon \to 0, f(t) \to \mathrm{sgn}(t), \mathscr{F}\{f(t)\} \to 2/j\omega$。因此：

$$\mathscr{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega} \tag{17.27}$$

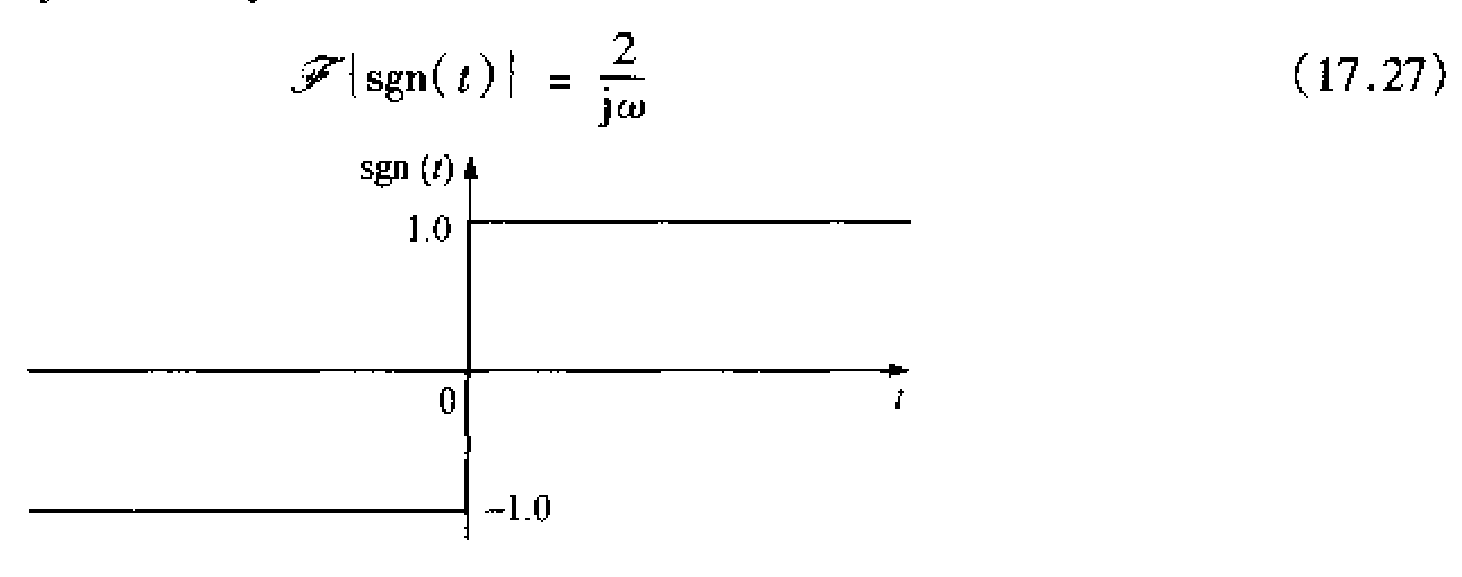


图 17.6 符号函数

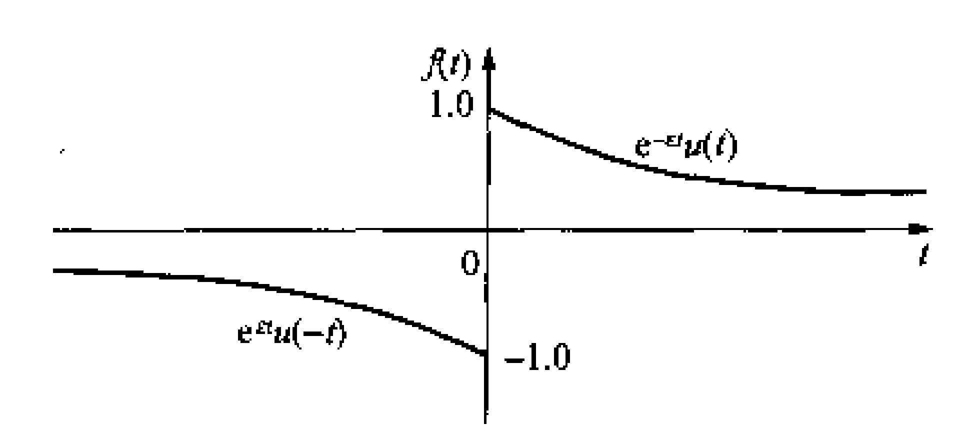


图 17.7 ε 趋于零时，逼近 sgn(t) 的函数

17.4.2 单位阶跃函数的傅里叶变换

可以用式(17.18)和式(17.27)求单位阶跃函数的傅里叶变换。首先将单位阶跃函数表示为：

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \tag{17.28}$$

则可以求出它的傅里叶变换：

$$\mathscr{F}\{u(t)\} = \mathscr{F}\{\frac{1}{2}\} + \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\right\}$$

$$= \pi\delta(\omega)\frac{1}{j\omega} \tag{17.29}$$

17.4.3 余弦函数的傅里叶变换

为求 $\cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换，由式(17.9)的逆变换积分可知，如果：

$$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{17.30}$$

则：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[2\pi\delta(\omega - \omega_0)]e^{j\omega t}d\omega \tag{17.31}$$

利用脉冲函数的筛选特性，可以将式(17.31)写成：

$$f(t) = e^{j\omega_0 t} \tag{17.32}$$

表 17.1 基本函数的傅里叶变换

类 型	$f(t)$	$F(\omega)$
脉冲	$\delta(t)$	1
常数	A	$2\pi A\delta(\omega)$
符号	$\mathrm{sgn}(t)$	$2/j\omega$
阶跃	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+1/j\omega$
正时间指数	$e^{-at}u(t)$	$1/(a+j\omega),\ a>0$
负时间指数	$e^{at}u(-t)$	$1/(a-j\omega),\ a>0$
正、负时间指数	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$2a/(a^2+\omega^2), a>0$
复指数	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
余弦	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
正弦	$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

则由式(17.30)和式(17.32),

$$\mathscr{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{17.33}$$

现在用式(17.33)求 $\cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换,因为:

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2} \tag{17.34}$$

因此:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{\cos\omega_0 t\} &= \frac{1}{2}(\mathscr{F}\{e^{j\omega_0 t}\}+\mathscr{F}\{e^{-j\omega_0 t}\})\\ &= \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)]\\ &= \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)\end{aligned} \tag{17.35}$$

$\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换求法与之相同,这里将它留作练习题 17.4。表 17.1 总结了一些重要基本函数的傅里叶变换。

利用傅里叶变换的性质,可以根据非周期函数的频域特性更加方便地描述其时域特性。下面介绍傅里叶变换的一些数学性质。

练习题

17.4 求 $\mathscr{F}\{\sin\omega_0 t\}$。

答: $j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$。

17.5 一些数学性质

介绍的第一个数学性质是: $F(\omega)$是一个复变量,它可以用直角坐标和极坐标的形式表示。由积分定义:

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega t - j\sin\omega t)dt\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t - \mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t \tag{17.36}$$

现在令：

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t \tag{17.37}$$

$$B(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t \tag{17.38}$$

这样，在式(17.36)中利用式(17.37)和式(17.38)的定义式，得到：

$$F(\omega) = A(\omega) + \mathrm{j}B(\omega) = |F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\omega)} \tag{17.39}$$

下面有关 $F(\omega)$的结论是成立的：

1. $F(\omega)$的实部——即，$A(\omega)$是 ω 的偶函数，换言之，$A(\omega) = A(-\omega)$。
2. $F(\omega)$的虚部——即，$B(\omega)$是 ω 的奇函数，换言之，$B(\omega) = -B(-\omega)$。
3. $F(\omega)$的大小——即，$\sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$是 ω 的偶函数。
4. $F(\omega)$的相位角——即，$\theta(\omega) = \arctan B(\omega)/A(\omega)$是 ω 的奇函数。
5. 将 ω 用 $-\omega$ 替换得到$F(\omega)$的共轭，换言之，$F(-\omega) = F^*(\omega)$。

因此，如果 $f(t)$为偶函数，则 $F(\omega)$是实数；如果$f(t)$为奇函数，则 $F(\omega)$是虚数：

$$A(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t \tag{17.40}$$

和

$$B(\omega) = 0 \tag{17.41}$$

如果$f(t)$是奇函数：

$$A(\omega) = 0 \tag{17.42}$$

和

$$B(\omega) = -2\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t \tag{17.43}$$

把式(17.40)～(17.43)的推导留给读者，见习题 17.7 和 17.8。

如果 $f(t)$是偶函数，则它的傅里叶变换为偶函数，如果 $f(t)$是奇函数，则它的傅里叶变换为奇函数。此外，如果 $f(t)$是偶函数，由反傅里叶积分：

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)(\cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega + 0 \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{17.44}$$

比较式(17.44)和式(17.40)。注意：除了一个因子 $1/2\pi$ 外，两个式子的形式相同。因此，如果 $f(t)$是偶函数，则 $A(\omega)$和 $f(t)$的波形可以互换。例如，时域矩形脉冲的频谱为$(\sin\omega)/\omega$的形式。特别需要说明的是，式(17.11)表示了图 17.1 所示电压脉冲的傅里叶变换。因此，频域的矩形脉冲一定由形式为$(\sin t)/t$ 的时域函数产生。通过求图 17.8 所示频谱对应的时域函

数 $f(t)$,可以对这个必要条件进行说明。由式(17.44):

$$f(t)=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\omega_0/2}M\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{2M}{2\pi}\left(\frac{\sin\omega t}{t}\right)\Bigg|_0^{\omega_0/2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(M\frac{\sin\omega_0 t/2}{t/2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(M\omega_0\frac{\sin\omega_0 t/2}{\omega_0 t/2}\right) \tag{17.45}$$

图 17.8 矩形频谱

在引入帕塞瓦尔定理之后,再详细讨论时域矩形脉冲的频谱与$(\sin t)/t$ 的矩形频谱的关系。

练习题

17.5 如果 $f(t)$是 t 的实函数,证明其反积分函数为:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(\omega)\cos\omega t-B(\omega)\sin\omega t]\mathrm{d}\omega$$

答:求导。

17.6 如果 $f(t)$是实函数,且是 t 的奇函数,证明其反积分函数为:

$$f(t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

答:求导。

17.6 运算变换

与拉普拉斯变换一样,可以将傅里叶变换分成函数变换和运算变换两种。到目前为止,已经讨论了函数变换,现在讨论一些重要的运算变换。关于拉普拉斯变换,这些运算变换与 12 章中讨论的相似。因此,证明过程留给读者,见习题 17.9 ~ 17.16。

17.6.1 乘以一个常数

由积分定义式,如果:

$$\mathscr{F}\{f(t)\}=F(\omega)$$

则:

$$\mathscr{F}\{Kf(t)\}=KF(\omega) \tag{17.46}$$

这样,$f(t)$乘以一个常数对应于 $F(\omega)$乘以相同的常数。

17.6.2 加法(减法)

时域的加法(减法)对应于频域的加法(减法)。如果:

$$\mathscr{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$$
$$\mathscr{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$$
$$\mathscr{F}\{f_3(t)\} = F_3(\omega)$$

则：

$$\mathscr{F}\{f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)\} = F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega) \tag{17.47}$$

上式是将时域函数的代数和代入到积分定义式得到的。

17.6.3 微分

$f(t)$的一阶导数的傅里叶变换为：

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = \mathrm{j}\omega F(\omega) \tag{17.48}$$

$f(t)$的 n 阶导数的傅里叶变换为：

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\} = (\mathrm{j}\omega)^n F(\omega) \tag{17.49}$$

当 $f(t)$在 $\pm\infty$处等于零时，式(17.48)和式(17.49)成立。

17.6.4 积分

如果：

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$$

则：

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = \frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega} \tag{17.50}$$

当：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

时，式(17.50)成立。

17.6.5 尺度变换

在尺度上，时间和频率互为倒数。因此，当时间扩展，频率则压缩(反之亦然)，正如下面的函数变换所反映的：

$$\mathscr{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad , a > 0 \tag{17.51}$$

应当注意的是，当 $0 < \alpha < 0.1$ 时，时间扩展，而当 $\alpha > 0.1$ 时，时间压缩。

17.6.6 时域变换

时域函数变换的结果改变函数的相位谱，而振幅谱保持不变。即：

$$\mathscr{F}\{f(t-a)\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}a\omega}F(\omega) \tag{17.52}$$

如果式(17.52)中的 a 是正数，则该时间函数延迟，如果 a 是负数，该时间函数先行。

17.6.7 频域变换

频域变换对应于在时域将函数乘以一个复指数：

$$\mathscr{F}\{e^{j\omega_0 t}f(t)\} = F(\omega - \omega_0) \tag{17.53}$$

17.6.8 调制

振幅调制是改变一个正弦载波振幅的过程。如果调制信号用 $f(t)$ 表示，则调制的载波信号变为 $f(t)\cos\omega_0 t$。该载波信号的振幅谱为 $\pm\omega_0$ 处 $f(t)$ 的振幅谱的一半，即：

$$\mathscr{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0) \tag{17.54}$$

17.6.9 时域卷积

两个时间函数卷积的频谱等于各个时间函数频谱的乘积。换句话说，如果：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\mathrm{d}\lambda$$

则：

$$\mathscr{F}\{y(t)\} = Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{17.55}$$

式(17.55)在傅里叶变换的应用中很重要，因为它表明响应函数的傅里叶变换 $Y(\omega)$ 是输入函数的傅里叶变换 $X(\omega)$ 与系统函数 $H(\omega)$ 的乘积。在 17.7 节再详细讨论这个式子。

17.6.10 频域卷积

两个时间函数频谱的卷积等效于两个函数乘积的频谱。如果：

$$f(t) = f_1(t)f_2(t)$$

则：

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)\mathrm{d}u \tag{17.56}$$

表 17.2 对上述十个运算变换和习题 17.16 中引入的另一个运算变换进行了总结。

表 17.2 运算变换

$f(t)$	$F(\omega)$
$kf(t)$	$kF(\omega)$
$f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)$	$F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega)$
$\mathrm{d}^n f(t)/\mathrm{d}t^n$	$(\mathrm{j}\omega)^n F(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$	$F(\omega)/\mathrm{j}\omega$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), a > 0$
$f(t - a)$	$e^{-\mathrm{j}\omega a}F(\omega)$
$e^{\mathrm{j}\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\mathrm{d}\lambda$	$X(\omega)H(\omega)$
$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)\mathrm{d}u$
$t^n f(t)$	$(\mathrm{j})^n \frac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$

练习题

17.7 若 $f(t)$ 定义如下：

$f(t)=\frac{2A}{\tau}t+A \qquad , -\frac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant 0$

$f(t)=-\frac{2A}{\tau}t+A \qquad , 0\leqslant t\leqslant \frac{\tau}{2}$

$f(t)=0 \qquad$,其他

(a) 求 $f(t)$ 的二阶导数。

(b) 求 $f(t)$ 的二阶导数的傅里叶变换。

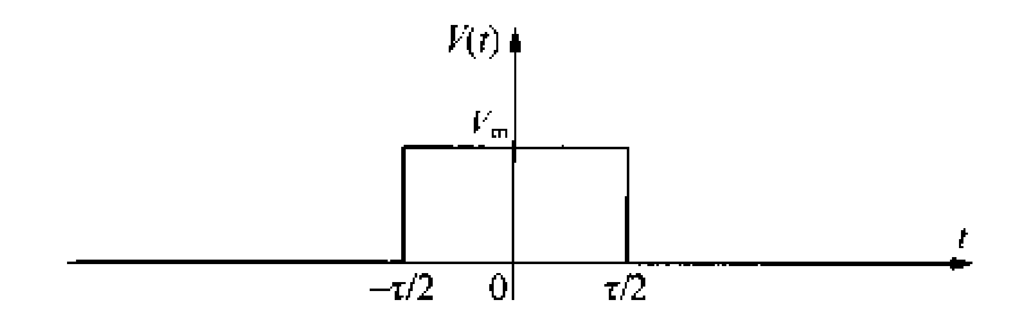
(c) 利用(b)中得到的结果求(a)中函数的傅里叶变换(提示:利用微分运算变换)。

答: (a) $\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{2A}{\tau}\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\frac{4A}{\tau}\delta(t)+\frac{2A}{\tau}\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$, (b) $\frac{4A}{\tau}\left(\cos\frac{\omega\tau}{2}-1\right)$, (c) $\frac{4A}{\omega^2\tau}\left(1-\cos\frac{\omega\tau}{2}\right)$。

17.8 可以将图中所示的矩形脉冲表示成两个阶跃电压的差。即:

$$v(t)=V_m u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-V_m u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\text{V}$$

利用时域运算变换求 $v(t)$ 的傅里叶变换。



答: $V(\omega)=V_m\tau\,\frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}$

17.7 电路应用

对求电路的响应而言,拉普拉斯变换比傅里叶变换的应用更广泛,主要有两方面的原因。其一,在激励函数的宽范围内,拉普拉斯变换积分收敛。第二,它满足初始条件。尽管拉普拉斯变换有上述优势,仍可以利用傅里叶变换求电路的响应。

暂态分析中利用傅里叶变换的基本关系式是式(17.55),它把响应的傅里叶变换 $Y(\omega)$ 与输入函数的傅里叶变换 $X(\omega)$ 及电路的传递函数 $H(\omega)$ 联系起来。注意:$H(\omega)$ 是将 $H(s)$ 中的 s 用 $j\omega$ 替换得到的。

例 17.1 举例说明如何利用傅里叶变换求电路的响应。

例 17.1 利用傅里叶变换,求图 17.9 所示电路中的 $i_o(t)$。电流源 $i_g(t)$ 为符号函数 $20\,\text{sgn}(t)$ A。

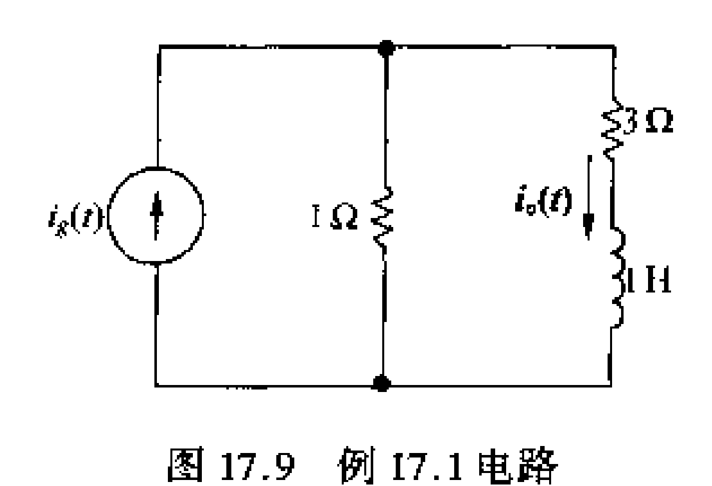


图 17.9 例 17.1 电路

解:

激励源的傅里叶变换为:

$$I_g(\omega) = \mathscr{F}\{20\ \mathrm{sgn}(t)\} = 20\left(\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{40}{\mathrm{j}\omega}$$

电路的传递函数是 I_o 与 I_g 的比值;所以:

$$H(\omega) = \frac{I_o}{I_g} = \frac{1}{4 + \mathrm{j}\omega}$$

$i_o(t)$的傅里叶变换为:

$$I_o(\omega) = I_g(\omega)H(\omega) = \frac{40}{\mathrm{j}\omega(4 + \mathrm{j}\omega)}$$

把 $I_o(\omega)$分解为部分分式的和,得到:

$$I_o(\omega) = \frac{K_1}{\mathrm{j}\omega} + \frac{K_2}{4 + \mathrm{j}\omega}$$

估计 K_1 和 K_2 的值,得到:

$$K_1 = \frac{40}{4} = 10$$

$$K_2 = \frac{40}{-4} = -10$$

因此:

$$I_o(\omega) = \frac{10}{\mathrm{j}\omega} - \frac{10}{4 + \mathrm{j}\omega}$$

响应为:

$$i_o(t) = \mathscr{F}^{-1}[I_o(\omega)] = 5\ \mathrm{sng}(t) - 10\mathrm{e}^{-4t}u(t)$$

响应如图 17.10 所示。根据已知的电路特性,上面得到的解有意义吗? 其答案是肯定的,原因如下:当 $-\infty < t < 0$ 时,电流源供给电路的电流为 -20 A。每个支路中的电阻控制着这 -20 A 的电流在两个支路间如何分配。i_o 支路中的电流是 -20 A 的四分之一。因此,当 $t<0$ 时,i_o 等于 -5。当 $t=0$ 时,电流从 -20 A 向 +20 A 跃变时,i_o 按指数规律趋近于终值 +5 A,其时间常数为$\frac{1}{4}$s。

傅里叶变换的一个重要特性是它能直接求得正弦激励函数的稳态响应。基于函数在所有时间点上都存在的假设,$\cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换存在。例 17.2 对该特性进行了说明。

例 17.2 将例 17.1(图 17.9)的电路的电流源变成一个正弦电流源。

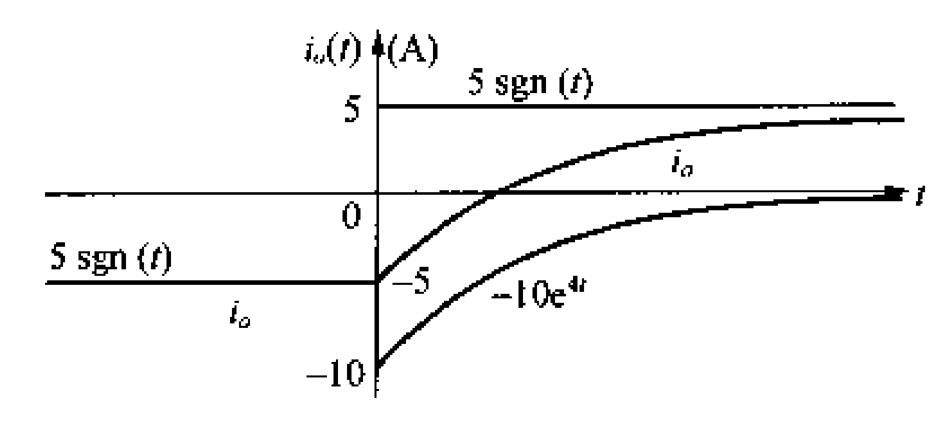


图 17.10　$i_o(t)$与 t 的关系曲线图

其电流表达式为：

$$i_g(t) = 50\cos 3t\ \text{A}$$

利用傅里叶变换方法求 $i_o(t)$。

解：

激励函数的傅里叶变换为：

$$I_g(\omega) = 50\pi[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$$

如前述，电路的传递函数为：

$$H(\omega) = \frac{1}{4 + j\omega}$$

那么，电流响应的傅里叶变换为：

$$I_o(\omega) = 50\pi\frac{\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)}{4 + j\omega}$$

由于脉冲函数的筛选特性，求 $I_o(\omega)$的逆变换的简单方法是利用反积分：

$$\begin{aligned}
i_o(t) &= \mathscr{F}^{-1}\{I_0(\omega)\}\\
&= \frac{50\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)}{4 + j\omega}\right]e^{j\omega t}d\omega\\
&= 25\left(\frac{e^{j3t}}{4 + j3} + \frac{e^{-j3t}}{4 - j3}\right)\\
&= 25\left(\frac{e^{j3t}e^{-j36.87^\circ}}{5} + \frac{e^{-j3t}e^{j36.87^\circ}}{5}\right)\\
&= 5[2\cos(3t - 36.87^\circ)]\\
&= 10\cos(3t - 36.87^\circ)
\end{aligned}$$

请读者证明 $i_o(t)$的解与相量分析得到的解相同。

练习题

17.9　图中所示电路的电流源的电流为 10 sgn(t) A。响应为 1H 电感两端的电压。计算：(a)$I_g(\omega)$，(b)$H(j\omega)$，(c)$V_o(\omega)$，(d)$v_o(t)$，(e)$i_1(0^-)$，(f)$i_1(0^+)$，(g)$i_2(0^-)$，(h)$i_2(0^+)$，(i)$v_o(0^-)$，(j)$v_o(0^+)$。

答：(a) $20/j\omega$，(b)$4j\omega/(5+j\omega)$，(c) $80/(5+j\omega)$，(d) $80e^{-5t}u(t)$，(e) −2A，(f)18 A，(g) 8 A，(h) 8 A，(i) 0 V，(j) 80 V。

17.10　图中所示电路的电源电压为：

$$v_g = e^t u(-t) + u(t)\ \text{V}$$

(a) 利用傅里叶变换求 v_a。

(b) 计算 $v_a(0^-)$，$v_a(0^+)$和 $v_a(\infty)$。

答：(a) $v_a=\frac{1}{4}e^{t}u(-t)-\frac{1}{12}e^{-3t}u(t)+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\mathrm{sng}(t)(\mathrm{V})$，(b) $\frac{1}{4}(\mathrm{V})$，$\frac{1}{4}(\mathrm{V})$，$\frac{1}{3}(\mathrm{V})$。

17.8 帕塞瓦尔定理

帕塞瓦尔定理将时域能量有限函数的能量与函数的傅里叶变换联系起来。若设时域函数 $f(t)$为 1 Ω 电阻两端的电压或电流。那么，与该函数相关的能量为：

$$W_{1\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{17.57}$$

帕塞瓦尔定理表明，在频率域进行积分计算可以得到相同的值，或：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{17.58}$$

因此，与函数 $f(t)$有关的 1 Ω 电阻的能量可以通过计算 $f(t)$的平方在整个时间域的积分得到，或通过计算 $f(t)$的傅里叶变换的平方值在整个频率域的积分并乘以 $1/2\pi$ 得到。当上述两个积分都存在时，帕塞瓦尔定理成立。

对时域能量有限信号在整个时域取平均值，得到它的平均功率为零。因此，比较这种类型的信号，需求助于信号的能量成分。用 1 Ω 电阻计算能量对于比较电压信号和电流信号的能量成分是很方便的。

下面推导式(17.58)。首先，将左边积分的被积函数写成 $f(t)$乘以自身，并把其中一个 $f(t)$表示成反积分的形式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t \tag{17.59}$$

因为关于 ω 积分，可以把 $f(t)$移入到积分内部，并将常数 $1/2\pi$ 提到两个积分的外部，这样式(17.59)变成：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)f(t)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t \tag{17.60}$$

颠倒积分顺序，并将 $F(\omega)$提到关于 t 积分的外部。则：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega \tag{17.61}$$

方括号内的积分值为 $F(-\omega)$，因此，式(17.61)变为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)F(-\omega)\mathrm{d}\omega \tag{17.62}$$

在 17.6 节中，曾提到 $F(-\omega)=F^*(\omega)$。这样 $F(\omega)F(-\omega)$的乘积就是 $F(\omega)$的平方值，式(17.62)与式(17.58)等价。同时还注意到 $|F(\omega)|$是 ω 的偶函数。因此，也可以将式(17.58)写为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{17.63}$$

17.8.1　帕塞瓦尔定理的证明

利用一个特殊例子，可以证明式(17.63)的正确性。如果：

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

相应地，式(17.63)的左边积分变成：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|}dt &= \int_{-\infty}^{0} e^{2at}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2at}dt \\ &= \frac{e^{2at}}{2a}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-2at}}{-2a}\Big|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}\end{aligned} \tag{17.64}$$

$f(t)$的傅里叶变换为：

$$F(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

因此，式(17.63)的右边积分变成：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}d\omega &= \frac{4a^2}{\pi}\frac{1}{2a^2}\left(\frac{\omega}{\omega^2+a^2} + \frac{1}{a}\arctan\frac{\omega}{a}\right)\Big|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{\pi}{2a} - 0 - 0\right) \\ &= \frac{1}{a}\end{aligned} \tag{17.65}$$

注意：式(17.65)得出的结果与式(17.64)的结果相同。

17.8.2　帕塞瓦尔定理的解释

帕塞瓦尔定理给出了傅里叶变换的平方值$|F(\omega)|^2$的物理解释：能量密度(周/赫兹)。为加深理解，将式(17.63)的右边积分写成：

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(2\pi f)|^2 2\pi df = 2\int_{0}^{\infty} |F(2\pi f)|^2 df \tag{17.66}$$

其中$|F(2\pi f)|^2 df$是无限小频带(df)内的能量，1 Ω 电阻消耗的总能量等于所有频带内的$|F(2\pi f)|^2 df$的和(积分)。可以将总能量的一部分与特定的频带联系起来。换句话说，在频带 $\omega_1 \sim \omega_2$ 内，1 Ω 电阻消耗的能量为：

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega \tag{17.67}$$

注意：这里将频域积分表示为：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

而不是：

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

式(17.67)可以写成下面的形式：

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} |F(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega \tag{17.68}$$

图 17.11 给出了式(17.68)的图形解释。

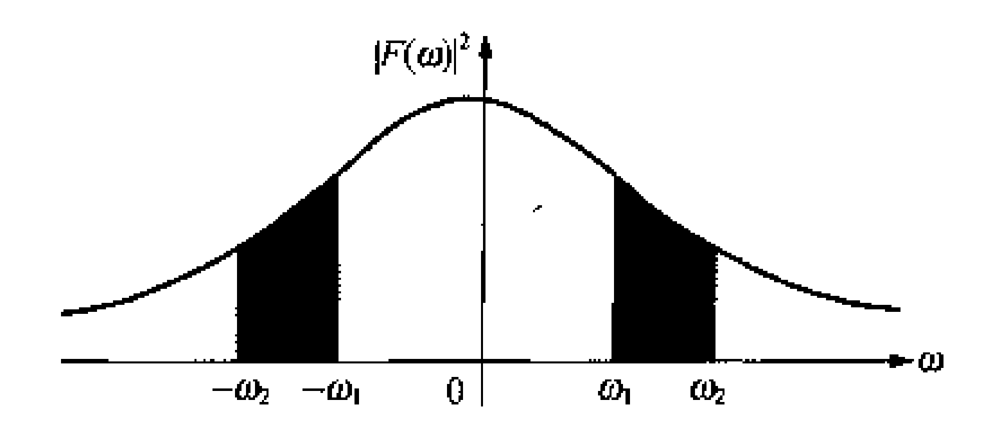


图 17.11 式(17.68)的图形解释。

例 17.3～17.5 给出了几个利用帕塞瓦尔定理计算的例子。

例 17.3 40 Ω 电阻通过的电流为：

$$i = 20e^{-2t}u(t)\ \text{A}$$

在频带 $0 \leqslant \omega \leqslant 2\sqrt{3}$ rad/s 内电阻消耗的能量占总能量的百分比是多少？

解：

40 Ω 电阻消耗的总能量为：

$$\begin{aligned} W_{40\Omega} &= 40\int_0^{\infty} 400e^{-4t}\,dt \\ &= 16000\,\frac{e^{-4t}}{-4}\bigg|_0^{\infty} \\ &= 4000\ \text{J} \end{aligned}$$

用帕塞瓦尔定理验证上面的计算：

$$F(\omega) = \frac{20}{2 + j\omega}$$

因此：

$$|F(\omega)| = \frac{20}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

和

$$\begin{aligned} W_{40\Omega} &= \frac{40}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{400}{4 + \omega^2}\,d\omega \\ &= \frac{16000}{\pi}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{\omega}{2}\bigg|_0^{\infty}\right) \\ &= \frac{8000}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4000\ \text{J} \end{aligned}$$

在频带 $0 \leqslant \omega \leqslant 2\sqrt{3}$ rad/s 内 40 Ω 电阻消耗的能量为：

$$\begin{aligned} W_{40\Omega} &= \frac{40}{\pi}\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{400}{4 + \omega^2}\,d\omega \\ &= \frac{16000}{\pi}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{\omega}{2}\bigg|_0^{2\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{8000}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{8000}{3}\ \text{J} \end{aligned}$$

因此，这个频带内电阻消耗的能量占总能量的百分比为：

$$\eta = \frac{8000/3}{4000} \times 100 = 66.67\%$$

例 17.4　理想带通滤波器的输入电压为：

$$v(t) = 120e^{-24t}u(t)\ \mathrm{V}$$

该滤波器允许频带 24～48 rad/s 内的频率无损耗地全部通过，而将频带外的其他频率都滤掉。

(a) 画出滤波器输入电压的功率谱 $|V(\omega)|^2$。

(b) 画出滤波器输出电压的功率谱 $|V_o(\omega)|^2$。

(c) 输出端 1 Ω 电阻消耗的能量占输入端 1 Ω 电阻消耗的能量的百分比是多少？

解：

(a) 滤波器输入电压的傅里叶变换为：

$$V(\omega) = \frac{120}{24 + j\omega}$$

因此：

$$|V(\omega)|^2 = \frac{14400}{576 + \omega^2}$$

图 17.12 示出了 $|V(\omega)|^2$ 与 ω 的关系曲线。

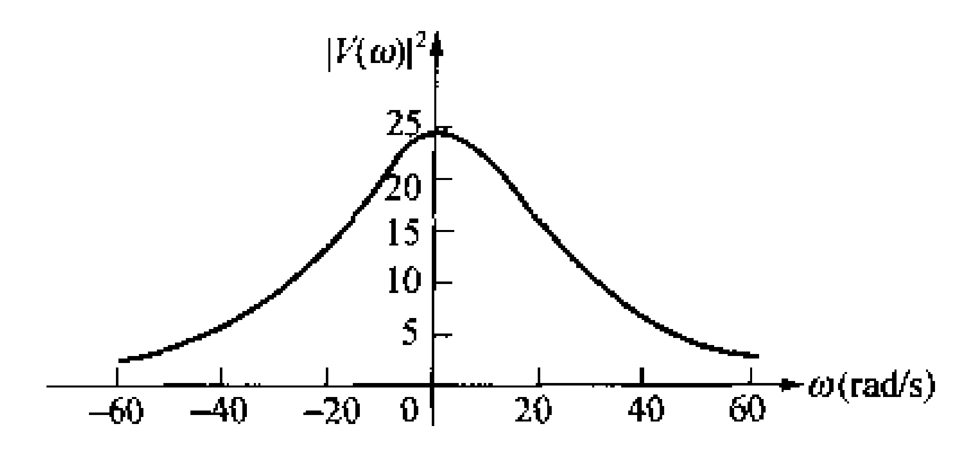


图 17.12　例 17.4 的 $|V(\omega)|^2$ 与 ω 的关系曲线

(b) 理想带通滤波器将通带外的所有频率滤掉，因此，$|V_o(\omega)|^2$ 与 ω 的关系曲线如图 17.13 所示。

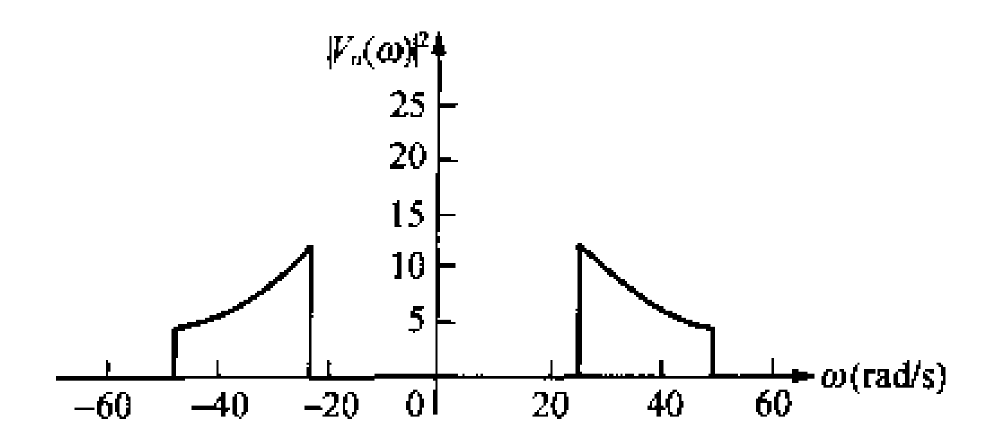


图 17.13　例 17.4 的 $|V_o(\omega)|^2$ 与 ω 的关系曲线

(c) 滤波器输入端 1 Ω 电阻消耗的总能量是：

$$W_i = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{14400}{576 + \omega^2}d\omega = \frac{14400}{\pi}\left(\frac{1}{24}\arctan\frac{\omega}{24}\Big|_0^\infty\right)$$

$$= \frac{600}{\pi}\frac{\pi}{2} = 300\ (\mathrm{J})$$

滤波器输出端 1 Ω 电阻消耗的总能量是：

$$W_o = \frac{1}{\pi}\int_{24}^{48}\frac{14400}{576+\omega^2}\mathrm{d}\omega = \frac{600}{\pi}\arctan\frac{\omega}{24}\bigg|_{24}^{48}$$

$$= \frac{600}{\pi}(\arctan 2 - \arctan 1) = \frac{600}{\pi}\left(\frac{\pi}{2.84} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 61.45\ \mathrm{J}$$

输出端能量占输入端能量的百分比为：

$$\eta = \frac{61.45}{300}\times 100 = 20.48\%$$

例 17.5　根据帕塞瓦尔定理，即使不知道输出信号 $v_o(t)$ 的时域表达式，也能计算出滤波器输出端的能量。图 17.14 中低通 *RC* 电路的输入电压为：

$$v_i(t) = 15\mathrm{e}^{-5t}u(t)\ \mathrm{V}$$

(a) 输出端 1 Ω 电阻消耗的能量占输入端电阻消耗能量的百分比？

(b) 在频带 $0 \leqslant \omega \leqslant 10$ rad/s 内 1 Ω 电阻消耗的能量占总能量的百分比？

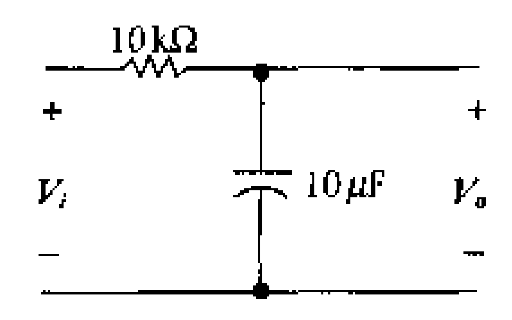


图 17.14　例 17.5 的低通 *RC* 滤波器

解：

(a) 滤波器输入端 1 Ω 电阻消耗的能量为：

$$W_i = \int_0^{\infty}(15\mathrm{e}^{-5t})^2\mathrm{d}t = 225\frac{\mathrm{e}^{-10t}}{-10}\bigg|_0^{\infty} = 22.5\ \mathrm{J}$$

输出电压的傅里叶变换为：

$$V_o(\omega) = V_i(\omega)H(\omega)$$

其中：

$$V_i(\omega) = \frac{15}{5+\mathrm{j}\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{1/RC+\mathrm{j}\omega} = \frac{10}{10+\mathrm{j}\omega}$$

因此：

$$V_o(\omega) = \frac{150}{(5+\mathrm{j}\omega)(10+\mathrm{j}\omega)}$$

$$|V_o(\omega)|^2 = \frac{22500}{(25+\omega^2)(100+\omega^2)}$$

滤波器输出端 1 Ω 电阻消耗的能量为：

$$W_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{22500}{(25+\omega^2)(100+\omega^2)}\mathrm{d}\omega$$

将被积函数写成部分分式之和的形式，很容易估计出该积分的值：

$$\frac{22500}{(25+\omega^2)(100+\omega^2)}=\frac{300}{25+\omega^2}-\frac{300}{100+\omega^2}$$

则：

$$W_o=\frac{300}{\pi}\left\{\int_0^\infty\frac{d\omega}{25+\omega^2}-\int_0^\infty\frac{d\omega}{100+\omega^2}\right\}$$
$$=\frac{300}{\pi}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=15\ \text{J}$$

因此，输出端 1 Ω 电阻消耗的能量占输入端 1 Ω 电阻消耗能量的 66.67%，即：

$$\eta=\frac{15}{22.5}(100)=66.67\%$$

(b) 在频带 $0\leqslant\omega\leqslant10$ rad/s 内，输出端的能量为：

$$W_o'=\frac{300}{\pi}\left\{\int_0^{10}\frac{d\omega}{25+\omega^2}-\int_0^{10}\frac{d\omega}{100+\omega^2}\right\}$$
$$=\frac{300}{\pi}\left(\frac{1}{5}\arctan\frac{10}{5}-\frac{1}{10}\arctan\frac{10}{10}\right)=\frac{30}{\pi}\left(\frac{2\pi}{2.84}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=13.64\ \text{J}$$

输出端 1 Ω 电阻消耗的总能量为 15 J，因此，频带 0 ~ 10 rad/s 内 1 Ω 电阻消耗的能量占输出端总能量的百分比为 90.97%。

17.8.3 矩形电压脉冲包含的能量

通过计算矩形电压脉冲的能量得到了帕塞瓦尔定理。在 17.1 节，求得的电压脉冲的傅里叶变换为：

$$V(\omega)=V_m\tau\frac{\sin\omega\tau/2}{\omega\tau/2}\tag{17.69}$$

为有助于得出结论，重画电压脉冲和它的傅里叶变换如图 17.15(a)和(b)所示。该图显示，随着电压脉冲(τ)的宽度逐渐变窄，振幅谱的主要部分($-2\pi/\tau$ 到 $2\pi/\tau$ 频谱)扩展到更宽的频率范围。这一结果与前面尺度改变的运算变换的结论一致。换句话说，当时间压缩时，频率被展宽，反之亦然。若要不失真地传输单个矩形脉冲，系统的带宽至少要足以容纳幅度谱的主要部分。截止频率应该至少为 $2\pi/\tau$ rad/s，或者为 $1/\tau$ Hz。

可以用帕塞瓦尔定理计算频带 $0\leqslant\omega\leqslant2\pi/\tau$ rad/s 内 $v(t)$ 的总能量。由式(17.69)：

$$W=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi/\tau}V_m^2\tau^2\frac{\sin^2\omega\tau/2}{(\omega\tau/2)^2}d\omega\tag{17.70}$$

为计算式(17.70)的积分值，令：

$$x=\frac{\omega\tau}{2}\tag{17.71}$$

注意：

$$dx=\frac{\tau}{2}d\omega\tag{17.72}$$

和

$$x=\pi\quad，当\ \omega=2\pi/\tau\tag{17.73}$$

如果将式(17.71) ~ (17.73)代入式(17.70)，则式(17 .70)变为：

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx \tag{17.74}$$

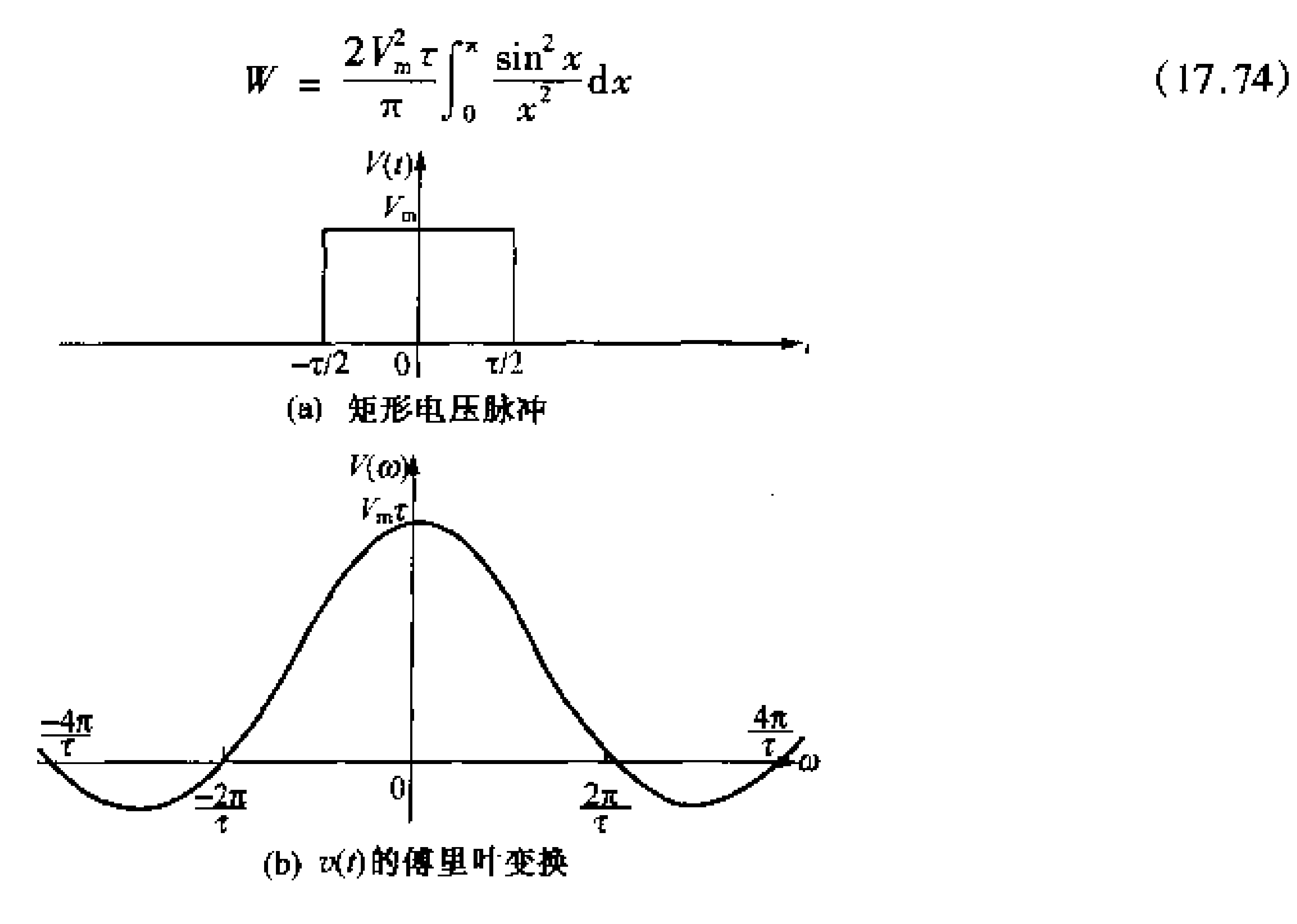


图 17.15 矩形电压脉冲及其傅里叶变换

对式(17.74)中的积分进行分部积分。如果令:

$$u = \sin^2 x \tag{17.75}$$

$$dv = \frac{dx}{x^2} \tag{17.76}$$

则:

$$du = 2\sin x\cos x\ dx = \sin 2x\ dx \tag{17.77}$$

和

$$v = -\frac{1}{x} \tag{17.78}$$

因此:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = -\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{x}\sin 2x\ dx$$

$$= 0 + \int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{x}dx \tag{17.79}$$

将式(17.79)代入式(17.74):

$$W = \frac{4V_m^2\tau}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{2x}dx \tag{17.80}$$

为了估计式(17.80)的积分,必须首先把它表示成 $\sin y/y$ 的形式。令 $y = 2x$,并注意到 $dy = 2dx$,当 $x = \pi$ 时,$y = 2\pi$。这样,式(17.80)变为:

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin y}{y}dy \tag{17.81}$$

式(17.81)的积分值可以在正弦积分表中得到。该值为 1.41815,因此:

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi}(1.41815) \tag{17.82}$$

电压为 $v(t)$时,1 Ω 电阻消耗的能量可以通过时域积分,或者令上限为无限大对式(17.81)的

估计得出。这两种情况下,总能量为:

$$W_t = V_m^2\tau \tag{17.83}$$

频带 $0 \sim 2\pi/\tau$ rad/s 内的总能量为:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{W}{W_t} \\ &= \frac{2V_m^2\tau(1.41815)}{\pi(V_m^2\tau)} \\ &= 0.9028\end{aligned} \tag{17.84}$$

因此,$v(t)$的能量中近 90% 包含在振幅谱的主要部分。

练习题

17.11　一个 50 Ω 电阻的两端电压为:

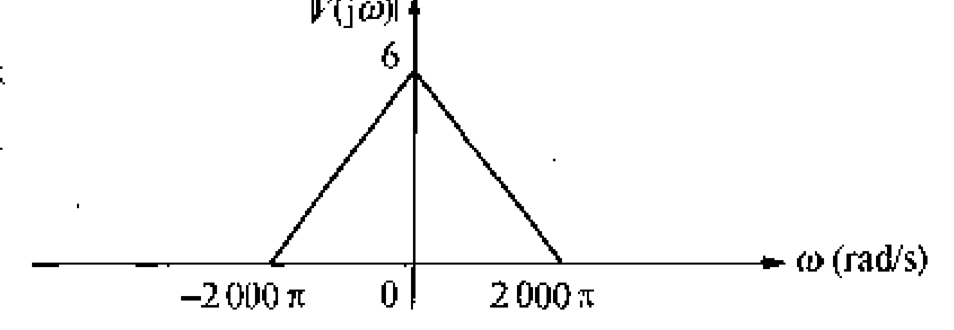
$$v = 4te^{-t}u(t)\ \text{V}$$

频带 $0 \leqslant \omega \leqslant \sqrt{3}$ rad/s 内该电阻消耗的能量占总能量的百分比是多少?

答: 94.23%。

17.12　已知电压 $v(t)$的傅里叶变换如图所示。将其作用于一个 6 kΩ 电阻的两端,计算该电阻消耗的总能量。

答: 4 J。



小结

- 傅里叶变换给出了一个非周期时域函数的频域描述。根据时域信号的类型,可以用下列三种方法之一求信号的傅里叶变换:
  - 如果时域信号是一个有限延迟脉冲,则可以利用积分定义求其傅里叶变换。
  - 如果 $f(t)$的单边拉普拉斯变换存在,且 $F(s)$的所有极点位于 s 平面的左半部分,则可以用 $F(s)$求 $F(\omega)$。
  - 如果 $f(t)$是一个常数、符号函数、阶跃函数或正弦函数,则该函数的傅里叶变换可以通过取极限得到。
- 电路分析中使用的函数傅里叶变换和运算傅里叶变换在表 17.1 和 17.2 中列出。
- 响应信号 $y(t)$的傅里叶变换为:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

其中 $X(\omega)$是输入信号 $x(t)$的傅里叶变换,$H(\omega)$是传递函数 $H(s)$在 $s = j\omega$ 处的值。
- 因为傅里叶变换对正时间函数和负时间函数都适用,所以,傅里叶变换也适合于解决由 $t = -\infty$时开始的事件描述问题。与此相反,单边拉普拉斯适合解决由初始条件和$t > 0$时发生的事件所描述的问题。
- 傅里叶变换的平方值是频域内能量密度(周/赫兹)的量度(帕塞瓦尔定理),因此,傅里叶变换将 $f(t)$包含的总能量的一部分与一个特定频带联系起来。

习题

17.1 利用积分定义求下列函数的傅里叶变换:

(a) $f(t) = A\sin\frac{\pi}{2}t \qquad , -2 \leqslant t \leqslant 2$

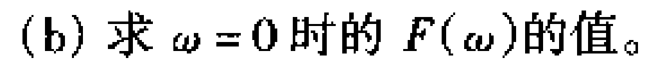
$f(t) = 0 \qquad$,其他

(b) $f(t) = \frac{2A}{\tau}t + A \qquad , -\frac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant 0$

$f(t) = -\frac{2A}{\tau}t + A \qquad , 0 \leqslant t \leqslant \frac{\tau}{2}$

$f(t) = 0 \qquad$,其他

17.2 (a) 求图 P17.2 所示函数的傅里叶变换。



(b) 求 $\omega = 0$ 时的 $F(\omega)$的值。

(c) 若 $A = 2, \tau = 1$,画出$|F(\omega)|$与 ω 的关系曲线图。提示:先求$|F(\omega)|$在 $\omega = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \pm 15$ 点处的值,然后,利用$|F(\omega)|$为 ω 的偶函数的性质。

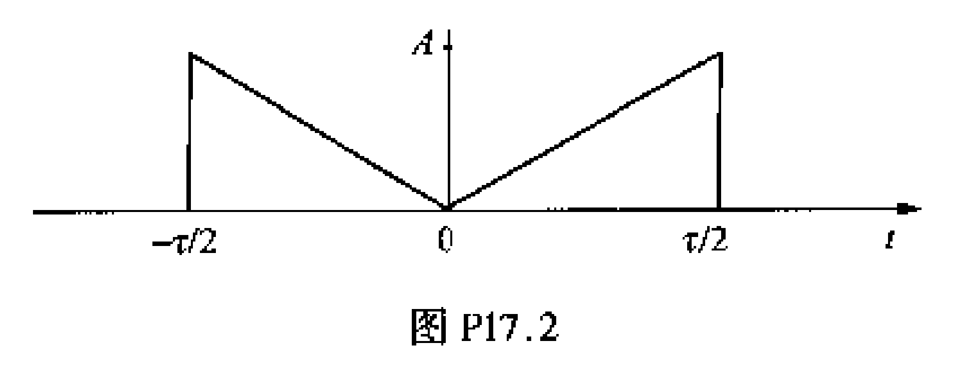


图 P17.2

17.3 $f(t)$的傅里叶变换如图 P17.3 所示。

(a) 求 $f(t)$。

(b) 求 $f(0)$的值。

(c) 当 $A = 2\pi, \omega_o = 2$ rad/s 时,画出 $-10 \leqslant t \leqslant 10$ s 内的 $f(t)$的图形。提示:先求 $f(t)$在 $t = 0, 1, 2, 3, \cdots 10$ s 点处的值,再利用 $f(t)$的偶函数性质。

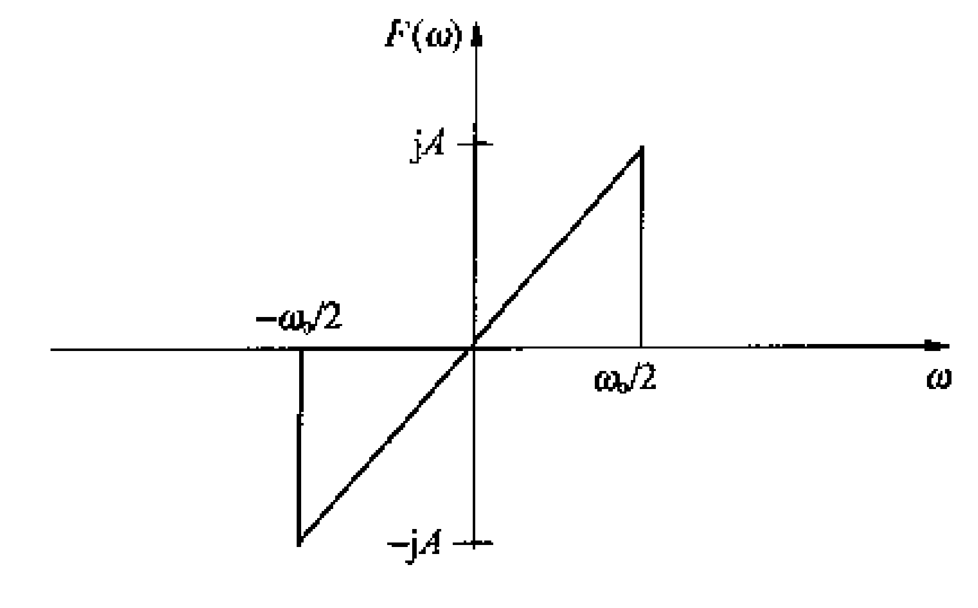


图 P17.3

17.4 求下列函数的傅里叶变换。其中,α 是正实数,$-\infty \leqslant t \leqslant \infty$。

(a) $f(t) = |t|e^{-\alpha|t|}$。

(b) $f(t) = t^3e^{-\alpha|t|}$。

(c) $f(t)=e^{-a|t|}\cos\omega_o t$。

(d) $f(t)=e^{-a|t|}\sin\omega_o t$。

(e) $f(t)=\delta(t-t_0)$。

17.5 利用式(17.9)的反积分证明 $\mathscr{F}^{-1}\{2/j\omega\}=\mathrm{sgn}(t)$。提示:参考练习题 17.6。

17.6 利用近似函数 $f(t)=e^{-\varepsilon|t|}\cos\omega_o t$,求 $\mathscr{F}\{\cos\omega_0 t\}$,其中,ε 是一个正实数。

17.7 如果 $f(t)$ 为偶函数,证明 $A(\omega)=2\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt$, $B(\omega)=0$。

17.8 如果 $f(t)$ 为奇函数,证明 $A(\omega)=0$, $B(\omega)=-2\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt$。

17.9 (a) 证明:$\mathscr{F}\{df(t)/dt\}=j\omega F(\omega)$,其中,$F(\omega)=\mathscr{F}\{f(t)\}$。提示:利用积分定义,使用分部积分法。

(b) 对 $f(t)$ 施以什么限制,能保证(a)中得到的结果正确?

(c) 证明:$\mathscr{F}\{d^n f(t)/dt^n\}=j\omega^n F(\omega)$,其中,$F(\omega)=\mathscr{F}\{f(t)\}$。

17.10 (a) 证明:$\mathscr{F}\{\int_{-\infty}^{t}f(x)dx\}=\dfrac{F(\omega)}{j\omega}$,其中,$F(\omega)=\mathscr{F}\{f(x)\}$。提示:利用积分定义,使用分部积分法。

(b) 对 $f(x)$ 施以什么限制,能保证(a)中得到的结果正确?

(c) 若 $f(x)=e^{-ax}u(x)$,(a)中的运算变换还可以使用吗?说明原因。

17.11 (a) 证明:$\mathscr{F}\{f(at)\}=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$, $a>0$。

(b) 已知 $\alpha>0$ 时,$f(\alpha t)=e^{-\alpha|t|}$,画出当 $\alpha=0.5, 1.0$ 和 2.0 时,$F(\omega)=\mathscr{F}\{f(\alpha t)\}$ 的图形。从所画的图中能否得出这样的结论:信号在时域中压缩等效于在频域中扩展?

17.12 推导下列变换式:

(a) $\mathscr{F}\{f(t-a)\}=e^{-j\omega a}F(\omega)$。

(b) $\mathscr{F}\{e^{j\omega_o t}f(t)\}=F(\omega-\omega_o)$。

(c) $\mathscr{F}\{f(t)\cos\omega_o t\}=\dfrac{1}{2}F(\omega-\omega_o)+\dfrac{1}{2}F(\omega+\omega_o)$。

17.13 已知 $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$。

证明:$Y(\omega)=\mathscr{F}\{y(t)\}=X(\omega)H(\omega)$,其中,$X(\omega)=\mathscr{F}\{x(t)\}$,$H(\omega)=\mathscr{F}\{h(t)\}$。提示:利用积分定义写出:

$$\mathscr{F}\{y(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda\right]e^{-j\omega t}dt$$

然后,颠倒积分次序并改变积分变量,令 $u=t-\lambda$。

17.14 已知 $f(t)=f_1(t)f_2(t)$,证明 $\mathscr{F}(\omega)=(1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)F_2(\omega-u)du$。

提示:首先,利用积分定义将 $F(\omega)$ 表示为:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

第二,利用反积分写出:

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)e^{jut}du$$

第三,把 $f_1(t)$ 的表达式代入到积分定义式中再交换积分次序。

17.15 已知 $f(t)=f_1(t)f_2(t)$,其中:

$$f_1(t) = \cos\omega_o t$$
$$f_2(t) = 1 \qquad -\tau/2 < t < \tau/2$$
$$f_2(t) = 0 \qquad 其他$$

(a) 利用频域卷积求 $F(\omega)$。

(b) 随着 $f_2(t)$宽度的增加,$f(t)$包含更多的 $f_1(t)$循环,那么这时 $F(\omega)$会发生什么变化?

17.16 (a) 证明,$(\mathrm{j})^n\left[\frac{\mathrm{d}^nF(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}\right]=\mathscr{F}\{t^nf(t)\}$。

(c) 利用(a)的结论求下列函数的傅里叶变换。

$\mathscr{F}\{te^{-at}u(t)\}$

$\mathscr{F}\{|t|e^{-a|t|}\}$

$\mathscr{F}\{te^{-a|t|}\}$

P17.17 (a) 用傅里叶变换求图 P17.17 所示电路的 $i_o(t)$。$i_o(t)$的初值为零,电源电压为 $125u(t)$ V。

(b) 画出 $i_o(t)$与 t 的关系曲线。

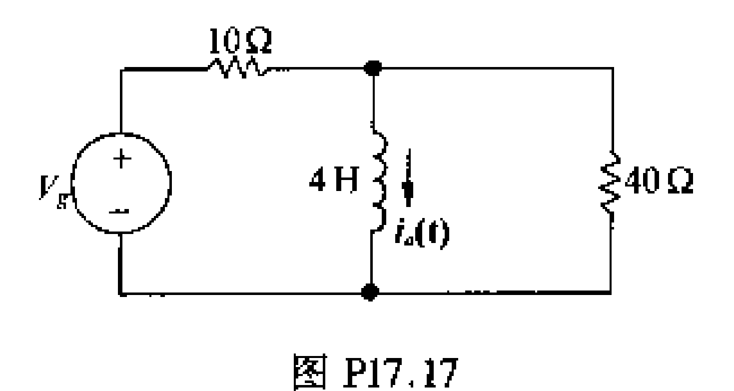


图 P17.17

P17.18 如果将输入电压(v_g)改变为 125 sgn(t),重做习题 17.17。

P17.19 (a) 用傅里叶变换求图 P17.19 所示电路的 $i_o(t)$,其中,$v_g=36$ sgn(t) V。

(b) 根据已知的电路特性,解释所求到的结果是否有意义。

P17.20 将 $i_o(t)$用 $v_o(t)$代替,其余条件不变,重做习题 17.19。

P17.21 (a) 用傅里叶变换求图 P17.21 所示电路的 v_o,其中 $i_g=2$ sgn(t)。

(b) 根据已知的电路特性,求到的结果是否有意义?说明原因。

P17.22 将 v_o 用i_o 代替,其余条件不变,重做习题 17.21。

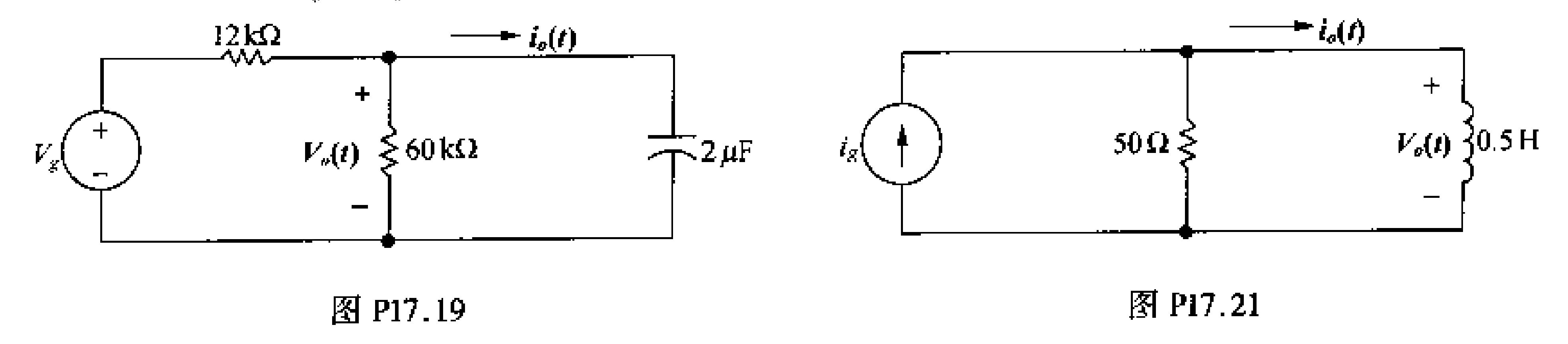


图 P17.19　　图 P17.21

P17.23 将图 P17.23 所示电路的电压源用下式表示:

$$v_g = 3\ \mathrm{sgn}(t)\ \mathrm{V}$$

(a) 求 $v_o(t)$。

(b) $v_o(0^-)$的值是多少?

(c) $v_o(0^+)$的值是多少?

(d) 用拉普拉斯变换方法求 $t>0^+$ 时 $v_o(t)$的值。

(e) (d)中得到的结果与 (a)中得到的 $t>0^+$ 时 $v_o(t)$的值是否一致?

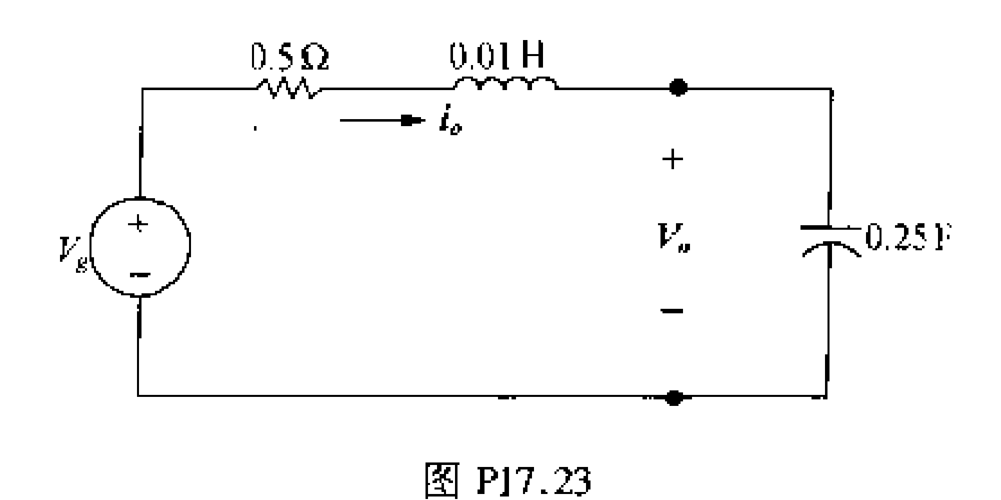


图 P17.23

P17.24 将 $i_o(t)$用 $v_o(t)$代替,其余条件不变,重做习题 17.23。

P17.25 (a) 用傅里叶变换方法求图 P17.25 所示电路的 v_o,其中,v_g 等于 $90e^{-10|t|}$ V。

(b) 求 $v_o(0^-)$。

(c) 求 $v_o(0^+)$。

(d) 求 $i_o(0^+)$。

(e) 用拉普拉斯变换方法求 $t \geqslant 0$ 时的 v_o 值。

(f) (e)中得到的结果与(a)中得到的 $t > 0^+$ 时的 v_o 值是否一致?

P17.26 (a) 用傅里叶变换方法求图 P17.26 所示电路中的 i_o,其中,$v_g = 125 \cos 40000t$ V。

(b) 用相量域分析法求 i_o 的稳态表达式并验证(a)的答案。

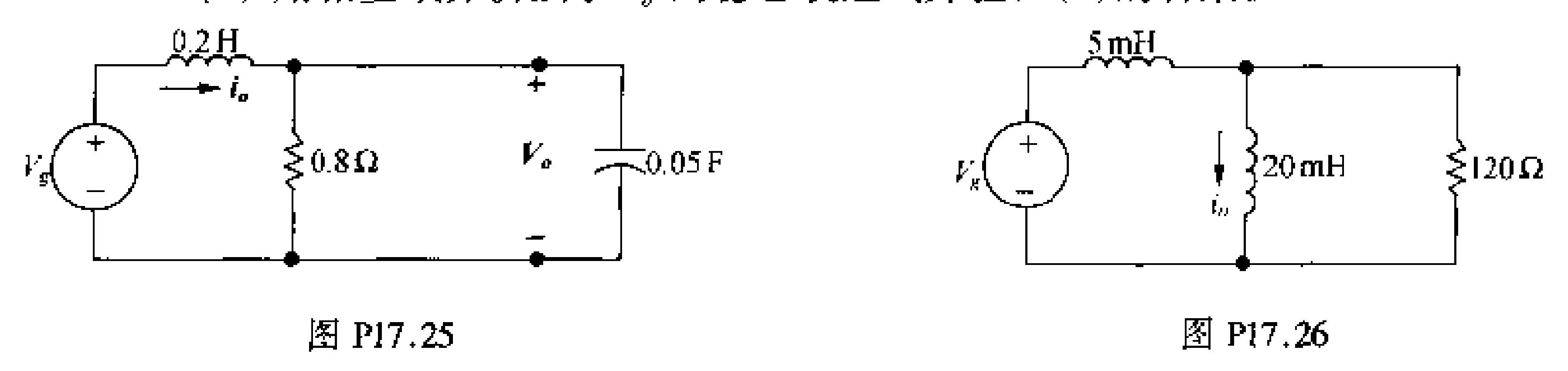


图 P17.25　　　图 P17.26

P17.27 用傅里叶变换方法求图 P17.27 所示电路中的 i_o,其中,$v_g = 300 \cos 5000t$ V。

P17.28 (a) 用傅里叶变换方法求图 P17.28 所示电路的 v_o。其中电源电压为:

$$v_g = 45e^{-500|t|}\ \text{V}$$

(b) 计算 $v_o(0^-)$,$v_o(0^+)$和 $v_o(\infty)$。

(c) 求 $i_L(0^-)$,$i_L(0^+)$,$v_C(0^-)$和 $v_C(0^+)$的值。

(d) 根据已知的电路特性,(b)中得到的结果是否有意义? 说明原因。

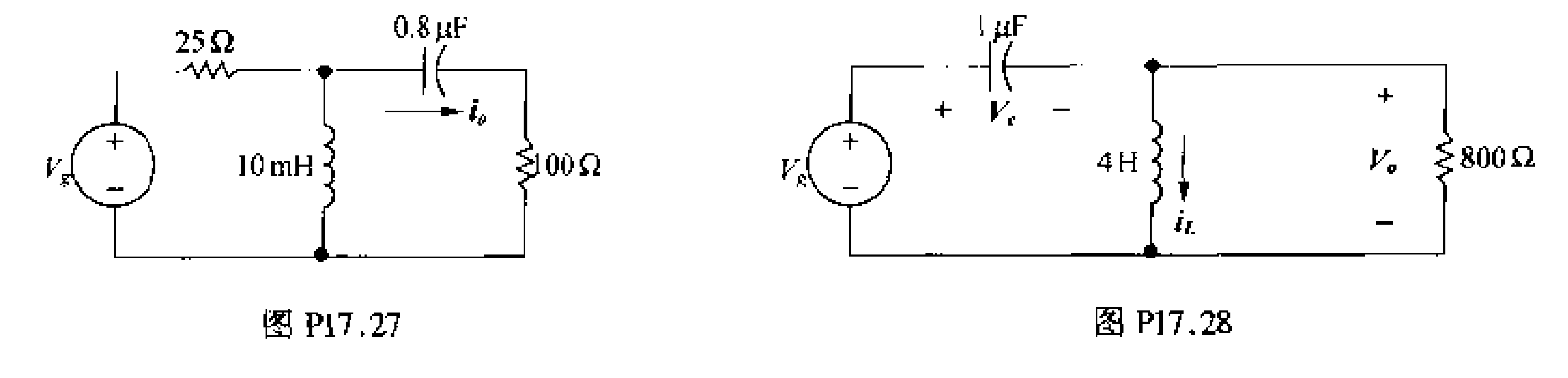


图 P17.27　　　图 P17.28

P17.29 (a) 用傅里叶变换方法求图 P17.29 所示电路中的 i_o,其中:

$$i_g = -45e^{400t}u(-t) + 45e^{-400t}u(t)\ \text{A}$$

(b) 求 $i_L(0^-)$。

(c) 求 $i_L(0^+)$。

(d) 根据已知的电路特性,(b)和(c)中得到的结果是否有意义?说明原因。

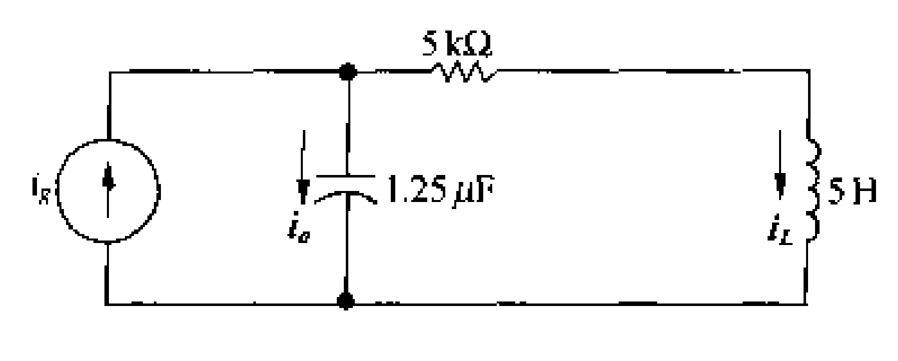


图 P17.29

P17.30 图 P17.30 所示电路的电压源产生的信号为:

$$v_g = 18e^{4t}u(-t) - 12u(t)\ \text{V}$$

(a) 求 $v_o(0^-)$和 $v_o(0^+)$。

(b) 求 $i_L(0^-)$和 $i_o(0^+)$。

(c) 求 v_o。

图 P17.30

P17.31 (a) 用傅里叶变换方法求图 P17.31 所示电路的 v_o,其中:



$$v_g = 36e^{4t}u(-t) - 36e^{-4t}u(t)\ \text{V}$$

(b) 求 $v_o(0^-)$。

(c) 求 $v_o(0^+)$。

17.32 已知图 P17.32 所示系统的输入电压为 $8u(t)$ V 时,其输出电压为:

$$v_o = 60 - 40e^{-5t} + 20e^{-20t}\ \text{V}$$

若 $v_i = 8\ \text{sgn}(t)$ V,输出电压是多少?

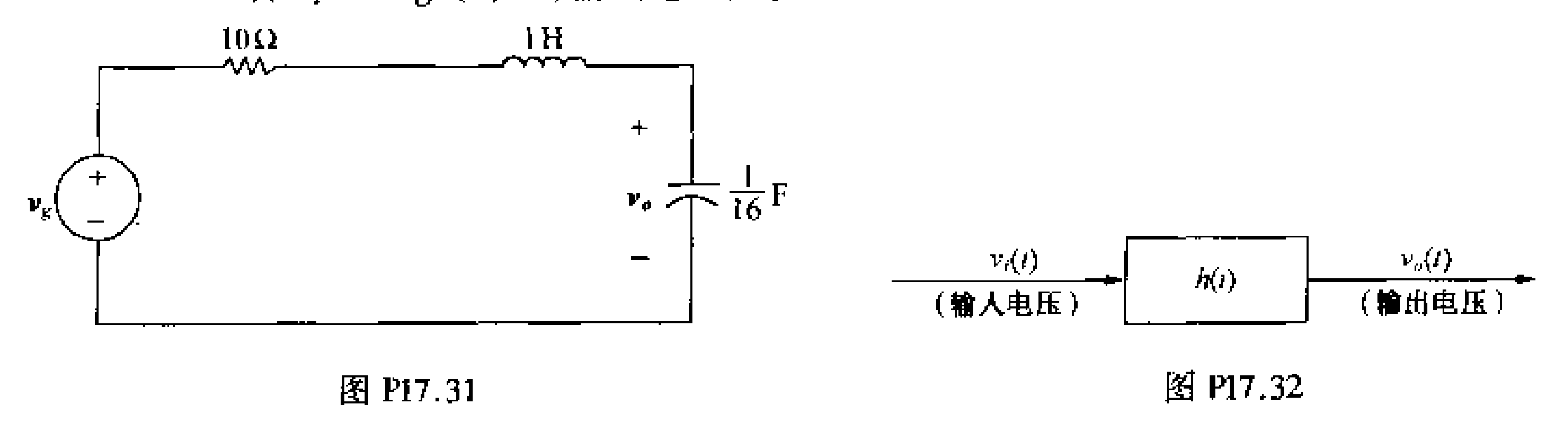


图 P17.31 图 P17.32

17.33 已知:$F(\omega) = e^{\omega}u(-\omega) + e^{-\omega}u(\omega)$。

(a) 求 $f(t)$。

(b) 通过时域积分求 1 Ω 电阻消耗的能量。

(c) 利用频域积分重做(b)。

(d) 求使 $f(t)$在频带 $0 \sim \omega_1$ 内的能量等于总能量的 90% 的 ω_1 值。

17.34 图 P17.34 所示电路的输入电流信号为:

$$i_g = 3e^{-25t}\ \text{A} \quad , t \geq 0^+$$

求频带 0 ~ 10 rad/s 内输出端 1 Ω 电阻消耗的能量占输出端总能量的百分比。

17.35 图 P17.35 所示电路的输入电压为 $v_g = 30e^{-|t|}$ V。

(a) 求 $v_o(t)$。

(b) 画出 $-5\leqslant\omega\leqslant5$ rad/s 的 $|v_g(\omega)|$ 的图形。

(c) 画出 $-5\leqslant\omega\leqslant5$ rad/s 的 $|v_o(\omega)|$ 的图形。

(d) 电压为 v_g 时，计算 1 Ω 电阻消耗的能量。

(e) 电压为 v_o 时，计算 1 Ω 电阻消耗的能量。

(f) 电压为 v_g 时，求频带 $0\leqslant\omega\leqslant2$ rad/s 内输入端 1 Ω 电阻消耗的能量占输入端总能量的百分比。

(g) 电压为 v_o 时，重做(f)。

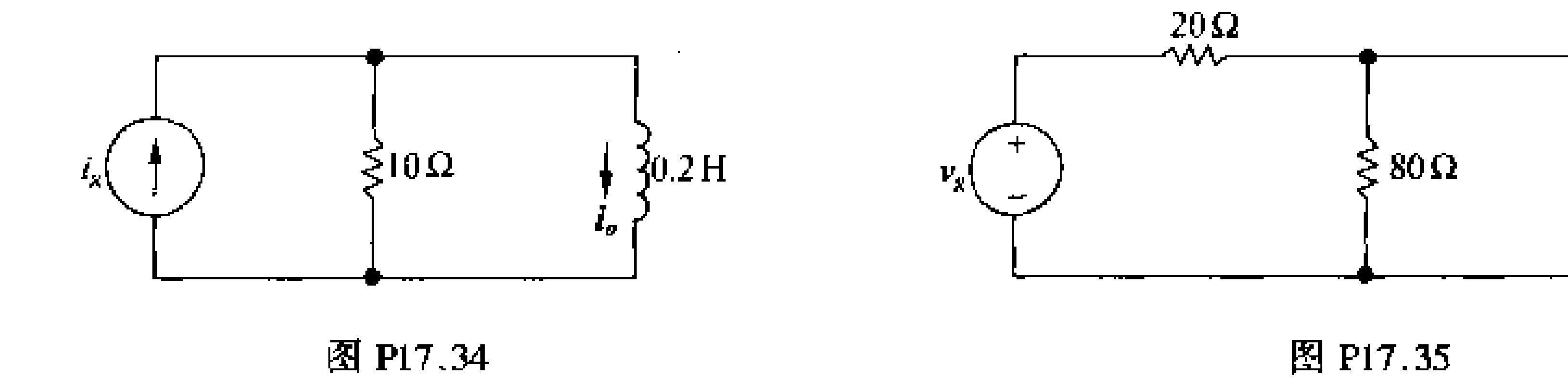


图 P17.34　　　　图 P17.35

17.36　图 P17.36 所示电路的激励电流为：

$$i_g = 12e^{-10t}u(t)\ \text{A}$$

求频带 $0\leqslant\omega\leqslant100$ rad/s 内输出端 1 Ω 电阻消耗的能量占输出端总能量的百分比。

17.37　图 P17.37 所示的低通 RC 滤波器的输入电压的振幅谱为：

$$v_i(\omega) = \sqrt{(10-0.5\omega)(10+0.5\omega)},\ -20\leqslant\omega\leqslant20\ \text{rad/s}$$

$$v_i(\omega) = 0\quad ,\text{其他}$$

(a) 画出 $-20\leqslant\omega\leqslant20$ rad/s 的 $|v_i(\omega)|^2$ 的图形。

(b) 画出 $-20\leqslant\omega\leqslant20$ rad/s 的 $|v_o(\omega)|^2$ 的图形。

(c) 计算滤波器的输入端 1 Ω 电阻消耗的能量。

(d) 计算滤波器的输出端 1 Ω 电阻消耗的能量。

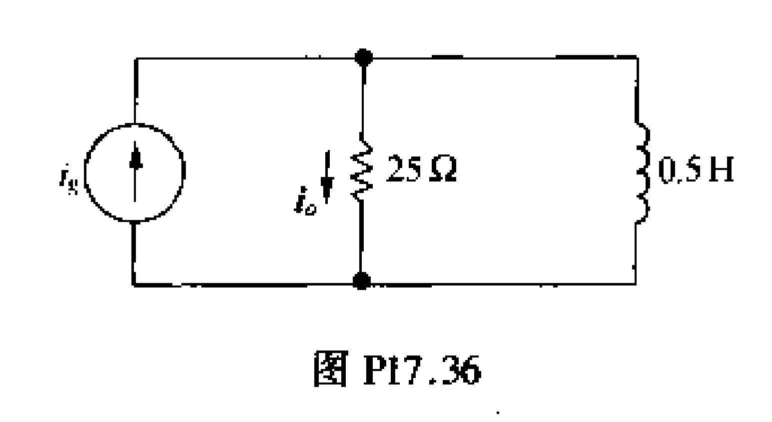


图 P17.36

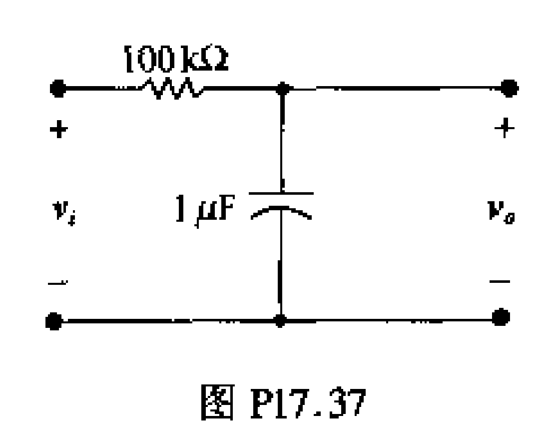


图 P17.37

17.38　图 P17.38 所示的高通 RC 滤波器的输入电压为：

$$v_i(t) = Ae^{-at}u(t)$$

令 α 表示滤波器的角频率，即 $\alpha = 1/RC$。

(a) 若 $\alpha = a$，求频带 $0\leqslant\omega\leqslant\alpha$ 内，滤波器输入信号能量占输入信号总能量的百分比。

(b) 若 $\alpha = \sqrt{3}a$，重做(a)。

(c) 若 $\alpha = a/\sqrt{3}$，重做(a)。

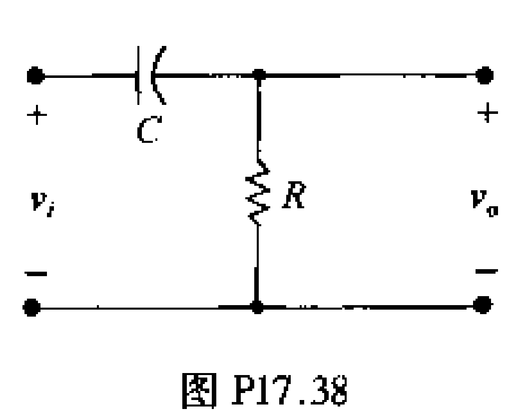


图 P17.38

第 18 章　双端口网络

以前，一般只讨论指定端子的特性。在戴维南和诺顿等效电路中，所进行的分析都是与一个端子相关的计算，在一些电子系统的分析中，有时讨论两对端子的特性也很方便，尤其是信号从一对端子输入，经过系统处理后，从另一对端子输出，对这种系统的分析，讨论两对端子就比较方便，因端子对代表信号的输入点或输出点。因此，常称为系统的端口。本章只限于讨论具有一个输入和一个输出端口的电路。图 18.1 表示了基本的双端口网络框图。这种方框图的使用有几条限制。第一，电路中无储能。第二，电路中不含独立源，但可含受控源。第三，输入和输出同一端口的电流必须相等，即 $i_1 = i'_1$ 和 $i_2 = i'_2$。第四，所有外部与输入端或与输出端连接，而四个端子之间不允许有连接。这些限制条件，使所讨论的问题限制在双端口网络范围内。对系统的双端口网络模型，只讨论四个端子参数（i_1，i_2，v_1 和 v_2），不必计算网络内的电压或电流，在运放电路的分析中强调了端口特性。本章中，通过引入双端口网络参数，将这种方法程序化。

18.1　端口方程

对于一个双端口网络电路，比较感兴趣的是一个端口的电流和电压与另一端的电流和电压间的关系，图 18.1 表明了端口电压的参考极性和电流的参考方向。每个端口参数与另一个端口参数分别对称，即在每个端口处，电流是流入上端子，而每一个端口的电压从下向上是电压升。这种对称性易于使双端口网络的分析一般化，也是双端口网络在相关资料中得到应用的原因。

双端口网络的一般描述方法是在 s 域中进行的。对纯电阻性网络，分析简化为对电阻电路的分析，对正弦稳态问题，可先求出相应的 s 域表达式，然后用 $j\omega$ 代替 s，或直接进行频域分析；电阻电路和正弦稳态响应的分析是一种特殊情况。图 18.2 表示了 s 域变量 I_1，V_1，I_2，V_2 相关的方框图。

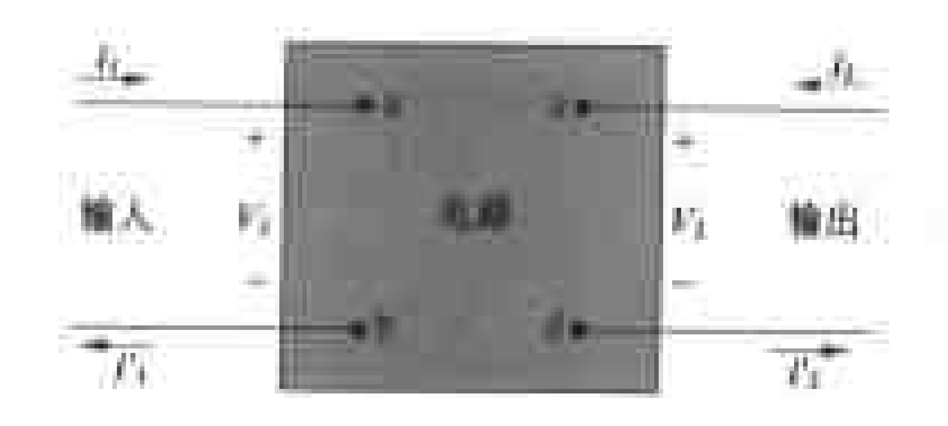


图 18.1　双端口网络方框图

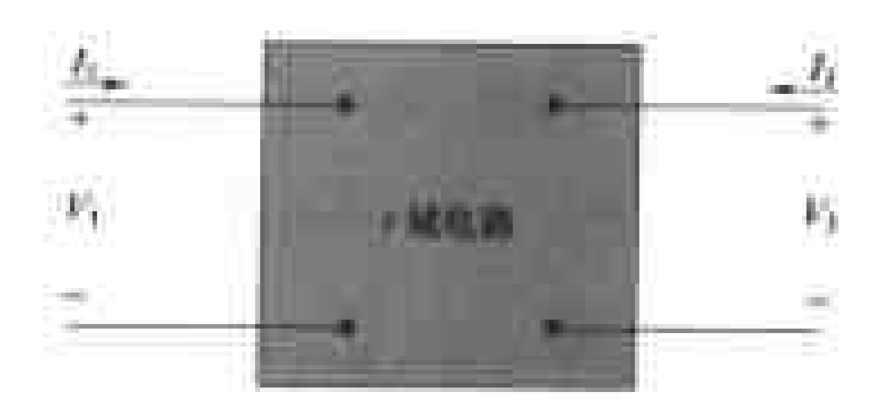


图 18.2　双端口网络 s 域模型

在这四个端口参数当中，只有两个是独立的，因此，对任一电路，一旦确定了其中的两个变量，就可以确定剩余的两个变量。例如，已知 V_1 和 V_2 及方框内的电路，就可以确定 I_1 和 I_2，这样，只用两个联立方程就能描述一个双端口网络。这四个变量的关系可以表示为六种方式：

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$
$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (18.1)$$
$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$$
$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \quad (18.2)$$
$$V_1 = a_{11}V_2 - a_{12}I_2$$
$$I_1 = a_{21}V_2 - a_{22}I_2 \quad (18.3)$$
$$V_2 = b_{11}V_1 - b_{12}I_1$$
$$I_2 = b_{21}V_1 - b_{22}I_1 \quad (18.4)$$
$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$
$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \quad (18.5)$$
$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$
$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \quad (18.6)$$

这六个方程也可以看做三对互为相反关系的方程，第一个方程式(18.1)给出的是输入电压和输出电压的方程，以输入电流和输出电流为变量。第二个方程式(18.2)恰好给出相反关系，即给出的是输入和输出电流关于输入和输出电压的方程。方程式(18.3)和方程式(18.4)也是相反关系，方程式(18.5)和方程式(18.6)也是相反关系。

各方程中右侧电压或电流变量前面的系数称为双端口网络的参数。因此，在使用方程式(18.1)时，其参数即为网络的 z 参数。同样，有 y 参数、a 参数、b 参数、h 参数和 g 参数等等。

18.2　双端口参数

通过计算或实验测试确定任一个双端口网络的参数，计算或测试都是直接根据参数方程进行的。例如，求电路的 z 参数，根据方程式(18.1)得：

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \Omega \quad (18.7)$$

$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \Omega \quad (18.8)$$

$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \Omega \quad (18.9)$$

$$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \Omega \quad (18.10)$$

由上述方程可将 z 参数表述如下：

1. z_{11}：输出端开路时的输入阻抗。
2. z_{12}：输入端开路时的反向转移阻抗。
3. z_{21}：输出端开路时的正向转移阻抗。
4. z_{22}：输入端开路时的输出阻抗。

因此,阻抗参数可通过计算或测试获得。即输出端开路时确定 V_1/I_1 和 V_2/I_1,然后将输入端开路,确定 V_1/I_2 和 V_2/I_2。例 18.1 给出电阻电路 z 参数的确定过程。

例 18.1 电路如图 18.3 所示,求 z 参数。

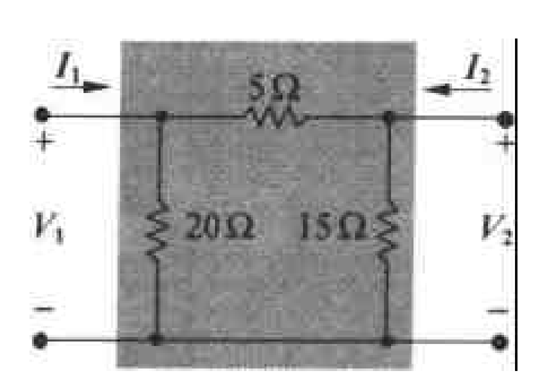


图 18.3 例 18.1 电路

解:

电路是纯电阻性的,所以其 s 域模型也是纯电阻性的。当端口 2 开路时,即 $I_2=0$ 时,从入端看进去的电阻为 20 Ω 并联上 5 Ω 和 15 Ω 的串联。即:

$$z_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}=\frac{(20)(20)}{40}=10\ \Omega$$

当 $I_2=0$ 时,V_2 为:

$$V_2=\frac{V_1}{15+5}(15)=0.75V_1$$

因此:

$$z_{21}=\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}=\frac{0.75V_1}{V_1/10}=7.5\ \Omega$$

当 $I_1=0$ 时,由端口 2 看进去的电阻是 15 Ω 与 5 Ω 和 20 Ω 串联等效电阻的并联。

所以:

$$z_{22}=\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}=\frac{(15)(25)}{40}=9.375\ \Omega$$

当端口 1 开路时,$I_1=0$,则 V_1 为:

$$V_1=\frac{V_2}{5+20}(20)=0.8V_2$$

当端口 1 开路时,流入端口 2 的电流为:

$$I_2=\frac{V_2}{9.375}$$

因此:

$$z_{12}=\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}=\frac{0.8V_2}{V_2/9.375}=7.5\ \Omega$$

式(18.7)~(18.10)及例 18.1 说明了式(18.1)中的参数为何叫 z 参数的原因。每个参数均为电压与电流之比,因此是单位为欧姆的阻抗。

用同样的方法,计算或测试也可以确定其余的双端口网络参数。双端口网络参数可通过开路或短路方式获得。另外,双端口网络参数是阻抗、导纳,或无量纲值,无量纲值是两电压之

比或两电流之比。式(18.11)~(18.15)总结了这些结果：

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \text{S}$$

$$y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \text{S}$$

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \text{S}$$

$$y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} \text{S} \tag{18.11}$$

$$a_{11} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}$$

$$a_{12} = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \Omega$$

$$a_{21} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \text{S}$$

$$a_{22} = -\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \tag{18.12}$$

$$b_{11} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_1=0}$$

$$b_{12} = -\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{V_1=0} \Omega$$

$$b_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{I_1=0} \text{S}$$

$$b_{22} = -\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_1=0} \tag{18.13}$$

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \Omega$$

$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$$

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} \text{S} \tag{18.14}$$

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0} \text{S}$$

$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0}$$

$$g_{21}=\left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0}$$

$$g_{22}=\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0}\ \Omega \qquad (18.15)$$

双端口网络参数也可以用互为倒数的方程组表示。阻抗和导纳参数可合并为阻纳参数。阻纳表示一个量，它或者是阻抗，或者是导纳。a 参数和 b 参数称为传输参数，因为它所描述的是一个端口的电压和电流与另一个端口的电压和电流之间的关系。阻纳参数和传输参数是不同端口变量选择的必然结果。也就是说，它把电压和电流结合起来，或是将输入变量和输出变量结合起来。h 参数和 g 参数建立起交叉变量之间的相互关系，即输入电压和输出电流、输出电压和输入电流间的关系，因此，h 和 g 参数又叫混合参数。

例 18.2 说明了如何通过对双端口网络端口进行测量，计算 a 参数。

例 18.2 下面的测试是双端口网络处在正弦稳态下进行的。当端口 2 开路时，作用到端口 1 的电压为 $150\cos 4000t$ V。流入端口 1 的电流为 $25\cos(4000t-45°)$A，端口 2 电压为 $100\cos(4000t+15°)$ V。当端口 2 短路时，作用到端口 1 的电压为 $30\cos 4000t$ V，流入端口 1 的电流为 $1.5\cos(4000t+30°)$ A，流入端口 2 的电流为 $0.25\cos(4000t+150°)$ A，求描述正弦稳态双端口网络特性的 a 参数。

解：

由第一套测量结果得：

$$V_1=150\angle 0°\ \text{V} \qquad I_1=25\angle -45°\ \text{A}$$
$$V_2=100\angle 15°\ \text{V} \qquad I_2=0\ \text{A}$$

由式(18.12)得：

$$a_{11}=\left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}=\frac{150\angle 0°}{100\angle 15°}=1.5\angle -15°$$

$$a_{21}=\left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0}=\frac{25\angle -45°}{100\angle 15°}=0.25\angle -60°\ \text{S}$$

由第二套测量结果得：

$$V_1=30\angle 0°\ \text{V} \qquad I_1=1.5\angle 30°\ \text{A}$$
$$V_2=0\ \text{V} \qquad I_2=0.25\angle 150°\ \text{A}$$

因此：

$$a_{12}=-\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0}=\frac{-30\angle 0°}{0.25\angle 150°}=120\angle 30°\ \Omega$$

$$a_{21}=-\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0}=\frac{-1.5\angle 30°}{0.25\angle 150°}=6\angle 60°$$

练习题

18.1 求图 18.3 所示电路的 y 参数。

答：$y_{11}=0.25$ S，$y_{12}=y_{21}=-0.2$ S，$y_{22}=\frac{4}{15}$ S。

18.2　求图 18.3 所示电路的 g 参数和 h 参数。

答：$g_{11}=0.1\ \mathrm{S}$，$g_{12}=-0.75$，$g_{21}=0.75$，$g_{22}=3.75\ \Omega$，$h_{11}=4\ \Omega$，$h_{12}=0.8$，$h_{21}=-0.8$，$h_{22}=0.1067\ \mathrm{S}$。

18.3　下列测量结果是在电阻性双端口网络上进行的。当 50 mV 的电压作用到端口 1，而端口 2 开路时，流入端口 1 的电流为 5 μA，端口 2 的电压为 200 mV。当端口 1 短路，端口 2 作用 10 mV 电压源时，流入端口 1 的电流为 2 μA，流入端口 2 的电流为 0.5 μA，求网络的 g 参数。

答：$g_{11}=0.1\ \mathrm{mS}$，$g_{12}=4$，$g_{21}=4$，$g_{22}=20\ \mathrm{k\Omega}$。

18.2.1　双端口网络参数之间的关系

六个方程组都与同一组变量有关，任何一对方程的参数必然与所有其他方程的参数有关。也就是说，若已知一组参数，就可由已知的这组参数求出所有的其他组参数。因求解过程中包含大量的代数运算，所以，在表 18.1 中列出结果。

虽然此处没有计算表 18.1 列出的所有关系，但还是要推导一下 z 参数与 y 参数以及 z 参数与 a 参数间的关系。这些计算表明了求参数间关系的一般过程，为求出用 y 参数表示的 z 参数，先根据式(18.2)求解 V_1 和 V_2，然后将所得表达式中 I_1 和 I_2 的系数与式(18.1)中 I_1 和 I_2 的系数相比较。由式(18.2)得：

$$V_1=\frac{\begin{vmatrix} I_1 & y_{12} \\ I_2 & y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}}=\frac{y_{22}}{\Delta y}I_1-\frac{y_{12}}{\Delta y}I_2 \tag{18.16}$$

$$V_2=\frac{\begin{vmatrix} y_{11} & I_1 \\ y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\Delta y}=-\frac{y_{21}}{\Delta y}I_1+\frac{y_{11}}{\Delta y}I_2 \tag{18.17}$$

将式(18.16)、式(18.17)和式(18.1)进行比较，得：

$$z_{11}=\frac{y_{22}}{\Delta y} \tag{18.18}$$

$$z_{12}=-\frac{y_{12}}{\Delta y} \tag{18.19}$$

$$z_{21}=-\frac{y_{21}}{\Delta y} \tag{18.20}$$

$$z_{22}=\frac{y_{11}}{\Delta y} \tag{18.21}$$

为求出 a 参数表示的 z 参数，将式(18.3)整理成式(18.1)的形式，然后比较各个系数。根据式(18.3)的第二个方程得到：

$$V_2=\frac{1}{a_{21}}I_1+\frac{a_{22}}{a_{21}}I_2 \tag{18.22}$$

表 18.1　参数转换表

$z_{11}=\frac{y_{22}}{\Delta y}=\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{b_{22}}{b_{21}}=\frac{\Delta h}{h_{22}}=\frac{1}{g_{11}}$	$b_{21}=\frac{1}{z_{12}}=-\frac{\Delta y}{y_{12}}=\frac{a_{21}}{\Delta a}=\frac{h_{22}}{h_{12}}=-\frac{g_{11}}{g_{12}}$
$z_{12}=-\frac{y_{12}}{\Delta y}=\frac{\Delta a}{a_{21}}=\frac{1}{b_{21}}=\frac{\Delta h_{12}}{h_{22}}=-\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$b_{22}=\frac{z_{11}}{z_{12}}=\frac{y_{22}}{y_{12}}=\frac{a_{11}}{\Delta a}=\frac{\Delta h}{h_{12}}=-\frac{1}{g_{12}}$
$z_{21}=-\frac{y_{21}}{\Delta y}=\frac{1}{a_{21}}=\frac{\Delta b}{b_{21}}=-\frac{h_{21}}{h_{22}}=\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$h_{11}=\frac{\Delta z}{z_{22}}=\frac{1}{y_{11}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_{12}}{b_{11}}=\frac{g_{22}}{\Delta g}$
$z_{22}=\frac{y_{11}}{\Delta y}=\frac{a_{22}}{a_{21}}=\frac{b_{11}}{b_{21}}=\frac{1}{h_{22}}=\frac{\Delta g}{g_{11}}$	$h_{12}=\frac{z_{12}}{z_{22}}=-\frac{y_{12}}{y_{11}}=\frac{\Delta a}{a_{22}}=\frac{1}{b_{11}}=-\frac{g_{12}}{\Delta g}$
$y_{11}=\frac{z_{22}}{\Delta z}=\frac{a_{22}}{a_{12}}=\frac{b_{11}}{b_{12}}=\frac{1}{h_{11}}=\frac{\Delta g}{g_{22}}$	$h_{21}=-\frac{z_{21}}{z_{22}}=\frac{y_{21}}{y_{11}}=-\frac{1}{a_{22}}=-\frac{\Delta b}{b_{11}}=-\frac{g_{21}}{\Delta g}$
$y_{12}=-\frac{z_{12}}{\Delta z}=-\frac{\Delta a}{a_{12}}=-\frac{1}{b_{12}}=-\frac{h_{12}}{h_{11}}=\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$h_{22}=\frac{1}{z_{22}}=\frac{\Delta y}{y_{11}}=\frac{a_{21}}{a_{22}}=\frac{b_{21}}{b_{11}}=\frac{g_{11}}{\Delta g}$
$y_{21}=-\frac{z_{21}}{\Delta z}=-\frac{1}{a_{12}}=-\frac{\Delta b}{b_{12}}=\frac{h_{21}}{h_{11}}=-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$g_{11}=\frac{1}{z_{11}}=\frac{\Delta y}{y_{22}}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{b_{21}}{b_{22}}=\frac{h_{22}}{\Delta h}$
$y_{22}=\frac{z_{11}}{\Delta z}=\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{b_{22}}{b_{12}}=\frac{\Delta h}{h_{11}}=\frac{1}{g_{22}}$	$g_{12}=-\frac{z_{12}}{z_{11}}=\frac{y_{12}}{y_{22}}=-\frac{\Delta a}{a_{11}}=-\frac{1}{b_{22}}=-\frac{h_{12}}{\Delta h}$
$a_{11}=\frac{z_{11}}{z_{21}}=-\frac{y_{22}}{y_{21}}=\frac{b_{22}}{\Delta b}=-\frac{\Delta h}{h_{21}}=\frac{1}{g_{21}}$	$g_{21}=\frac{z_{21}}{z_{11}}=-\frac{y_{21}}{y_{22}}=\frac{1}{a_{11}}=\frac{\Delta b}{b_{22}}=-\frac{h_{21}}{\Delta h}$
$a_{12}=\frac{\Delta z}{z_{21}}=-\frac{1}{y_{21}}=\frac{b_{12}}{\Delta b}=-\frac{h_{11}}{h_{21}}=\frac{g_{22}}{g_{21}}$	$g_{22}=\frac{\Delta z}{z_{11}}=\frac{1}{y_{22}}=\frac{a_{12}}{a_{11}}=\frac{b_{12}}{b_{22}}=\frac{h_{11}}{\Delta h}$
$a_{21}=\frac{1}{z_{21}}=-\frac{\Delta y}{y_{21}}=\frac{b_{21}}{\Delta b}=-\frac{h_{22}}{h_{21}}=\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\Delta z=z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}$ $\Delta y=y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}$
$a_{22}=\frac{z_{22}}{z_{21}}=-\frac{y_{11}}{y_{21}}=\frac{b_{11}}{\Delta b}=-\frac{1}{h_{21}}=\frac{\Delta g}{g_{21}}$	$\Delta a=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ $\Delta b=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}$
$b_{11}=\frac{z_{22}}{z_{12}}=-\frac{y_{11}}{y_{12}}=\frac{a_{22}}{\Delta a}=\frac{1}{h_{12}}=-\frac{\Delta g}{g_{12}}$	$\Delta h=h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21}$ $\Delta g=g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}$
$b_{12}=\frac{\Delta z}{z_{12}}=-\frac{1}{y_{12}}=\frac{a_{12}}{\Delta a}=\frac{h_{11}}{h_{12}}=-\frac{g_{22}}{g_{12}}$	

这样,将式(18.22)代入式(18.3)的第一个方程中,得:

$$V_1=\frac{a_{11}}{a_{21}}I_1+\left(\frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}}-a_{12}\right)I_2 \tag{18.23}$$

根据式(18.23)得:

$$z_{11}=\frac{a_{11}}{a_{21}} \tag{18.24}$$

$$z_{12}=\frac{\Delta a}{a_{21}} \tag{18.25}$$

根据式(18.22)得:

$$z_{21}=\frac{1}{a_{21}} \tag{18.26}$$

$$z_{22}=\frac{a_{22}}{a_{21}} \tag{18.27}$$

例 18.3 说明了参数转换表的用途。

例 18.3　对一电阻性双端口网络进行测量，第一组数据是在端口 2 开路时测得，第二组数据是在端口 2 短路时测得。测量结果如下：

端口 2 开路	端口 2 短路
$V_1 = 10\ \text{mV}$	$V_1 = 24\ \text{mV}$
$I_1 = 10\ \mu\text{A}$	$I_1 = 20\ \mu\text{A}$
$V_2 = -40\ \text{V}$	$I_2 = 1\ \text{mA}$

求电路的 h 参数。

解：

由短路测量结果直接得到 h_{11} 和 h_{21}：

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{24\times10^{-3}}{20\times10^{-6}} = 1.2\ \text{k}\Omega$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{10^{-3}}{20\times10^{-6}} = 50$$

参数 h_{12} 和 h_{22} 不能由开路测量结果直接获得。但考查式(18.7)~(18.15)可知，四个 a 参数可由测量结果直接得出。因此，就可以通过参数转换表求得 h_{12} 和 h_{22}。

准确地说：

$$h_{12} = \frac{\Delta a}{a_{22}}$$

$$h_{22} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$$

a 参数为：

$$a_{11} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \frac{10\times10^{-3}}{-40} = -0.25\times10^{-3}$$

$$a_{21} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \frac{10\times10^{-6}}{-40} = -0.25\times10^{-6}\ \text{S}$$

$$a_{12} = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = -\frac{24\times10^{-3}}{10^{-3}} = -24\ \Omega$$

$$a_{22} = -\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = -\frac{20\times10^{-6}}{10^{-3}} = -20\times10^{-3}$$

Δa 的值为：

$$\begin{aligned}\Delta a &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\\ &= 5\times10^{-6} - 6\times10^{-6} = -10^{-6}\end{aligned}$$

$$h_{12} = \frac{\Delta a}{a_{22}} = \frac{-10^{-6}}{-20\times10^{-3}} = 5\times10^{-5}$$

$$h_{22} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{-0.25\times10^{-6}}{-20\times10^{-3}} = 12.5\ \mu\text{S}$$

练习题

18.4 下面的测量结果是对双端口网络进行的:端口 1 开路时,$V_2 = 15$ V,$V_1 = 10$ V,$I_2 = 30$ A。端口 1 短路时,$V_2 = 10$ V,$I_2 = 4$ A,$I_1 = -5$ A。求 z 参数。

答:$z_{11} = (4/15)\ \Omega$,$z_{12} = (1/3)\ \Omega$,$z_{21} = -1.6\ \Omega$,$z_{22} = 0.5\ \Omega$。

18.2.2 互易双端口网络

若双端口网络是互易双端口网络,则参数之间存在下述关系:

$$z_{12} = z_{21} \tag{18.28}$$

$$y_{12} = y_{21} \tag{18.29}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta a = 1 \tag{18.30}$$

$$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \Delta b = 1 \tag{18.31}$$

$$h_{12} = -h_{21} \tag{18.32}$$

$$g_{12} = -g_{21} \tag{18.33}$$

如果将一个端口的理想电压源与另一个端口的理想电流表互相对调,电流表读数不变,则该网络就是互易网络。例如,对图 18.4 的电阻电路,当 1.5 V 的电压源加到 ad 端时,在 cd 端上的电流表读数为 1.75 A。当知道 bd 间电压 V_{bd}后,很容易计算电流表上的电流。于是:

$$\frac{V_{bd}}{60} + \frac{V_{bd} - 15}{30} + \frac{V_{bd}}{20} = 0 \tag{18.34}$$

且 $V_{bd} = 5$ V,因此:

$$I = \frac{5}{20} + \frac{15}{10} = 1.75\ \text{A} \tag{18.35}$$

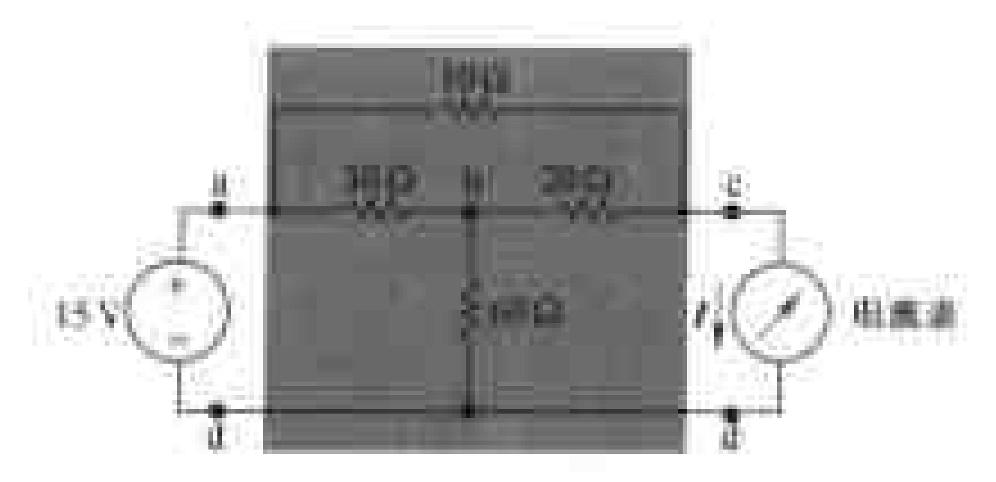


图 18.4　互易双端口网络

如果电压源和电流表的位置相互对调,电流表读数仍为 1.75 A。求解图 18.5 电路来验证:

$$\frac{V_{bd}}{60} + \frac{V_{bd}}{30} + \frac{V_{bd} - 15}{20} = 0 \tag{18.36}$$

根据式(18.36),$V_{db} = 7.5$ V。得 I_{ad}为:

$$I_{ad} = \frac{7.5}{30} + \frac{15}{10} = 1.75\ \text{A} \tag{18.37}$$

如果将一个端口的理想电流源和另一个端口的理想电压表位置进行对调,电压表的读数不变,则双端口网络也是互易的。

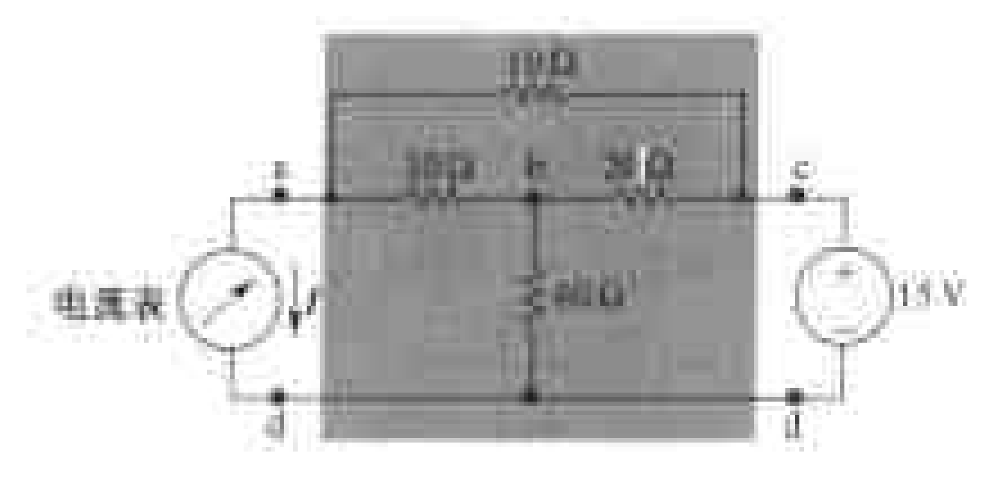


图 18.5　图 18.4 中的电压源和电流表对调位置

对于互易双端口网络，要确定一组参数，只需要计算或测量三个参数。如果双端口网络的两个端口对调后，对端口的电流和电压不产生任何影响，则双端口网络就是对称双端口网络，图 18.6 展示了四个对称双端口网络。在这些电路中，参数之间存在下述附加关系：

$$z_{11} = z_{22} \tag{18.38}$$

$$y_{11} = y_{22} \tag{18.39}$$

$$a_{11} = a_{22} \tag{18.40}$$

$$b_{11} = b_{22} \tag{18.41}$$

$$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \Delta h = 1 \tag{18.42}$$

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \Delta g = 1 \tag{18.43}$$

图 18.6 四个对称双端口网络：(a) 对称 T 型网络，(b) 对称 π 型网络，(c) 对称桥 T 型网络，(d) 对称格型网络。

对于对称互易网络，只有两个参数是独立的。

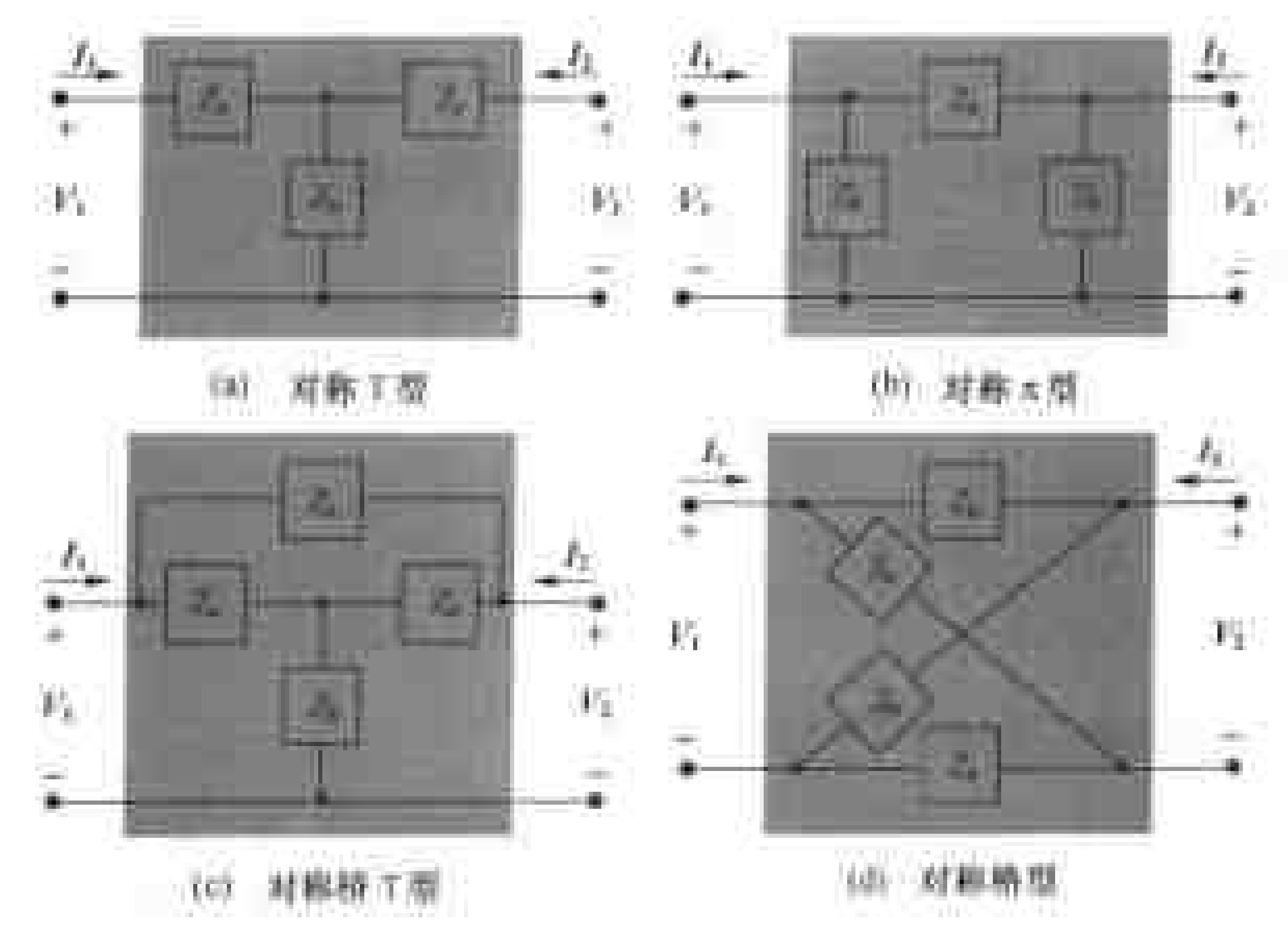


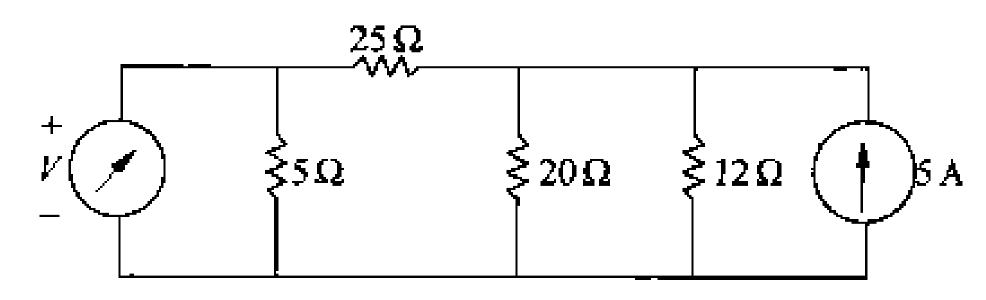
图 18.6　对称双端口网络的四个例子

练习题

18.5　(a) 计算如图所示电路中电压表的读数。

(b) 交换电压表和理想电压源位置，计算电压表读数。

答:(a) 5 V,(b) 5 V。



18.6 对一个电阻性对称互易网络进行测量,结果为:端口 2 开路时,$V_1 = 95$ V,$I_1 = 5$ A。端口 2 短路时,$V_1 = 11.52$ V,$I_2 = -2.72$ A。试计算双端口网络的 z 参数。

答:$z_{11} = z_{22} = 19\ \Omega$,$z_{12} = z_{21} = 17\ \Omega$

18.3 具有端接的双端口网络的分析

在双端口网络的典型应用当中,一般端口 1 接电源而端口 2 接负载。图 18.7 表示具有典型连接的双端口网络 s 域电路模型。其中 Z_g 代表电源的内阻抗,Z_L 是负载阻抗。这种电路的分析是指将端口的电压和电流表示为双口参数 V_g,Z_g 和 Z_L 的方程。

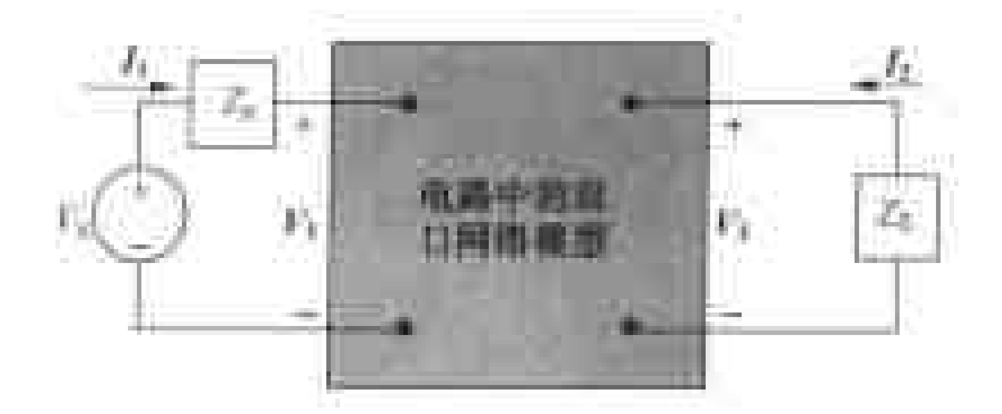


图 18.7 具有端接的双端口网络 s 域模型

具有端接的双端口网络的六个特性参数确定了它的端口特性:

1. 输入阻抗 $Z_{in} = V_1/I_1$,或输入导纳 $Y_{in} = I_1/V_1$。
2. 输出电流 I_2。
3. 端口 2 的戴维南电压源和阻抗(V_{Th},Z_{Th})。
4. 电流放大倍数 I_2/I_1。
5. 电压放大倍数 V_2/V_1。
6. 电压放大倍数 V_2/V_g。

18.3.1 用 z 参数表示的六个特性参数

为说明六个特性参数是如何得出的,需要用 z 参数的表达式,建立电路中双端口网络的模型。表 18.2 总结的表达式中包含 y 参数、a 参数、b 参数、h 参数和 g 参数。

求表达式中的任何一个结果,都包括对双端口网络方程以及端口约束方程的代数运算。若用 z 参数方程,则描述图 18.7 所示电路的四个方程为:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \tag{18.44}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \tag{18.45}$$

$$V_1 = V_g - I_1Z_g \tag{18.46}$$

$$V_2 = -I_2 Z_L \tag{18.47}$$

式(18.46)和式(18.47)描述了两端电路构成的约束。

为求出端口 1 的阻抗，即 $Z_{in} = V_1/I_1$，进行如下过程：用 $-I_2Z_L$ 代替式(18.45)中的 V_2，并求 I_2 的表达式：

$$I_2 = \frac{-z_{21}I_1}{Z_L - z_{22}} \tag{18.48}$$

然后将 I_2 代入式(18.44)中求解 Z_{in}，得：

$$Z_{in} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L} \tag{18.49}$$

为求得端口电流 I_2，先将式(18.46)中的右边代替 V_1 代入式(18.44)中，求 I_1。

结果为：

$$I_1 = \frac{V_g - z_{12}I_2}{z_{11} + Z_g} \tag{18.50}$$

再将式(18.50)代入式(18.48)中，求 I_2 得：

$$I_2 = \frac{-z_{21}V_g}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}} \tag{18.51}$$

当 $I_2 = 0$ 时，端口 2 的戴维南电压源就是 V_2。当 $I_2 = 0$ 时，联立方程式(18.44)和方程式(18.45)得：

$$V_2|_{I_2=0} = z_{21}I_1 = z_{21}\frac{V_1}{z_{11}} \tag{18.52}$$

表 18.2　具有端接的双端口网络方程

z 参数	**y 参数**
$Z_{in} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L}$	$Y_{in} = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}Z_L}{1 + y_{22}Z_L}$
$I_2 = \frac{-z_{21}V_g}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$	$I_2 = \frac{y_{21}V_g}{1 + y_{22}Z_L + z_{11}Z_g + \Delta y Z_g Z_L}$
$V_{Th} = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z_g}V_g$	$V_{Th} = \frac{-y_{21}V_g}{y_{22} + \Delta y Z_g}$
$Z_{Th} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}$	$Z_{Th} = \frac{1 + y_{11}Z_g}{y_{22} + \Delta y Z_g}$
$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{z_{22} + Z_L}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{y_{21}}{y_{11} + \Delta y Z_L}$
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-y_{21}Z_L}{1 + y_{22} + Z_L}$
$\frac{V_2}{V_g} = \frac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$	$\frac{V_2}{V_g} = \frac{y_{21}Z_L}{y_{12}y_{21}Z_gZ_L - (1 + y_{11}Z_g)(1 + y_{22}Z_L)}$
a 参数	**b 参数**
$Z_{in} = \frac{a_{11}Z_L + a_{12}}{a_{21}Z_L + a_{22}}$	$Z_{in} = \frac{b_{22}Z_L + b_{12}}{b_{21}Z_L + b_{11}}$
$I_2 = \frac{-V_g}{a_{11}Z_L + a_{12} + a_{21}Z_gZ_L + a_{22}Z_g}$	$I_2 = \frac{-V_g\Delta b}{b_{11}Z_g + b_{21}Z_gZ_L + b_{22}Z_L + b_{12}}$
$V_{Th} = \frac{V_g}{a_{11} + a_{21}Z_g}$	$V_{Th} = \frac{V_g\Delta b}{b_{22} + b_{21}Z_g}$
$Z_{Th} = \frac{a_{12} + a_{22}Z_g}{a_{11} + a_{21}Z_g}$	$Z_{Th} = \frac{b_{11}Z_g + b_{12}}{b_{21}Z_g + b_{22}}$

续表

$\frac{I_2}{I_1}=\frac{-1}{a_{21}Z_L+a_{22}}$	$\frac{I_2}{I_1}=\frac{-\Delta b}{b_{11}+b_{21}Z_L}$
$\frac{V_2}{V_1}=\frac{Z_L}{a_{11}Z_L+a_{12}}$	$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\Delta bZ_L}{b_{12}+b_{22}Z_L}$
$\frac{V_2}{V_g}=\frac{Z_L}{(a_{11}+a_{21}Z_g)Z_L+a_{12}+a_{22}Z_g}$	$\frac{V_2}{V_g}=\frac{\Delta bZ_L}{b_{12}+b_{11}Z_g+b_{22}Z_L+b_{21}Z_gZ_L}$
***h* 参数**	***g* 参数**
$Z_{in}=h_{11}-\frac{h_{12}h_{21}Z_L}{1+h_{22}Z_L}$	$Y_{in}=g_{11}-\frac{g_{12}g_{21}}{g_{22}+Z_L}$
$I_2=\frac{h_{21}V_g}{(1+h_{22}Z_L)(h_{11}+Z_g)-h_{12}h_{21}Z_L}$	$I_2=\frac{-g_{21}V_g}{(1+g_{11}Z_g)(g_{22}+Z_L)-g_{12}g_{21}Z_g}$
$V_{Th}=\frac{-h_{21}V_g}{h_{22}Z_g+\Delta h}$	$V_{Th}=\frac{g_{21}V_g}{1+g_{11}Z_g}$
$Z_{Th}=\frac{Z_g+h_{11}}{h_{22}Z_g+\Delta h}$	$Z_{Th}=g_{22}-\frac{g_{12}g_{21}Z_g}{1+g_{11}Z_g}$
$\frac{I_2}{I_1}=\frac{h_{21}}{1+h_{22}Z_L}$	$\frac{I_2}{I_1}=\frac{-g_{21}}{g_{11}Z_L+\Delta g}$
$\frac{V_2}{V_1}=\frac{-h_{21}Z_L}{\Delta hZ_L+h_{11}}$	$\frac{V_2}{V_1}=\frac{g_{21}Z_L}{g_{22}+Z_L}$
$\frac{V_2}{V_g}=\frac{-h_{21}Z_L}{(h_{11}+Z_g)(1+h_{22}Z_L)-h_{12}h_{21}Z_L}$	$\frac{V_2}{V_g}=\frac{g_{21}Z_L}{(1+g_{11}Z_g)(g_{22}+Z_L)-g_{12}g_{21}Z_g}$

由于 $V_1=V_g-I_1Z_g$，$I_1=V_g/(Z_g+z_{11})$，这样，将结果代入式(18.52)，得开路电压 V_2：

$$V_2\big|_{I_2=0}=V_{Th}=\frac{z_{21}}{Z_g+z_{11}}V_g \tag{18.53}$$

当 v_g 被短路时，戴维南阻抗或输出阻抗是 V_2/I_2。当 $v_g=0$ 时，式(18.46)就化简为：

$$V_1=-I_1Z_g \tag{18.54}$$

将式(18.54)代入式(18.44)得：

$$I_1=\frac{-z_{12}I_2}{z_{11}+Z_g} \tag{18.55}$$

将式(18.55)代入式(18.45)得：

$$\frac{V_2}{I_2}\bigg|_{V_g=0}=Z_{Th}=z_{22}-\frac{z_{12}z_{21}}{z_{11}+Z_g} \tag{18.56}$$

由式(18.48)直接得到电流放大倍数为：

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{-z_{21}}{Z_L+z_{22}} \tag{18.57}$$

为求得电压放大倍数 V_2/V_1 的表达式，将式(18.47)所得的 I_2 值代入式(18.45)中，这样：

$$V_2=z_{21}I_1+z_{22}\left(\frac{-V_2}{Z_L}\right) \tag{18.58}$$

下面解式(18.44)，求 V_1 和 V_2 的函数 I_1：

$$z_{11}I_1=V_1-z_{12}\left(\frac{-V_2}{Z_L}\right)$$

或：

$$I_1=\frac{V_1}{z_{11}}+\frac{z_{12}V_2}{z_{11}Z_L} \tag{18.59}$$

用式(18.59)代替式(18.58)中的 I_1，并求最后的表达式 V_2/V_1：

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L+z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}}$$

$$=\frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L+\Delta z} \tag{18.60}$$

为求得电压比 V_2/V_g，现结合式(18.44)、式(18.46)和式(18.47)，求出 V_2 和 V_g 的函数 I_1：

$$I_1=\frac{z_{12}V_2}{Z_L(z_{11}+Z_g)}+\frac{V_g}{z_{11}+Z_g} \tag{18.61}$$

用式(18.61)、式(18.47)以及式(18.45)得出关于 V_2 和 V_g 的表达式，即：

$$V_2=\frac{z_{21}z_{12}V_2}{Z_L(z_{11}+Z_g)}+\frac{z_{21}V_g}{z_{11}+Z_g}-\frac{z_{22}}{Z_L}V_2 \tag{18.62}$$

由该方程可得到所求的电压比：

$$\frac{V_2}{V_g}=\frac{z_{21}Z_L}{(z_{11}+Z_g)(z_{22}+Z_L)-z_{12}z_{21}} \tag{18.63}$$

表 18.2 的第一组总结了具有端接的双口电路六个特征的表达式。也列出了关于 y,a,b，h 和 g 参数表示的相应表达式。

例 18.4 说明了表 18.2 中所列关系的作用。

例 18.4　图 18.8 中的双端口网络的 b 参数为：$b_{11}=-20, b_{12}=-3000\,\Omega, b_{21}=-2\text{ ms}, b_{22}=-0.2$。

(a) 求电压相量 V_2。

(b) 求 5 kΩ 负载消耗的平均功率。

(c) 求提供给入口的平均功率。

(d) 求具有最大功率传输时的负载阻抗。

(e) 求在(d)中传输给负载的最大功率。

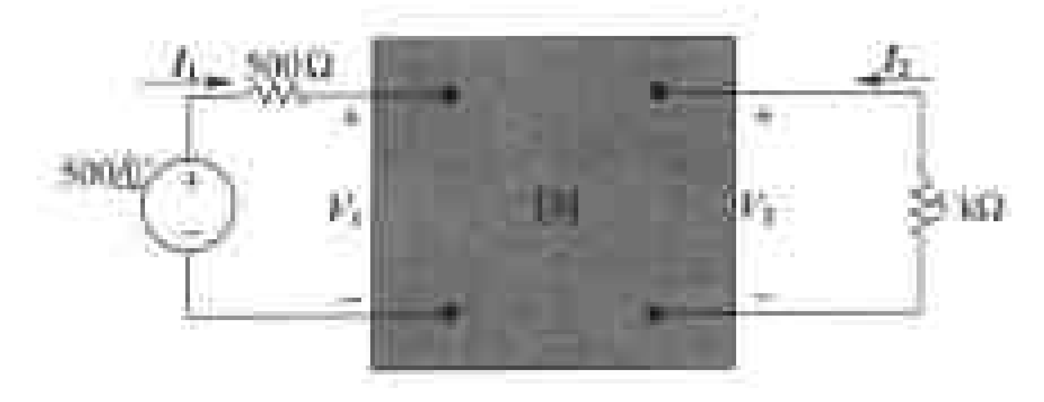


图 18.8　例 18.4 电路

解：

(a) 为求 V_2，根据表 18.2，可有两种方法。第一种方法是先求 I_2，然后根据方程 $V_2=-I_2Z_L$ 再求 V_2，第二种方法是先求电压比 V_2/V_g，然后再计算 V_2。此处用第二种方法，由已知的 b 参数得：

$$\begin{aligned}\Delta b &= (-20)(-0.2)-(-3000)(-2\times10^{-3})\\ &=4-6\\ &=-2\end{aligned}$$

由表 18.2 得：

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V_g} &= \frac{\Delta b Z_L}{b_{12}+b_{11}Z_g+b_{22}Z_L+b_{21}Z_gZ_L}\\ &= \frac{(-2)(5000)}{-3000+(-20)500+(-0.2)5000+[-2\times10^{-3}(500)(5000)]}\\ &= \frac{10}{19}\end{aligned}$$

于是：

$$V_2=\left(\frac{10}{19}\right)500=263.16\,\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

(b) 提供给 5000 Ω 负载的平均功率为：

$$P_2=\frac{263.16^2}{2(5000)}=6.93\ \text{W}$$

(c) 为求出传输给输入端口的平均功率，先求输入阻抗 Z_{in}，由表 18.2 得：

$$\begin{aligned}Z_{in} &= \frac{b_{22}Z_L+b_{12}}{b_{21}Z_L+b_{11}}\\ &= \frac{(-0.2)(5000)-3000}{-2\times10^{-3}(5000)-20}\\ &= \frac{400}{3}\\ &= 133.33\ \Omega\end{aligned}$$

于是：

$$I_1=\frac{500}{500+133.33}=789.47\ \text{mA}$$

提供给输入端口的功率为：

$$P_1=\frac{0.78947^2}{2}(133.33)=41.55\ \text{W}$$

(d) 具有最大功率传输时的负载阻抗等于从端口 2 看进去的戴维南阻抗的共轭复数，根据表 18.2 得：

$$\begin{aligned}Z_{Th} &= \frac{b_{11}Z_g+b_{12}}{b_{21}Z_g+b_{22}}\\ &= \frac{(-20)(500)-3000}{(-2\times10^{-3}(500)-0.2}\\ &= \frac{13000}{1.2}=10833.33\ \Omega\end{aligned}$$

因此：

$$Z_L=Z_{Th}^*=10833.33\ \Omega$$

(e) 为求负载获得的最大功率，先根据电压放大表达式 V_2/V_g 求出 V_2。当 Z_L 为

10833.33 Ω时，电压比为：

$$\frac{V_2}{V_g}=0.8333$$

于是：

$$V_2=(0.8333)(500)=416.67\ \text{V}$$

并且：

$$P_2(\text{最大})=\frac{1416.67^2}{210833.33}=8.01\ \text{W}$$

练习题

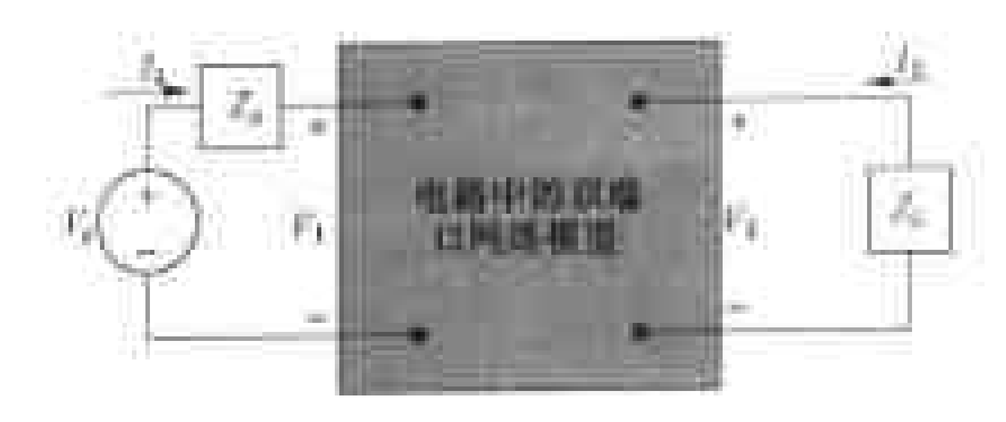
18.7 如图所示双端口网络的 a 参数为：$a_{11}=5\times10^{-4}$，$a_{12}=10\ \Omega$，$a_{21}=10^{-6}\ \text{S}$，$a_{22}=-3\times10^{-2}$。输入端电压为正弦电压源，其幅值为 50 mV，内阻抗为 $100+\text{j}0\ \Omega$，其输出端接一个 5 kΩ 的阻性负载。

(a) 计算负载所获得的平均功率。

(b) 求负载获得最大功率时的负载电阻。

(c) 计算(b)所求负载获得的最大功率。

答：(a) 62.5 mW，(b) 70/6 kΩ，(c) 74.4 mW。



18.4　双端口网络的互联

综合一个大而且复杂系统的方法是先设计各子系统，使问题简单化，然后再将较简单的、容易设计的单元互联来完成设计。如果将子系统等效为双端口网络模型，则系统综合就包括了对互联双端口网络的分析。

双端口网络互联方式有五种：(1)级联(2)串联(3)并联(4)串－并联(5)并－串联。图 18.9 描述了这五种基本的互联方式。

本节只分析和处理级联方式。但是，如果其他四种联接方式满足某种要求，也可以简单地加进各自的网络参数得到描述互联电路的参数。典型的互联电路参数有，z 参数描述串联，y 参数描述并联，h 参数描述串－并联，g 参数描述并－串联方式。

级联方式非常重要，因为它常常出现在大系统模型中，且不同于其他四种基本的互联方式。在使用各自双端口网络参数来获得级联电路的参数时没有任何限制条件。

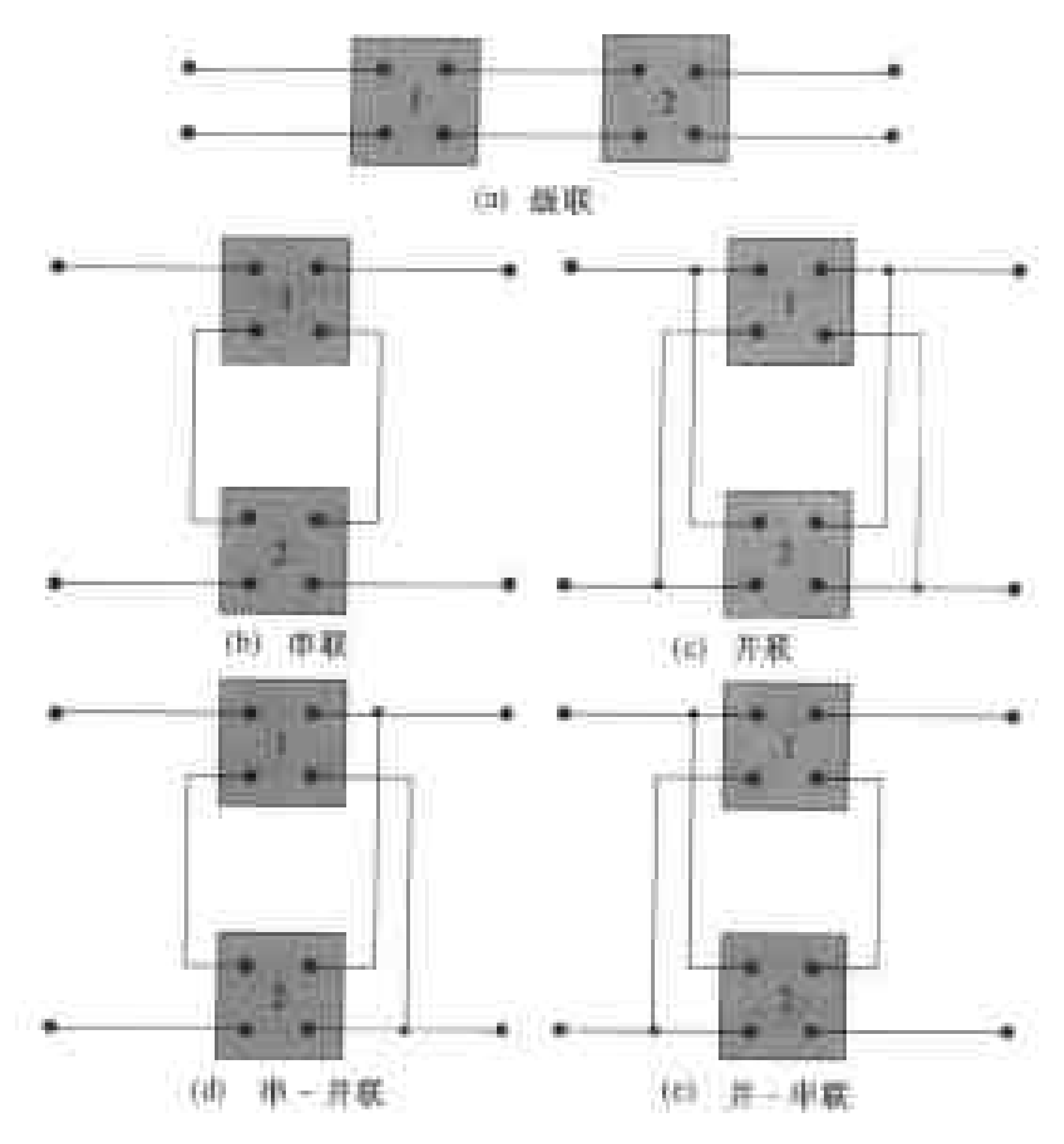


图 18.9 双端口网络的五种基本级连方式：

下面分析图 18.10 所示的级联电路，图中加一撇的代表第一个网络的 a 参数，加两撇的代表第二个网络的 a 参数。第一个电路的输出电压和电流用 V'_2 和 I'_2 表示，第二个电路的输入电压和电流用 V'_1 和 I'_1 表示，下面的问题是要求出用 a 参数表示的 V_2 和 I_2 与 V_1 和 I_1 的方程。也就是要找出方程组：

$$V_1 = a_{11}V_2 - a_{12}I_2 \tag{18.64}$$

$$I_1 = a_{21}V_2 - a_{22}I_2 \tag{18.65}$$

其中 a 参数要表示为各部分电路的 a 参数的表达式。

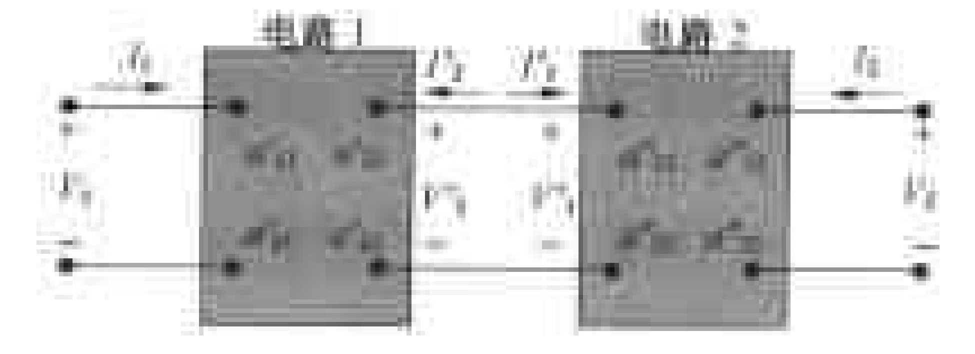


图 18.10 级联电路

先将式(18.10)表示为下列形式：

$$V_1 = a'_{11}V'_2 - a'_{12}I'_2 \tag{18.66}$$

$$I_1 = a'_{21}V'_2 - a'_{22}I'_2 \tag{18.67}$$

互联后说明 $V'_2 = V'_1, I'_2 = -I'_1$。将这些约束条件代入式(18.66)和式(18.67)得：

$$V_1 = a'_{11}V'_1 + a'_{12}I'_1 \tag{18.68}$$

$$I_1 = a'_{21}V'_1 + a'_{22}I'_1 \tag{18.69}$$

V'_1 和 I'_1 通过第二个电路的 a 参数建立起与 V_2 和 I_2 的关系：

$$V'_1 = a''_{11}V_2 - a''_{12}I_2 \tag{18.70}$$

$$I'_1 = a''_{21}V_2 - a''_{22}I_2 \tag{18.71}$$

将式(18.70)和式(18.71)代入式(18.68)和式(18.69)得到 V_1, I_1 关于 V_2, I_2 的方程：

$$V_1 = (a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21})V_2 - (a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22})I_2 \tag{18.72}$$

$$I_1 = (a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21})V_2 - (a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22})I_2 \tag{18.73}$$

a 参数的表达式，即：

$$a_{11} = a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21} \tag{18.74}$$

$$a_{12} = a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22} \tag{18.75}$$

$$a_{21} = a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21} \tag{18.76}$$

$$a_{22} = a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22} \tag{18.77}$$

如图有多于两个的单元进行级联，则等效双端口网络的 a 参数也是可求的，只要每次化简一对双端口网络，依次进行就能得到等效双端口网络的 a 参数。

例 18.5　说明了如何利用式(18.74)～(18.77)对含有两个放大器电路级联电路的分析。

例 18.5　两个相同的放大器级联，如图 18.11 所示。每个放大器均是用 h 参数描述的，参数值分别为：$h_{11} = 1000\ \Omega, h_{12} = 0.0015, h_{21} = 100, h_{22} = 100\ \mu S$。求电压放大倍数 V_2/V_g。

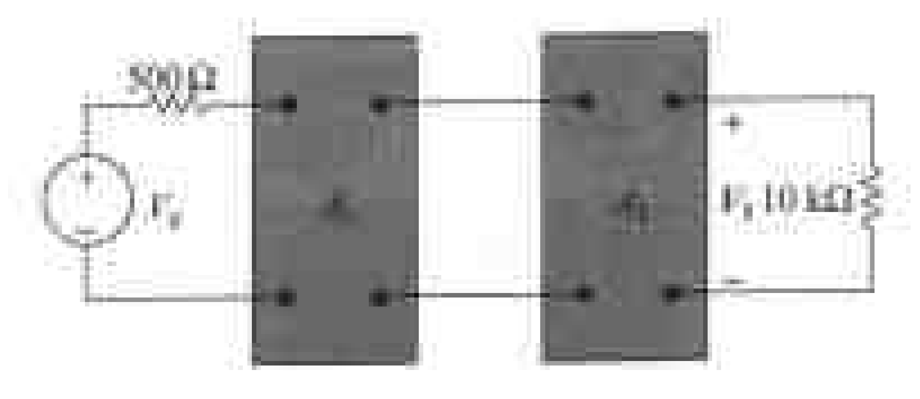


图 18.11　例 18.5 电路

解：

求解的第一步是将 h 参数转换为 a 参数。因两个放大器相同，所以，只需要一组 a 参数描述放大器：

$$a'_{11} = \frac{-\Delta h}{h_{21}} = \frac{+0.05}{100} = 5 \times 10^{-4}$$

$$a'_{12} = \frac{-h_{11}}{h_{21}} = \frac{-1000}{100} = -10\ \Omega$$

$$a'_{21} = \frac{-h_{22}}{h_{21}} = \frac{-100 \times 10^{-6}}{100} = -10^{-6}\ \mathrm{S}$$

$$a'_{22} = \frac{-1}{h_{21}} = \frac{-1}{100} = -10^{-2}$$

下面用式(18.74)～(18.77)计算级联放大器的 a 参数：

$$a_{11} = a'_{11}a'_{11} + a'_{12}a'_{21}$$
$$= 25 \times 10^{-8} + (-10)(-10^{-6}) = 10.25 \times 10^{-6}$$

$$a_{12} = a'_{11}a'_{12} + a'_{12}a'_{22}$$
$$= (5\times10^{-4})(-10) + (-10)(-10^{-2}) = 0.095\ \Omega$$
$$a_{21} = a'_{21}a'_{11} + a'_{22}a'_{21}$$
$$= (-10^{-6})(5\times10^{-4}) + (-0.01)(-10^{-6})$$
$$= 0.0095\times10^{-6}\ \text{S}$$
$$a_{22} = a'_{21}a'_{12} + a'_{22}a'_{22}$$
$$= (-10^{-6})(-10) + (-10^{-2})^2 = 1.1\times10^{-4}$$

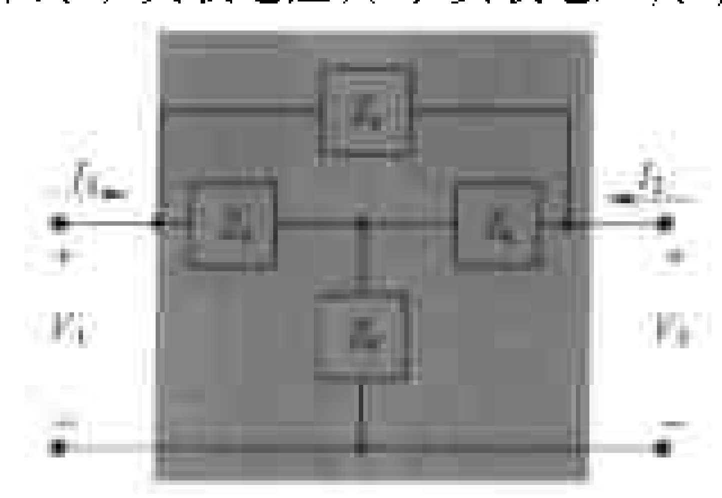
由表 18.2 得:

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_L}{(a_{11} + a_{21}Z_g)Z_L + a_{12} + a_{22}Z_g}$$
$$= \frac{10^4}{[10.25\times10^{-6} + 0.0095\times10^{-6}(500)]10^4 + 0.095 + 1.1\times10^{-4}(500)}$$
$$= \frac{10^4}{0.15 + 0.095 + 0.055} = \frac{10^5}{3} = 33333.33$$

这样,150 μV 的输入信号被放大为 5 V 的输出信号。求电压放大倍数 V_2/V_g 的其他方法见习题 18.41。

练习题

18.8 如图所示的对称桥 T 型电路中每个元件均为 15 Ω 电阻。两个这种电路级联后输入一个电压源,并接上负载。电压源空载电压为 100 V,内阻为 8 Ω。负载电阻调到最大功率传输。计算:(a) 负载电阻,(b) 负载电压,(c) 负载功率。



答:(a) 14.44 Ω,(b) 16 V,(c) 17.73 W。

小结:

- 双端口网络模型用来描述电路的特性,主要依据是输入、输出端电压和电流。
- 双端口网络模型所描述的电路仅限于:
  - 端口间的电路无独立源。
  - 电路内无储能。
  - 流入和流出端口的电流相等。
  - 输入和输出端口间无外部连接。
- 四个端口变量(V_1, I_1, V_2, I_2)中有两个是独立的。因此,描述电路只需两个关于四个端

口变量的方程组。

- 包含四个端口变量的六组联立方程分别称为 z-，y-，a-，b-，h-和 g-参数方程。见式(18.1)~(18.6)
- 参数方程以 s 域形式写出。令 $s=0$，则得到直流方程。令 $s=j\omega$ 则可得到正弦稳态方程。
- 六组参数间的关系见表 18.1。
- 在适当的输入或输出端口短路和开路条件下，可计算或测量任一组参数。见式(18.7)~(18.15)。
- 若将一个端口的电压源和另一个端口的电流表对调位置后电流表的读数不变，则该双端口网络就是互易网络。互易双端口网络参数结果如式(18.28)~(18.33)所示。
- 若将互易网络的端口对调位置，端口的电压和电流无任何变化，则该网络就是对称互易网络。对称互易双端口网络参数结果如式(18.38)~(18.43)所示。
- 与戴维南等效电路和负载相接的双端口网络特性在表 18.2 中给出总结。
- 大网络可以分解为多个互联的双端口网络模型。在本章中，用级联方式说明了互联双端口网络的分析。

习题

18.1　求例 18.1 电路中的 h 参数和 g 参数。

18.2　求图 P18.2 所示电路的 z 参数。

18.3　求图 P18.3 电路的 b 参数。

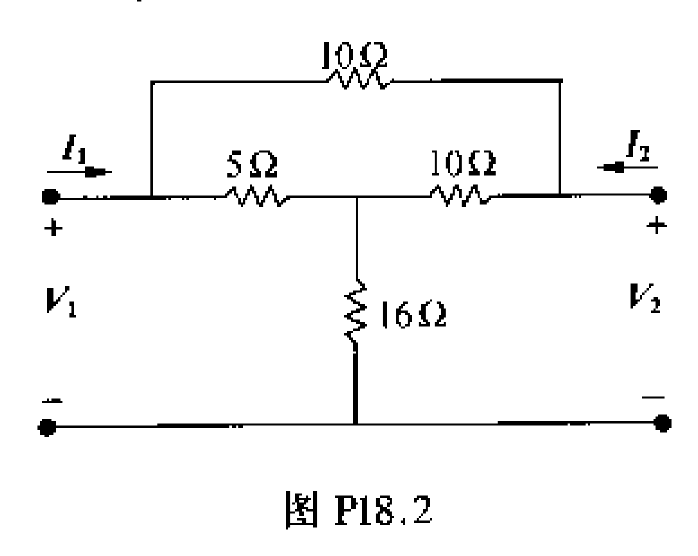


图 P18.2

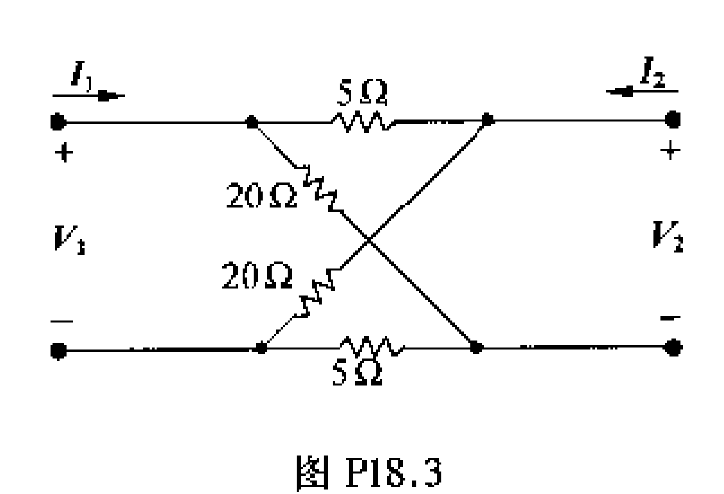


图 P18.3

18.4　求图 P18.4 所示电路的 h 参数。

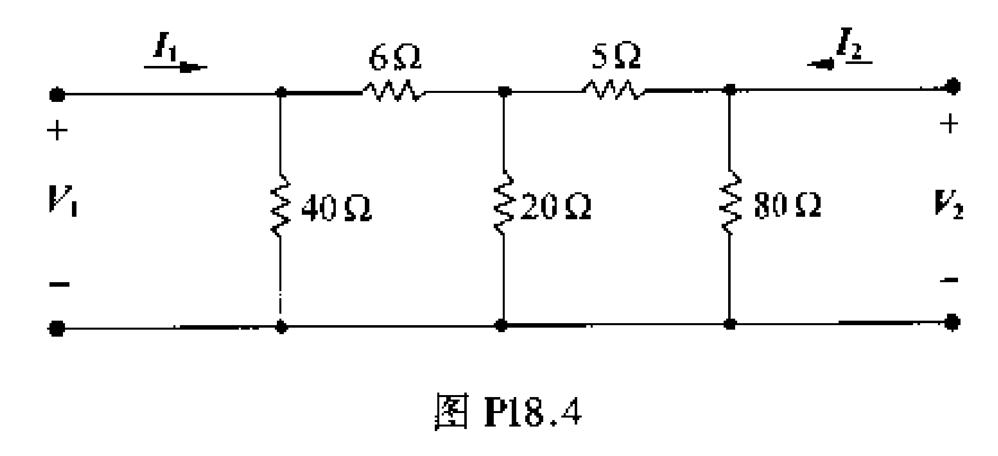


图 P18.4

18.5　求图 P18.5 所示电路的 a 参数。

18.6　用习题 18.5 的结论计算图 P18.5 电路的 g 参数。

18.7　求图 P18.7 所示电路的 z 参数。

M18.8　用习题 18.7 的结论计算图 P18.7 所示电路的 y 参数。

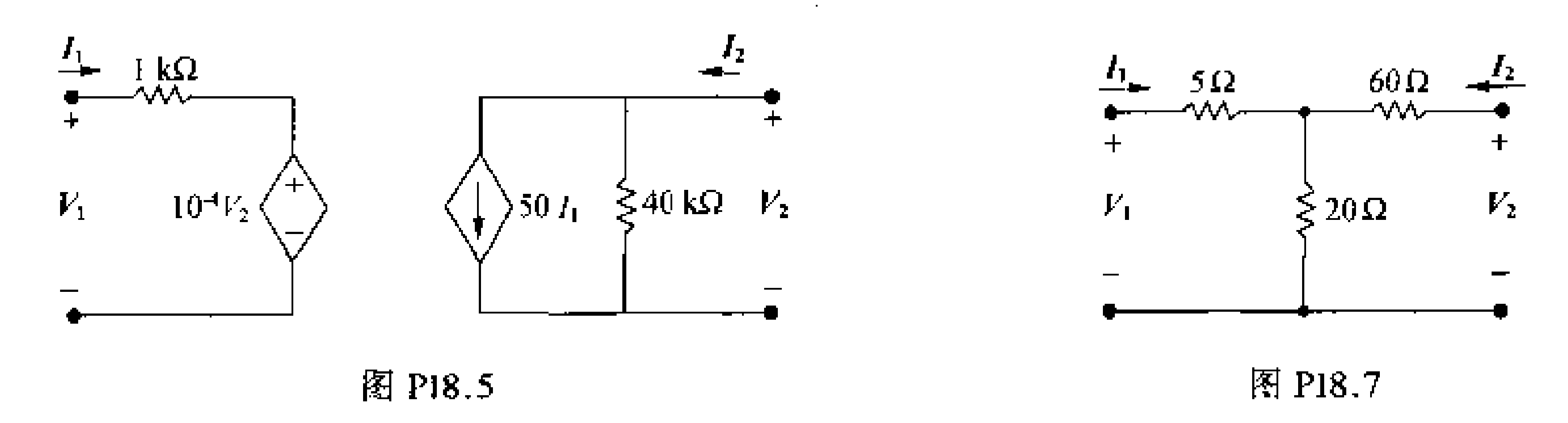


图 P18.5　　　　图 P18.7

18.9 选择图 P18.9 所示电路中 R_1, R_2 和 R_3 的值,使 $a_{11}=1.2$, $a_{12}=34\ \Omega$, $a_{21}=20$ ms, $a_{22}=1.4$。

18.10 求图 P18.10 所示电路的 h 参数。

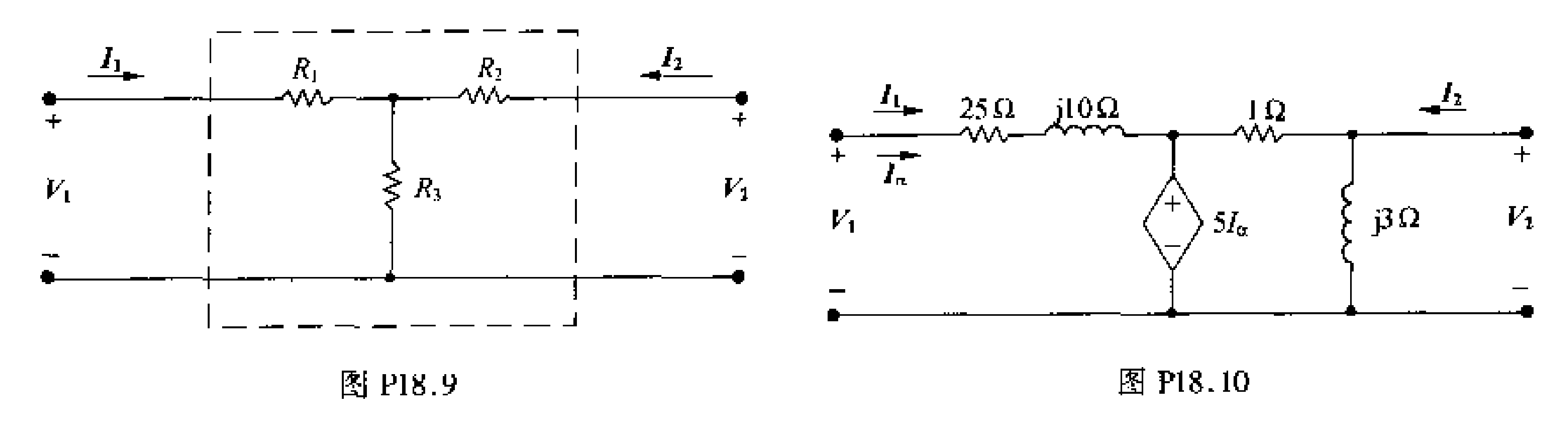


图 P18.9　　　　图 P18.10

18.11 对图 P18.11 所示的双端口网络进行直流测量,其结果为:

端口开路	端口短路
$V_1=1$ mV	$I_1=-0.5\ \mu$A
$V_2=10$ V	$I_2=80\ \mu$A
$I_2=200\ \mu$A	$V_2=5$ V

试计算网络的 h 参数。

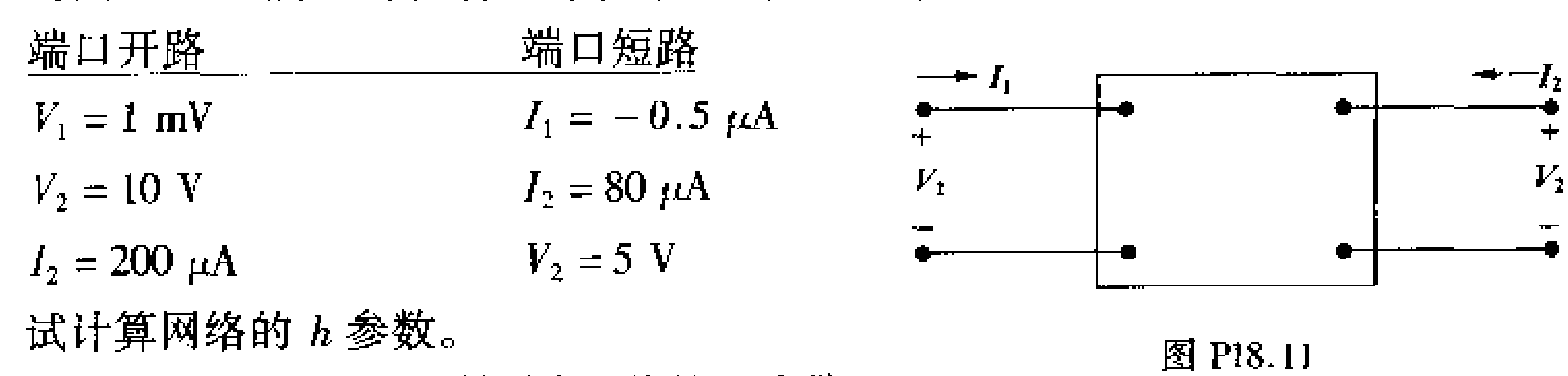


图 P18.11

18.12 (a) 用习题 18.11 的测量结果求网络的 a 参数。

(b) 用习题 18.11 所得的 h 参数直接计算 a 参数并加以检验。

18.13 双端口网络如图 P18.13 所示,求 y 参数的频域值。

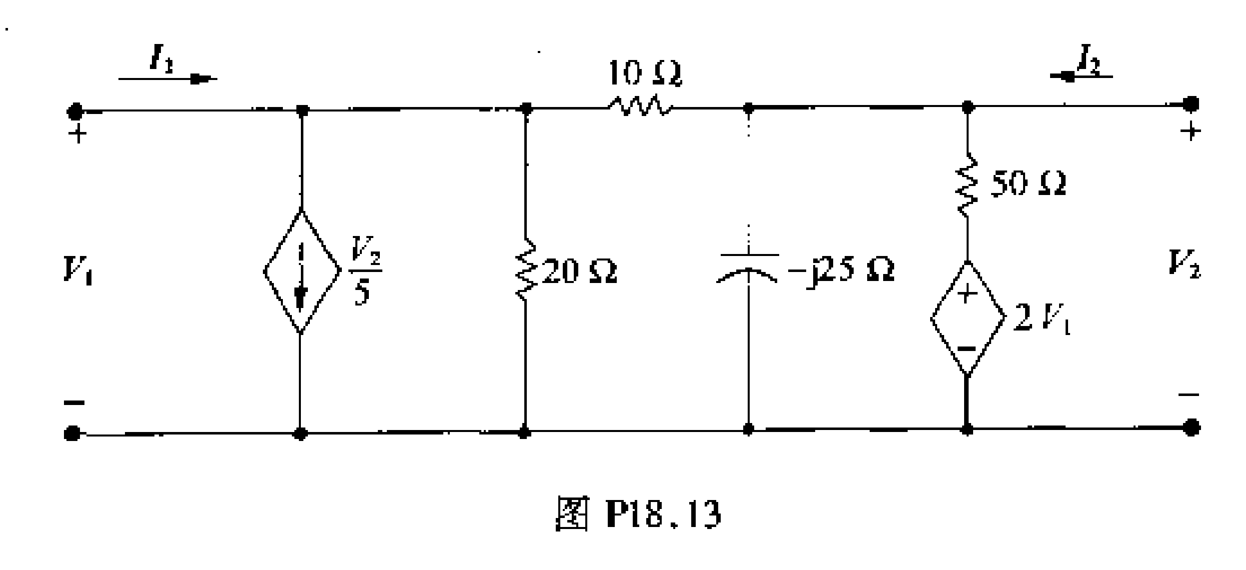


图 P18.13

18.14 求图 P18.13 所示电路的 b 参数。

18.15 求图 P18.15 所示运算放大电路的 h 参数。

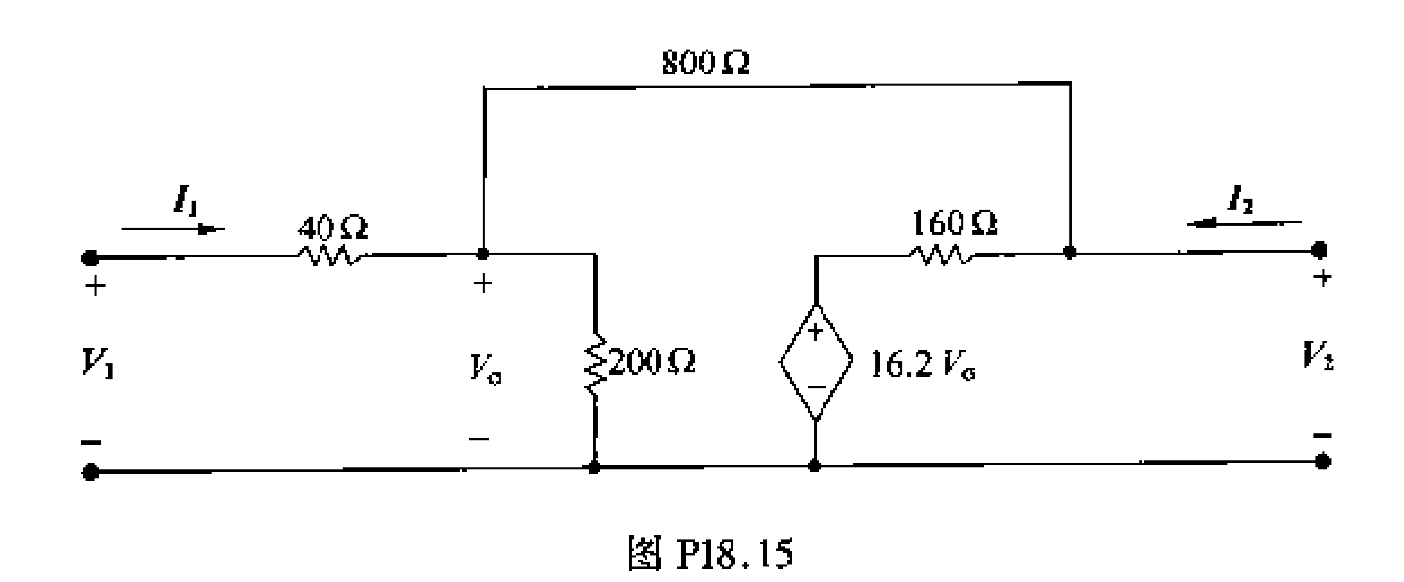


图 P18.15

18.16 求用 a 参数表示的 h 参数表达式。

18.17 求用 b 参数表示的 y 参数表达式。

18.18 求用 z 参数表示的 g 参数表达式。

18.19 图 P18.19 中的运放是理想的，求电路的 g 参数。

18.20 求图 P18.20 所示双端口网络 y 参数的 s 域表达式。

18.21 求图 P18.21 所示双端口网络 a 参数的 s 域表达式。

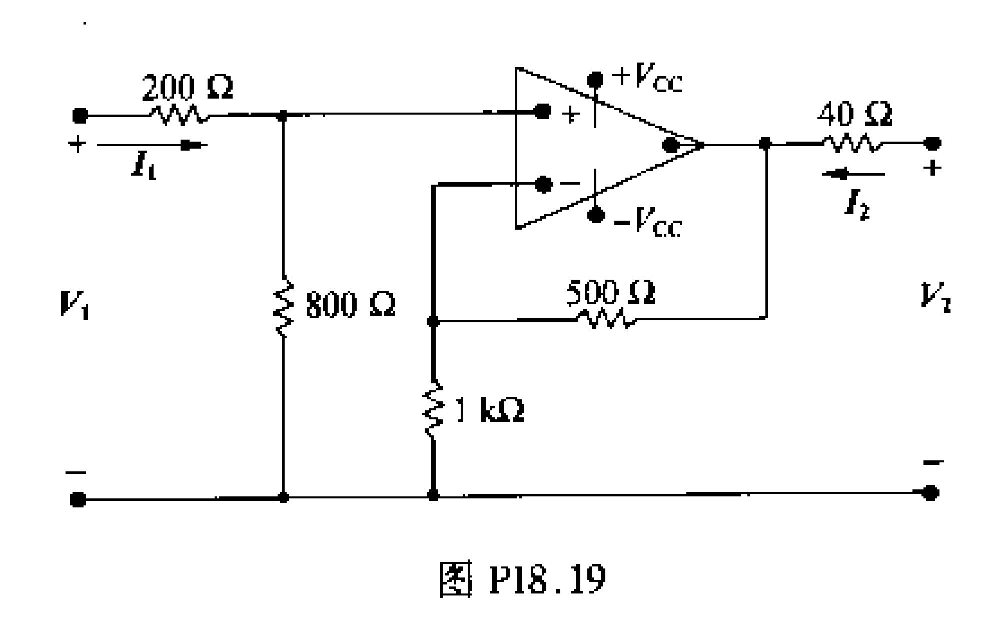


图 P18.19

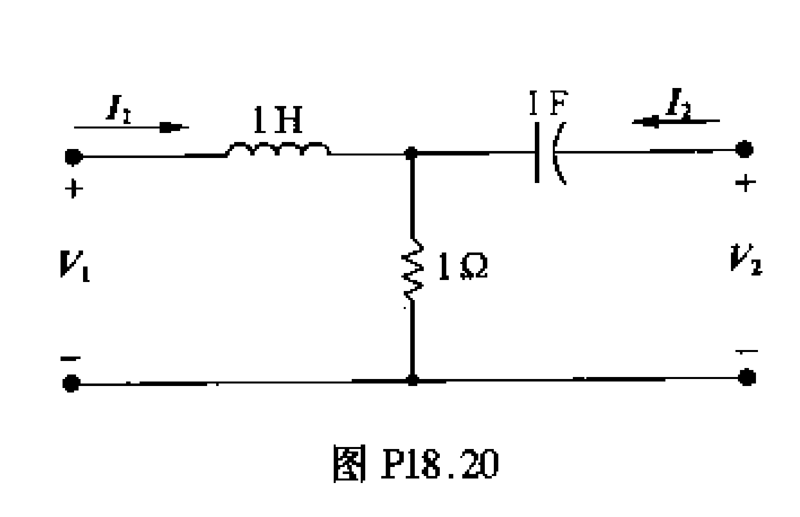


图 P18.20

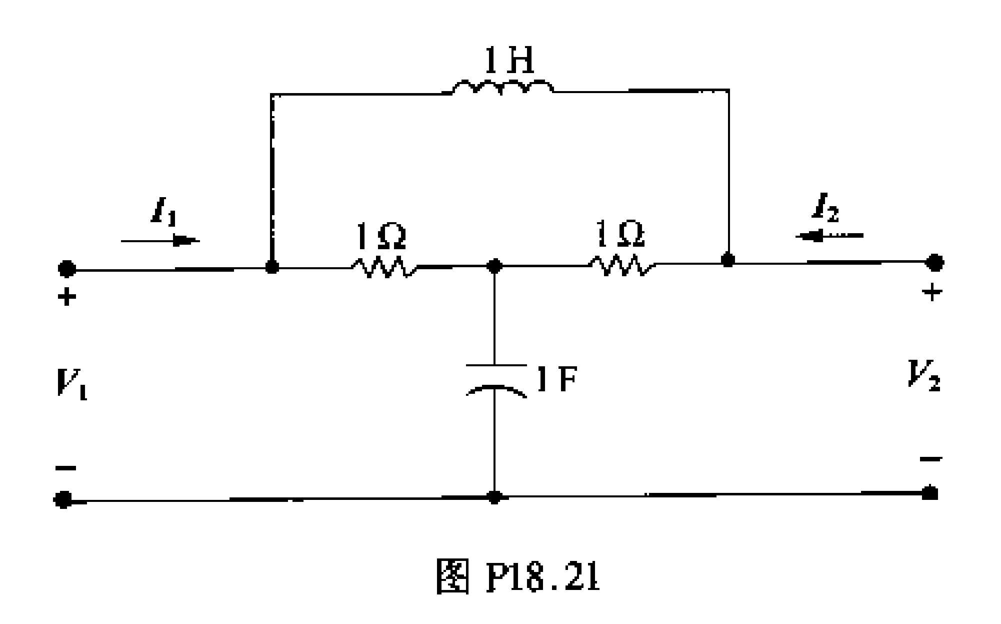


图 P18.21

18.22 图 P18.22 所示的双端口网络对称吗？验证你的结论。

18.23 (a) 图 P18.23 所示电路，用定义求 h 参数的 s 域表达式。

(b) 证明(a)所得结果的 h 参数方程与对称网络的一致。

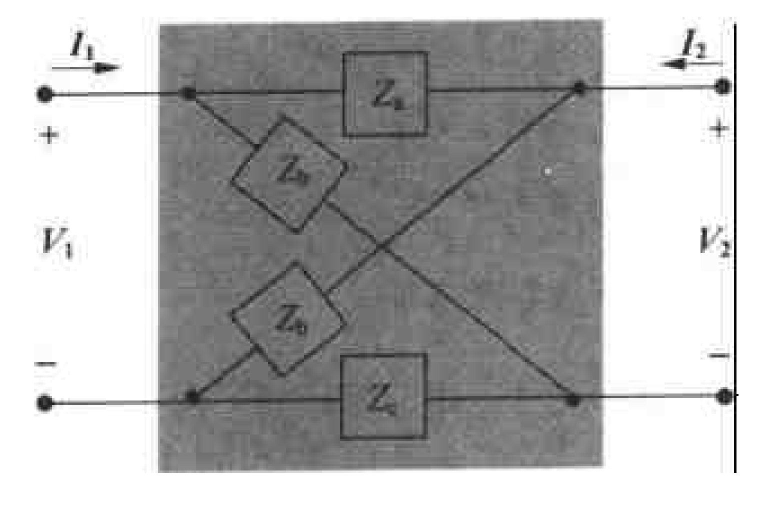


图 P18.22

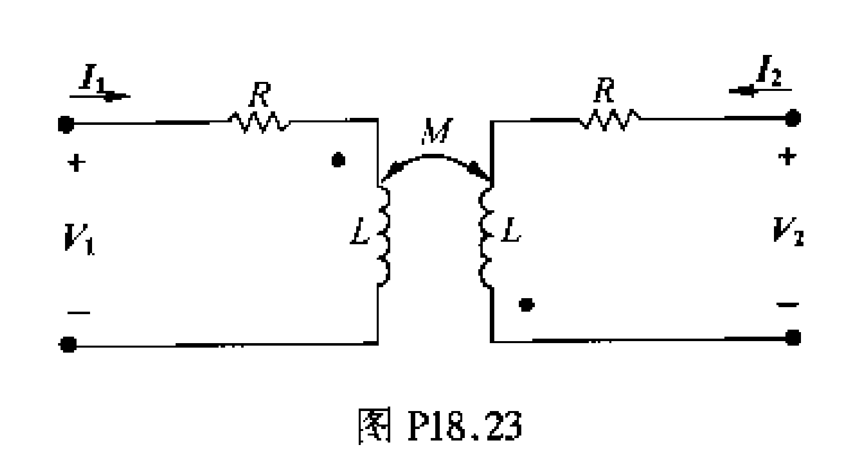


图 P18.23

18.24 图 18.7 所示电路,根据 b 参数求出输入阻抗的表达式。

18.25 根据 g 参数,求图 18.7 所示电路电流放大倍数的表达式 I_2/I_1。

18.26 根据 y 参数,求图 18.7 所示电路电压放大倍数 V_2/V_1 的表达式。

18.27 根据 h 参数,求图 18.7 所示电路电压放大倍数 V_2/V_g 的表达式。

18.28 根据 z 参数,求图 18.7 所示电路端口 2 的戴维南等效电路。

18.29 图 P18.29 中所示的线性变压器的耦合系数为 0.65,变压器输入正弦电压源为 $V_g = 100\cos 2000t$ V,电源内阻抗为 $10 + \text{j}0\ \Omega$。

(a) 求线性变压器的频域 a 参数。

(b) 利用 a 参数求出负载端口的戴维南等效电路。

(c) 求 V_2 的时域稳态表达式。

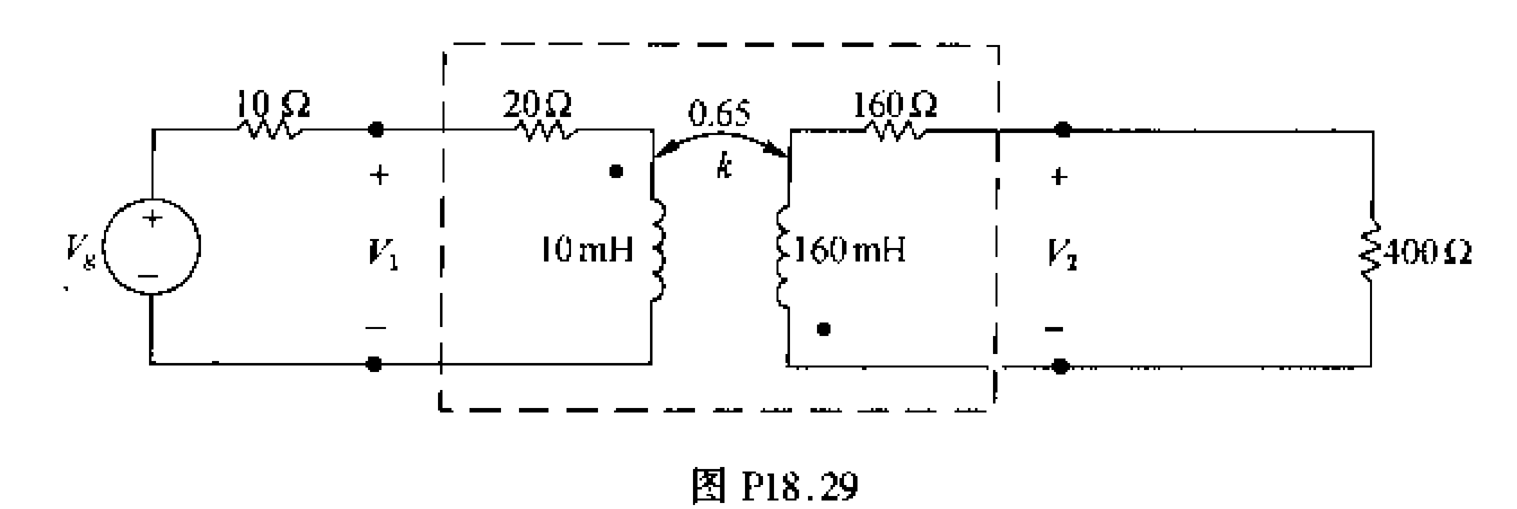


图 P18.29

18.30 图 P18.30 所示电路中放大器的 y 参数为:

$$y_{11} = 0.025\ \text{S} \qquad y_{12} = -0.001\ \text{S}$$

$$y_{21} = -0.25\ \text{S} \qquad y_{22} = -0.04\ \text{S}$$

求输出功率与理想电压源提供功率之比。

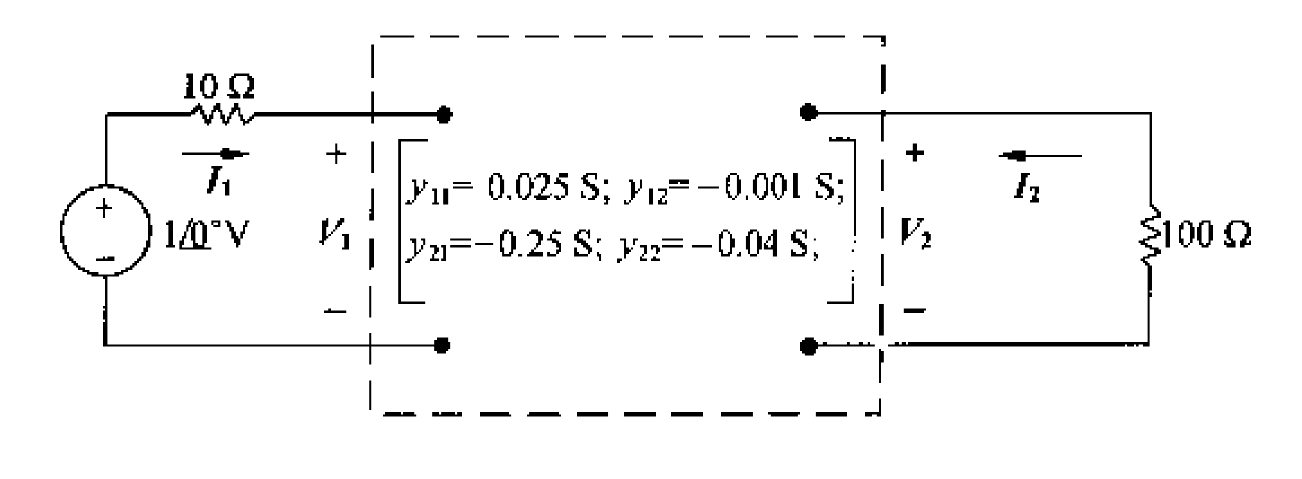


图 P18.30

18.31 图 P18.31 所示双端口网络的 g 参数为:

$$g_{11} = \frac{1}{6} - \text{j}\frac{1}{6}\text{S} \qquad g_{12} = -\frac{1}{2} + \text{j}\frac{1}{2}$$

$$g_{21} = \frac{1}{2} - \text{j}\frac{1}{2} \qquad g_{22} = 1.5 + \text{j}2.5\ \Omega$$

为使负载获得最大平均功率,可调节负载阻抗 Z_L。理想电压源电压为:

$$v_g = 42\sqrt{2}\cos 5000t\ \text{V}$$

(a) 求 V_2 的有效值。

(b) 求提供给负载的平均功率。

(c) 理想电压源产生的平均功率以多大的百分比传输给负载?

18.32 图 P18.32 中接电源的双端口网络放大电路的 y 参数为:

$$y_{11} = 2\ \text{mS} \quad y_{12} = -2\mu\ \text{S}$$
$$y_{21} = 100\ \text{mS} \quad y_{22} = -50\ \mu\text{S}$$

电压源的内阻为 $2500 + \text{j}0\ \Omega$,负载阻抗为 $70000 + \text{j}0\ \Omega$。理想电压源的电压为:

$$v_g = 80\sqrt{2}\cos 4000t\ \text{mV}$$

(a) 求 V_2 的有效值;

(b) 求负载 Z_L 所得平均功率;

(c) 求理想电源提供的平均功率。

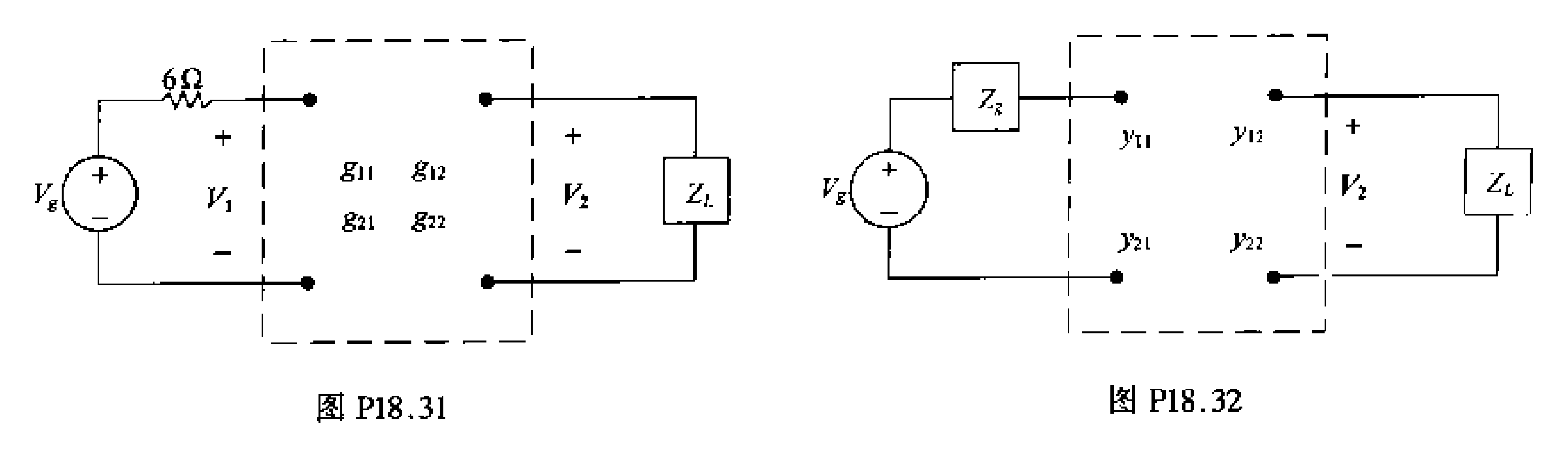


图 P18.31　　图 P18.32

18.33 对图 P18.32 所示的具有端接的双端口放大电路,求:

(a) 负载获得最大功率时的阻抗 Z_L。

(b) 提供给 Z_L 的最大平均功率。

(c) 当负载获得最大功率时,理想电源提供的平均功率。

18.34 (a) 求图 P18.34 所示电路 h 参数的 s 域表达式。

(b) 端口 2 接一阻性负载 800 Ω,端口 1 接一阶跃电压源 $v_1(t) = 45u(t)$ V。若 $C = 0.1\ \mu$F, $L = 400$ mH, 求 $t > 0$ 时的 $v_2(t)$。

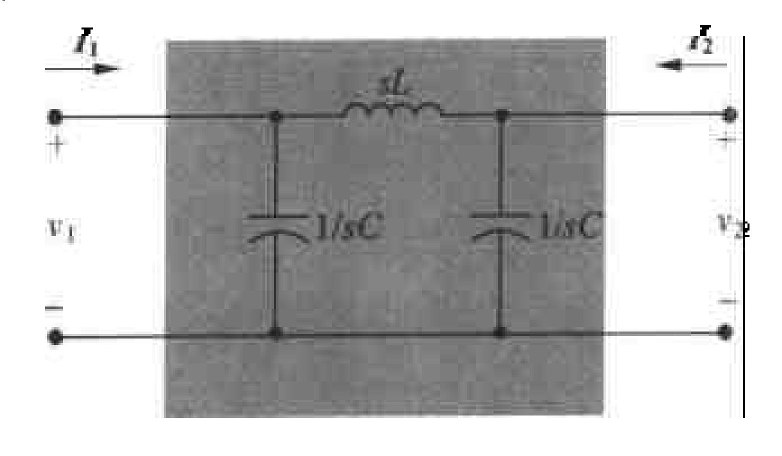


图 P18.34

18.35 (a) 求图 P18.35 所示双端口网络的 z 参数。

(b) 当 $v_g = 50u(t)$ V 时,求 $t > 0$ 时的 V_2。

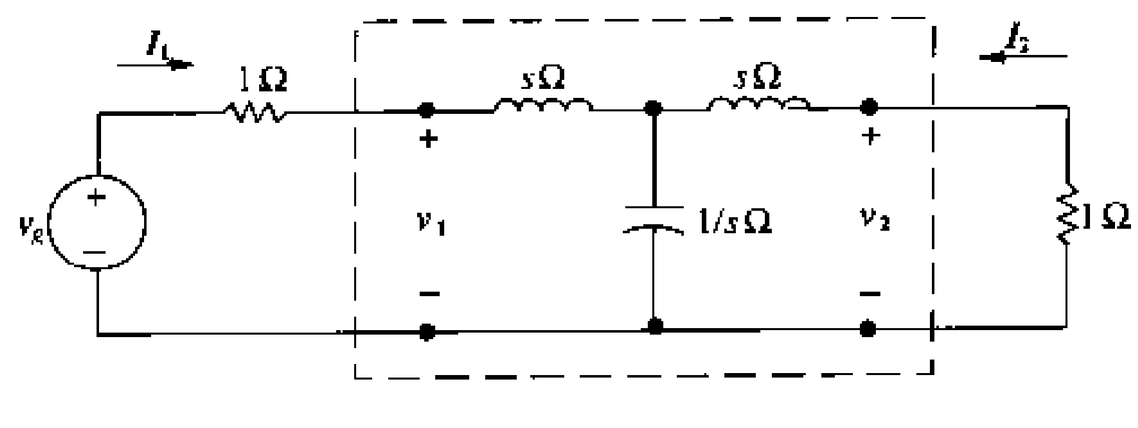


图 P18.35

18.36 对一个电阻性双端口网络进行测量的结果如下：当端口 1 加 100 V 电压，端口 2 开路时，端口 1 的电流为 1.125 A，端口 2 的电压为 104 V。当端口 2 加 24 V 电压，端口 1 开路时，端口 2 的电流为 0.25 A，端口 1 的电压为 20 V。若端口 1 加一个 160 V 的直流电压源，端口 2 加一个电阻性负载。求双端口网络能传递给负载的最大功率(kW)。

18.37 对图 P18.37 中阻性网络进行直流测量结果如下：

测量结果 1	测量结果 2
$V_1 = 25$ V	$V_1 = 41$ V
$I_1 = 1$ A	$I_1 = 1$ A
$V_2 = 0$ V	$V_2 = 20$ V
$I_2 = -0.5$ A	$I_2 = 0$ A

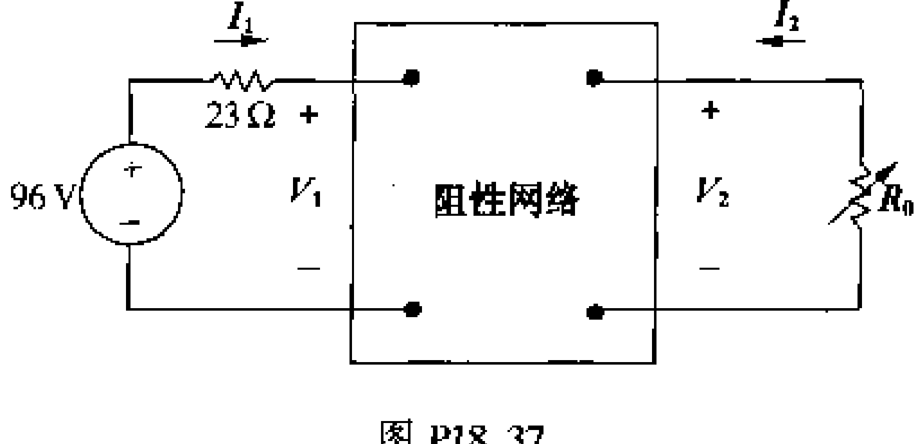


图 P18.37

可变电阻 R_0 接在端口 2，调整 R_0 使其获得最大功率，求最大功率。

18.38 电路如图 P18.38 所示，阻性双端口网络的参数如下：

$$h_{11} = 150\ \Omega \qquad h_{12} = -0.05$$
$$h_{21} = -0.10 \qquad h_{22} = 10^{-4}\ \text{S}$$
$$g_{11} = 0.01S \qquad g_{12} = -4$$
$$g_{21} = 20 \qquad g_{22} = 24\ \text{k}\Omega$$

若 $V_g = 109.5$ V，计算输出电压 V_0。

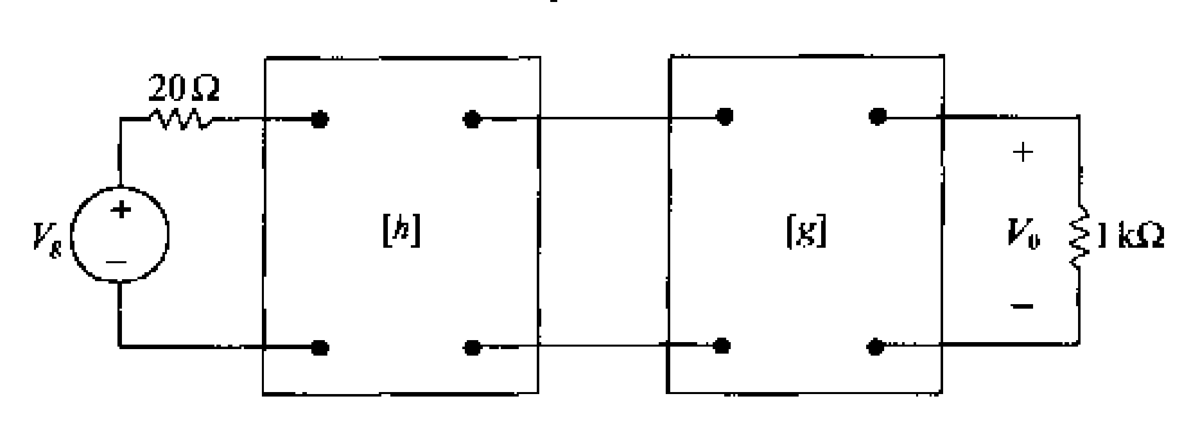


图 P18.38

18.39 图 18.39 (a)中第一个双端口网络的 h 参数如下：

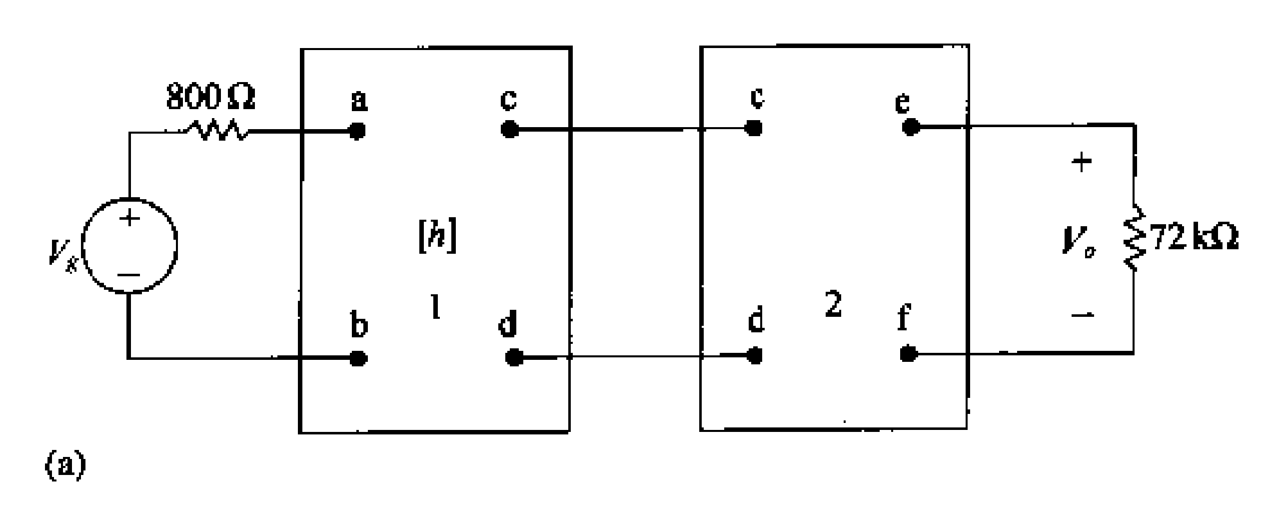
$$h_{11} = 1000\ \Omega, h_{12} = 5 \times 10^{-4}$$
$$h_{21} = 40, h_{22} = 25\ \mu\text{S}$$

第二个双端口网络的电路如图 P18.39(b)所示。其中 $R = 72$ kΩ。若 $V_g = 9$ mV 直流，求 V_o。

18.40 图 P18.40 中网络 A 和 B 是对称互易的。对网络 A，已知 $a'_{11} = 4, a'_{12} = 5\ \Omega$。

(a) 求双端口网络 B 的 a 参数。

(b) 当 $I_2 = 0$ 时，求 V_2/V_1。



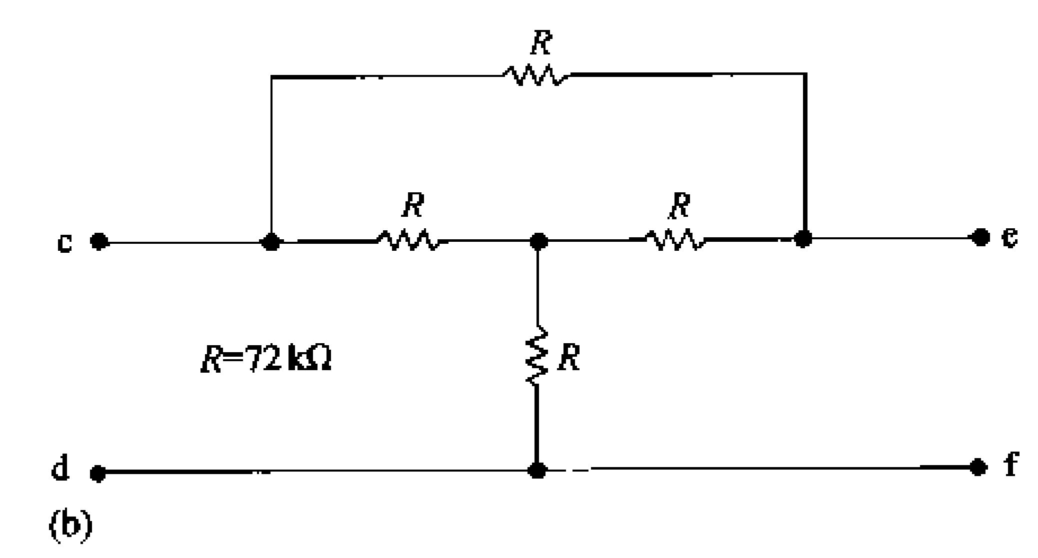


图 P18.39

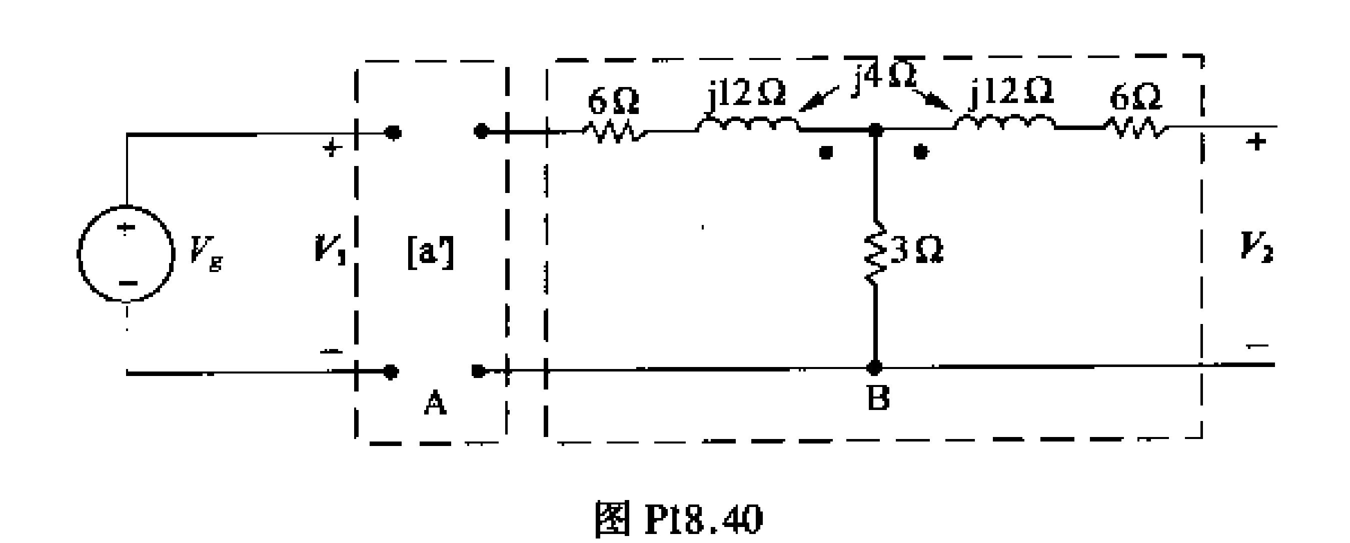


图 P18.40

18.41 (a) 证明图 P18.41 中的电路是满足 h 参数方程的等效电路。

(b) 利用(a)中的 h 参数等效电路求图 18.11 电路中的电压放大倍数 V_2/V_g。

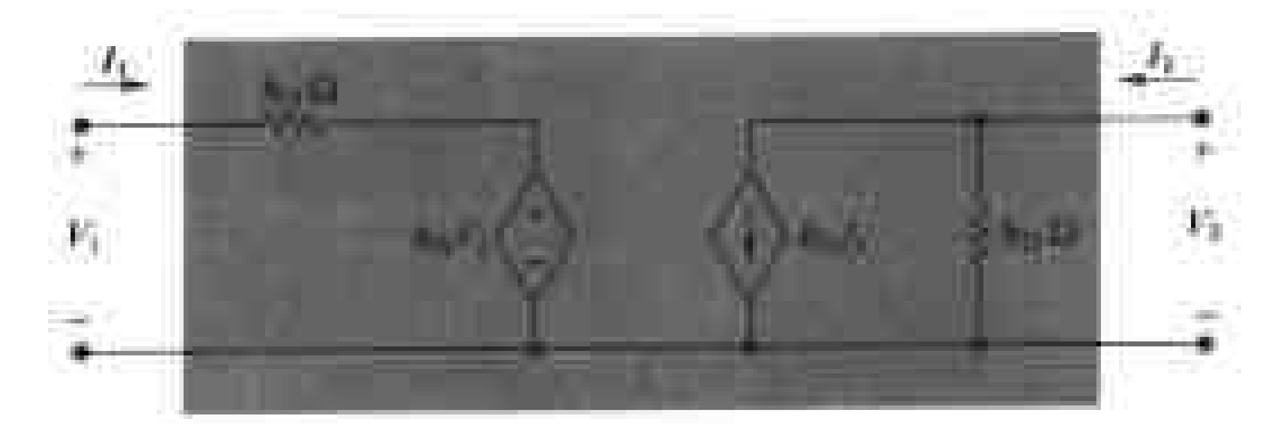


图 P18.41

18.42 (a) 证明图 P18.42 中的电路是满足 z 参数方程的等效电路。

(b) 假设图中的等效电路外加一个电压源，其内阻抗为 Z_g 欧姆，计算端口 2 处的戴维南等效电路。根据表 18.2 中内容验证所得结果。

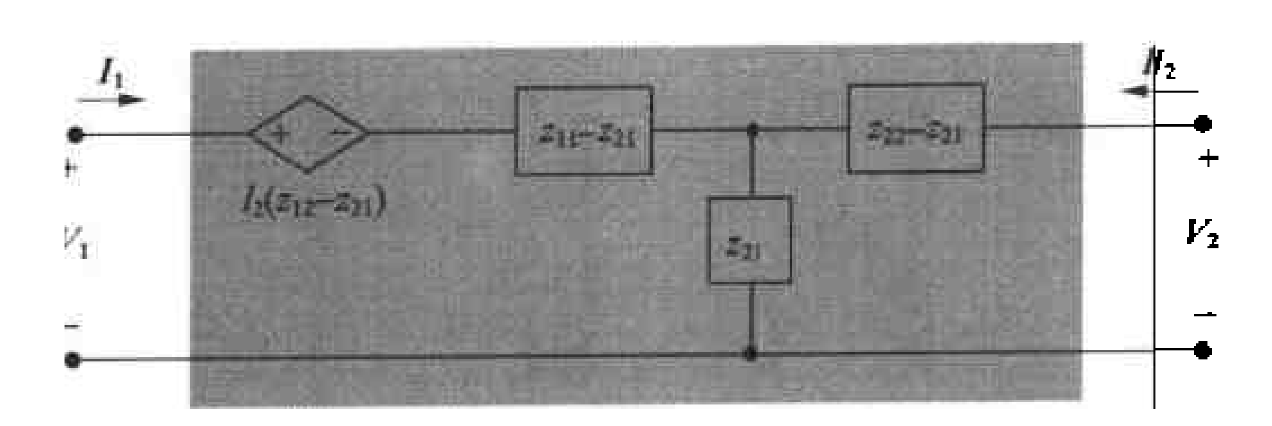


图 P18.42

18.43 (a) 证明图 P18.43 中的电路是满足 z 参数方程的等效电路。

(b) 假设等效电路在端口 2 加一负载阻抗 Z_1 欧姆,求输入阻抗 V_1/I_1,根据表 18.2 中内容验证所得结果。

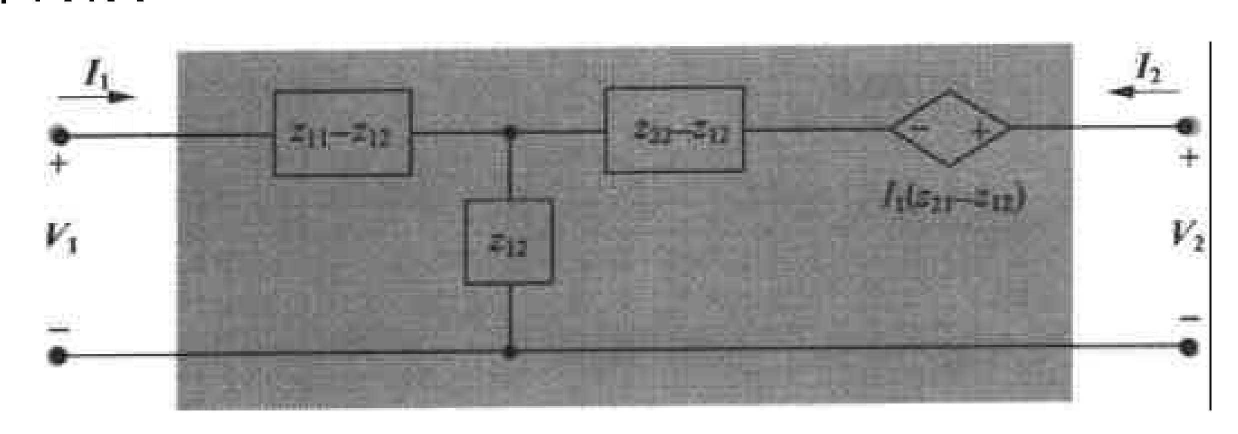


图 P18.43

18.44 (a) 得出满足 y 参数方程的两个等效电路。提示:根据式(18.2),在第一个方程中加上、减去 $y_{21}V_2$,按节点电压方程方式构造一个电路。对第二个方程进行变换可得到另一个等效电路。

(b) 假设在端口 1 处加一内阻抗为 Z_g 的电压源,端口 2 接一阻抗为 Z_L 的负载,求电流放大倍数 I_2/I_1,根据表 18.2 的内容验证所得结果。

18.45 (a) 求出满足 g 参数方程的等效电路。

(b) 用(a)得出的 g 参数的等效电路求习题 18.39 的输出电压。提示:用习题 3.60 化简习题 18.39 的第二个双端口网络。

附录 A　线性联立方程组的求解

电路分析常常涉及到线性方程组的求解。这里主要是复习用行列式解方程组的方法。行列式方法在多数中等代数课本中都有(对工科学生最适合的参考书是 E.A.Guillemin 所著的"the Mathematics of Circuit Analysis"的第一章[NEW YORK:Wiley,1949])。在此复习内容中,仅限于讨论用行列式求解方程组的原理。

A.1　预备知识

用行列式求方程组的第一步是将方程写成矩阵形式,就是将方程按列按排书写,各变量在行中的排列顺序一致。例如在式(A.1)中,变量 i_1, i_2, i_3 分别在第一个、第二个和第三个位置:

$$\begin{aligned} 21i_1 - 9i_2 - 12i_3 &= -33 \\ -3i_1 + 6i_2 - 2i_3 &= 3 \\ -8i_1 - 4i_2 + 22i_3 &= 50 \end{aligned} \qquad (A.1)$$

也可以说 i_1 占每行的第一列,i_2 占每行的第二列,i_3 占每行的第三列,如果方程中不存在某个变量或多个变量,也可以使其前面的系数为零,这样式(A.2)就可以变为方形,如式(A.3)所示:

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 &= 4 \\ 4v_2 + 3v_3 &= 16 \\ 7v_1 + 2v_3 &= 5 \end{aligned} \qquad (A.2)$$

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 + 0v_3 &= 4 \\ 0v_1 + 4v_2 + 3v_3 &= 16 \\ 7v_1 + 0v_2 + 2v_3 &= 5 \end{aligned} \qquad (A.3)$$

A.2　克莱姆法则

方程组中每个未知变量的值可表示为两个行列式值之比。若令具有下标的 N 代表分子行列式,△代表分母行列式,则第 k 个未知数 x_k 为:

$$x_k = \frac{N_k}{\Delta} \qquad (A.4)$$

分母行列式对任何未知变量均为同一个行列式,叫方程组的特征行列式,分子行列式随所求未知数不同而不同。式(A.4)就是解方程组的克莱姆法则。

A.3 特征行列式

将联立方程组写成矩阵形式,如式(A.1)和(A.3)所示,会非常容易地得到特征行列式。该行列式由未知变量的系数矩阵组成。例如式(A.1)和(A.2)的特征行列式分别为:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 21 & -9 & -12 \\ -3 & 6 & -2 \\ -8 & -4 & 22 \end{vmatrix} \tag{A.5}$$

和

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} \tag{A.6}$$

A.4 分子行列式

分子行列式 N_k 是将特征行列式中的第 k 列用方程右侧出现的已知数组成的列代替后得到的,例如,计算式(A.1)中 i_1, i_2, i_3 所用的分子行列式分别为:

$$N_1 = \begin{vmatrix} -33 & -9 & -12 \\ 3 & 6 & -2 \\ 50 & -4 & 22 \end{vmatrix} \tag{A.7}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 21 & -33 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \\ -8 & 50 & 22 \end{vmatrix} \tag{A.8}$$

和

$$N_3 = \begin{vmatrix} 21 & -9 & -33 \\ -3 & 6 & 3 \\ -8 & -4 & 50 \end{vmatrix} \tag{A.9}$$

计算式(A.3)中的 v_1, v_2, v_3 所用的分子行列式为:

$$N_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 16 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} \tag{A.10}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 16 & 3 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} \tag{A.11}$$

和

$$N_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 16 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} \tag{A.12}$$

A.5　行列式的值

行列式的值可根据余子式展开求得。任一元素的余子式是在去掉该元素的行和列后所得的行列式。例如式(A.7)中元素 6 的余子式为：

$$\begin{vmatrix} -33 & -12 \\ 50 & 22 \end{vmatrix}$$

而式(A.7)中元素 22 的余子式为：

$$\begin{vmatrix} -33 & -9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

元素的代数余子式等于它的余子式乘以符号控制因数：

$$(-1)^{(i+j)}$$

其中 i 和 j 分别代表元素所在位置的行和列。这样式(A.7)中元素 6 的代数余子式为：

$$-1^{(2+2)}\begin{vmatrix} -33 & -12 \\ 50 & 22 \end{vmatrix}$$

元素 22 的代数余子式为：

$$-1^{(3+3)}\begin{vmatrix} -33 & -9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

元素的代数余子式也叫元素的符号余子式。

符号控制因子 $(-1)^{(i+j)}$ 根据 $(i+j)$ 值的不同而取 1 或 -1。因此，当按行或列依次取不同元素时，其代数余子式的代数符号在 +1 和 -1 间交替变化。对一个 3×3 的行列式，用 + 和 - 号形成以下方式：

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

行列式可按任何一个行或列展开。展开行列式的第一步是选择行或列。当选定行或列后，该行或列的元素与其代数余子式相乘，行列式的值就是这些积之和。下面以式(A.5)为例，按其第一列展开。根据展开规则，展开式为：

$$\Delta = 21(1)\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} - 3(-1)\begin{vmatrix} -9 & -12 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} - 8(1)\begin{vmatrix} -9 & -12 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \tag{A.13}$$

式(A.13)中的 2×2 行列式也可用余子式展开。其余子式为单一的元素。其展开式为左上角元素乘以右下角元素减去左下角元素乘以右上角元素。计算式(A.13)的值为：

$$\begin{aligned} \Delta &= 21(132-8)+3(-198-48)-8(18+72) \\ &= 2604-738-720=1146 \end{aligned} \tag{A.14}$$

当选择第二行进行展开时，其展开式如下：

$$\begin{aligned} \Delta &= -3(-1)\begin{vmatrix} -9 & -12 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} + 6(+1)\begin{vmatrix} 21 & -12 \\ -8 & 22 \end{vmatrix} - 2(-1)\begin{vmatrix} 21 & -9 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 3(-198-48)+6(462-96)+2(-84-72) \\ &= -738+2196-312=1146 \end{aligned} \tag{A.15}$$

由式(A.7)、式(A.8)和式(A.9)得到的行列式值为：

$$N_1 = 1146 \tag{A.16}$$

$$N_2 = 2292 \tag{A.17}$$

和

$$N_3 = 3438 \tag{A.18}$$

由式(A.15)至式(A.18)得 i_1, i_2 和 i_3 为：

$$i_1 = \frac{N_1}{\Delta} = 1\ \text{A}$$

$$i_2 = \frac{N_2}{\Delta} = 2\ \text{A} \tag{A.19}$$

和

$$i_3 = \frac{N_3}{\Delta} = 3\ \text{A}$$

将求解式(A.3)中 v_1, v_2, v_3 的过程留给读者，其结果为：

$$v_1 = \frac{49}{-5} = -9.8\ \text{V}$$

$$v_2 = \frac{118}{-5} = -23.6\ \text{V} \tag{A.20}$$

和

$$v_3 = \frac{-184}{-5} = 36.8\ \text{V}$$

A.6 矩阵

联立线性方程组也可用矩阵进行求解。下面简要复习一下矩阵的概念、矩阵代数和术语。

矩阵是按矩形排列的元素，即：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{A.21}$$

它是由 m 行 n 列元素组成的矩阵。$\boldsymbol{A}$ 叫 $m \times n$ 阶矩阵。其中 m 为行数，n 为列数。总是行在前，列在后。矩阵的元素可为实数、复数或函数。用黑体大写字母代表矩阵。

式 (A.21) 中的阵列常简写为：

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{mn} \tag{A.22}$$

其中 a_{ij}是第 i 行第 j 列的元素。

若 $m = 1$，$\boldsymbol{A}$ 就称为行矩阵，即：

$$\boldsymbol{A} = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots\ a_{1n}] \tag{A.23}$$

若 $n = 1$，$\boldsymbol{A}$ 就称为列矩阵，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \tag{A.24}$$

若 $m = n$，A 就称为方阵。例如若 $m = n = 3$，则三阶方阵为：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{A.25}$$

应当注意的是：用方括号表示矩阵，而双竖线表示行列式，一定要将它们区别开来。矩阵是元素的矩形排列。行列式是元素组成的方形阵列的函数。因此，若一个矩阵为方阵，就可以定义该方阵的行列式。例如，若：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

则：

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 30 - 6 = 24$$

A.7 矩阵代数

只有同阶矩阵才能进行等于、加、减运算。两个矩阵，当且仅当其对应元素相等时，这两个矩阵才相等。即对所有的 i, j 值，只有当 $a_{ij} = b_{ij}$ 时，$A = B$ 才成立。例如式(A.26)和式(A.27)两个矩阵，因 $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{21} = b_{21}, a_{22} = b_{22}$，所以这两个矩阵才相等。

$$A = \begin{bmatrix} 36 & -20 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} \tag{A.26}$$

$$B = \begin{bmatrix} 36 & -20 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} \tag{A.27}$$

若 A 和 B 矩阵是同阶的，则：

$$C = A + B \tag{A.28}$$

可以表示为：

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{A.29}$$

例如，如果：

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 10 \\ 8 & 12 & -4 \end{bmatrix} \tag{A.30}$$

和

$$B = \begin{bmatrix} 16 & 10 & -30 \\ -20 & 8 & 15 \end{bmatrix} \tag{A.31}$$

则：

$$C=\begin{bmatrix}20 & 4 & -20\\ -12 & 20 & 11\end{bmatrix} \tag{A.32}$$

方程：

$$D=A-B \tag{A.33}$$

表示：

$$d_{ij}=a_{ij}-b_{ij} \tag{A.34}$$

由式(A.30)和式(A.31)，得：

$$D=\begin{bmatrix}-12 & -16 & 40\\ 28 & 4 & -19\end{bmatrix} \tag{A.35}$$

对同阶矩阵加减运算而言，同阶矩阵被认为是匹配的。

矩阵乘以 k 等于各元素乘以 k。当且仅当 $a_{ij}=kb_{ij}$ 时，$A=kB$，k 可为实数也可以为复数。例如将式(A.35)的矩阵乘以 5 得：

$$5D=\begin{bmatrix}-60 & -80 & 200\\ 140 & 20 & -95\end{bmatrix} \tag{A.36}$$

只有当第一个矩阵的列数与第二个矩阵的行数相等时，两个矩阵才能进行乘积运算。就是说，AB 相乘要求 A 的列数等于 B 的行数。乘积所得矩阵的行和列分别是 A 的行数，B 的列数。即，如用 $C=AB$，其中 A 为 $m\times n$ 阶，B 为 $n\times n$ 阶，则 C 为 $m\times n$ 阶。当 A 的列数等于 B 的行数时，则认为 A 与 B 的乘法是匹配的。

矩阵 C 的元素由下式给出：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \tag{A.37}$$

如果记住矩阵的乘积是行乘以列的运算，则式(A.37)所给出的表达式很容易应用。要求 C 中第 ij 项等于 A 中的第 i 行每一项乘以 B 中第 j 列对应的项，再将各乘积相加就可以得到 C 中第 ij 项。下例说明了该过程。求矩阵 C，已知：

$$A=\begin{bmatrix}6 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 6\end{bmatrix} \tag{A.38}$$

和

$$B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix} \tag{A.39}$$

首先要注意，C 矩阵为 2×2 阶，且 C 中每一项是三个积之和。

为求 c_{11}，将 A 中第一行的各元素与 B 中第 1 列各对应元素的积相加。取出各矩阵中对应的行和列并依次排列成行，就可以看到乘积与相加的过程。因此，求 c_{11} 时：

A 的第一行	6	3	2
B 的第一列	4	0	1

因此：

$$c_{11}=6\times 4+3\times 0+2\times 1=26$$

为求 c_{12}，有：

A 的第一行　6 | 3 | 2
B 的第--列　2 | 3 | −2

因此：

$$c_{12} = 6 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times (-2) = 17$$

对 c_{21}，有：

A 的第一行　1 | 4 | 6
B 的第一列　4 | 0 | 1

得到：

$$c_{21} = 1 \times 4 + 4 \times 0 + 6 \times 1 = 10$$

最后求 c_{22}，有：

A 的第一行　1 | 4 | 6
B 的第一列　2 | 3 | −2

得到：

$$c_{22} = 1 \times 2 + 4 \times 3 + 6 \times (-2) = 2$$

结果为：

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 26 & 17 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \tag{A.40}$$

一般情况下，矩阵乘积不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$。例如对式(A.38)和式(A.39)中的矩阵乘积 $\boldsymbol{BA}$。所得矩阵为 3×3 阶，并且其中每项元素均是两个乘积之和。

因此，若令 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{BA}$，则得：

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 26 & 20 & 20 \\ 3 & 12 & 18 \\ 4 & -5 & -10 \end{bmatrix} \tag{A.41}$$

显然 $\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{D}$。式(A.41)中各元素的验证留给读者。

矩阵乘积满足结合律和分配律，即：

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) \tag{A.42}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC} \tag{A.43}$$

和

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC} \tag{A.44}$$

在式(A.42)、式(A.43)和式(A.44)中，假设各矩阵对加法和乘法匹配。已知矩阵的乘积不符合交换律，另外还有两个乘法特性不适用于矩阵运算。

第一，矩阵乘积 $\boldsymbol{AB} = 0$ 并不表示 $\boldsymbol{A} = 0$ 或 $\boldsymbol{B} = 0$(注意：当矩阵的所有元素为 0 时，矩阵为 0)。

例如，若：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

则：

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

因此,积为零,但 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都不为零。

第二,矩阵方程 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,不表示 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$,例如,若:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 4\\7 & 8\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$$

则:

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$$

转置矩阵是将矩阵的行列对调生成的,例如,若:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}\quad 则\ \boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

矩阵之和的转置等于矩阵转置之和,即:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T \tag{A.45}$$

两矩阵乘积的转置等于转置矩阵的反序乘积,即:

$$[\boldsymbol{AB}]^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \tag{A.46}$$

式(A.46)可推广为多个矩阵的乘积,例如:

$$[\boldsymbol{ABCD}]^T=\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \tag{A.47}$$

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$,则 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。只有方阵才有对称矩阵。

A.8 单位矩阵、伴随矩阵和逆矩阵

单位矩阵是一个方阵,其中 $i\neq j$ 时,$a_{ij}=0$,当 $i=j$ 时,$a_{ij}=1$,即除主对角元素为 1 以外,所有元素均为 0。例如:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

均为单位矩阵。单位矩阵总是方阵,用 $\boldsymbol{U}$ 表示。

$n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵定义为:

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}=[\Delta_{ji}]_{n\times n} \tag{A.48}$$

其中 Δ_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式(见 A.5 节关于代数余子式的定义)。根据式(A.48)的定义,求方阵的伴随矩阵可分为两步。第一步,构造一个由 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式组成的矩阵,然后将其转置。例如,求一个 3×3 阶矩阵的伴随矩阵,已知:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\\-1 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 中元素的代数余子式为:

$$\Delta_{11}=1(10-1)=9$$
$$\Delta_{12}=-1(15+1)=-16$$

$$\Delta_{13} = 1(3+2) = 5$$
$$\Delta_{21} = -1(10-3) = -7$$
$$\Delta_{22} = 1(5+3) = 8$$
$$\Delta_{23} = -1(1+2) = -3$$
$$\Delta_{31} = 1(2-6) = -4$$
$$\Delta_{32} = -1(1-9) = 8$$
$$\Delta_{33} = 1(2-6) = -4$$

代数余子式矩阵为：

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 9 & -16 & 5 \\ -7 & 8 & -3 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

因此，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为：

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} 9 & -7 & -4 \\ -16 & 8 & 8 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

可以用下面的定理验证伴随矩阵的求法：

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{U} \tag{A.49}$$

式(A.49)说明，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵乘以 $\boldsymbol{A}$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 行列式值乘以单位阵。对上述的例子，有：

$$\det \boldsymbol{A} = 1(9) + 3(-7) - 1(-4) = -8$$

若令 $\boldsymbol{C} = \mathrm{adj}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$，并用 A.7 节的方法求得 $\boldsymbol{C}$ 的元素为：

$$c_{11} = 9 - 21 + 4 = -8$$
$$c_{12} = 18 - 14 - 4 = 0$$
$$c_{13} = 27 - 7 - 20 = 0$$
$$c_{21} = -16 + 24 - 8 = 0$$
$$c_{22} = -32 + 16 + 8 = -8$$
$$c_{23} = -48 + 8 + 40 = 0$$
$$c_{31} = 5 - 9 + 4 = 0$$
$$c_{32} = 10 - 6 - 4 = 0$$
$$c_{33} = 15 - 3 - 20 = -8$$

因此：

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = -8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{U}$$

若式(A.50)成立，则 $\boldsymbol{A}$ 方阵具有逆矩阵。记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$：

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{U} \tag{A.50}$$

式(A.50)表明，一个矩阵无论是左乘还是右乘其逆矩阵，结果均等于单位矩阵。若一个矩阵的逆矩阵存在，则该矩阵的行列式值不为零。只有方阵有逆矩阵，逆矩阵也为方阵。

求逆矩阵的公式为：

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{\det A} \tag{A.51}$$

如果矩阵大于 3 阶,该公式就非常麻烦。现在的数字计算机技术使矩阵运算变得非常容易。

由式(A.51)得到上例中矩阵的逆为:

$$A^{-1}=-1/8\begin{bmatrix}9 & -7 & -4\\ -16 & 8 & 8\\ 5 & -3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.125 & 0.875 & 0.5\\ 2 & -1 & -1\\ -0.625 & 0.375 & 0.5\end{bmatrix}$$

可以验证:

$$A^{-1}A=AA^{-1}=U$$

A.9 分块矩阵

将已知的矩阵划分为子矩阵,在矩阵的处理中常常带来很多方便。前面提到的代数运算就可以根据子矩阵进行。矩阵的分块完全是任意的,惟一限制的是必须对整个矩阵进行分割。在选择块时,还要保证子块要与所进行的运算相匹配。

例如,用子矩阵求积 $C=AB$。其中:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

和

$$B=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$$

假设将 B 分为两个子矩阵 B_{11} 和 B_{21},即:

$$B=\begin{bmatrix}B_{11}\\ B_{21}\end{bmatrix}$$

因 B 已经分成两行的列矩阵,所以,A 必须分成两列的矩阵,否则,乘法运算就不能进行了。A 矩阵中子块的列数也必须根据 B_{11} 和 B_{21} 确定。

例如,若:

$$B_{11}=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\quad B_{21}=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$$

则 A_{11}必须含三列，A_{12}必须含二列，式(A.52)的分块结果才能进行乘积运算：

$$C=\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ \cdots \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.52}$$

另外，若按如下方式分解 B：

$$B_{11}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{21}=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则 A_{11}必须含两列，A_{12}必须含三列，式(A.53)的分块方法才能进行乘积运算：

$$A=\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \cdots \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.53}$$

将式(A.53)分块结果的验证留给读者，下面集中讨论式(A.52)的分块方法。

由式(A.52)得：

$$C=[A_{11} \quad A_{12}]\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}=A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} \tag{A.54}$$

由式(A.52)和(A.54)得：

$$A_{11}B_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -9 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

和

$$C=\begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ -13 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

当一个矩阵的垂直分割适合于乘法运算后,也可以水平分割。在这个简单问题中,经过分析就可以进行水平分割,因此,$\boldsymbol{C}$ 也可用式(A.55)的分块法运算:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & | & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 2 & | & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ \cdots \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.55}$$

由式(A.55)得:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} \\ \boldsymbol{B}_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{11} \\ \boldsymbol{C}_{21} \end{bmatrix} \tag{A.56}$$

其中:

$$\boldsymbol{C}_{11}=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21}$$
$$\boldsymbol{C}_{21}=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}$$

验证如下:

$$\boldsymbol{C}_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{C}_{21}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ -13 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

式(A.52)和式(A.55)的分割方式对加法也是可进行的。

A.10 实际应用

下面的例题说明了矩阵运算在电路分析中的应用。

例 A.1 用矩阵方法求式(4.5)和式(4.6)中的 v_1 和 v_2。

解：

首先将式(4.5)和式(4.6)以矩阵形式重新写出来，将 v_1 和 v_2 的系数整理出来，同时将常数项移到方程右侧：

$$1.7v_1 - 0.5v_2 = 10 \qquad (A.57)$$
$$-0.5v_1 + 0.6v_2 = 2$$

式(A.57)变为下面的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1.7 & -0.5 \\ -0.5 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (A.58)$$

或：

$$\boldsymbol{AV} = \boldsymbol{I} \qquad (A.59)$$

其中：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & -0.5 \\ -0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

为求得矩阵 $\boldsymbol{V}$ 的各元素，将式(A.59)的两边同时乘以 A 的逆矩阵，得：

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AV} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I} \qquad (A.60)$$

式(A.60)化简为：

$$\boldsymbol{UV} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I} \qquad (A.61)$$

或：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I} \qquad (A.62)$$

下面根据式(A.62)，求解矩阵乘积 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}$ 得 v_1 和 v_2 的解。

为求得 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，先求 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式，即：

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^2(0.6) = 0.6 \\ \Delta_{12} &= (-1)^3(-0.5) = 0.5 \\ \Delta_{21} &= (-1)^3(-0.5) = 0.5 \\ \Delta_{22} &= (-1)^4(1.7) = 1.7 \end{aligned} \qquad (A.63)$$

矩阵的代数余子式为：

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 1.7 \end{bmatrix} \qquad (A.64)$$

且 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为：

$$\text{adj}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 1.7 \end{bmatrix} \qquad (A.65)$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为：

$$\det A = \begin{vmatrix} 1.7 & -05 \\ -0.5 & 0.6 \end{vmatrix} = (1.7)(0.6) - (0.25) = 0.77 \tag{A.66}$$

根据式(A.65)和式(A.66)可写出系数矩阵的逆矩阵,即:

$$A^{-1} = \frac{1}{0.77}\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 1.7 \end{bmatrix} \tag{A.67}$$

于是可求出乘积 $A^{-1}I$ 为:

$$\begin{aligned} A^{-1}I &= \frac{100}{77}\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 1.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{100}{77}\begin{bmatrix} 7 \\ 8.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.09 \\ 10.91 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{A.68}$$

直接得出:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.09 \\ 10.91 \end{bmatrix} \tag{A.69}$$

或 $v_1 = 9.09$ V, $v_2 = 10.91$ V。

例 A.2 用矩阵法求图 4.24 中电路的三个网孔电流。

解:

图 4.24 中电路的网孔电流方程由式(4.34)给出,由电流控制电压源提供的约束方程由式(4.35)给出,将式(4.35)代入式(4.34)后得到方程:

$$\begin{aligned} 25i_1 - 5i_2 - 20i_3 &= 50 \\ -5i_1 + 10i_2 - 4i_3 &= 0 \\ -5i_1 - 4i_2 + 9i_3 &= 0 \end{aligned} \tag{A.70}$$

以矩阵形式将式(A.70)化简为:

$$AI = V \tag{A.71}$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -5 & -20 \\ -5 & 10 & -4 \\ -5 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

和

$$V = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由式(A.71)得 I 的解为:

$$I = A^{-1}V \tag{A.72}$$

利用下式可得 A 的逆矩阵,即:

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{\det A} \tag{A.73}$$

为求 A 的伴随矩阵，先计算 A 的代数余子式，即：

$$\Delta_{11}=(-1)^2(90-16)=74$$
$$\Delta_{12}=(-1)^3(-45-20)=65$$
$$\Delta_{13}=(-1)^4(20+50)=70$$
$$\Delta_{21}=(-1)^3(-45-80)=125$$
$$\Delta_{22}=(-1)^4(225-100)=125$$
$$\Delta_{23}=(-1)^5(-100-25)=125$$
$$\Delta_{31}=(-1)^4(20+200)=220$$
$$\Delta_{32}=(-1)^5(-100-100)=200$$
$$\Delta_{33}=(-1)^6(250-25)=225$$

代数余子式为：

$$B=\begin{bmatrix}74 & 65 & 70\\125 & 125 & 125\\220 & 200 & 225\end{bmatrix} \tag{A,74}$$

根据该矩阵，可写出 A 的伴随矩阵为：

$$\mathrm{adj}\ A=B^T=\begin{bmatrix}74 & 125 & 220\\65 & 125 & 200\\70 & 125 & 225\end{bmatrix} \tag{A.75}$$

矩阵 A 的行列式值为：

$$\det A=\begin{vmatrix}25 & -5 & -20\\-5 & 10 & -4\\-5 & -4 & 9\end{vmatrix}$$
$$=25(90-16)+5(-45-80)-5(20+200)=125$$

由式(A.73)得：

$$A^{-1}=\frac{1}{125}\begin{bmatrix}74 & 125 & 220\\65 & 125 & 200\\70 & 125 & 225\end{bmatrix} \tag{A.76}$$

电流 I 的解为：

$$I=\frac{1}{125}\begin{bmatrix}74 & 125 & 220\\65 & 125 & 200\\70 & 125 & 225\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29.60\\26.00\\28.00\end{bmatrix} \tag{A.77}$$

由式(A.77)直接求得网孔电流如下：

$$\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29.6\\26.0\\28.0\end{bmatrix} \tag{A.78}$$

或 $i_1=29.6$ A，$i_2=26$ A，$i_3=28$ A。

例 A.3 说明了当矩阵元素为复数时矩阵法的应用。

例 A.3 用矩阵法求图 9.37 所示电路中的网孔电流相量 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$。

解:

将网孔 1 的电压相加得方程:

$$(1+\mathrm{j}2)\boldsymbol{I}_1+(12-\mathrm{j}16)(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{I}_2)=150\underline{/0^\circ} \tag{A.79}$$

沿网孔的电压相加得方程:

$$(12-\mathrm{j}16)(\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{I}_1)+(1+\mathrm{j}3)\boldsymbol{I}_2+39\boldsymbol{I}_x=0 \tag{A.80}$$

控制受控电压源的电源为:

$$\boldsymbol{I}_x=(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{I}_2) \tag{A.81}$$

将式(A.81)代入式(A.80),合并方程中系数,将方程写成矩阵形式。得:

$$\begin{aligned}(13-\mathrm{j}14)\boldsymbol{I}_1-(12-\mathrm{j}16)\boldsymbol{I}_2&=150\underline{/0^\circ}\\(27+\mathrm{j}16)\boldsymbol{I}_1-(26+\mathrm{j}13)\boldsymbol{I}_2&=0\end{aligned} \tag{A.82}$$

将其表示为矩阵标记为:

$$\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{V} \tag{A.83}$$

其中:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}13-\mathrm{j}14 & -(12-\mathrm{j}16)\\27+\mathrm{j}16 & -(26+\mathrm{j}13)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}150\underline{/0^\circ}\\0\end{bmatrix}$$

由式(A.83)得:

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{V} \tag{A.84}$$

由式(A.73)可求得参数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。此时 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式为:

$$\begin{aligned}\Delta_{11}&=(-1)^2(-26-\mathrm{j}13)=-26-\mathrm{j}13\\\Delta_{12}&=(-1)^3(27+\mathrm{j}16)=-27-\mathrm{j}16\\\Delta_{21}&=(-1)^3(-12+\mathrm{j}16)=12-\mathrm{j}16\\\Delta_{22}&=(-1)^4(13-\mathrm{j}14)=13-\mathrm{j}14\end{aligned}$$

代数余子式矩阵为:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}(-26-\mathrm{j}13) & (-27-\mathrm{j}16)\\(12-\mathrm{j}16) & (13-\mathrm{j}14)\end{bmatrix} \tag{A.85}$$

$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为:

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^T=\begin{bmatrix}(-26-\mathrm{j}13) & (12-\mathrm{j}16)\\(-27-\mathrm{j}16) & (13-\mathrm{j}14)\end{bmatrix} \tag{A.86}$$

$\boldsymbol{A}$ 的行列式为:

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{A}&=\begin{vmatrix}(13-\mathrm{j}14) & -(12-\mathrm{j}16)\\(27+\mathrm{j}16) & -(26+\mathrm{j}13)\end{vmatrix}\\&=-(13-\mathrm{j}14)(26+\mathrm{j}13)+(12-\mathrm{j}16)(27+\mathrm{j}16)\\&=60-\mathrm{j}45\end{aligned} \tag{A.87}$$

参数矩阵的逆矩阵为:

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}(-26-j13) & (12-j16)\\(-27-j16) & (13-j14)\end{bmatrix}}{(60-j45)} \tag{A.88}$$

式(A.88)可简化为：

$$\begin{aligned}A^{-1}&=\frac{60+j45}{5625}\begin{bmatrix}(-26-j13) & (12-j16)\\(-27-j16) & (-13-j14)\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{375}\begin{bmatrix}-65-j130 & 96-j28\\-60-j145 & 94-j17\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{A.89}$$

将式(A.89)代入式(A.84)，得：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}&=\frac{1}{375}\begin{bmatrix}(-65-j130) & (96-j28)\\(-60-j145) & (94-j17)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}150\angle 0^\circ\\0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}(-26-j52)\\(-24-j58)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{A.90}$$

由式(A.90)得：

$$\begin{aligned}I_1&=(-26-j52)=58.14\angle -116.57^\circ\ \text{A}\\I_2&=(-24-j58)=62.77\angle -122.48^\circ\ \text{A}\end{aligned} \tag{A.91}$$

前面三个例子中，矩阵的元素分别为实数、复数。元素也可以是函数。例 A.4 说明了在电路求解过程中，当参数矩阵的各元素为函数时矩阵代数的应用。

例 A.4　用矩阵法求图 A.1 电路中节点电压 V_1 和 V_2 的表达式。

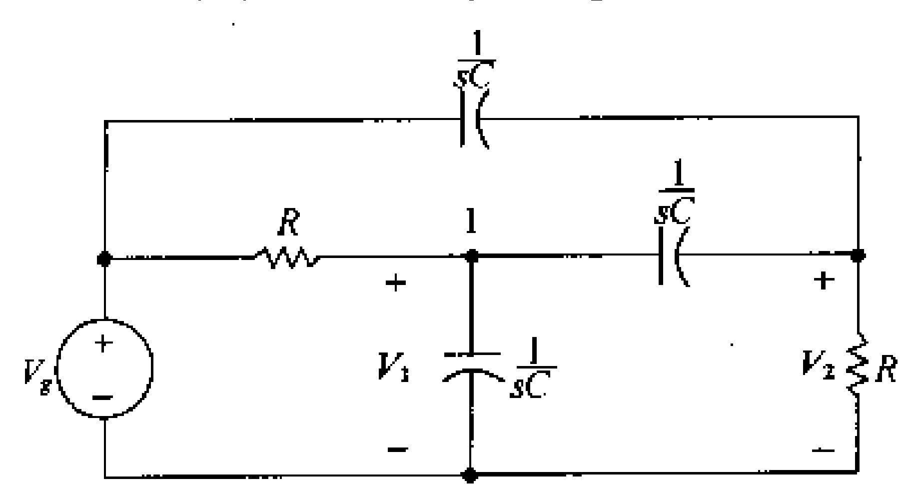


图 A.1　例 A.4 的电路图

解：

将流出节点 1 和 2 的电流分别相加，得到以下方程组：

$$\begin{aligned}&\frac{V_1-V_g}{R}+V_1sC+(V_1-V_2)sC=0\\&\frac{V_2}{R}+(V_2-V_1)sC+(V_2-V_g)sC=0\end{aligned} \tag{A.92}$$

令 $G=1/R$，并将 V_1 和 V_2 的参数合并得：

$$\begin{aligned}(G+2sC)V_1-sCV_2&=GV_g\\-sCV_1+(G+2sC)V_2&=sCV_g\end{aligned} \tag{A.93}$$

以矩阵符号写出式(A.93)得：

$$AV=I \tag{A.94}$$

其中:

$$A=\begin{bmatrix} G+2sC & -sC \\ -sC & G+2sC \end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad I=\begin{bmatrix} GV_g \\ sCV_g \end{bmatrix}$$

由式(A.94)得:

$$V=A^{-1}I \tag{A.95}$$

与前述相同,先求 A 的伴随矩阵和行列式值,然后求参数矩阵的逆矩阵。A 的代数余子式为:

$$\Delta_{11}=(-1)^2[G+2sC]=G+2sC$$
$$\Delta_{12}=(-1)^3(-sC)=sC$$
$$\Delta_{21}=(-1)^3(-sC)=sC$$
$$\Delta_{22}=(-1)^4[G+2sC]=G+2sC$$

系数的代数余子式为:

$$B=\begin{bmatrix} G+2sC & Sc \\ sC & G+2sC \end{bmatrix} \tag{A.96}$$

参数矩阵的伴随矩阵为:

$$\text{adj } A=B^T=\begin{bmatrix} G+2sC & sC \\ sC & G+2sC \end{bmatrix} \tag{A.97}$$

A 的行列式值为:

$$\det A=\begin{vmatrix} G+2sC & sC \\ sC & G+2sC \end{vmatrix}=G^2+4sCG+3s^2C^2 \tag{A.98}$$

参数矩阵的逆矩阵为:

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} G+2sC & sC \\ sC & G+2sC \end{bmatrix}}{(G^2+4sCG+3s^2C^2)} \tag{A.99}$$

由式(A.95)得:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix} G+2sC & sC \\ sC & G+2sC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} GV_g \\ sCV_g \end{bmatrix}}{(G^2+4sCG+3s^2C^2)} \tag{A.100}$$

化简式(A.100)得:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{(G^2+4sCG+3s^2C^2)}\begin{bmatrix} (G^2+2sCG+s^2C^2)V_g \\ (2sCG+2s^2C^2)V_g \end{bmatrix} \tag{A.101}$$

现在 V_1 和 V_2 的表达式可直接由式(A.101)写出,即:

$$V_1=\frac{(G^2+2sCG+s^2C^2)V_g}{(G^2+4sCG+3s^2C^2} \tag{A.102}$$

和

$$V_2=\frac{2(sCG+s^2C^2)V_g}{(G^2+4sCG+3s^2C^2)} \tag{A.103}$$

在最后这个例子中，说明了如何在级联双端口网络分析中应用矩阵代数。

例 A.5　试说明如何用矩阵代数法将图 8.10 中级联电路中的输入变量 V_1 和 I_1 表示成输出变量 V_2 和 I_2 的函数。

解：

先将每个双端口网络的输入输出变量的关系表示成矩阵形式，即：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & -a'_{12} \\ a'_{21} & -a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_2 \\ I'_2 \end{bmatrix} \tag{A.104}$$

和

$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a''_{11} & -a''_{12} \\ a''_{21} & -a''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{A.105}$$

由于级联关系，约束条件为：

$$V_2' = V_1' \quad I_2' = -I_1' \tag{A.106}$$

将这些限制代入到方程中，得：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a'_{11} & -a'_{12} \\ a'_{21} & -a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_1 \\ -I'_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{A.107}$$

将式(A.105)代入式(A.107)中，得到输入和输出变量间的关系，结果为：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a''_{11} & -a''_{12} \\ a''_{21} & -a''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{A.108}$$

将系数矩阵相乘，得：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21}) & -(a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22}) \\ (a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21}) & -(a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{A.109}$$

式(A.109)与式(18.72)和式(18.73)相一致。

附录B 复　数

发明复数是为了对负数开方运算，它使许多复杂问题得到简化。例如方程 $x^2+8x+41$ 在复数外无解。这些数在电路分析中非常有用，也能够进行代数运算。

B.1 符号

复数有两种表示方法：笛卡尔坐标或叫直角坐标方式、极坐标或叫三角法。用直角坐标时，复数是由实部和虚部组成，即：

$$n = a + \mathrm{j}b \tag{B.1}$$

其中 a 是实部，b 是虚部，j 是虚数单位，定义为 $\sqrt{-1}$。

用极坐标表示时，复数是根据它的幅值（模）和相角（或幅角）写为：

$$n = c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \tag{B.2}$$

其中 C 是幅值，θ 是相角，e 是自然对数的底。同样 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$。在有些文献资料中常常用符号 $\underline{/\theta°}$ 代替 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$；这就是极坐标形式：

$$n = c\,\underline{/\theta°} \tag{B.3}$$

尽管式(B.3)在课本中比较方便，但式(B.2)在数学处理中是主要的，因为处理指数很方便。例如，因 $(y^x)^n = y^{xn}$，则 $(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta n}$；因 $y^{-x} = 1/y^x$，则 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = 1/\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$，等等。

因复数有两种表示方法，所以，要建立这两种表示法之间的关系。从极坐标转化为直角坐标形式要用欧拉公式：

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\theta} = \cos\theta \pm \mathrm{j}\sin\theta \tag{B.4}$$

以极坐标形式表示的复数也可以写为直角坐标形式：

$$\begin{aligned} c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} &= c(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) \\ &= c\cos\theta + \mathrm{j}c\sin\theta \\ &= a + \mathrm{j}b \end{aligned} \tag{B.5}$$

从直角坐标转化为极坐标用到了直角三角几何学，即：

$$\begin{aligned} a + \mathrm{j}b &= (\sqrt{a^2+b^2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \\ &= c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \end{aligned} \tag{B.6}$$

其中：

$$\tan\theta = b/a \tag{B.7}$$

式 (B.7) 中，相角 θ 在第几象限不是很明显。但复数的图形表示法就很清楚。

B.2 复数的图形表示

复数可以用复平面上的图形表示，横轴表示实部，纵轴表示虚部。复数的角是从正实轴开始按

逆时针方向计量。若假设 a 和 b 均是正数，则复数 $n=a+\mathrm{j}b=c\,\angle\theta°$ 就可以用图 B.1 来表示。

该图使复数的直角坐标和极坐标之间的关系表现得非常清楚。复平面上任意一点，若给定了它与各轴间的距离（a 和 b）或与原点的径向距离和扇形角。则该复数就惟一地确定了。

根据图 B.1 可知，当 a 和 b 均为正数时，θ 在第一象限；当 a 为负，b 为正时，θ 在第二象限；当 a 和 b 均为负数时，θ 在第三象限；当 a 为正，b 为负数时，θ 在第四象限。结果如图 B.2 所示，图中画出了四个复数。

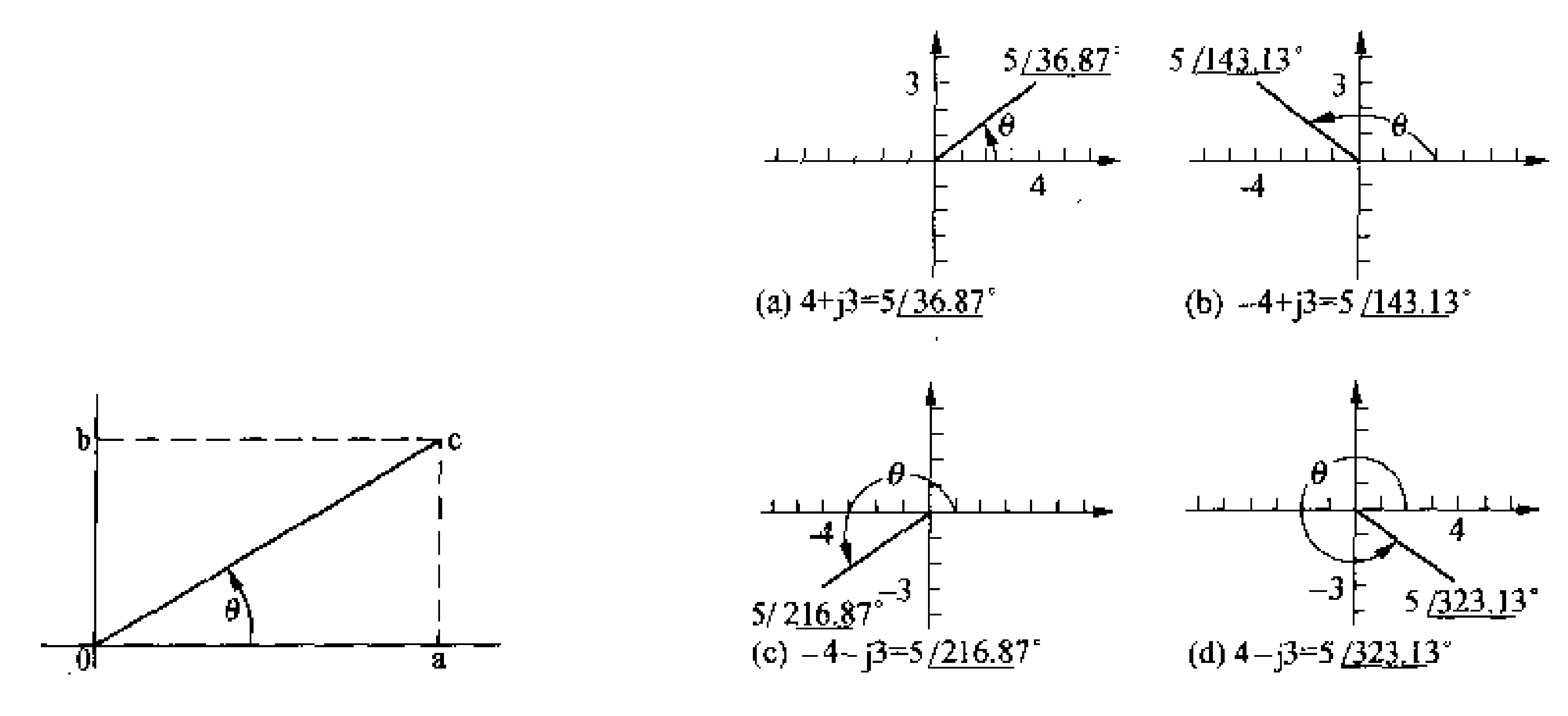


图 B.1 当 a 和 b 均为正数时 $a+\mathrm{j}b$ 的图形表示

图 B.2 四个复数的图形表示

也可以从正实轴开始以顺时针方向计量相角值。这样在图 B.2(c)中，$-4-\mathrm{j}3$ 就可表示为 $5\,\angle-143.13°$，在图 B.2(d)中可以看出 $5\,\angle 323.13°=5\,\angle-36.87°$。当 θ 位于第三或第四象限时，习惯于将 θ 表示为负值。

复数的图形表示法也表明了一个复数和它的共轭复数之间的关系。一个复数的共轭复数是将其虚部符号取反后得到的复数。因此，$a+\mathrm{j}b$ 的共轭复数为 $a-\mathrm{j}b$，而 $-a+\mathrm{j}b$ 的共轭复数为 $-a-\mathrm{j}b$。当用极坐标形式表示一个复数时，只要将其幅角的符号取反后就得到它的共轭复数。因此，$c\,\angle\theta°$ 的共轭复数是 $c\,\angle-\theta°$。复数的共轭复数用星号表示。即 N^* 表示的是 N 的共轭复数。图 B.3 表示了画在复平面上的两个复数和它们的共轭复数。

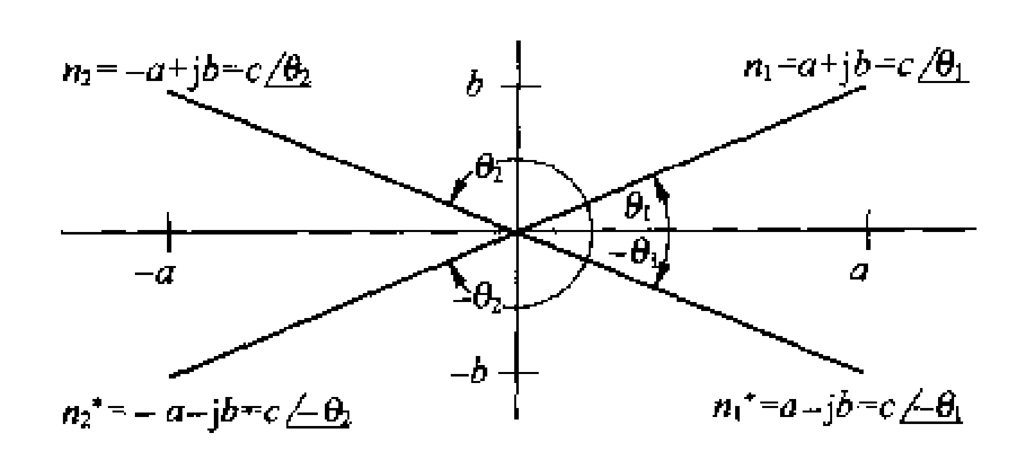


图 B.3 复数 N_1 和 N_2 以及它们的共轭复数 N_1^* 和 N_2^*

共轭复数简单地反映了复数关于实轴的关系。

B.3 数学运算

B.3.1 加法(减法)

复数进行加、减运算时,必须将复数表示成直角坐标形式。复数相加,实部和虚部分别相加。例如,已知:

$$n_1 = 8 + j16$$

和

$$n_2 = 12 - j3$$

则:

$$n_1 + n_2 = (8 + 12) + j(16 - 3) = 20 + j13$$

减法也遵循这个原则,即:

$$n_2 - n_1 = (12 - 8) + j(-3 - 16) = 4 - j19$$

若要进行复数的加减运算,而复数是以极坐标形式给出,那么首先要将其转化为直角坐标形式。

例如,若:

$$n_1 = 10\,\underline{/53.13^\circ}$$

和

$$n_2 = 5\,\underline{/-135^\circ}$$

则:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= 6 + j8 - 3.535 - j3.535 \\ &= (6 - 3.535) + j(8 - 3.535) \\ &= 2.465 + j4.465 = 5.10\,\underline{/61.10^\circ} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 &= 6 + j8 - (-3.535 - j3.535) \\ &= 9.535 + j11.535 \\ &= 14.966\,\underline{/50.42^\circ} \end{aligned}$$

B.3.2 乘法(除法)

复数的乘法和除法用直角坐标形式和极坐标形式均可以进行。但在多数情况下,极坐标形式更方便,例如,当 $n_1 = 8 + j10$, $n_2 = 5 - j4$,求 $n_1 n_2$,用直角坐标形式得:

$$\begin{aligned} n_1 n_2 &= (8 + j10)(5 - j4) = 40 - j32 + j50 + 40 \\ &= 80 + j18 \\ &= 82\,\underline{/12.68^\circ} \end{aligned}$$

若用极坐标形式,则乘积为:

$$\begin{aligned} n_1 n_2 &= (12.81\,\underline{/51.34^\circ})(6.40\,\underline{/-38.66^\circ}) \\ &= 82\,\underline{/12.68^\circ} \end{aligned}$$

$$= 80 + j18$$

两个直角坐标形式的复数相除,第一步是将分子和分母同时乘以分母的共轭复数,这样,将分母化为了实数。然后,用分子除以该实数。例如,已知 $n_1 = 6 + j3$, $n_2 = 3 - j1$,求 n_1/n_2。得:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{6 + j3}{3 - j1} = \frac{(6 + j3)(3 + j1)}{(3 - j1)(3 + j1)}$$
$$= \frac{18 + j6 + j9 - 3}{9 + 1}$$
$$= \frac{15 + j15}{10} = 1.5 + j1.5$$
$$= 2.12 \underline{/45°}$$

若用极坐标形式,n_1/n_2 为:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{6.71 \underline{/26.57°}}{3.16 \underline{/-18.43}} = 2.12 \underline{/45°}$$
$$= 1.5 + j1.5$$

B.4 重要的恒等式

在用复数和复变量运算时,下列恒等式非常有用:

$$\pm j^2 = \mp 1 \tag{B.8}$$
$$(-j)(j) = 1 \tag{B.9}$$
$$j = \frac{1}{-j} \tag{B.10}$$
$$e^{\pm j\pi} = -1 \tag{B.11}$$
$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j \tag{B.12}$$

假设 $n = a + jb = c \underline{/\theta°}$,则:

$$nn^* = a^2 + b^2 = c^2 \tag{B.13}$$
$$n + n^* = 2a \tag{B.14}$$
$$n - n^* = j2b \tag{B.15}$$
$$n/n^* = 1 \underline{/2\theta°} \tag{B.16}$$

B.5 复数的整数次幂

求复数的 k 次幂时,先将其化为极坐标形式,即:

$$n^k = (a + jb)^k$$
$$= (ce^{j\theta})^k = c^k e^{jk\theta}$$
$$= c^k(\cos k\theta + j\sin k\theta)$$

例如:

$$(2e^{j12°})^5 = 2^5 e^{j60°} = 32e^{j60°}$$
$$= 16 + j27.71$$

和

$$(3+\mathrm{j}4)^4=(5\mathrm{e}^{\mathrm{j}53.13^\circ})^4=5^4\mathrm{e}^{\mathrm{j}212.52^\circ}$$
$$=625\mathrm{e}^{\mathrm{j}212.52^\circ}$$
$$=-527-\mathrm{j}336$$

B.6 复数的开方

为求复数的 k 次方根,必须认识到是解方程:

$$x^k-c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=0 \tag{B.17}$$

因方程为 k 阶,因此,有 k 个根。为求 k 次根,首先注意到:

$$c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=c\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+2\pi)}=c\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+4\pi)}=\cdots \tag{B.18}$$

由式(B.17)和式(B.18)得:

$$x_1=(c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})^{1/k}=c^{1/k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta/k} \tag{B.19}$$

$$x_2=[c\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+2\pi)}]^{1/k}=c^{1/k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+2\pi)/k} \tag{B.20}$$

$$x_3=[c\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+4\pi)}]^{1/k}=c^{1/k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+4\pi)/k} \tag{B.21}$$

$$\vdots$$

继续按式(B.19)、式(B.20)和式(B.21)的方式进行,直到出现重根为止。当 π 的倍数等于 $2k$ 时就出现了重根。例如求 $81\mathrm{e}^{\mathrm{j}60^\circ}$ 的四次方根,可得:

$$x_1=81^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}60/4}=3\mathrm{e}^{\mathrm{j}15^\circ}$$
$$x_2=81^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(60+360)/4}=3\mathrm{e}^{\mathrm{j}105^\circ}$$
$$x_3=81^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(60+720)/4}=3\mathrm{e}^{\mathrm{j}195^\circ}$$
$$x_4=81^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(60+1\,080)/4}=3\mathrm{e}^{\mathrm{j}285^\circ}$$
$$x_5=81^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(60+1\,440)/4}=3\mathrm{e}^{\mathrm{j}375^\circ}=3\mathrm{e}^{\mathrm{j}15^\circ}$$

式中 x_5 与 x_1 相等,方程的根开始重复。因此,可知的 $81\mathrm{e}^{\mathrm{j}60^\circ}$ 四次方根为 x_1,x_1,x_3,x_4。值得注意的是,复数的根位于复平面的一个圆上,圆的半径为 $c^{1/k}$。各根均匀分布在圆上。相邻两根之间的角度为 $2\pi/k$ 弧度,或 $360/k$ 度,$81\mathrm{e}^{\mathrm{j}60^\circ}$ 的根画在图 B.4 上。

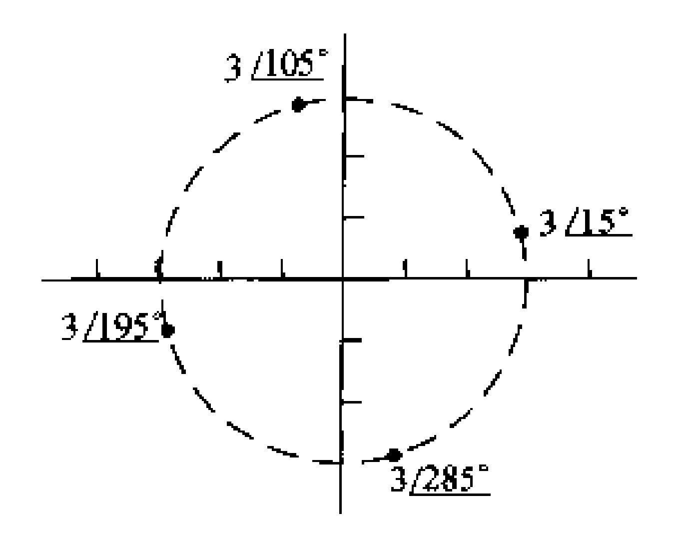


图 B.4 $81\mathrm{e}^{\mathrm{j}60^\circ}$ 的四个根

附录 C 耦合电感和理想变压器的补充内容

C.1 耦合电感的等效电路

有时,将耦合电感化简为无耦合关系的等效电路模型,使电路分析起来非常方便。对图 C.1 的耦合电感,电阻 R_1 和 R_2 分别代表两个线圈的电阻。目的是将图中阴影部分的耦合电感用无耦合关系的一组电感代替。在得出等效电路之前,必须提出一个重要的条件:即 b 和 d 间的电压为零,也就是说,如果 b 和 d 间短路后不会影响原电路的电压和电流。在此条件下得出的等效电路才可用于耦合电感的模型。因所得等效电路都有四个端子,其中两个端子之间是短路的,所以,这个限制条件才起作用。因此,对原电路要有同样的要求。

先写出端口电压 v_1 和 v_2 与端口电流之间关系的方程,再建立等效电路。根据给定的参考方向和同名端位置,得:

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{C.1}$$

和

$$v_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{C.2}$$

C.1.1 T型等效电路

为得出这两个耦合电感的等效电路,要找到一种电感的组合,这个组合可以用与式(C.1)和式(C.2)等效的方程组来描述。关键要把式(C.1)和式(C.2)看做是以 I_1 和 I_2 为网孔电流的网孔电流方程,这样,一个网孔的自电感为 L_1 H,另一个网孔的自电感为 L_2 H。另外,两个网孔的互电感为 M H,图 C.2 中电感的连接方式满足这个要求。

可以证明,该电路的方程可以化为式(C.1)和式(C.2)。注意:电感之间无耦合,且 b 和 d 的电压为零。

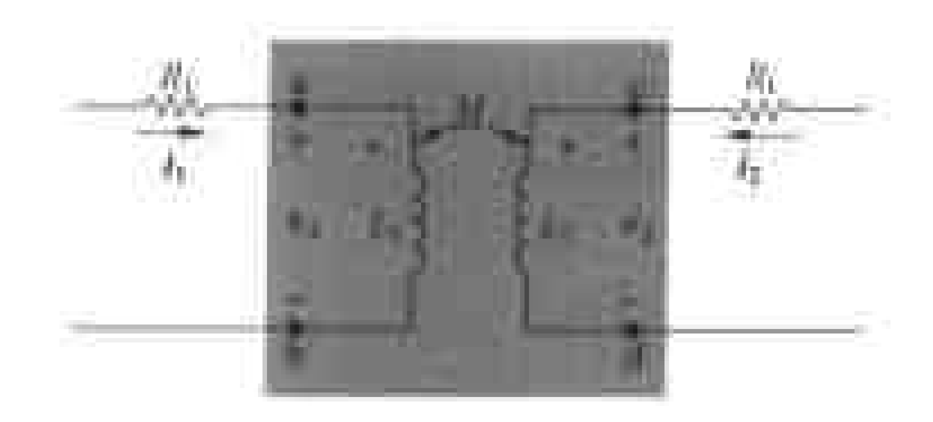


图 C.1 求耦合电感等效电路所用的电路

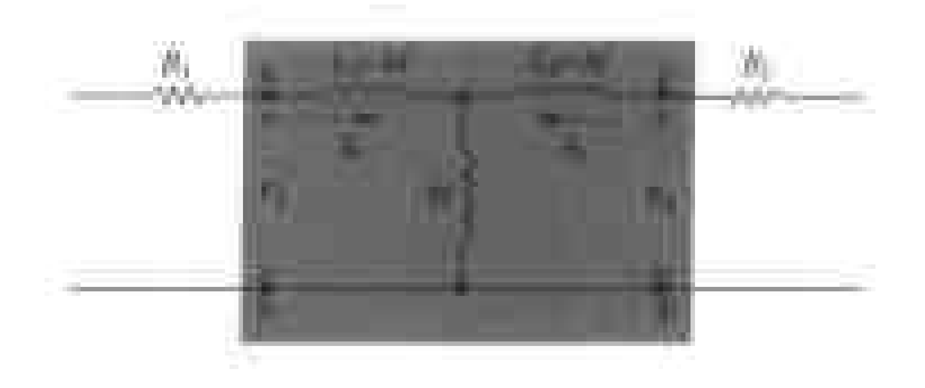


图 C.2 图 C.1 中耦合电感的 T 型等效电路

C.1.2 π型等效电路

对图C.1中的耦合电感,也可以等效为π型等效电路。这种结果是根据对式(C.1)和式(C.2)求解得到的。先解方程求出 di_1/dt 和 di_2/dt,然后将其结果看做一对节点方程。用克莱姆法则解联立方程组,得到 di_1/dt 和 di_2/dt 表达式:

$$\frac{di_1}{dt}=\frac{\begin{vmatrix} v_1 & M \\ v_2 & L_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix}}=\frac{L_2}{L_1L_2-M^2}v_1-\frac{M}{L_1L_2-M^2}v_2 \qquad (C.3)$$

$$\frac{di_2}{dt}=\frac{\begin{vmatrix} L_1 & v_1 \\ M & v_2 \end{vmatrix}}{L_1L_2-M^2}=\frac{-M}{L_1L_2-M^2}v_1+\frac{L_1}{L_1L_2-M^2}v_2 \qquad (C.4)$$

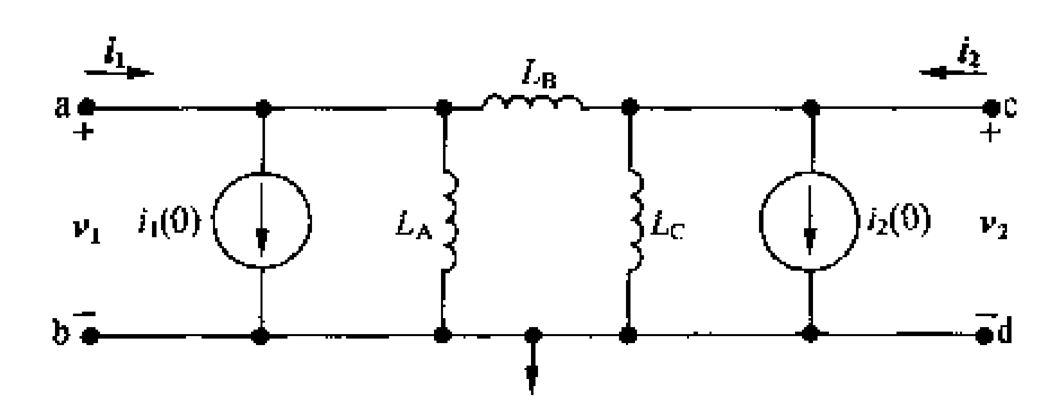
将两方程两边同时乘以 dt,进行积分,求 i_1 和 i_2:

$$i_1 = i_1(0)+\frac{L_2}{L_1L_2-M^2}\int_0^t v_1 d\tau-\frac{M}{L_1L_2-M^2}\int_0^t v_2 d\tau \qquad (C.5)$$

和

$$i_2 = i_2(0)-\frac{M}{L_1L_2-M^2}\int_0^t v_1 d\tau+\frac{L_1}{L_1L_2-M^2}\int_0^t v_2 d\tau \qquad (C.6)$$

若将式(C.5)和式(C.6)看做是关于节点电压 v_1 和 v_2 的方程,则该方程描述的电路形式如图C.3所示。



图C.3 用于求耦合电感的等效电路模型

接下来的工作就是求出π型等效电路中 L_A, L_B 和 L_C 与 L_1, L_2 和 M 之间的关系。写出图C.3所示电路关于 i_1 和 i_2 的方程,然后与式(C.5)和式(C.6)进行比较。

即:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_1(0)+\frac{1}{L_A}\int_0^t v_1 d\tau+\frac{1}{L_B}\int_0^t (v_1-v_2)d\tau \\ &= i_1(0)+\left(\frac{1}{L_A}+\frac{1}{L_B}\right)\int_0^t v_1 d\tau-\frac{1}{L_B}\int_0^t v_2 d\tau \end{aligned} \qquad (C.7)$$

和

$$\begin{aligned} i_2 &= i_2(0)+\frac{1}{L_C}\int_0^t v_2 d\tau+\frac{1}{L_B}\int_0^t (v_2-v_1)d\tau \\ &= i_2(0)-\frac{1}{L_B}\int_0^t v_1 d\tau+\left(\frac{1}{L_B}+\frac{1}{L_C}\right)\int_0^t v_2 d\tau \end{aligned} \qquad (C.8)$$

得：

$$\frac{1}{L_B}=\frac{-M}{L_1L_2-M^2} \tag{C.9}$$

$$\frac{1}{L_A}=\frac{L_2-M}{L_1L_2-M^2} \tag{C.10}$$

$$\frac{1}{L_C}=\frac{L_1-M}{L_1L_2-M^2} \tag{C.11}$$

将所得的电感代入图 C.3 中，所得的 π 型等效电路如图 C.4 所示。

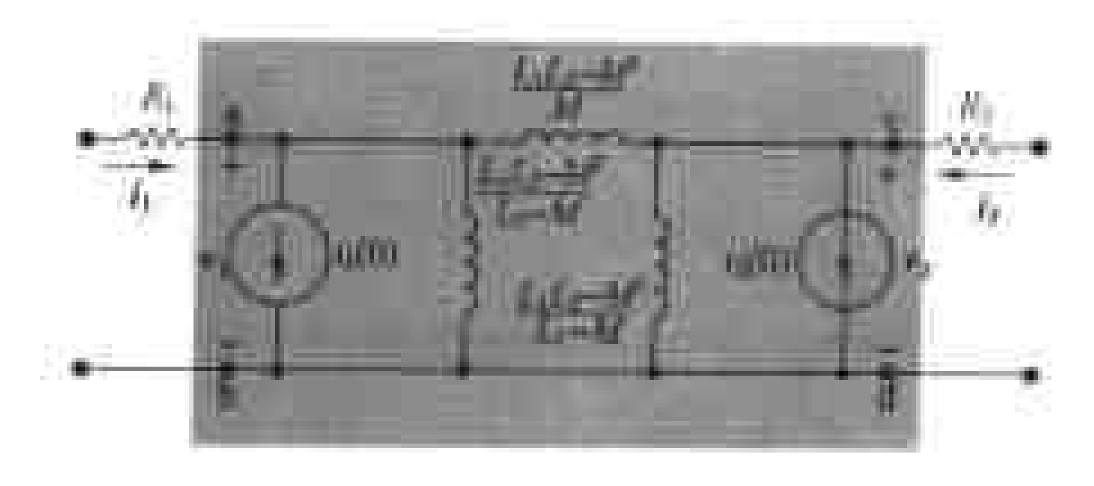


图 C.4　图 C.1 中耦合电感的 π 型等效电路

应当注意的是，电流 i_1 和 i_2 的初始值在 π 型等效电路中是明确的，而在 T 型等效电路中是不明确的。下面集中讨论含耦合电感的电路在正弦稳态时的特性，因此，可以假设两电流的初始值为零。这种假设可以省略 π 型等效电路中的电流源，并将图 C.4 化简为 C.5 所示的电路形式。

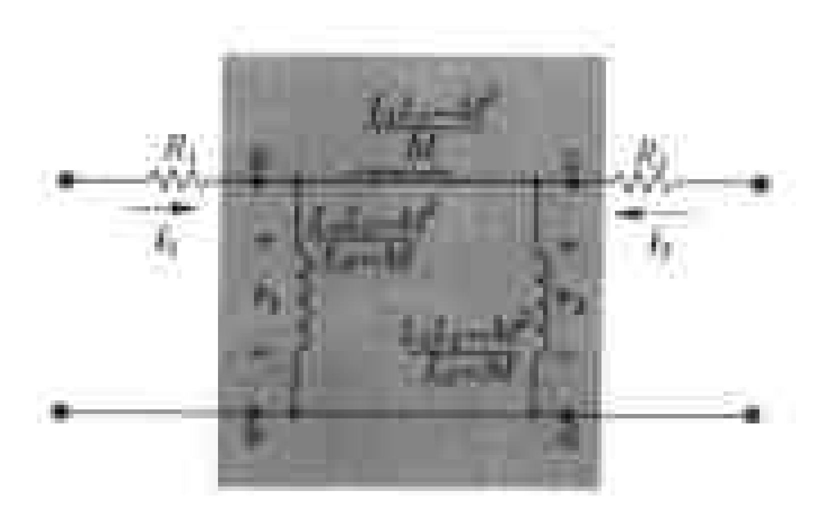


图 C.5　用于正弦稳态分析的 π 型等效电路

在 T 型和 π 型等效电路中，互感 M 有自己的代数符号。如果耦合电感的磁场极性与图 C.1 中的相反，则 M 的符号也相反。磁场极性相反，只需要改变一个同名端的位置，不必改变端口电流和电压的参考方向。

例 C.1 说明了 T 型等效电路的应用。

例 C.1　(a) 用 T 型等效电路求图 C.6 中的电流相量 I_1 和 I_2，电源频率为 400 rad/s。

(b) 将第二个线图上的黑点移到下端，重复(a)题。

解：

依据图 C.6 所示电路中耦合电感同名端的位置，在其 T 型等效电路中，$M=3$ H，因此，在等效电路中三个电感值为：

$$L_1-M=9-3=6\ \text{H}$$

$$L_2 - M = 4 - 3 = 1\ \text{H}$$

$$M = 3\ \text{H}$$

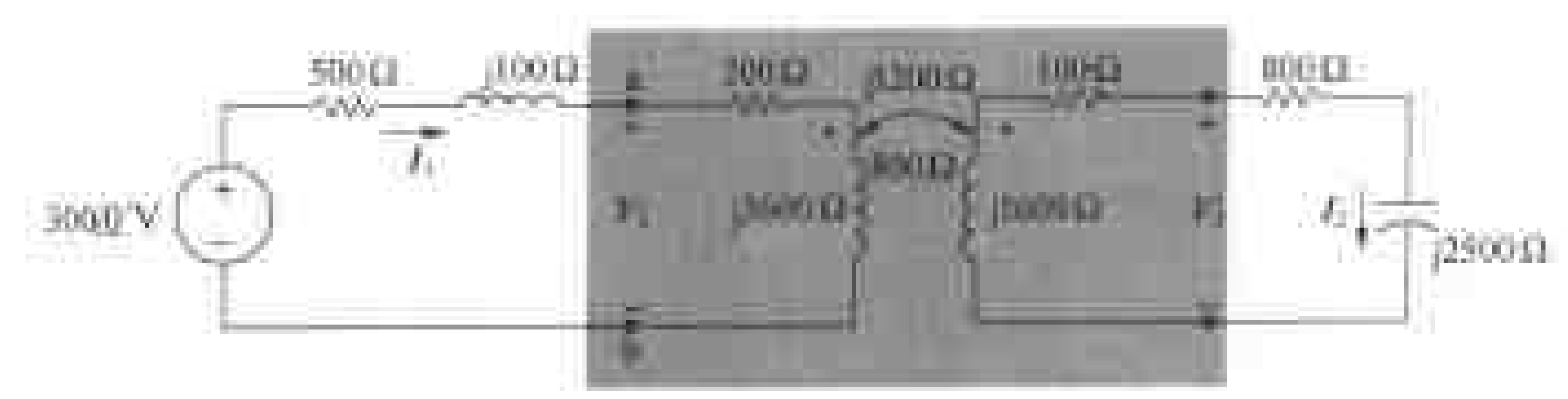


图 C.6 例 C.1 题用频域等效电路

图 C.7 是电路的 T 型等效电路，图 C.8 是在 400 rad/s 频率时的频域模型，图 C.9 是原电路的频域模型。

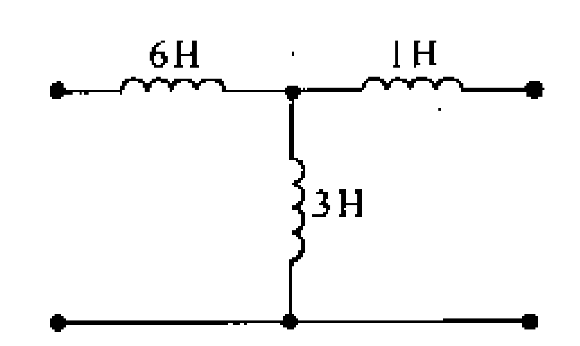


图 C.7 例 C.1 中耦合电感的 T 型等效电路

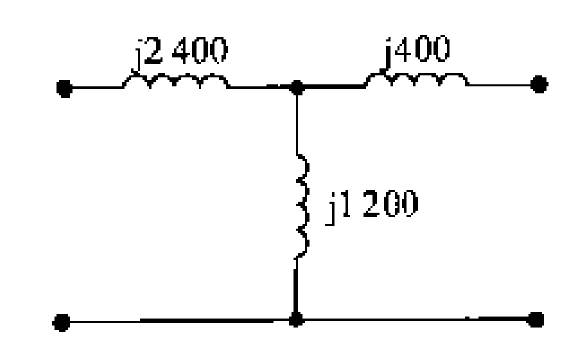


图 C.8 等效电路在 400 rad/s 频率时的频域模型

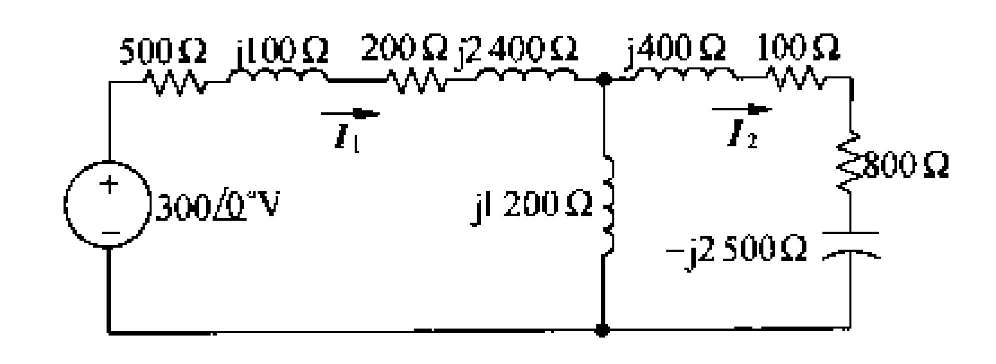


图 C.9 图 C.6 电路在耦合电感被 T 型等效后的频域模型

为求得电流相量 I_1 和 I_2，先求出 1200 Ω 感抗两端的电压。若取下节点为参考节点，则单节点方程为：

$$\frac{V-300}{700+\text{j}2500}+\frac{V}{\text{j}1200}+\frac{V}{900-\text{j}2100}=0$$

求得 V 为：

$$V = 136 - \text{j}8 = 136.24\,\underline{/-3.37^\circ}\ \text{V(rms)}$$

因此：

$$I_1 = \frac{300-(136-\text{j}8)}{700+\text{j}2\,500} = 63.25\,\underline{/-71.57^\circ}\ \text{mA(rms)}$$

和

$$I_2 = \frac{136-\text{j}8}{900-\text{j}2\,100} = 59.63\,\underline{/63.43^\circ}\ \text{mA(rms)}$$

(b) 当第二个线圈的极点移到下端时，在 T 型等效电路中 $M = -3$ H，在新的 T 型等效电路下，M 符号的改变对 I_1 没有影响，I_2 反相，于是可以得到：

$$I_1 = 63.25\,\underline{/-71.57^\circ}\ \text{mA(rms)}$$

和

$$I_2 = 59.63\angle{-116.57^\circ}\ \text{mA(rms)}$$

现在用新的 T 型等效电路计算。因为 $M=-3$,所以三个电感为:

$$L_1 - M = 9 - (-3) = 12\ \text{H}$$

$$L_2 - M = 4 - (-3) = 7\ \text{H}$$

$$M = -3\ \text{H}$$

在 400 rad/s 频率时,频域模型电路中有两个电感和一个电容。如图 C.10 所示。

原电路的最后频域电路模型如图 C.11 所示。

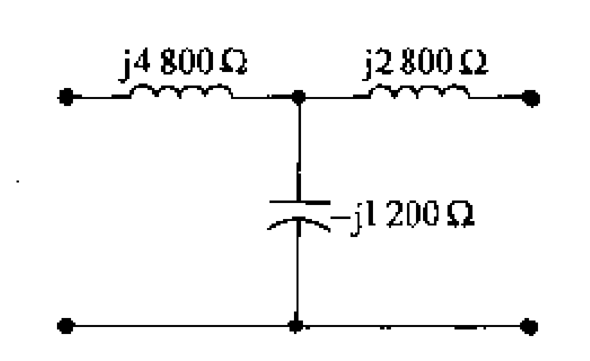


图 C.10　当 $M=-3$ H,$\omega=400$ rad/s 时的频域等效电路

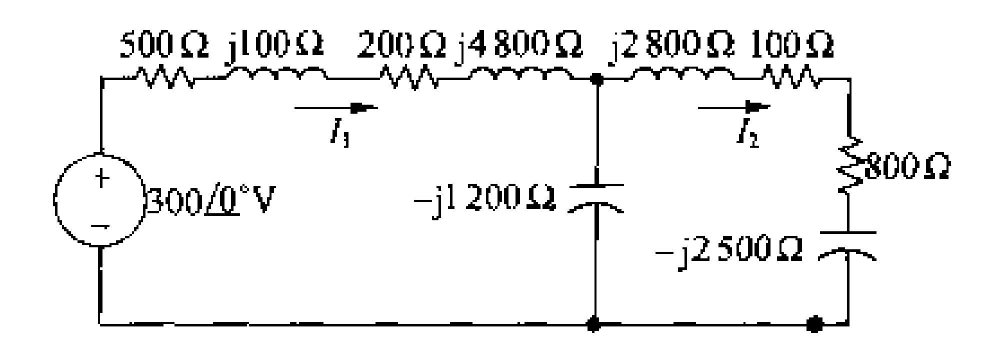


图 C.11　例 C.1(b)的频域等效电路

同以往一样,先求中间支路上的电压,该支路的容抗为 $-\text{j}1200\ \Omega$,若选下边为参考节点,则节点电压方程为:

$$\frac{V-300}{700+\text{j}4900} + \frac{V}{-\text{j}1200} + \frac{V}{900+\text{j}300} = 0$$

解得 V 为:

$$V = -8 - \text{j}56 = 56.57\angle{-98.13^\circ}\ \text{V(rms)}$$

因此:

$$I_1 = \frac{300-(-8-\text{j}56)}{700+\text{j}4\,900} = 63.25\angle{-71.57^\circ}\ \text{mA(rms)}$$

和

$$I_2 = \frac{-8-\text{j}56}{900+\text{j}300} = 59.63\angle{-116.57^\circ}\ \text{mA(rms)}$$

C.2　在等效电路中采用理想变压器

在耦合电感的 T 型等效电路中,电感可能是负值,例如,若 $L_1 = 3$ mH,$L_2 = 12$ mH,$M = 5$ mH,那么在 T 型等效电路中需要一个 −2 mH 的电感,在 π 型等效电路中需要一个 −5.5 mH 的电感。在等效电路的计算中,负电感值是可以参加计算的,但若是想用电路元件建立一个等效电路,负电感就会带来许多麻烦。因为一旦正弦电源的频率发生变化,所用的电容值就会改变以产生相应的电抗。例如在 50 krad/s 频率时,−2 mH 电感的阻抗为 $-\text{j}100\ \Omega$。这个阻抗可用一个 0.2 μf 的电容来模拟。若频率变为 25 krad/s,−2 mH 电感的阻抗为 $-\text{j}50\ \Omega$。而此时所需电容为 0.8 μF。显然,在频率经常变化的情况下,用电容来模拟负电感是不现实的。

可以将理想变压器引入等效电路,回避对负电感问题的处理。这种方法不能完全解决建模问题,因理想变压器只能是近似的,但在有些情况下,在耦合电感的 T 型和 π 型等效电路中采用理想变压器,这种近似可以保证精度要求。理想变压器可以以两种不同的方式用到 T 型或 π 型等效电路中。图 C.12 表示出了在每种等效电路中的两种用法。

验证图 C.12 中任一个等效电路,只需证明:对任一电路,v_1,v_2 关于 di_1/dt,di_2/dt 的方程与式(C.1),(C.2)一样。这里只证明图 C.12(a)中电路,其他几个电路的证明留给读者。为讨论方便,将电路重画在图 C.13 中,并加上变量 i_0 和 v_0。

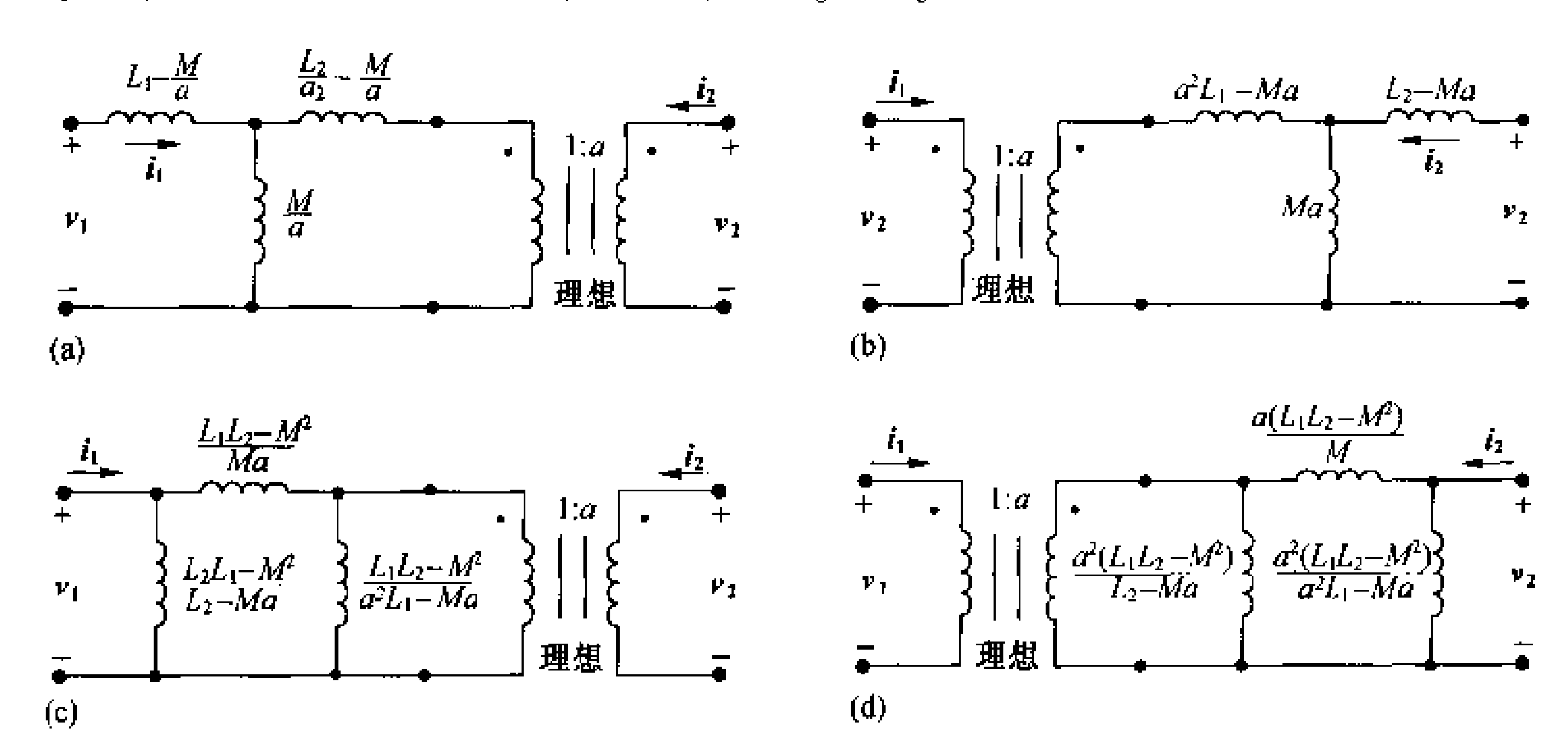


图 C.12 在耦合电感的 T,π 型等效电路中理想变压器的四种用法

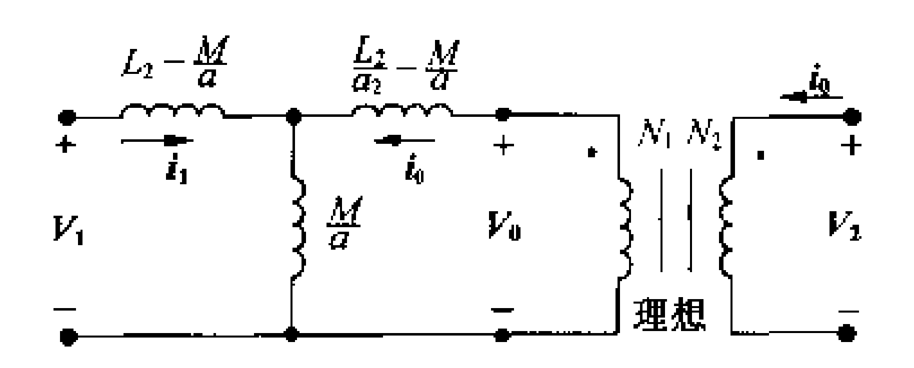


图 C.13 图 C.12(a)电路,定义了变量 i_0 和 v_0

由该电路得:

$$v_1 = \left(L_1 - \frac{M}{a}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{a}\frac{d}{dt}(i_1 + i_0) \tag{C.12}$$

和

$$v_0 = \left(\frac{L_2}{a^2} - \frac{M}{a}\right)\frac{di_0}{dt} + \frac{M}{a}\frac{d}{dt}(i_0 + i_1) \tag{C.13}$$

理想变压器施加到 v_0 和 i_0 上的约束为:

$$v_0 = \frac{v_2}{a} \tag{C.14}$$

$$i_0 = ai_2 \tag{C.15}$$

将式(C.14)和式(C.15)代入式(C.12)和式(C.13)得:

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{a}\frac{d}{dt}(ai_2) \tag{C.16}$$

和

$$\frac{v_2}{a}=\frac{L_2}{a^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ai_2)+\frac{M}{a}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{C.17}$$

由式(C.16)和式(C.17)得：

$$v_1=L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{C.18}$$

和

$$v_2=M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{C.19}$$

式(C.18)、式(C.19)与式(C.1)、式(C.2)相同，因此，就端口特性而言，图 C.13 所示电路与图 C.1 中耦合电感是一致的。

在上述证明过程中，没对变比 a 加任何限制，因此，可能有无限多个等效电路。而且能找到一个变比 a 使所有的电感为正。三个特别有趣的 a 值为：

$$a=\frac{M}{L_1} \tag{C.20}$$

$$a=\frac{L_2}{M} \tag{C.21}$$

和

$$a=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \tag{C.22}$$

式(C.20)给出的 a 值使 T 型等效电路中的电感 L_1-M/a，a^2L_1-aM 消失，使 π 型等效电路中的电感 $(L_1L_2-M^2)/(a^2L_1-aM)$，$a^2(L_1L_2-M^2)/(a^2L_1-aM)$ 消失。式(C.21)给出的 a 值使 T 型等效电路中的电感 $(L_2/a^2)-(M/a)$，L_2-aM 消失，使 π 型等效电路中的电感 $(L_1L_2-M^2)/(L_2-aM)$，$a^2(L_1L_2-M^2)/(L_2-aM)$ 消失。

还应注意到，当 $a=M/L_1$ 时，图 C.12(a)和(c)中电路一样，当 $a=L_2/M$ 时，图 C.12 中(b)和(d)一样。图 C.14 和图 C.15 总结了这些结论。

在求电感的表达式时，用到了关系式 $M=k\sqrt{L_1L_2}$。这个表达式使得由式(C.20)和式(C.21)给出的 a 值不仅能减少等效电路中所需电感的数量，而且能保证所有电感值为正。研究所选 a 值产生的结果留给读者。

式(C.20)～(C.22)给出的 a 值可通过实验确定。M/L_1 可在指定的具有 N_1 匝线圈上加一正弦电压源得到，电源频率非常高，使 $\omega L_1>>R_1$，N_2 开路。图 C.16 表示了这种电路。

当 N_2 匝线圈开路时：

$$v_2=\mathrm{j}\omega Mi_1 \tag{C.23}$$

因 $\mathrm{j}\omega L_1>>R_1$，电流 i_1 为：

$$i_1=\frac{v_1}{\mathrm{j}\omega L_1} \tag{C.24}$$

将式(C.24)、式(C.23)代入得：

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)_{i_2=0}=\frac{M}{L_1} \tag{C.25}$$

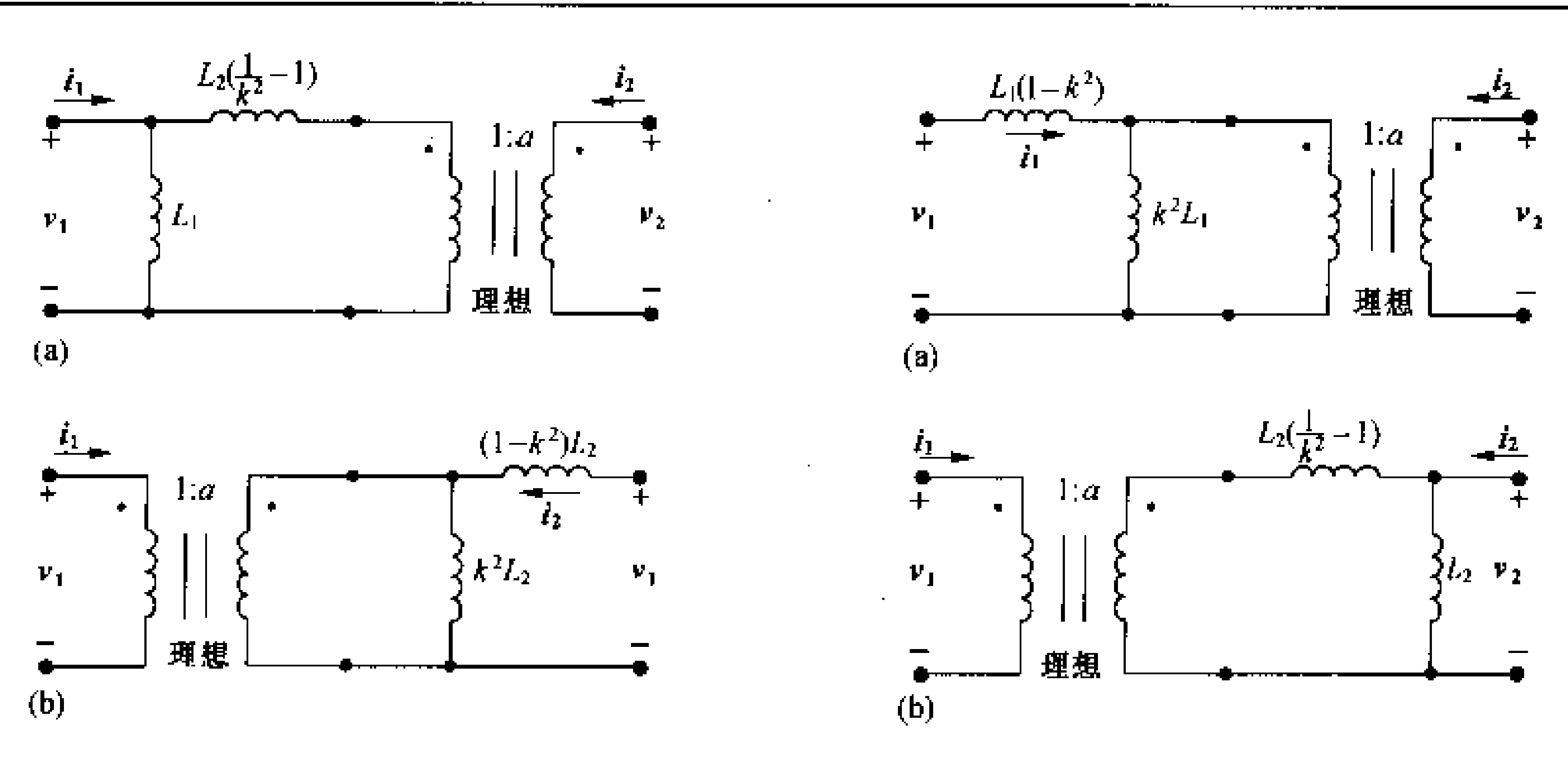


图 C.14　当 $a=M/L_1$ 时的两个等效电路

图 C.15　当 $a=L_2/M$ 时的两个等效电路

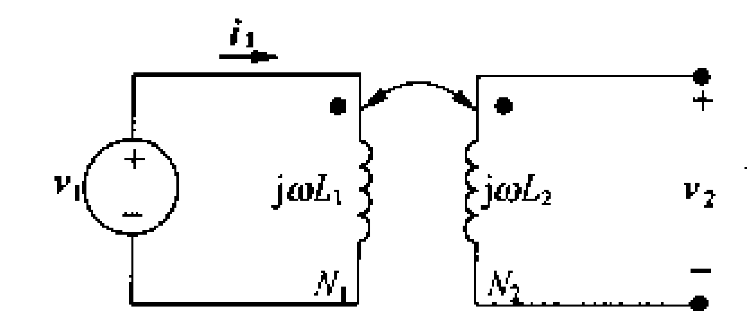


图 C.16　实验法则定 M/L_1

其中 M/L_1 是线圈 2 开路时的端口电压比。

当线圈 1 开路，而线圈 2 加正弦电流源时，可测得 L_2/M。即：

$$\frac{L_2}{M}=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)_{i_1=0} \tag{C.26}$$

最后会发现，式(C.22)所给出的 a 值就是两电压比的几何平均值，即：

$$\sqrt{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)_{i_2=0}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)_{i_1=0}}=\sqrt{\frac{M}{L_1}\frac{L_2}{M}}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \tag{C.27}$$

对空心线圈，电压比不等于匝数比，而缠绕在铁磁质上的线圈电压比和匝数比非常接近。因自感随匝数的平方变化，式(C.27)表明，匝数比等于两个电压比的几何平均值，或表示为：

$$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}=\frac{N_2}{N_1}=\sqrt{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)_{i_2=0}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)_{i_1=0}} \tag{C.28}$$

附录D　分　　贝

在式(14.64)中,将 $H(j\omega)$的幅值定义为分贝。但是,分贝的最初定义涉及到功率比值,追溯这一概念还是很有意义的,因为,分贝始终是受到广泛应用的词。

电话工程师常常关心信号通过级联电路后的功率损失,于是引入了分贝。图 D.1 定义了该概念。

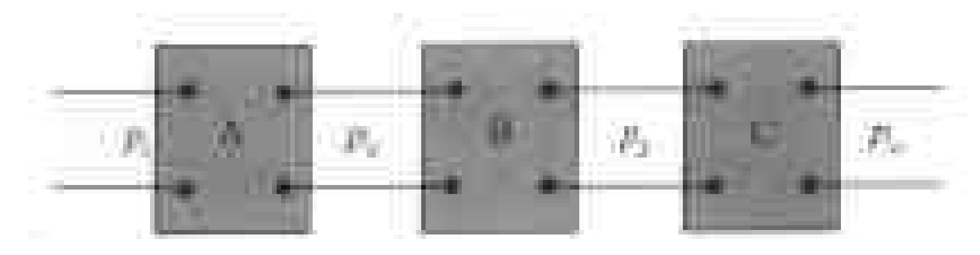


图 D.1　三个级联的电路

这里,P_i 是输入系统的功率,p_1 是从电路 A 输出的功率,p_2 是从电路 B 输出的功率,P_o 是从系统输出的功率。每个电路的功率放大系数是输出和输入功率之比。因此:

$$\sigma_A = \frac{p_1}{p_i} \qquad \sigma_B = \frac{p_2}{p_1} \qquad \sigma_C = \frac{p_o}{p_2}$$

总的功率放大系数为各放大系数之积,即:

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{p_1}{p_i}\frac{p_2}{p_1}\frac{p_o}{p_2} = \sigma_A\sigma_B\sigma_C$$

通过取对数,乘积转化为加法,即:

$$\log_{10}\frac{p_o}{p_i} = \log_{10}\sigma_A + \log_{10}\sigma_B + \log_{10}\sigma_C$$

为了纪念 Alexander Graham Bell,这个功率比的对数叫贝尔(bel)。这样就以贝尔为单位计算总的放大系数,系统各部分功率比相加也以贝尔为单位。在实际中,贝尔是比较大的量,使用不方便。其十分之一更适于计量功率放大系数,即分贝。分贝的值等于贝尔值的 10 倍。所以:

$$\text{分贝数} = 10\ \log_{10}\frac{p_o}{p_i}$$

当以分贝作为功率比的单位时,在有些情况下,电路的输入电阻等于负载电阻,如图 D.2 所示。

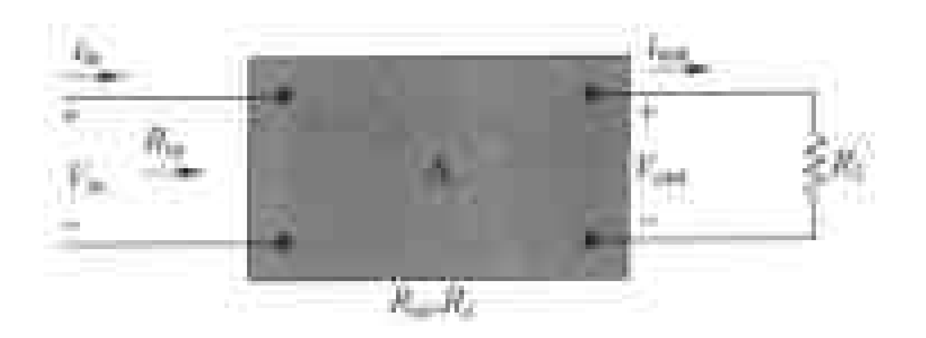


图 D.2　输入电阻与负载电阻相等的电路

当输入电阻等于负载电阻时,可将功率比转化为电压比或电流比:

$$\frac{p_o}{p_i}=\frac{v_{out}^2/R_L}{v_{in}^2/R_{in}}=\left(\frac{v_{out}}{v_{in}}\right)^2$$

或:

$$\frac{p_o}{p_i}=\frac{i_{out}^2R_L}{i_{in}^2R_L}=\left(\frac{i_{out}}{i_{in}}\right)^2$$

这些方程说明,分贝数变为:

$$分贝数=20\log_{10}\frac{v_{out}}{v_{in}}$$

$$=20\log_{10}\frac{i_{out}}{i_{in}} \qquad (D.1)$$

波特图中所用的分贝,即式(15.66)是借用式(D.1)表达式的结果,因这个结果使用于任何转移函数,包括电压比、电流比、电压与电流之比、电流与电压之比。应记住分贝的定义,在许多工程应用中它都是最重要的基础。

在用到以分贝表示的转移函数幅度表达式时,应该有一个转换表。表 D.1 给出了一些常用转换。对应于负分贝值的比率是正比率的倒数。例如,-3 dB 对应的输出输入比为1/1.41,即 0.707。恰好 -3 dB 对应于第 14,15 章所讨论的滤波电路的半功率点频率。

表 D.1 分贝和比例的对照表

分贝	比例	分贝	比例
0	1.00	30	31.62
3	1.41	40	100.00
6	2.00	60	10^3
10	3.16	80	10^4
15	5.62	100	10^5
20	10.00	120	10^6

当分贝表示已知功率和参考功率之比时,它也可作为功率的单位。一般情况下参考功率为 1 mW。功率单位写为 dBm,表示"相对于 1 mW 的分贝值"。例如,20 mW 的功率对应于 ±13 dBm。

直流电压表一般都有 dBm 读数,它不仅假定 1 mW 的参考功率,还假定了一个 600 Ω 的参考电阻(常用在电话系统中)。因在 600 Ω 时,1 mW 的功率对应电压为 0.7746 V(rms),该电压在电压表上的读数为 0 dBm,对模拟仪表,一般每个量程为 10 dB。尽管标出的比例有 0.1,0.3,1,3,10 等,但实际上,3.16 V 在 3 V 刻度线上边,而 1 V 在 1 V 刻度上。

一些电压表有开关,可以选择参考电阻(50,135,600 或 900 Ω)或选择 dBm 或 dBV(相对于 1 V的分贝值)。

附录 E　三角恒等式简表

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
3. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
5. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
6. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
7. $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$
8. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$
9. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
10. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
11. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
12. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
13. $\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
14. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
15. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

附录F 积分简表

1. $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$

2. $\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$

3. $\int x \sin ax\, dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$

4. $\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$

5. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx)$

6. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx)$

7. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$

8. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{\mathrm{a}}\right)$

9. $\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{\sin(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\sin(a + b)x}{2(a + b)}, a^2 \neq b^2$

10. $\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{\sin(a - b)x}{2(a - b)} + \frac{\sin(a + b)x}{2(a + b)}, a^2 \neq b^2$

11. $\int \sin ax \cos bx\, dx = -\frac{\cos(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\cos(a + b)x}{2(a + b)}, a^2 \neq b^2$

12. $\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$

13. $\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$

14. $\int_0^\infty \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ \frac{-\pi}{2}, & a < 0 \end{cases}$

15. $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0 \\ \frac{-\pi}{2}, & a < 0 \end{cases}$

16. $\int x^2 \sin ax\, dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax - \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\cos ax$

17. $\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\sin ax$

18. $\int e^{ax} \sin^2 bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2}\left[(a \sin bx - 2b \cos bx)\sin bx + \frac{2b^2}{a}\right]$

19. $\int e^{ax} \cos^2 bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2}\left[(a \cos bx + 2b \sin bx) \cos bx + \frac{2b^2}{a}\right]$